Beispiele. Die Beziehung $>$ in der Arithmetik ist asymmetrisch. Die Umkehrung der Subsumption, $>$, in der Algebra der Logik ist nichtsymmetrisch. Die Gleichung $(b+x)+y=b$ ist in der Algebra der Logik zwar stets möglich, denn sie ist aequivalent mit den Gleichung $b'xy+b'xy'+b'x'y=0$ deren Resultante stets gleich Null ist, aber die Lösung giebt $x=bu$, $y=bv$, wo u und v beliebige Dinge von K^0 sind, dh. $x<b$, $y<b$ also auch $b+x=b$, $b+y=b$. Es ist also in diesem Falle stets $a=b$ für symmetrische aLb.

Was die Reflexivität [1] der adjungierten Beziehungen betrift, so lassen sich folgende Sätze beweisen.

Satz 19. Die der Operation $\circ$ adjungierte Beziehung L ist dann und nur dann reflexiv, wenn jedem a wenigstens ein von m verschiedener Gegenstand b entspricht, so dass

$$a = a \circ b$$

ist.

Der Beweis folgt direkt aus den Grundbegriffen.

Satz 19a. Die der Operation $\circ$ adjungierte Beziehung P ist dann und nur dann reflexiv, wenn jedem a wenigstens ein von m verschiedener Gegenstand b entspricht, so dass

$$a = b \circ a$$

ist.

Beispiel. In der Algebra der Logik existiert stets ein solches $b=au$ (u beliebig). Die Umkehrung der Subsumption (und die Subsumption) ist reflexiv.

Die Bedingung $a=a\circ b$ ist erfüllt, wenn in B für die Operation $\circ$ das Tautologiegesetz $a=a\circ a$ gilt. Wir haben also den Satz:

Satz 20. Ist für beliebiges a

$$a \circ a = a,$$

so sind die der Operation $\circ$ adjungierten Beziehungen L und P reflexiv.

Noch eine allgemeine Bemerkung: Die angeführten Sätze zeigen die merkwürdige Symmetrie der Dualität. Jedem Satze entspricht ein anderer, der aus dem ersten in der Weise gewonnen werden kann, dass man L mit P, $a\circ b$ mit $b\circ a$ und umgekehrt vertauscht, alles andere aber ungeändert lässt. Der Grund liegt selbst verständlich in der Dualität der Fundamentaldefinitionen 1, 1a.

Krakau, Mai, 1910.

[1]) Die Beziehung R ist reflexiv, wenn für beliebiges a, aRa ist.

A. ROSENBLATT.

Reguła Lagrange'a w zagadnieniu izoperymetrycznem dla całek pojedyńczych.

1. Uważajmy $m+1$ funkcyj rzeczywistych n zmiennych rzeczywistych $x_1,\ldots,x_n$ $(n \geqslant m+1)$:

$$f(x_1,\ldots,x_n), \quad \varphi_i(x_1,\ldots,x_n), \qquad (i=1,\ldots m) \tag{1}$$

zakładając, że dla układu $x_1=\ldots=x_n=0$ (układ 0), funkcye φ_i znikają i że wszystkie funkcye posiadają w sąsiedztwie tego układu pochodne aż do rzędu p włącznie. Załóżmy, że nie wszystkie wyznaczniki macierzy:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}, & \ldots\ldots, & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1}, & \ldots\ldots, & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n} \end{vmatrix}, \tag{2}$$

znikają dla (0), i szukajmy warunków, aby funkcya $f(x_1,\ldots x_n)$ miała maximum względne, t. j. przy założeniach:

$$\varphi_i(x_1,\ldots,x_n)=0. \qquad (i=1,\ldots m) \tag{3}$$

Istnieje m skończonych oznaczonych stałych λ_i $(i=1,\ldots m)$ takich, że pochodne funkcyi:

$$g(x_1,\ldots,x_n) = f(x_1,\ldots,x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x_1,\ldots,x_n),$$

znikają dla (0), t. j. zachodzą równości:

$$\frac{\partial g(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_i} = 0. \qquad (i=1,\ldots n) \tag{5}$$

