L. LICHTENSTEIN.

O pewnym warunku całkowalności dwumianów różniczkowych i o twierdzeniu zasadniczem teoryi funkcyj analitycznych.

(Sur une condition d'intégrabilité des binômes différentiels et sur le théorème fondamental de la théorie des fonctions analytiques).

Niech T_0 będzie pole jednospójne, ograniczone linią o krzywiźnie ciągłej S_0; $p(x, y)$ i $q(x, y)$ niech będą dwie funkcye ciągłe, rzeczywiste lub zespolone zmiennych rzeczywistych x i y. Przypuśćmy na chwilę, że funkcye $p(x, y)$ i $q(x, y)$ mają pochodne ciągłe $\frac{\partial p(x, y)}{\partial y}$ i $\frac{\partial q(x, y)}{\partial x}$. Naówczas, jak wiadomo, równanie

$$\frac{\partial q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial p(x, y)}{\partial y} \tag{1}$$

będzie warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby dwumian

$$p(x, y)\, dx + q(x, y)\, dy \tag{2}$$

był różniczką zupełną.

P. Montel wykazał, że całka

$$\int_c p(x, y)\, dx + q(x, y)\, dy, \tag{3}$$

rozciągnięta na dowolną krzywą zamkniętą o krzywiźnie ciągłej, równa jest zeru, jeżeli wartość bezwględna pochodnych

$$\frac{\partial p(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial q(x, y)}{\partial x} \tag{4}$$

wewnątrz pola T_0 i na jego obwodzie mniejszą jest od pewnej, zresztą dowol-

nej, liczby skończonej i jeżeli pochodne te czynią zadość równaniu (1). Ciągłość pochodnych (4) nie jest zatem warunkiem koniecznym, aby całka (3) była równa zeru [1].

Niech teraz $F(x, y)$ oznacza funkcyę dowolną, h jakąkolwiek wielkość dodatnią. Wprowadźmy następujące znakowanie:

$$\delta_x F(x, y) = F(x+h, y) - F(x, y),$$
$$\delta_y F(x, y) = F(x, y+h) - F(x, y). \tag{5}$$

Niech wreszcie h_0 będzie dowolnie małą, ale skończoną wielkością dodatnią.

Twierdzenie.

Zakładamy, że we wszystkich punktach wewnątrz pola T_0

$$\lim_{h=0} \frac{1}{h} [\delta_x q(x, y) - \delta_y p(x, y)] = 0 \tag{6}$$

i że wartość bezwględna dwumianu

$$\frac{1}{h} [\delta_x q(x, y) - \delta_y p(x, y)], \quad h \leqq h_0 \tag{7}$$

mniejszą jest od pewnej, zresztą dowolnej, wielkości skończonej. Natenczas całka

$$\int_C p(x, y)\, dx + q(x, y)\, dy, \tag{3}$$

rozciągnięta na krzywą dowolną C o krzywiźnie ciągłej wewnątrz pola T_0, równa jest zeru.

Istnienie pochodnych $\frac{\partial p(x, y)}{\partial y}$, $\frac{\partial q(x, y)}{\partial x}$ nie stanowi zatem bynajmniej warunku koniecznego, aby dwumian $p(x, y)\, dx + q(x, y)\, dy$ był różniczką zupełną.

Dowodzenie polega na następującem twierdzeniu Osgooda.

Przypuśćmy, że

$$u_1(x), \quad u_2(x), \quad \ldots, \quad u_n(x), \ldots$$

stanowi szereg nieskończony funkcyj ciągłych. Zakładamy, że dla wszystkich wartości zmiennej x, czyniących zadość nierówności

[1]) Patrz P. Montel, Sur les suites infinies de fonctions, Annales de l'École Normale supérieure, 1907.

$$x_0 \leqq x \leqq x_1,$$

$$|u_n(x)| < M = \text{const.} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

i że szereg nieskończony

$$u_1(x) + [u_2(x) - u_1(x)] + [u_3(x) - u_2(x)] + \ldots \tag{8}$$

jest zbieżny (w przypadku ogólnym naturalnie niejednostajnie zbieżny). Prócz tego wiemy, że suma $u(x)$ szeregu (8) jest pewną funkcyą ciągłą.

