w blizkości punktu $(\bar{x}, \bar{y})$. $F(x,y)$ oznacza funkcyę ciągłą. Niechaj wartość całki $U(\bar{x}, \bar{y}) = U(s)$ na obwodzie będzie $u(t)$. Natenczas zachodzi wzór:

$$(29) \quad U(s) = U(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2\pi}\iint G(\bar{x}, \bar{y}; x, y)\, g(x,y)\, dx dy - \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial G(s,t)}{\partial n_t} u(t) dt.$$

Wzór (29) zachodzi jeszcze i wtedy, jeżeli pochodne $\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}$ nie czynią zadość warunkowi Höldera. Funkcya $G(\bar{x}, \bar{y}; x, y)$ nie jest już wtedy całką równania (27).

Wzór (6) stanowi przypadek szczególny wzoru ogólnego (29). Metoda, wyłożona w pracy niniejszej, daje się z łatwością zastosować do równania (25) i prowadzi do następującego twierdzenia.

Niechaj C będzie pole jedno lub wielospójne, którego obwód stanowi układ krzywych zamkniętych $S_1, S_2, \ldots, S_n$ o krzywiźnie ciągłej, nie przecinających się i nie stykających się ze sobą. Natenczas zachodzi jeden z dwu przypadków następujących: albo równanie (25) ma jednę tylko całkę, ciągłą wraz z jej pochodnemi cząstkowemi pierwszego i drugiego rzędu wewnątrz pola C i przyjmującą dowolny ciągły szereg wartości na obwodzie; albo też istnieje liczba skończona całek równania $L(u) = 0$, równych zeru na obwodzie i nierównych tożsamościowo zeru wewnątrz pola.

26-go grudnia 1909 r.

W. SIERPIŃSKI.

Uwaga do twierdzenia Riemanna o szeregach warunkowo zbieżnych.

(Remarque sur le théorème de Riemann relatif aux séries semiconvergentes.)

Jeżeli szereg nieskończony jest zbieżny, ale nie bezwzględnie (t. j. jeżeli szereg jest zbieżny, ale odpowiedni szereg wartości bezwzględnych jest rozbieżny), to, jak dowiódł Riemann, można w nim tak zmienić porządek składników, żeby sumą powstałego przez to szeregu była dowolna, dana naprzód liczba.

Ze sposobu, w jaki Riemann dowodzi tego twierdzenia [1]) — a dowód ten z pozostawieniem myśli przewodniej i nieznacznemi tylko zmianami powtarzany jest przez większość podręczników, traktujących o szeregach — wynika, że taką dowolną zmianę wartości sumy szeregu warunkowo zbieżnego można osiągnąć, zmieniając stosunkową częstość jego składników dodatnich i ujemnych.

Okazuje się jednak, że ten sam wynik osiągnięty być może z pozostawieniem bez zmiany stosunkowej częstości składników różnego znaku, jedynie przez taką zmianę uporządkowania składników szeregu warunkowo zbieżnego, przy której każdy składnik zostaje zastąpiony przez składnik tego samego znaku. Celem niniejszego artykułu jest właśnie dowód tego twierdzenia.

Niech $$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \quad (1)$$

---

[1]) Bernhard Riemanns Gesammelte matematische Werke, Lipsk 1892, str. 235.

będzie danym szeregiem warunkowo zbieżnym, w którym mamy p_1 składników dodatnich, po nich q_1 ujemnych, dalej znów p_2 dodatnich, następnie q_2 ujemnych i t. d. Następstwo znaków składników naszego szeregu będzie wyznaczone przez ciąg nieskończony

$$p_1,\ q_1,\ p_2,\ q_2,\ p_3,\ \ldots\ldots \tag{2}$$

o wyrazach całkowitych nieujemnych, a nawet naturalnych, poczynając od drugiego (wyraz p_1 może być równy zeru).

Oznaczmy przez a_1 pierwszy składnik dodatni szeregu (1). Niechaj a_2 oznacza pierwszy składnik dodatni tegoż szeregu, mniejszy od $\frac{a_1}{2}$. Składnik taki napewno się znajdzie, ponieważ składników dodatnich jest w szeregu (1) nieskończenie wiele, a przytem zmierzają one do zera. Niech dalej a_2 oznacza pierwszy składnik dodatni szeregu (1) mniejszy od $\frac{a_2}{2}$ i t. d., ogólnie: a_n — pierwszy składnik dodatni, mniejszy od $\frac{a_{n-1}}{2}$.