Dalsze warunki konieczne otrzymujemy natychmiast. Niechaj wyznacznik

$$\frac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)}{D(x_{i_1},\ldots,x_{i_m})}, \qquad (i_1<\ldots<i_m) \tag{6}$$

będzie odmienny od zera; natenczas z równań:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}\varepsilon_i+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x_i\partial x_j}\varepsilon_i\varepsilon_j+\ldots=0, \qquad (k=1,\ldots m) \tag{7}$$

wstawiając rozwinięcia na $\varepsilon_{i_1},\ldots\varepsilon_{i_m}$ w wyrażenie:

$$f+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\varepsilon_i+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\varepsilon_i\varepsilon_j+\ldots, \tag{8}$$

i oznaczając pozostałe zmiennne przez $x_{j_1},\ldots,x_{j_{n-m}}$ $(j_1<\ldots<j_{n-m})$, otrzymamy najprzód:

$$\frac{D\varphi_1\ldots\varphi_m)}{D(x_{i_1},\ldots x_{i_m})}\frac{\partial f}{\partial x_{j_k}}-\sum_{h=1}^{m}\frac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)}{D(x_{i_1},\ldots x_{i_{h-1}},x_{j_k},x_{i_{h+1}},\ldots x_{i_m})}\frac{\partial f}{\partial x_{i_h}}=0 \tag{9}$$

$$(k=1,\ldots,n-m)$$

równości równoważne (5); następnie wyrazy drugiego stopnia dają formę kwadratową:

$$\sum_{k,k'=1}^{n-m}\left[\left(\frac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)}{D(x_{i_1},\ldots x_{i_m})}\right)^2\frac{\partial^2 g}{\partial x_{j_k}\partial x_{j_{k'}}}-2\sum_{h=1}^{m}\frac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)}{D(x_{i_1},\ldots x_{i_m})}\right. \tag{10}$$

$$\cdot\frac{D(\varphi_1,\ldots\varphi_m)}{D(x_{i_1},\ldots x_{i_{h-1}},x_{j_k},x_{i_{h+1}},\ldots x_{i_m}}\frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_h}\partial x_{j_k}}+\sum_{h,h'=1}^{m}\frac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)}{D(x_{i_1},\ldots x_{i_{h-1}},x_{j_k},x_{i_{h+1}},\ldots x_{im})}$$

$$\left.\frac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)}{D(x_{i_1},\ldots x_{i_{h'-1}},x_{j_{k'}},x_{i_{h'+1}},\ldots,x_{im}}\frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_h}\partial x_{i_{h'}}}\right]\varepsilon_{j_k}\varepsilon_{j_{k'}},$$

która nie powinna być nieokreśloną.

2. Jeżeli jednak wszystkie wyznaczniki macierzy (2) są równe zeru, wówczas równania (7) dają nam pewną liczbę rozwinięć, które jednak wszystkie mogą być urojone dla układu (0).

Załóżmy dla prostoty, że przynajmniej jeden z wyznaczników $(m-1)$-go stopnia macierzy (2) jest od zera odmienny, i niechaj dla prostoty będzie to

wyznacznik pierwszych $m-1$ wierszy i kolumn. Wówczas istnieje $m-1$ skończonych, oznaczonych wielkości $a_i(i=1,,\ldots m-1)$, takich, że oznaczając:

$$\Phi=\varphi_m+\sum_{i=1}^{m-1}a_i\varphi_i,$$

mamy dla układu (0) równości:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}=0. \qquad (i=1,\ldots n) \tag{11}$$