Natenczas

$$\lim_{n=\infty} \int_{x_0}^{x_1} u_n(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \lim_{n=\infty} u_n(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} u(x)\, dx. \tag{9}$$ [1]

Twierdzenie Osgooda daje się z łatwością rozciągnąć na funkcye ciągłe wielu zmiennych. Istotnie, niech

$$u_1(x, y) + [u_2(x, y) - u_1(x, y)] + [u_3(x, y) - u_2(x, y)] + \ldots \tag{10}$$

będzie szereg zbieżny funkcyj ciągłych, którego suma $u(x, y)$ stanowi również funkcyę ciągłą. Zakładamy prócz tego, że

$$|u_k(x, y)| < M = \text{const.}, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{11}$$

Przypuśćmy, że τ oznacza pole jednospójne, którego obwód σ jest linią o krzywiźnie ciągłej; przypuśćmy dalej, że proste równoległe do osi spółrzędnych przecinają krzywą σ conajwyżej w dwóch punktach. Zgodnie z twierdzeniem Osgooda

$$\lim_{n=\infty} \int_{Y_1}^{Y_2} u_n(x, y)\, dy = \int_{Y_1}^{Y_2} \lim u_n(x, y)\, dy = \int_{Y_1}^{Y_2} u(x, y)\, dy. \tag{12}$$

Y_1 i Y_2 oznaczają odcięte punktów przecięcia się krzywej σ z prostą $x = x$. Całki

$$\int_{Y_1}^{Y_2} u_n(x, y)\, dy, \quad (n = 1, 2, \ldots) \quad \text{i} \quad \int_{Y_1}^{Y_2} u(x, y)\, dy$$

[1]) Patrz Osgood, On the non-uniform convergence, American Journal, 1897. Twierdzenie Osgooda stanowi przypadek szczególny pewnego bardziej ogólnego twierdzenia H. Lebesgue'a, tyczącego się całkowania szeregów zbieżnych funkcyj wymierzalnych (mésurables).

są funkcyami ciągłemi zmiennej x. Prócz tego

$$(13)\qquad \left|\int_{Y_1}^{Y_2} u_n(x, y)\, dy\right| < |Y_2 - Y_1| \,.\, \mathrm{Max}\, |u_n(x, y)| < |Y_2 - Y_1|\, M.$$

Zastosujmy twierdzenie Osgooda do szeregu zbieżnego funkcyj ciągłych

$$\int_{Y_1}^{Y_2} u_1(x, y)\, dy + \left[\int_{Y_1}^{Y_2} u_2(x, y)\, dy - \int_{Y_1}^{Y_2} u_1(x, y)\, dy\right] + \ldots.$$

Otrzymamy

$$(14)\qquad \lim_{n=\infty} \int_{X_1}^{X_2} dx \int_{Y_1}^{Y_2} u_n(x, y)\, dy = \int_{X_1}^{X_2} dx \left[\lim_{n=\infty} \int_{Y_1}^{Y_2} u_n(x, y)\, dy\right]$$

$$= \int_{X_1}^{X_2} dx \int_{Y_1}^{Y_2} u(x, y)\, dy.$$

X_1 i X_2 oznaczają najmniejszą i największą rzędną punktów krzywej σ. Ze wzoru (14) wynika, że

$$(15)\qquad \lim_{n=\infty} \iint_{\tau} u_n(x, y)\, dx\, dy = \iint_{\tau} u(x, y)\, dx\, dy.$$

Niech teraz S oznacza obwód dowolnego trójkąta T, położonego wewnątrz pola T_0. Ponieważ $p(x, y)$ i $q(x, y)$ są według założenia funkcyami ciągłemi, przeto wystarcza dowieść, że

$$(16)\qquad \int_S p(x, y)\, dx + q(x, y)\, dy = 0.$$

Twierdzenie Osgooda (15) daje

$$(17)\qquad \lim_{h=0} \frac{1}{h} \iint_T [\delta_x q(x, y) - \delta_y p(x, y)]\, dx\, dy$$

$$= \iint_T \lim_{h=0} \frac{1}{h} [\delta_x q(x, y) - \delta_y p(x, y)]\, dx\, dy = 0.\,^{1)}$$

[1]) Zakładamy, że h przyjmuje jakikolwiek odliczalny szereg wartości, zdążających do zera.

