t	r_t	t	r_t
—176	0,060	200	0,054
—78,3	0,081	300	0,028
0	0,100	400	0,012
50 (max.)	0,119	450	0,008
100	0,110	460 (ciekły)	0,017

Opór przechodzi przez maximum w okolicach 50⁰, następnie zmniejsza się aż do temperatury topienia, gdzie znowu wzrasta, tak jak opór metali rozszerzających się podczas topienia [2]).

W okolicach 380⁰ zauważyć mogliśmy pewną nieciągłość w zmianie oporu (nie wskazaną na rysunku), która mogłaby odpowiadać zmianie ustroju telluru.

Wyniki nasze potwierdzają zdanie Exnera, że anormalną zmianą oporu telluru powoduje oddzielanie się kryształów, a nie modyfikacya metaloidowa, gdyż opór elektryczny metaloidów zmniejsza się zawsze podczas topienia.

³) Toepler, Wied. Ann. **53**, 343, 1894.

Nancy, Instytut chemiczny.

A. AXER.

Przyczynek do charakterystyki funkcyi ideałowej $\varphi(\mathfrak{r})$.

(Sur la fonction $\varphi(\mathfrak{r})$ dans la théorie des idéaux).

Niechaj $\varphi(\mathfrak{r})$ oznacza liczbę pierwszych względem $\mathfrak{r}$ elementów w układzie reszt dla ideału $\mathfrak{r}$, w dowolnem ciele algebraicznem $C(\omega)$ o stopniu $k(\geqq 1)$[1]).

Zajmiemy się bliższem określeniem nieskończenie wielkich granic (wyższej i niższej), do jakich zmierzają wartości $\varphi(\mathfrak{r})$, gdy $\mathfrak{r}$ przebiega wszystkie ideały ciała $C(\omega)$ w porządku np. takim, by $N\mathfrak{r}$ t. j. norma ideału $\mathfrak{r}$, przytem nigdy nie malała [2]). Ściślej mówiąc: znajdziemy takie funkcye analityczne $F(x)$, $f(x)$, by było:

$$\limsup_{N\mathfrak{r}=\infty} \frac{\varphi(\mathfrak{r})}{F(N\mathfrak{r})} = 1, \qquad \liminf_{N\mathfrak{r}=\infty} \frac{\varphi(\mathfrak{r})}{f(N\mathfrak{r})} = 1\ ^{3)}.$$

Dla ciała wymiernego rozwiązał zadanie to Landau w artykule p. t.: „Über den Verlauf der zahlentheoretischen Funktion $\varphi(x)$“ [4]). Zupełnie analogicznie rozwiążemy je dla dowolnego ciała algebraicznego; atoli w jednym punkcie, wagi nie najmniejszej, odbiegnie wywód poniższy (mianowicie w ust. 3) od toku myśli pracy wymienionej, upraszczając takowy poniekąd.

¹) Jest to więc uogólnienie znanej funkcyi Eulera i Gaussa, wprowadzone po raz pierwszy przez Dedekinda. (Por. „Vorlesungen über Zahlentheorie“ von P. G. Lejeune-Dirichlet, hgg. v. R. Dedekind, 4. Aufl., 1894, str 569).

²) Charakter granic tych jest oczywiście niezależny od porządku, w jakim $\mathfrak{r}$ przebiega ideały w $C(\omega)$, byleby porządek ten odliczał rzeczywiście wszystkie ideały w $C(\omega)$.

³) Funkcyj takich jest nieskończenie wiele, idzie jednak o podanie możliwie prostych.

⁴) Archiv der Math. u. Phys. III. Reihe. **5** Bd, 1903, str. 86—91.

1. Oznaczając przez $\mathfrak{A}(x)$ liczbę ideałów w $C(\omega)$ o normie $\leqq x$, mamy dla każdego $\mathfrak{r} \neq (1)$:

$$\varphi(\mathfrak{r}) \leqq \mathfrak{A}(\mathrm{N}\mathfrak{r}) - 1,$$

przyczem równość zachodzić będzie stale dla tych $\mathfrak{r}$, które są ideałami pierwszemi. Wobec tego jest:

$$\limsup_{\mathrm{N}\mathfrak{r}=\infty} \frac{\varphi(\mathfrak{r})}{\mathfrak{A}(\mathrm{N}\mathfrak{r})} = 1,$$

a że podług wzoru Dedekinda[1] jest:

$$\mathfrak{A}(\mathrm{N}\mathfrak{r}) = (\alpha + \varepsilon(\mathrm{N}\mathfrak{r})).\mathrm{N}\mathfrak{r}\ ^{2)}, \qquad \alpha = \frac{2^{r_1+r_2}\pi^{r_2}hR}{w\,|\sqrt{D}\,|}, \tag{1}$$

gdzie D oznacza wyróżnik ciała $C(\omega)$, R jego regulator, w liczbę pierwiastków z jedności w $C(\omega)$, h liczbę klas ideałów w $C(\omega)$, r_1 liczbę rzeczywistych, $2r_2$ liczbę ciał urojonych w układzie tych k ciał sprzężonych, do których $C(\omega)$ należy, mamy przeto:

$$\limsup_{\mathrm{N}\mathfrak{r}=\infty} \frac{\varphi(\mathfrak{r})}{\alpha \mathrm{N}\mathfrak{r}} = 1, \tag{2}$$

czyli:

$$F(x) = \alpha x.$$

2. By znaleść odpowiednią funkcyę $f(x)$, zbadamy najprzód granicę (nieskończenie wielką) takiego ciągu wartości $\varphi(\mathfrak{r}_\lambda)$, w którym $\mathfrak{r}_\lambda$ jest każdorazowo iloczynem bezkwadratowym pierwszych λ ideałów pierwszych w $C(\omega)$ (uporządkowanych tak, by było $\mathrm{N}\mathfrak{p}_\lambda \leqq \mathrm{N}\mathfrak{p}_{\lambda+1}$, pozatem zaś dowolnie):

$$\mathfrak{r}_\lambda = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \ldots\ldots \mathfrak{p}_\lambda. \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$$

Mając dla takiego $\mathfrak{r}_\lambda$

$$\varphi(\mathfrak{r}_\lambda) = \prod_{i=1}^{\lambda}(\mathrm{N}\mathfrak{p}_i - 1) = \mathrm{N}\mathfrak{r}_\lambda . \prod_{i=1}^{\lambda}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{N}\mathfrak{p}_i}\right), \tag{3}$$

winniśmy tu tylko iloczyn ostatni wyrazić asymptotycznie przez $\mathrm{N}\mathfrak{r}_\lambda$.

---

[1] l. c., str. 609, 611.

[2] ε ma tu i poniżej oznaczać każdorazowo nieokreśloną bliżej wielkość, malejącą do zera, gdy argument jej (rzeczywisty) nieograniczenie wzrasta. Dokładniej jest zresztą podług Webera („Über einen in der Zahlentheorie angewandten Satz der Integralrechnung." Nachr. der k. Ges. d. Wissensch. Göttingen. Math. phys. Kl. 1896):

$$\mathfrak{A}(\mathrm{N}\mathfrak{r}) = \alpha\mathrm{N}\mathfrak{r} + O(\mathrm{N}^{1-\frac{1}{k}}\mathfrak{r}).$$

$O(g(x))$ (w czem ewentualnie $x = \mathrm{N}\mathfrak{r}$) ma tu i poniżej oznaczać wielkość tego rodzaju, iż $\frac{O(g(x))}{g(x)}$ pozostaje dla wszystkich rzeczywistych x w granicach skończonych, określić się dających.

W tym celu piszemy:

$$\log \prod_{i=1}^{\lambda}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{N}\mathfrak{p}_i}\right) = -\sum_{i=1}^{\lambda}\frac{1}{\mathrm{N}\mathfrak{p}_i} - \sum_{s=2}^{\infty}\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{\lambda}\frac{1}{\mathrm{N}\mathfrak{p}_i^s}. \tag{4}$$

Podług wzoru Landaua z teoryi rozmieszczenia ideałów pierwszych jest[1]:

$$\sum_{i=1}^{\lambda}\frac{1}{\mathrm{N}\mathfrak{p}_i} = \log\log \mathrm{N}\mathfrak{p}_\lambda + \log\alpha + C - \mathfrak{H} + O\left(\frac{1}{\lg \mathrm{N}\mathfrak{p}_\lambda}\right), \tag{5}$$

gdzie $\mathfrak{H}$ oznacza wartość sumy zbieżnej $\sum_{s=2}^{\infty}\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{N}\mathfrak{p}_i^s}$, a C—stałą Eulera.

