iloczynu $kx = \frac{ak}{b}$ potrzeba i wystarcza, iżby k było podzielne przez b; liczb takich $k \leqslant n$ jest dokładnie $\mathrm{E}\frac{n}{b}$, jest więc:

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\mathrm{E}\,kx + \mathrm{E}(-kx) \right] = -n + \mathrm{E}\frac{n}{b},$$

skąd:

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=-n}^{+n} (kx - \mathrm{E}\,kx) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\mathrm{E}\frac{n}{b},$$

i przeto:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=-n}^{+n} (kx - \mathrm{E}\,kx) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2b}.$$

Mamy więc:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=-n}^{+n} (kx - \mathrm{E}\,kx) < \frac{1}{2} \text{ lub } = \frac{1}{2},$$

zależnie od tego, czy liczba x jest, czy też nie jest wymierną.

LEON LICHTENSTEIN.

O niektórych zastosowaniach teoryi równań całkowych liniowych.[1]

(Sur quelques applications de la théorie des équations intégrales linéaires;)

Na wstępie kilka uwag o teoryi równań całkowych liniowych.

Niechaj $K(s,t)$ będzie funkcya ciągła, rzeczywista zmiennych rzeczywistych s i t w zakresie:

$$(1) \qquad a \leqq s \leqq b, \quad a \leqq t \leqq b;$$

$f(s)$ funkcya ciągła, rzeczywista zmiennej s w zakresie:

$$a \leqq s \leqq b;$$

λ stała, $\varphi(s)$ funkcya niewiadoma.

Równanie:

$$(2) \qquad \varphi(s) + \lambda \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt = f(s)$$

nazywamy według D. Hilberta równaniem całkowem liniowem niejednorodnem:

---

[1]) Rzecz niniejsza była przedstawiona na posiedzeniu Wydziału Matem.-Przyr. Tow. Naukowego Warszawskiego dnia 13 stycznia 1910 r.

$$\varphi(s) + \lambda \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt = 0 \tag{3}$$

będzie równanie całkowe liniowe jednorodne [1].

Matematyk szwedzki I. Fredholm podał pierwszy ogólną metodę rozwiązania równań typu (2) i (3) i dowiódł następującego twierdzenia:

Zachodzi koniecznie jeden z dwu następujących przypadków możliwych. Albo równanie całkowe niejednorodne (2) ma dla każdej funkcyi ciągłej $f(s)$ jedno tylko rozwiązanie, a wtedy równanie jednorodne (3) nie ma rozwiązań różnych od zera; albo też równanie jednorodne (3) ma skończoną liczbę rozwiązań różnych od zera, a wtedy równanie niejednorodne (2) jest rozwiązalne tylko dla funkcyj $f(s)$, czyniących zadość pewnym równaniom warunkowym. Ta druga możliwość zachodzi dla wartości λ, czyniących zadość równaniu $\delta(\lambda)=0$, gdzie δ oznacza pewną funkcyę przestępną całkowitą. Równanie to może zresztą nie posiadać pierwiastków rzeczywistych, lub wogóle nie posiadać pierwiastków.

Funkcyę $K(s,t)$ D. Hilbert nazwał „jądrem" (Kern, noyau) równania całkowego. Jeżeli $K(s,t)$ jest funkcyą symetryczną zmiennych s i t,

$$K(s,t) = K(t,s), \tag{4}$$

natenczas, jak wykazał Hilbert, równanie $\delta(\lambda)=0$ ma zawsze szereg nieskończony pierwiastków rzeczywistych.

Twierdzenie Fredholma zachodzi w wielu przypadkach jeszcze i wtedy, jeżeli funkcye $K(s,t)$ i $f(s)$ nie są ciągłe. Całka $\int K(s,t)\,\varphi(t)\,dt$ może rozciągać się na wartości zmiennych wzdłuż pewnych krzywych; w tym przypadku dt oznacza różniczkę długości łuku.

W swych słynnych rozprawach o przejściu do granicy za pomocą metody naprzemiennej (Grenzübergang durch alternierendes Verfahren)[2] H. A. Schwarz sprowadził całkowanie równania $\Delta u = 0$ dla pola, którego obwód składa się ze skończonej liczby odcinków linij analitycznych, do całkowania tegoż równania dla szeregu pól natury bardziej prostej. W pracy niniejszej wykażę najprzód, że metoda Schwarza, rozpatrywana w świetle nowej nauki o równaniach całkowych, prowadzi do układu równań całkowych liniowych niejednorodnych.

[1]) Matematycy francuscy nazywają równania typu (2) i (3) równaniami funkcyjnemi Fredholma (Équations fonctionnelles de M. Fredholm).