Rozważajmy całkę

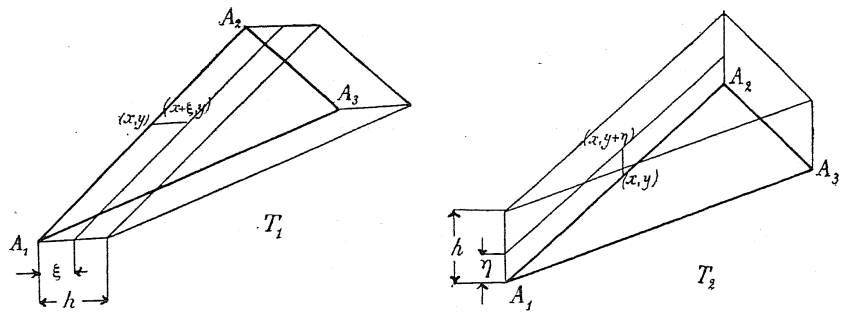
$$(18)\qquad \frac{1}{h} \iint_T [\delta_x q(x, y) - \delta_y p(x, y)]\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{h} \iint_T [q(x+h, y) - q(x, y)]\, dx\, dy$$

$$- \frac{1}{h} \iint_T [p(x, y+h) - p(x, y)]\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{h} \iint_{T_1} q(x, y)\, dx\, dy - \frac{1}{h} \iint_{T_2} p(x, y)\, dx\, dy.$$

Każde z pól T_1 i T_2 składa się z trzech równoległoboków (patrz fig.). Przypuśćmy, że $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$ oznaczają wierzchołki



trójkąta T, zaś (x, y) oznacza spółrzędne bieżące punktu na boku $A_1 A_2$. Całka

$$\frac{1}{h} \iint_{T_1} q(x, y)\, dx\, dy$$

równa jest sumie trzech całek, rozciągniętych na pola trzech równoległoboków, stanowiących razem pole T_1. Przyczynek równoległoboku, przylegającego do boku $A_1 A_2$, jest

$$(19)\qquad -\frac{1}{h}\int_0^h d\xi\int_{y_1}^{y_2} q(x+\xi,\ y)\,dy = -\frac{1}{h}\int_0^h \Pi(\xi)\,d\xi\,,$$

$$\Pi(\xi) = \int_{y_1}^{y_2} q(x+\xi,\ y)\,dy\,,\quad x = x_1 + \frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}(y-y_1)\,.$$

$q(x, y)$ i $\Pi(\xi)$ są funkcyami ciągłemi. Na skutek tego

$$(20)\qquad \lim_{h=0} -\frac{1}{h}\int_0^h d\xi\int_{y_1}^{y_2} q(x+\xi,\ y)\,dy$$

$$= \lim_{h=0} -\frac{1}{h}\int_0^h \Pi(\xi)\,d\xi = -\Pi(0) = -\int_{y_1}^{y_2} q(x, y)\,dy$$

i

$$(21)\qquad \lim_{h=0}\int\int_T \delta_x q(x, y)\,dx\,dy = \int_S q(x, y)\,dy\,.$$

Wyraz

$$\frac{1}{h}\int\int_{T_2} p(x, y)\,dx\,dy$$

stanowi również sumę trzech całek. Przyczynek równoległoboku, przylegającego do boku A_1A_2, jest

$$(22)\qquad \frac{1}{h}\int_0^h d\eta\int_{x_1}^{x_2} p(x, y+\eta)\,dx = \frac{1}{h}\int_0^h \Phi(\eta)\,d\eta\,,$$

$$\Phi(\eta) = \int_{x_1}^{x_2} p(x, y+\eta)\,dx\,,\quad y = y_1 + \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)\,.$$

Otrzymamy zatem

$$(23)\qquad \lim_{h=0}\frac{1}{h}\int_0^h d\eta\int_{x_1}^{x_2} p(x, y+\eta)\,dx = \lim_{h=0}\frac{1}{h}\int_0^h \Phi(\eta)\,d\eta$$

$$= \Phi(0) = \int_{x_1}^{x_2} p(x,\ y)\,dx\,,$$

$$(24)\qquad \lim_{h=0}\int\int_T \delta_y p(x, y)\,dx\,dy = \int_S p(x, y)\,dx\,.$$