Szereg nieskończony

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots \tag{3}$$

będzie zbieżny (ponieważ składniki jego będą odpowiednio nie większe od składników szeregu geometrycznego $a_1 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_1}{4} + \ldots\ldots = 2a_1$) i przytem składniki jego będą wszystkie różnemi składnikami dodatniemi szeregu (1). Sumę szeregu (3) nazwijmy przez A, a składniki a_n usuńmy wszystkie z szeregu (1).

Podobnież wyznaczmy szereg zbieżny

$$-b_1 - b_2 - b_3 -, \ldots\ldots, \tag{4}$$

którego składniki b_n będą wszystkie różnemi składnikami ujemnemi szeregu (1). Sumę szeregu (4) nazwijmy przez $-B$ i składniki $-b_n$ usuńmy wszystkie z szeregu (1).

Po usunięciu składników a_n i $-b_n$ z szeregu (1) pozostanie z niego szereg

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots\ldots, \tag{5}$$

jak łatwo widzieć też warunkowo zbieżny.

Niech l oznacza daną liczbę rzeczywistą. Na mocy twierdzenia Riemanna, składniki szeregu (5) można tak uporządkować, żeby sumą powstałego w ten sposób szeregu

$$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots\ldots \tag{6}$$

była każda dana naprzód liczba. Uporządkujmy je tak, żeby sumą szeregu (6) była liczba $l-A+B$ i żeby przytem pierwszy składnik tego szeregu był ujemny. (Gdyby był dodatni, wystarczyłoby przestawić go z pierwszym składnikiem ujemnym, co oczywiście na wartość sumy nie wpływa).

Zbudujmy teraz szereg

$$t_1 + t_2 + t_3 + \ldots\ldots \tag{7}$$

w następujący sposób.

Przyjmijmy jako $t_1, t_2, \ldots\ldots, t_{p_1}$ pierwsze p_1 składników szeregu (3), $t_{p_1+1} = w_1$, zaś jako $t_{p_1+2}, \ldots, t_{p_1+q_1}$ pierwsze q_1-1 składników szeregu (4).

Wyznaczyliśmy więc p_1+q_1 pierwszych składników szeregu (7). Wzięte z szeregów (3) i (4) składniki usuńmy z tych szeregów.

Oznaczmy przez skrócenie:

$$p_1 + q_1 + p_2 + q_2 + \ldots\ldots + p_n + q_n = h_n.$$

Przypuśćmy, żeśmy wyznaczyli pierwsze h_{k-1} ($k \geqslant 2$) składników szeregu (7) i wszystkie wzięte w tym celu z szeregów (3) i (4) składniki usunęli z tych szeregów. Dla wyznaczenia następnych $p_k + q_k$ składników szeregu (7) postąpimy, jak następuje:

Jeżeli $w_k > 0$, to przyjmiemy $t_{h_{k-1}+1} = w_k$, jako $t_{h_{k-1}+2}, \ldots, t_{h_{k-1}+p_k}$ obierzemy p_k-1 pierwszych pozostałych w szeregu (3) składników, jako $t_{h_{k-1}+p_k+1}, \ldots, t_{h_k}$ zaś q_k pierwszych pozostałych w szeregu (4) składników. Gdyby było $w_k < 0$, przyjęlibyśmy jako $t_{h_{k-1}+1}, \ldots, t_{h_{k-1}+p_k}$ pierwsze p_k z pozostałych w szeregu (3) składników, $t_{h_{k-1}+p_k+1} = w_k$, zaś jako $t_{h_{k-1}+p_k+2}, \ldots, t_{h_k}$ pierwsze q_k-1 z pozostałych w szeregu (4) składników.

Opisany wyżej sposób wyznacza w zupełności wszystkie składniki szeregu (7), przyczem oczywistem jest, że będziemy mieli w tym szeregu p_1 składników dodatnich, po nich q_1 ujemnych, dalej znów p_2 dodatnich, następnie q_2 ujemnych i t. d.