Dalej jest:

$$\sum_{s=2}^{\infty}\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{\lambda}\frac{1}{\mathrm{N}\mathfrak{p}_i^s} = \mathfrak{H} - \varepsilon(\mathrm{N}\mathfrak{p}_\lambda).\ ^{2)}$$

Wobec tego otrzymujemy z (4):

$$\log \prod_{i=1}^{\lambda}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{N}\mathfrak{p}_i}\right) = -\log\log \mathrm{N}\mathfrak{p}_\lambda - \log\alpha - C + \varepsilon(\mathrm{N}\mathfrak{p}_\lambda),$$

czyli:

$$\prod_{i=1}^{\lambda}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{N}\mathfrak{p}_i}\right) = \frac{1 + \varepsilon(\mathrm{N}\mathfrak{p}_\lambda)}{\alpha e^C \log \mathrm{N}\mathfrak{p}_\lambda}.\ ^{3)} \tag{6}$$

Podług innego wzoru Landaua jest jednak[4]:

$$\log \mathrm{N}\mathfrak{r}_\lambda = \sum_{i=1}^{\lambda}\log \mathrm{N}\mathfrak{p}_i = (1 + \varepsilon(\mathrm{N}\mathfrak{p}_\lambda)).\mathrm{N}\mathfrak{p}_\lambda, \tag{7}$$

---

[1] E. Landau: „Über die zu einem algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunktion und die Ausdehnung der Tschebyschef'schen Primzahlentheorie auf das Problem der Verteilung der Primideale." Journal f. reine u angew. Math. Bd. **125**, 1902, str. 152.

[2] Dokładniejsze obliczenie sumy tej $\left(\text{okazuje się tu mianowicie } \varepsilon(\mathrm{N}\mathfrak{p}_\lambda) = O\left(\frac{1}{\mathrm{N}\mathfrak{p}_\lambda}\right)\right)$ jest dla zamierzonego celu zbyteczne.

[3] Dokładniej będzie:

$$\prod_{i=1}^{\lambda}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{N}\mathfrak{p}_i}\right) = \frac{e^{O\left(\frac{1}{\log \mathrm{N}\mathfrak{p}_\lambda}\right) - C}}{\alpha \log \mathrm{N}\mathfrak{p}_\lambda}.$$

(Por. (5) i powyższą uwagę [2]). Będzie to wzór analogiczny do wzoru Mertensa

$$\prod_{i=1}^{\lambda}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = \frac{e^{O\left(\frac{1}{\log p_\lambda}\right) - C}}{\log p_\lambda}$$

z dziedziny wymiernej. (Por. F. Mertens: „Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie." Journ. f. reine u. angew. Math. Bd. **78**, 1874, str. 53).

[4] Landau: „Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes." Math. Annalen, Bd. **56**, 1903, str. 669.

a zatem:

$$\log N\mathfrak{p}_\lambda = \log\log N\mathfrak{r}_\lambda - \log\left(1+\varepsilon(N\mathfrak{p}_\lambda)\right) = \log\log N\mathfrak{r}_\lambda + \varepsilon(N\mathfrak{r}_\lambda),$$

więc podług (6):

$$\prod_{i=1}^{\lambda}\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}_i}\right) = \frac{1+\varepsilon(N\mathfrak{r}_\lambda)}{\alpha e^C \log\log N\mathfrak{r}_\lambda}.$$

Wstawiając wartość tę w (3), otrzymujemy:

$$\varphi(\mathfrak{r}_\lambda) = \frac{N\mathfrak{r}_\lambda}{\alpha e^C \log\log N\mathfrak{r}_\lambda}\cdot\left(1+\varepsilon(N\mathfrak{r}_\lambda)\right),$$

stąd zaś ostatecznie:

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{\varphi(\mathfrak{r}_\lambda)}{\dfrac{N\mathfrak{r}_\lambda}{\alpha e^C \log\log N\mathfrak{r}_\lambda}} = 1. \tag{8}$$

3. Nawiązując teraz do (8), wykazać łatwo, iż w ogóle:

$$\liminf_{N\mathfrak{r}=\infty} \frac{\varphi(\mathfrak{r})}{\dfrac{N\mathfrak{r}}{\alpha e^C \log\log N\mathfrak{r}}} = 1, \tag{9}$$

czyli że:

$$f(x) = \frac{x}{\alpha e^C \log\log x}.$$

Podczas gdy jednak wymieniona na wstępie praca wywodzi analogiczny fakt dla $C(1)$ przy pomocy asymptotycznego rachunku, zastosowanego do wielkości $\frac{\varphi(x)}{x}$, którego wynik dopiero, w połączeniu (mutatis mutandis) z (8), wiedzie tam do konkluzyi (9)[1], można ogólny przypadek (9) sprowadzić b e z p o ś r e d n i o do szczególnego (8), rozumowaniem następującem:

Do danego dowolnie $\mathfrak{r} \neq (1)$ w $C(\omega)$ dobieramy $\mathfrak{r}_\lambda$ tak, by było:

$$N\mathfrak{r}_\lambda \leqq N\mathfrak{r} < N\mathfrak{r}_{\lambda+1}. \tag{10}$$

Biorąc następnie pod uwagę iloczyny:

$$\frac{\varphi(\mathfrak{r})}{N\mathfrak{r}} = \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{r}}\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}}\right), \quad \frac{\varphi(\mathfrak{r}_\lambda)}{N\mathfrak{r}_\lambda} = \prod_{i=1}^{\lambda}\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}_i}\right), \tag{11), (11'}$$

(z których pierwszy rozciąga się na wszystkie różne ideały pierwsze, zawarte w $\mathfrak{r}$), stwierdzić możemy:

1-o, że (11) nie może zawierać więcej jak λ czynników $1-\frac{1}{N\mathfrak{p}}$; (gdyby bowiem $\mathfrak{r}$ podzielne było przez więcej niż λ r ó ż n y c h ideałów pierwszych,

[1]) l. c., str. 90–91.

wynikałoby stąd z konieczności: $N\mathfrak{r} \geqq N\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \ldots\ldots \mathfrak{p}_\lambda\mathfrak{p}_{\lambda+1} = N\mathfrak{r}_{\lambda+1}$, wbrew (10);) 2-o, że ilekroć któryś z czynników pod (11) zawiera $\mathfrak{p}$, nie występujące jednocześnie pod (11'), jest on tem samem $\leqq$ od największego z czynników w (11') (albowiem odnośne $N\mathfrak{p} \geqq N\mathfrak{p}_\lambda$); 3-o, że każdy z czynników w (11) i (11') jest < 1. Z przesłanek tych wynika:

$$\frac{\varphi(\mathfrak{r})}{N\mathfrak{r}} \geqq \frac{\varphi(\mathfrak{r}_\lambda)}{N\mathfrak{r}_\lambda}. \tag{12}$$

Tembardziej więc będzie dla wszystkich $\mathfrak{r}$, od pewnego z nich począwszy [1]) i dla podobieranych każdorazowo podług (10) $\mathfrak{r}_\lambda$:

$$\frac{\varphi(\mathfrak{r})\log\log N\mathfrak{r}}{N\mathfrak{r}} \geqq \frac{\varphi(\mathfrak{r}_\lambda)\log\log N\mathfrak{r}_\lambda}{N\mathfrak{r}_\lambda}. \tag{12'}$$

A że przy dowolnie wielkiem G istnieją tu zawsze takie ideały $\mathfrak{r}(=\mathfrak{r}_\lambda)$ o normach $>G$, dla których stosować się będzie pod (12') znak równości, przeto ze względu na istnienie wartości granicznej (8), łatwy z (12') wniosek, iż

$$\liminf_{N\mathfrak{r}=\infty} \frac{\varphi(\mathfrak{r})\log\log N\mathfrak{r}}{N\mathfrak{r}} = \lim_{N\mathfrak{r}=\infty}{}^{2)} \frac{\varphi(\mathfrak{r}_\lambda)\log\log N\mathfrak{r}_\lambda}{N\mathfrak{r}_\lambda}$$

$$= \lim_{\lambda=\infty} \frac{\varphi(\mathfrak{r}_\lambda)\log\log N\mathfrak{r}_\lambda}{N\mathfrak{r}_\lambda} = \frac{1}{\alpha e^C}, \text{ c. b. d. o.}$$

[1]) Co najmniej od tego $\mathfrak{r}$ począwszy, które jest pierwszem $\mathfrak{r}_\lambda$, mającem normę $> e^e = 15, \ldots\ldots$

[2]) Pojmujemy przytem $\mathfrak{r}_\lambda$ a tem samem całą prawą stronę pod (12'), jako funkcyę ideału $\mathfrak{r}$, daną przez nierówności (10).