Ze wzorów (17), (21) i (24) wnosimy, że

$$(25)\qquad \int_S p(x, y)\,dx + q(x, y)\,dy = 0\,.$$

Niech teraz $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ będzie funkcya ciągła zmiennych x i y. Zgodnie ze znakowaniem, użytem poprzednio, piszemy

$$(26)\qquad \begin{cases} \delta_x f(z) = [u(x+h, y) + iv(x+h, y)] - [u(x, y) + iv(x, y)] \\ \qquad\qquad = f(z+h) - f(z)\,, \\ \delta_y f(z) = [u(x, y+h) + iv(x, y+h)] - [u(x, y) + iv(x, y)] \\ \qquad\qquad = f(z+hi) - f(z) \end{cases}$$

i zakładamy

$$p(x, y) = f(z)\,,\quad q(x, y) = if(z)\,.$$

Natenczas, jako wniosek z twierdzenia, któregośmy przed chwilą dowiedli, otrzymamy twierdzenie następujące:

Zakładamy, że we wszystkich punktach wewnątrz pola T_0

$$(27)\qquad \lim_{h=0}\frac{1}{h}[i\delta_x f(z) - \delta_y f(z)] = 0$$

i że wartość bezwzględna dwumianu

$$(28)\qquad \frac{1}{h}[i\delta_x f(z) - \delta_y f(z)]\,,\quad (h \leqq h_0)$$

mniejszą jest od pewnej, zresztą dowolnej, wielkości skończonej.

Natenczas całka $\int_C f(z)\,dz$, rozciągnięta na dowolną krzywą zamkniętą C o krzywiźnie ciągłej, położoną wewnątrz T_0, równa jest zeru.[1]

[1]) Patrz, L. Lichtenstein, Sur la définition générale des fonctions analytiques Comptes rendus, 2 maja 1910.

Według twierdzenia podstawowego Cauchy'ego $\int_C f(z)\,dz = 0$, jeżeli pochodna $\frac{df(z)}{dz}$ istnieje i stanowi funkcyę ciągłą wewnątrz pola T_0. Oddawna już przypuszczano, że w twierdzeniu tem ciągłość pochodnej $\frac{df(z)}{dz}$ nie jest warunkiem niezależnym; innemi słowy, jeżeli pochodna $\frac{df(z)}{dz}$ istnieje we wszystkich punktach pola T_0, pochodna ta przez to samo już musi być funkcyą ciągłą. Wszelako dopiero w roku 1900 E. Goursat istotnie wykazał, że $\int_C f(z)\,dz = 0$, jeżeli pochodna $\frac{df(z)}{dz}$ istnieje i ma wartość skończoną we wszystkich punktach pola T_0.[1]

W kilka lat później P. Montel dowiódł, że wystarcza już, jeżeli pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} \tag{29}$$

istnieją we wszystkich punktach pola C, jeżeli wartości bezwzględne tych pochodnych są mniejsze od pewnej, zresztą dowolnej, wartości skończonej i jeżeli wreszcie

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{30}$$

aby funkcya $f(z)$ była funkcyą analityczną zmiennej zespolonej z.

Jak wykazaliśmy w pracy niniejszej, teorya funkcyj analitycznych może być oparta na szeregu założeń znacznie prostszych. Istnienie pochodnych (29) stanowi już wniosek z założenia zasadniczego (27).

§ 2.

Podajemy teraz kilka twierdzeń z teoryi całek określonych, niezbędnych dla rozważań późniejszych.

I. Niech $f(x, y)$ oznacza pewną funkcyę rzeczywistą i ograniczoną (bornée) zmiennych x i y w zakresie

[1]) Pochodna $\frac{df(z)}{dz}$ może nie mniej przeto nie stanowić funkcyi ograniczonej (bornée) wewnątrz pola T_0.

$$\begin{aligned} x_1 &\leqq x \leqq x_2, \\ y_1 &\leqq y \leqq y_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Zakładamy, że funkcya $f(x, y)$, rozważana jako funkcya zmiennej x, ma całkę określoną Riemanna, rozważana zaś jako funkcya zmiennej y, ma całkę określoną Lebesgue'a.