Otrzymujemy stąd dla wielkości ε_j $(j=m,\ldots n)$ równanie:

$$\sum_{j',j=m}^{n}\left[\left(\frac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_{m-1})}{D(x_1,\ldots,x_{m-1})}\right)^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_j\partial x_{j'}}-2\sum_{i=1}^{m-1}\frac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_{m-1})}{D(x_1,\ldots,x_{m-1})}\frac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_{m-1})}{D(x_1,\ldots,x_{i-1},x_j,x_{i+1}\ldots x_m)}\right.$$

$$\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial x_{j'}}+\sum_{i,i'=1}^{m-1}\frac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_{m-1})}{D(x_1,\ldots,x_{i-1},x_j,x_{i+1},\ldots,x_{m-1})}\frac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_{m-1})}{D(x_1,\ldots,x_{i'-1},x_{j'},x_{i'+1},\ldots,x_{m-1})}$$

$$\left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_j\partial x_{j'}}\right]\varepsilon_j\varepsilon_{j'}+\ldots\ldots=0, \tag{12}$$

tak że natura rozwinięć zależy od formy kwadratowej wypisanej. Sprowadzamy ją do sumy kwadratów:

$$\sum_{i=1}^{\nu}A_i\eta_i^2, \qquad (\nu\leqq n-m+1) \tag{13}$$

i dochodzimy do wniosków:

a) Jeżeli forma jest określona, natenczas prócz (0) niema układu x, dla którego (3) zachodzi.

b) Jeżeli forma jest nieokreślona, otrzymujemy rozwinięcia wielkości ε_i $(i=1,\ldots n)$ podług wielkości η. Wstawiając je do (8), dochodzimy do następującego interesującego rezultatu: Istnieje $m-1$ stałych skończonych $\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1}$ takich, że oznaczając:

$$g(x_1,\ldots,x_m)=f(x_1,\ldots,x_m)+\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i\varphi_i(x_1,\ldots,x_m), \tag{14}$$

otrzymujemy ν niezależnych równości:

$$\sum_{j=m}^{n}a_j^k\frac{\partial g}{\partial x_j}=0. \qquad (k=1,\ldots,\nu) \tag{15}$$

c) Nareszcie jeżeli forma jest półokreśloną, należałoby uwzględnić wyższe wyrazy w rozwinięciach (7) i (8). Jest to przypadek bardzo skomplikowany.

3. Ograniczając się do $n=2$, $m=1$, mamy do czynienia z równaniem dla dwóch zmiennych x_1 i x_2 i możemy stosować metodę Puiseux'a. W szczególnym przypadku, gdy forma kwadratowa jest nieokreślona, otrzymujemy warunki:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}=0, \tag{16}$$

Możemy tu szukać dalszych warunków dla minimum. Z wyrazów drugiego stopnia w funkcyi f otrzymujemy nierówności:

$$\begin{gathered} h_2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}-2h_3\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}\geqq 0, \\ -h_2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}-2h_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}\geqq 0, \\ h_2^2+4h_1h_3\geqq 0, \end{gathered} \tag{17}$$

gdzie położyliśmy:

$$h_1=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\frac{2^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2},$$

$$h_2=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2},$$

$$h_3=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}.$$

W ważnym przypadku specyalnym, gdy $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}=0$, warunki te redukują się do jednego, który—zakładając $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}>0$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}<0$, — napiszemy:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}:\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\geqq\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}:\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}, \tag{18}$$

4. Rezultaty poprzednich ustępów można z łatwością stosować do zagadnienia izoperymetrycznego dla całek pojedyńczych. Mamy najprostszą całkę

$$I=\int f(x,y,y')\,dx, \tag{19}$$

i szukamy warunków dla jej ekstremum, jeżeli całki

$$K_i=\int g_i(x,y,y')\,dx, \qquad (i=1,\ldots m) \tag{20}$$

przyjmują wartości oznaczone. Oznaczmy:

$$F=\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}, \qquad G_j=\frac{\partial g_j}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial g_j}{\partial y'}. \tag{21}$$
$$(j=1,\ldots m)$$

Jeżeli funkcye G_j są liniowo niezależnie wzdłuż ekstremalnej E_0, t. j. jeżeli nie zachodzi związek

$$\sum_{j=1}^{m} a_j G_j=0, \tag{22}$$

wtenczas ekstremalna spełnia równanie Lagrange'a:

$$F+\sum_{i=1}^{i=m}\lambda_i G_i=0, \tag{23}$$

gdzie λ_i są stałe skończone i oznaczone.