[2]) Patrz H. A. Schwarz: Über einen Grenzübergang durch alternierendes Verfahren, Ges. Abh., B. 2, str. 133—143; Über die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen, Ges. Abh., B. II, s. 144—171; Auszug aus einem Briefe an Herrn F. Klein, Ges. Abh., B. 2, s. 303 - 306.

Niechaj C_1 i C_2 będą dwa pola jednospójne (Fig. 1), S_1 i S_2 krzywe ich obrotu, C najmniejsze z pól, które zawierają wszystkie punkty pól C_1 i C_2. Zakładamy, że S_1 i S_2 są linie o krzywiźnie ciągłej. Na każdej z tych dwu krzywych obieramy dowolny punkt, jako początek łuków. Na obwodzie $ABEGA$ pola C dany jest pewien ciągły szereg wartości. Niechaj wartości te będą $u_1(s)$ na łuku ABE i $u_2(s)$ na łuku EGA. Niechaj $u(x,y)$ oznacza funkcyę, czyniącą zadość równaniu $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = 0$, ciągłą wewnątrz pola C, której wartości na obwodzie tego pola mają być $u_1(s)$ i $u_2(s)$. Wartości funkcyi $u(x,y)$ na łukach ADE i AFE niechaj będą $\bar{u}_1(s)$ i $\bar{u}_2(s)$. Funkcye Greena pól C_1 i C_2 oznaczamy przez $G_1(x,y;\xi,\eta)$ i $G_2(x,y;\xi,\eta)$, lub krócej

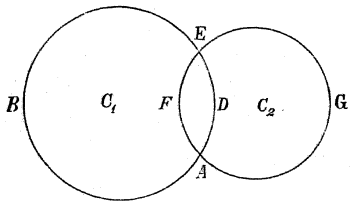

Fig. 1.

przez $G_1(s,t)$ i $G_2(s,t)$, jeżeli (x,y) i (ξ,η) są spółrzędne punktów s i t na obwodzie pól C_1 lub C_2. W punktach E i A jest:

$$u_1(s) = \bar{u}_1(s) = \bar{u}_2(s) = u_2(s). \tag{5}$$

Niechaj $G(x,y;\xi,\eta)$ będzie funkcya Greena pewnego pola C^*, $U(x,y)$ funkcya, czyniąca zadość równaniu $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$, ciągła wewnątrz C^*. Niechaj dalej t będzie dowolny punkt na obwodzie S^*, $U(t)$ wartość funkcyi $U(x,y)$ w punkcie t, dt długość elementu łuku krzywej S^*, (n_t) normalna wewnętrzna krzywej S^* w punkcie t. Niechaj wreszcie spółrzędne punktu t będą (ξ,η), spółrzędne dowolnego punktu wewnątrz C^* będą (x,y).

Natenczas, jak wiadomo, jest:

$$U(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int_{S^*} U(t)\,\frac{\partial G(x,y;\xi,\eta)}{\partial n_t}\,dt. \tag{6}$$

Zastosujmy wzór (6) do pól C_1 i C_2 i przypuśćmy, po pierwsze, że (x,y) leży na krzywej AFE, po drugie, że leży na krzywej ADE. Otrzymamy dwa równania:

$$\bar{u}_2(s) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{ABE} u_1(t)\frac{\partial G_1(s,t)}{\partial n_t}\,dt - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{ADE}\bar{u}_1(t)\frac{\partial G_1(s,t)}{\partial n_t}\,dt, \tag{7}$$

$$\bar{u}_1(s) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{AGE} u_2(t)\frac{\partial G_2(s,t)}{\partial n_t}\,dt - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{AFE}\bar{u}_2(t)\frac{\partial G_2(s,t)}{\partial n_t}\,dt. \tag{8}$$

W równaniach tych całki rozciągnięte wzdłuż krzywych ABE i AGE, są funkcyami wiadomemi zmiennej s. Oznaczmy je przez $f_2(s)$ i $f_1(s)$. Mamy zatem:

$$\bar{u}_2(s) = f_2(s) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{ADE}\bar{u}_1(t)\frac{\partial G_1(s,t)}{\partial n_t}\,dt, \tag{9}$$

$$\bar{u}_1(s) = f_1(s) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{AFE}\bar{u}_2(t)\frac{\partial G_2(s,t)}{\partial n_t}\,dt. \tag{10}$$

Równania (9) i (10) stanowią układ równań całkowych liniowych niejednorodnych. Równania te można, jak to wykazał jeszcze Fredholm, sprowadzić do jednego równania całkowego z jedną funkcyą niewiadomą. Istotnie, niechaj:

$$\left\{\begin{array}{l} u(s) = \begin{cases} \bar{u}_1(s) \text{ na krzywej } ADE, \\ \bar{u}_2(s) \;\;,, \quad ,, \quad AFE, \end{cases} \\ f(s) = \begin{cases} f_1(s) \;\;,, \quad ,, \quad ADE, \\ f_2(s) \;\;,, \quad ,, \quad AFE, \end{cases} \\ K(s,t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial G_1(s,t)}{\partial n_t} \text{ dla wartości } s \text{ na } AFE \text{ i wartości } t \text{ na } ADE, \\ \quad 0 \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad AFE, \\ \quad 0 \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ADE \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ADE, \\ -\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial G_2(s,t)}{\partial n_t} \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad AFE. \end{cases} \end{array}\right. \tag{11}$$