Natenczas całka $\int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\,dx$ daje się całkować według Lebesgue'a, zaś całka $\int_{y_1 L}^{y_2} f(x, y)\,dy$[1]) według Riemanna. Wreszcie zachodzi równanie

$$\int_{y_1 L}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1 L}^{y_2} f(x, y)\,dy.^{2)} \tag{2}$$

Niech $\varphi(x)$ oznacza jakąkolwiek funkcyę ograniczoną, dającą się całkować według określenia Riemanna. Wobec tego funkcya ta daje się całkować według Lebesgue'a i

$$\int_L \varphi(x)\,dx = \int \varphi(x)\,dx.^{3)} \tag{3}$$

Niech $\varphi_n(x)$, $(n = 1, 2, \ldots)$ oznacza szereg zbieżny funkcyj, mających całki Lebesgue'a, i niech w zakresie $x_1 \leqq x \leqq x_2$

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x), \tag{4}$$

[1]) Symbol $\int_L$ oznacza całkę Lebesgue'a.

[2]) H. W. Young dowiódł pierwszy, że całka $\int_{y_1 L}^{y_2} f(x, y)\,dy$, rozważana jako funkcya zmiennej x, ma całkę Riemanna. Obacz Monatshefte für Mathematik und Physik, 1910, S. 129—149, On parametric integration. Twierdzenie powyższe podał autor pracy niniejszej w artykule: Über die Integration eines bestimmten Integrals in Bezug auf einen Parameter, Göttinger Nachrichten, 1910.

[3]) Patrz, Lebesgue, Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, 1904, p. 112.

(5) $$|\varphi_n(x) < M = \text{const.}$$

Natenczas funkcya $\varphi(x)$ ma również całkę Lebesgue'a i

(6) $$\lim_{n=\infty} \int_{x_1\,L}^{x_2} \varphi_n(x)\,dx = \int_{x_1\,L}^{x_2} \varphi(x)\,dx.$$ [1]

Założyliśmy, że funkcya $f(x, y)$ ma całkę według określenia Riemanna. Jest więc

(7) $$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\,dx = \lim_{h=\frac{x_2-x_1}{n}=0} [f(\xi_1, y)\,h + f(\xi_2, y)\,h + \ldots + f(\xi_n, y)\,h];$$

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ oznaczają wartości dowolne w zakresach

$$(x_1, x_1+h), \ \ldots, \ (x_1+\overline{n-1}\,h, \ x_2).$$

Jakąkolwiek by była wartość h, wyraz w nawiasach stanowi funkcyę, dającą się całkować według Lebesgue'a. Że zaś prócz tego

(8) $$|f(\xi_1, y)\,h + \ldots + f(\xi_n, y)\,h| \leqq |x_2-x_1| \times \text{granicę górną } |f(x, y)|,$$

przeto funkcya $\int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\,dx$ daje się całkować według Lebesgue'a. Dalej mamy

(9) $$\int_{y_1\,L}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\,dx = \lim_{h=\frac{x_2-x_1}{n}=0} \Big[h \int_{y_1\,L}^{y_2} f(\xi_1, y)\,dy + h \int_{y_1\,L}^{y_2} f(\xi_2, y)\,dy + \ldots$$

$$+ h \int_{y_1\,L}^{y_2} f(\xi_n, y)\,dy\Big] = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1\,L}^{y_2} f(x, y)\,dy.$$

Równanie (9) dowodzi prawdziwości twierdzenia.

Jako wniosek z twierdzenia powyższego mamy następujące twierdzenie II.

Niech $f(x, y)$ oznacza funkcyę ograniczoną zmiennych x i y w zakresie (1). Zakładamy, że funkcya $f(x, y)$, rozważana

[1]) Obacz Lebesgue loc. cit. p. 114.

zarówno jako funkcya zmiennej x, jako też funkcya zmiennej y, ma całkę Riemanna. Natenczas:

1° funkcya $\int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\,dx$ daje się całkować według określenia Riemanna.

2° funkcya $\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,dy$ ma całkę Riemanna.