W pracy ogłoszonej w „Mathematische Annalen" (tom **68**, str. 552) okazałem, że jeżeli między funkcyami G_j zachodzi związek (22) dla $a_m=1$, natenczas, gdy oznaczymy jeszcze

$$\bar g(x_1,\ldots,x_m)=g_m(x_1,\ldots,x_n)+\sum_{i=1}^{m-1}a_i g_i(x_1,\ldots,x_n),$$

ekstremalna znów spełnia równania (23), jeżeli wzdłuż niej funkcya $\bar g$ nie spełnia warunku Legendre'a, j. j. jeżeli $\frac{\partial^2\bar g}{\partial y^2}$ zmienia znak wzdłuż E_0. Tak samo zachodzi (23), jeżeli wprawdzie warunek Legendre'a jest spełniony, ale nie warunek Jacobi'ego, jeżeli zatem nie zachodzi dla E_0 nawet ekstremum słabe.

Dowód znajdziemy prędko, opierając się na wynikach ustępów 1—3. W istocie zagadnienie Rachunku waryacyjnego sprowadza się do zagadnienia Rachunku różniczkowego przez użycie waryacyj typu:

$$H(x)=\varepsilon\eta(x)+\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i\eta_i(x),$$

stosownie dobranych (zobacz pracę cytowaną).

Hadamard w niedawno wydanym pierwszym tomie „Leçons sur le calcul des variations" 1909, p. 210, nazywa takie pola ekstremalnych „champs singuliers" nie rozważając ich zupełnie. Tak samo nie rozważa ich Bolza („Vorlesungen über Variationsrechnung" 1909, p. 460).

5. Podałem także przykład (l. c.) okazujący, że reguła Lagrange'a może być fałszywą. Obieram mianowicie całkę I:

$$I=\int_0^1(ay'^2+y)\,dx, \tag{24}$$

zaś jako całkę K:

$$K = \int_0^1 y'^2 \left[y'^4 (y^2 - px)(y^2 - qx) + a \right] dx. \tag{25}$$

$$p > 0, \; q > 0, \; a > 0.$$

Dla osi x mamy $I = K = 0$, a dla każdej innej krzywej, łączącej punkty 0 i 1 w obszarze dostatecznie blizkim osi x, dla której $K = 0$, mamy $I > 0$ i można znaleść rodzinę taką, zależną od parametru (mnogość ciągła). Oś x jednak nie jest ekstremalną.

Przypadek pospolity, kiedy E_0 daje mocne ekstremum całki K, wskazał już H. Hahn (Mathematische Annalen, **58**).

G. A. MILLER.

The group generated by two conjoints.

(Grupa wytworzona przez dwie sprzężone.)

One of the most useful facts which Jordan proved in his earliest article [1] is that with every regular group H of degree n there may be associated another regular group H on the same letters such that every substitution of each of these two groups is commutative with every substitution of the other. Moreover, each of these groups is composed of all the substitutions on these letters which are commutative with every substitution of the other group. The groups H und H' are known as conjoints, each one being the conjoint of the other. In his „grand prix en 1896" memoir [2] and elsewhere, E. Maillet studied the group G generated by H and H', especially as regards its class and as regards its primitivity. The lower limit of the class of G which Maillet found when G is primitive can be greatly reduced as will be seen from what follows. The objects of the present paper are to present the wole subject in a simpler form and to prove that the inferior limit given by Maillet is too great.

Since H is transformed into itself by H' the order of $G \equiv (H, H')$ is n^2/ρ where ρ ist the number of operators common to H and H'. The subgroup G_1, which is composed of all the substitutions of G, which omit a given letter is therefore or order n/ρ. It is impossible that two substitutions of G_1 transform the substitutions of H in the same way for if two such substitutions had this common property the product of the one into the inverse of the other would be commutative with every one of the substitutions of H and would

---

[1]) Jordan, Journal de l'École Polytechnique, vol **22** (1861), p 153.

[2]) Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences (2), vol **32**, 1902.