Wnioskujemy dalej z łatwością, że, aby okazać, że szereg (7) tylko porządkiem składników może się różnić od szeregu (1), potrzeba i wystarcza okazać, że do szeregu (7) nieskończenie wiele razy bierzemy składniki z każdego z szeregów (3) i (4). (Że wejdą do (7) wszystkie składniki szeregu (6) — jest oczywiste, bo dla $n = h_k$ będziemy ich w sumie $t_1 + t_2 + \ldots\ldots t_n$ mieli dokładnie k).

Załóżmy dla dowodu, że np. z szeregu (3) bierzemy do szeregu (7) tylko skończoną liczbę składników. Zważywszy, że za każdym razem bierzemy z szeregu (3) nie mniej niż p_k-1 składników (gdzie p_k dla $k > 1$ jest liczbą naturalną) i przytem p_k-1 tylko wtedy, jeżeli $w_k > 0$, wnioskujemy, że liczba wziętych z szeregu (3) składników tylko wtedy mogłaby być skończona, gdyby poczynając od pewnego k, było stale $w_k>0$, co być nie może, gdyż w szeregu (6) jest nieskończenie wiele składników ujemnych. Podobnież przekonalibyśmy się, że i z szeregu (4) bierzemy do szeregu (7) wszystkie składniki.

Szereg (7) tylko więc co najwyżej porządkiem składników różni się od szeregu (1), przytem odpowiednie składniki w obu szeregach (t. j. t_n i u_n) mają jednakowe znaki.

Powiadam, że sumą szeregu (7) jest liczba l. Dla dowodu zauważymy, że sumę cząstkową T_n szeregu (7) uważać możemy jako złożoną z trzech części

$$T_n = W_k + A_r - B_s,$$

odpowiadających składnikom szeregów (6), (3) i (4). Wskaźniki k, r, s są tu pewnemi oznaczonemi funkcyami liczby n, nieograniczenie wzrastającemi wraz z n, co jest to równoważne dowiedzionej już własności szeregu (7), że zawiera nieskończenie wiele wyrazów szeregów (3), (4) i (5).

Lecz:

$$\lim_{k=\infty} W_k = l - A + B, \quad \lim_{r=\infty} A_r = A, \quad \lim_{s=\infty} B_s = B,$$

skąd też:

$$\lim_{n=\infty} W_k = l - A + B, \quad \lim_{n=\infty} A_r = A, \quad \lim_{n=\infty} B_s = B,$$

przeto:

$$\lim T_n = \lim (W_k + A_r - B_s) = l - A + B + A - B = l,$$

c. b. d. o.

Twierdzenie nasze możemy więc uważać za dowiedzione.

A. GUNTZ i W. BRONIEWSKI.

Opór elektryczny metali alkalicznych galu i telluru.

(Sur la résistance éléctrique des métaux alcalins, du gallium et du tellure).[1]

Wykonaliśmy pomiary oporu elektrycznego kilku metali interesujących z punktu widzenia teoryi, lecz zaniedbanych nieco dotąd z powodu trudności doświadczalnych.

Metale alkaliczne.

Prace poprzedników. Pierwsza próba wyznaczenia elektrycznego oporu sodu zrobiona została przez Becquerela[1]. Metal użyty musiał jednak być bardzo mocno zanieczyszczony, gdyż wykazał opór dwa razy większy od rtęci.

Lamy[2] znajduje, że sód i potas należą do dobrych przewodników. Sód pod względem przewodnictwa następuje zaraz po złocie, potas zaś wyprzedza żelazo.

Pierwsze staranne doświadczenia nad oporem elektrycznym metali alkalicznych zawdzięczamy Matthiessenowi. Bada on przy pomocy mostku

---

[1]) Patrz Journal de Chimie physique, VII, № 6, 1909. Comptes Rendus **147**, 1474; 1898.
[2]) Becquerel, Ann. chim. et. phys (2) **32**, 420; 1826.
[3]) Lamy, C. R. **43**, 695,, 1856; Ann. chim. et phys. (3). **51**, 316; 1856.
[4]) Matthiessen, Phil. Mag. (4) **12**, 199; 1856; (4) **13**, 81; 1857; Pogg. Ann. **100**, 177, 1857.