Wreszcie zachodzi równanie

(10) $$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,dy = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\,dx.$$

W samej rzeczy, według twierdzenia I. całki

$$\int_{x_1\,L}^{x_2} f(x, y)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\,dx \quad \text{i} \quad \int_{y_1\,L}^{y_2} f(x, y)\,dy = \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,dy$$

mogą być całkowane według określenia Riemanna. Dalej:

(11) $$\int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\,dx = \int_{y_1\,L}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\,dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1\,L}^{y_2} f(x, y)\,dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,dy.$$

Przypuśćmy na chwilę, że funkcya ograniczona $f(x, y)$, rozważana jako funkcya dwu zmiennych, ma całkę podwójną Lebesgue'a

(12) $$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1\,L}^{x_2} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Natenczas, jak wykazał Fubini, obie całki

$$\int_{y_1\,L}^{y_2} dy \int_{x_1\,L}^{x_2} f(x, y)\,dx \quad \text{i} \quad \int_{x_1\,L}^{x_2} dx \int_{y_1\,L}^{y_2} f(x, y)\,dy$$

mają wartości określone. Prócz tego zachodzi równanie

$$(13)\qquad \int_{y_1\,L}^{y_2} dy \int_{x_1\,L}^{x_2} f(x, y)\, dx = \int_{x_1\,L}^{x_2} dx \int_{y_1\,L}^{y_2} f(x, y)\, dy\,.\ ^{1)}$$

Przypuśćmy teraz, że funkcya $f(x, y)$ czyni zadość założeniom twierdzenia II. Natenczas z równania (13) i z twierdzenia H. W. Younga (por. notę [2] na str. 9) wynika najprzód, że całki $\int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dx$ i $\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy$ mogą być całkowane według określenia Riemanna, a dalej, że

$$(14)\qquad \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy\,.$$

Rozumowaniem powyższem posługuje się H. W. Young w pracy: „On the Change of Order of Integration in an Improper Repeated Integral", Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 1910, pp. 361—376. Jakeśmy wykazali wyżej, twierdzenie II zachodzi i w tym przypadku, jeżeli funkcya $f(x, y)$, rozważana, jako funkcya dwu zmiennych, nie posiada całki Lebesgue'a.

Twierdzenia powyższe można rozciągnąć na całki funkcyj nieograniczonych. [2]

§ 3.

W rozważaniach rozdziału pierwszego $f(z)$ była funkcyą ciągłą. Niech teraz $f(z)$ oznacza funkcyę ograniczoną wewnątrz każdego pola, zawartego

[1]) Patrz, Fubini, Sugli integrali multipli, Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, 1907, pp. 608 – 614. Należy zaznaczyć, że całka (14) $\int_{x_1\,L}^{x_2} f(x, y)\, dx$ może nie istnieć dla pewnej mnogości wartości y, której miara równa się zeru. Te wartości y należy wykluczyć przy całkowaniu wyrazu (14) według zmiennej y. Podobna uwaga odnosi się do całki podwójnej $\int_{x_1\,L}^{x_2} dx \int_{y_1\,L}^{y_2} f(x, y)\, dy$. Porównaj, de la Vallée Poussin, Réduction des intégrales doubles de Lebesgue. Application à la définition des fonctions analytiques, Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1910, pp. 768—798.

[2]) Patrz wspomniany artykuł autora w Göttinger Nachrichten.

w polu T_0. Zakładamy, że funkcya $f(z)$, rozważana zarówno jako funkcya zmiennej x, jako też funkcya zmiennej y, ma całkę Riemanna. Zakładamy dalej, że we wszystkich punktach (x, y) wewnątrz T_0 zachodzą równania

$$(1)\qquad \lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_{(x,\,y)}^{(x+h,\,y)} f(z)\, dx = f(z)\,, \quad \lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_{(x,\,y)}^{(x,\,y+h)} f(z)\, dy = f(z)\,.$$

Uwaga. Niech $\varphi(x)$ oznacza przez chwilę jakąkolwiek funkcyę ograniczoną, mającą całkę Lebesgue'a. Według znanego twierdzenia Lebesgue'a $\lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_{(x)}^{(x+h)} \varphi(x)\, dx = \varphi(x)$ dla wszystkich x w zakresie $x_1 \leqq x \leqq x_2$, z wyjątkiem pewnej mnogości punktów, której miara równa się zeru.