Równania (9) i (10) są równoważne równaniu całkowemu:

$$u(s) = f(s) + \int K(s,t)\,u(t)\,dt. \tag{12}$$

W równaniu (12) zakres zmiennych stanowią łuki ADE i AFE. Całka $\int K(s,t)\,u(t)\,dt$ rozciągnięta jest wzdłuż obu tych łuków.

Równanie (12) daje nam funkcye $\bar{u}_1(s)$ i $\bar{u}_2(s)$. Znalezienie funkcyi $u(x,y)$ nie przedstawia już najmniejszej trudności.

Równania całkowe (9) i (10) można rozwiązać za pomocą metody przybliżeń kolejnych. Ten sposób znalezienia funkcyi potencyalnej $u(x,y)$ stanowi właśnie metodę naprzemienną H. A. Schwarza. Zaznaczyć należy, że jądra $\frac{\partial G_1(s,t)}{\partial n_t}$ i $\frac{\partial G_2(s,t)}{\partial n_t}$ mają w punktach A i E punkty osobliwe wyższego rzędu.

W liście do F. Kleina, ogłoszonym w „Mathematische Annalen", w t. **21**, H. A. Schwarz posługuje się metodą naprzemienną dla rozwiązania następującego zagadnienia:

Niechaj będzie dane pole C o spójności podwójnej, którego obwód składa się z dwu linij o krzywiźnie ciągłej S_1 i S_2. Przeprowadźmy przekrój prostoliniowy A_1A_2 (fig 2) i oznaczmy długość łuku pomiędzy punktem bieżącym na S_1 i S_2 a punktem A_1 lub A_2, opisanego w kierunku, prowadzącym od osi rzędnych do osi odciętych, przez s. Niechaj l_1 i l_2 oznaczają długości całkowite krzywych S_1 i S_2.

Szukaną jest funkcya $u(x,y)$, czyniąca zadość równaniu $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, ciągła wewnątrz pola C, której wartości na obwodzie są $u_1(s)$ i $u_2(s)$. Funkcya

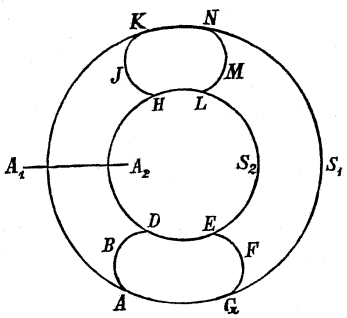

Fig. 2.

$u(x,y)$ ma posiadać wiadomy moduł peryodyczności k; $u_1(s)$ i $u_2(s)$ oznaczają funkcye ciągłe zmiennej s.

Funkcye te czynią zadość równaniom:

$$\begin{aligned} u_1(s+l_1) &= u_1(s) + k, \\ u_2(s+l_2) &= u_2(s) + k. \end{aligned} \tag{13}$$

Rozwiązanie H. A. Schwarza przedstawia się w świetle nauki o równaniach całkowych, jak następuje:

Połączmy dowolnie obrane punkty K i H, N i L, D i A, E i G (fig. 2) na krzywych S_1 i S_2 zapomocą linij o krzywiźnie ciągłej, przeprowadzonych

wewnątrz pola C. W punktach K, H,....., D krzywe te mają tę samą styczną i ten sam promień krzywizny, co krzywe S_1 i S_2. Po przeprowadzeniu przekroju A_1A_2 pole C staje się polem jednospójnem C^*. Niechaj funkcya $u(x,y)$, jednowartościowa wewnątrz pola C^*, ma na obwodzie tego pola wartości, wskazane w następującej tablicy:

$u_1(s)$ na krzywej S_1, } lub, krócej, $u(s)$ na krzywych S,
$u_2(s)$ „ „ S_2,
$v_1(s)$ „ „ LMN,
$v_2(s)$ „ „ GFE,
$w_1(s)$ „ „ KIH,
$w_2(s)$ „ „ DBA.