Niech teraz T oznacza pewien prostokąt, zawarty wewnątrz pola T_0. Niech $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_1)$, $A_3 = (x_1, y_2)$, $A_4 = (x_2, y_2)$ będą spółrzędne wierzchołków T.

Funkcya

$$\frac{1}{h}\,[i\,\delta_x f(z) - \delta_y f(z)]\,,$$

rozpatrywana zarówno jako funkcya zmiennej x, jako też funkcya zmiennej y, może być całkowana według określenia Riemanna.

Twierdzenie Lebesgue'a, podane w § 2, daje

$$(2)\qquad \lim_{h=0} \int_{y_1}^{y_2} [i\,\delta_x (f(z) - \delta_y f(z)]\, dy = \int_{y_1}^{y_2} \lim_{h=0} \frac{1}{h}\,[i\,\delta_x f(z) - \delta_y f(z)]\, dy = 0.$$

Funkcya $\frac{1}{h} \int_{y_1}^{y_2} [i\,\delta_x f(z) - \delta_y f(z)]\, dy$ ma naskutek twierdzenia II § 2 całkę Riemanna, a, co za tem idzie, i całkę Lebesgue'a. Prócz tego jest:

$$(3)\qquad \left| \frac{1}{h} \int_{y_1}^{y_2} [i\,\delta_x f(z) - \delta_y f(z)]\, dy \right| < |\, y_2 - y_1 \,| \times$$

granicę górną $\left| \frac{1}{h}\,(i\,\delta_x f(z) - \delta_y f(z)) \right|$ = wielkości skończonej.

Zatem

$$\lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} [i\delta_x f(z) - \delta_y f(z)]\, dy \tag{4}$$

$$= \lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} [i\delta_x f(z) - \delta_y f(z)]\, dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_{y_1}^{y_2} [i\delta_x f(z) - \delta_y f(z)]\, dy \right] = 0.$$

Rozważmy wzór

$$\frac{1}{h} \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} i\delta_x f(z)\, dy = \frac{1}{h} \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} i\delta_x f(z)\, dx \tag{5}$$

$$= \frac{i}{h} \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_2}^{x_2+h} f(z)\, dx - \frac{i}{h} \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_1+h} f(z)\, dx.$$

Niech będzie

$$|f(z)| < M. \tag{6}$$

Natenczas

$$\frac{1}{h} \int_{x_2}^{x_2+h} f(z)\, dx < M. \tag{7}$$

Według twierdzenia Lebesgue'a, którem posługiwaliśmy się już kilkakrotnie, mamy

$$\lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_2}^{x_2+h} f(z)\, dx = \int_{y_1}^{y_2} dy \left[\lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_{x_2}^{x_2+h} f(z)\, dx \right] = \int_{(x_2,\, y_1)}^{(x_2,\, y_2)} f(z)\, dy \tag{8}$$

i

$$\lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_1+h} f(z)\, dx = \int_{y_1}^{y_2} dy \left[\lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_{x_1}^{x_1+h} f(z)\, dx \right] = \int_{(x_1,\, y_1)}^{(x_1,\, y_2)} f(z)\, dy, \tag{9}$$

zatem

$$\lim_{h=0} \frac{i}{h} \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} \delta_x f(z)\, dy = i \int_{(x_2,\, y_1)}^{(x_2,\, y_2)} f(z)\, dy - i \int_{(x_1,\, y_1)}^{(x_1,\, y_2)} f(z)\, dy. \tag{10}$$

Podobnież jest

$$-\lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} \delta_y f(z)\, dy = \int_{(x_1,\, y_1)}^{(x_2,\, y_1)} f(z)\, dx - \int_{(x_1,\, y_2)}^{(x_2,\, y_2)} f(z)\, dx, \tag{11}$$

przeto ze względu na równanie (4)

$$\int_{A_1A_2 + A_2A_4} f(z)\, dz = \int_{A_1A_3 + A_3A_4} f(z)\, dz. \tag{12}$$

Zamiast (x_2, y_2) napiszmy teraz poprostu (x, y) i rozważajmy całkę (12) jako funkcyę zmiennych x i y. Funkcyę tę oznaczamy przez $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$.

Jak łatwo wykazać, jest

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x} = \lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_{(x,\, y)}^{(x+h,\, y)} f(z)\, dx = f(z),$$

$$\frac{\partial F(z)}{\partial y} = \lim_{h=0} \frac{i}{h} \int_{(x,\, y)}^{(x,\, y+h)} f(z)\, dy = if(z). \tag{13}$$

We wszystkich punktach wewnątrz pola T_0 jest

$$\lim_{h=0} \frac{1}{h} [i\delta_x F(z) - \delta_y F(z)] = 0. \tag{14}$$

Że zaś prócz tego

$$\frac{1}{h} |i\delta_x F(z) - \delta_y F(z)| < 2M, \tag{15}$$

więc na skutek twierdzenia, dowiedzionego w rozdziale pierwszym, $F(z)$ jest funkcyą analityczną ciągłą zmiennej z. Pochodna

$$\frac{dF(z)}{dz} = \frac{\partial F(z)}{\partial x} = f(z) \tag{16}$$

jest oczywiście również funkcyą analityczną ciągłą zmiennej zespolonej.

Rezultat dociekań powyższych możemy teraz przedstawić w formie następującego twierdzenia:

Niech $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ oznacza funkcyę ograniczoną zmiennych x i y, mającą całkę Riemanna wewnątrz pola jednospójnego T_0, zarówno jako funkcya zmiennej x, ja-

ko też funkcya zmiennej y. Niech we wszystkich punktach T_0 zachodzą równania

$$f(z) = \lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_{(x,\, y)}^{(x+h,\, y)} f(z)\, dx = \lim \frac{1}{h} \int_{(x,\, y)}^{(x,\, y+h)} f(z)\, dy,$$

$$\lim_{h=0} \frac{1}{h} [i\delta_x f(z) - \delta_y f(z)] = 0, \qquad h > 0$$

i niech wreszcie wartość bezwzględna funkcyi

$$\frac{1}{h} [i\delta_x f(z) - \delta_y f(z)]$$

dla wszystkich (x, y) wewnątrz pola T_0 i dla wszystkich dodatnich h będzie mniejsza od pewnej, zresztą dowolnej, wielkości stałej. Natenczas $f(z)$ jest wewnątrz pola T_0 funkcyą ciągłą analityczną zmiennej zespolonej z.

W podobny sposób można dowieść następującego twierdzenia:

Niech $p(x, y)$ i $q(x, y)$ będą funkcye ograniczone zmiennych x i y wewnątrz pola T_0. Zakładamy, że $p(x, y)$ i $q(x, y)$, zarówno jako funkcye zmiennej x, jako też funkcye zmiennej y, mogą być całkowane według Riemanna i czynią zadość równaniom

$$(17) \qquad \begin{aligned} &\lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_{(x,\, y)}^{(x+h,\, y)} p(x, y)\, dx = p(x, y), \\ &\lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_{(x,\, y)}^{(x,\, y+h)} q(x, y)\, dy = q(x, y). \end{aligned}$$

Przypuśćmy dalej, że we wszystkich punktach wewnątrz pola T_0

$$(18) \qquad \lim_{h=0} \frac{1}{h} [\delta_x q(x, y) - \delta_y p(x, y)] = 0, \qquad h > 0.$$

Niech wreszcie wartość bezwzględna funkcyi

$$(19) \qquad \frac{1}{h} [\delta_x q(x, y) - \delta_y p(x, y)]$$

dla wszystkich (x, y) wewnątrz pola T_0 i dla wszystkich do-

datnich h będzie mniejsza od pewnej zresztą dowolnej wartości stałej. Natenczas $p(x, y)$ i $q(x, y)$ są pochodnemi cząstkowemi pewnej funkcyi ciągłej $\Phi(x, y)$

$$(20) \qquad p(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad q(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Niech C oznacza jakąkolwiek linię o krzywiźnie ciągłej wewnątrz T_0. Funkcye p i q niekoniecznie są ciągłe. Wskutek tego dwumian różniczkowy

$$p\,dx + q\,dy = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\, dy$$

niezawsze może być całkowany wzdłuż krzywej C. Wzór

$$\int_C p\,dx + q\,dy = \int_C \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\, dy = \Phi(x, y) + \text{wielkości stałej}$$

może w danym przypadku nie mieć żadnego określonego znaczenia.