Niechaj $G_1(x,y;\xi,\eta)$ i $G_2(x,y;\xi,\eta)$, lub krócej $G_1(s,t)$ i $G_2(s,t)$ będą funkcye Green'a pól $C'=LMNKA_1AGFDA_2HL$ i $C''=HIKNGABDELH$. Zastosujmy do pól C' i C'' wzór (6). Otrzymamy równania:

$$(14)\quad w_1(s)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{LMN} v_1(t)\frac{\partial G_1(s,t)}{\partial n_t}\,dt-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{EFG}[v_2(t)+k]\frac{\partial G_1(s,t)}{\partial n_t}\,dt-\frac{1}{2\pi}\int u(t)\frac{\partial G_1(s,t)}{\partial n_t}\,dt,$$

$$(15)\quad w_2(s)+k=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{LMN} v_1(t)\frac{\partial G_1(s,t)}{\partial n_t}\,dt-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{EFG}[v_2(t)+k]\frac{\partial G_1(s,t)}{\partial n_t}\,dt-\frac{1}{2\pi}\int u(t)\frac{\partial G_1(s,t)}{\partial n_t}\,dt,$$

$$(16)\quad v_1(s)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{KIH} w_1(t)\frac{\partial G_2(s,t)}{\partial n_t}\,dt-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{ABD} w_2(t)\frac{\partial G_2(s,t)}{\partial n_t}\,dt-\frac{1}{2\pi}\int u(t)\frac{\partial G_2(s,t)}{\partial n_t}\,dt,$$

$$17)\quad v_2(s)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{KI} w_1(t)\frac{\partial G_2(s,t)}{\partial n_t}-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{ABD} w_2(t)\frac{\partial G_2(s,t)}{\partial n_t}\,dt-\frac{1}{2\pi}\int u(t)\frac{\partial G_2(s,t)}{\partial n_t}\,dt,$$

Całki

$$(18)\qquad \int u(t)\frac{\partial G_1(s,t)}{\partial n_t}\,dt,$$

$$(19)\qquad \int u(t)\frac{\partial G_2(s,t)}{\partial n_t}\,dt$$

należy rozciągnąć na te części krzywych S_1 i S_2, które wchodzą w skład obwodu pól C' lub C''. We wzorach (14) i (15) $u(t)$ oznacza na łukach LHA_2

i NKA_1 wartości $u_2(t)$ i $u_1(t)$, zaś na łukach A_2DE i A_1AG wartości $u_2(t)+k$ i $u_1(t)+k$. Całki (18) i (19), jak również i całka:

$$\int\limits_{EFG}\frac{\partial G_1(s,t)}{\partial n_t}\,dt$$

są funkcyami ciągłemi, wiadomemi zmiennej s. Wzorom (14), (15), (16) i (17) możemy tedy nadać kształt następujący:

$$(20)\quad \begin{cases} w_1(s)=f_1(s)-\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{LMN} v_1(t)\frac{\partial G_1(s,t)}{\partial n_t}\,dt-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{EFG} v_2(t)\frac{\partial G_1(s,t)}{\partial n_t}\,dt,\\ w_2(s)=f_2(s)-\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{LMN} v_1(t)\frac{\partial G_1(s,t)}{\partial n_t}\,dt-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{EFG} v_2(t)\frac{\partial G_1(s,t)}{\partial n_t}\,dt,\\ v_1(s)=\varphi_1(s)-\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{KIH} w_1(t)\frac{\partial G_2(s,t)}{\partial n_t}\,dt-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{ABD} w_2(t)\frac{\partial G_2(s,t)}{\partial n_t}\,dt,\\ v_2(s)=\varphi_2(s)-\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{KIH} w_1(t)\frac{\partial G_2(s,(t)}{\partial n_t}\,dt-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{ABD} w_2(t)\frac{\partial G_2(s,t)}{\partial n_t}\,dt. \end{cases}$$

Równania (20) stanowią układ równań całkowych liniowych niejednorodnych; $w_1(s)$, $w_2(s)$, $v_1(s)$, $v_2(s)$ są funkcye niewiadome. Jądra $\frac{\partial G_1(s,t)}{\partial n_t}$ i $\frac{\partial G_2(s,t)}{\partial n_t}$ są funkcyami ciągłemi obu zmiennych. Niechaj $w_1(s)$, $w_2(s)$; $v_1(s)$, $v_2(s)$ czynią zadość równaniom (20), lub gdyby równania te nie miały rozwiązań, równaniom całkowym jednorodnym, które otrzymamy, zakładając, że $f_1(s)=f_2(s)=\varphi_1(s)=\varphi_2(s)=0$. Z równania (14) wnosimy, że $w_1(s)$ jest wartością, którą funkcya potencyalna, ciągła wewnątrz pola C', równa $u(s)$ na łukach LHA_2 i NKA_1, $u(s)+k$ na łukach A_2DE i A_1AG, $v_1(s)$ na łuku NML i $v_2(s)+k$ na łuku GFE, przyjmuje na krzywej KIH. W punktach H i K jest więc $w_1(s)=u(s)$. Podobną własność mają funkcye $w_2(s)$, $v_1(s)$ i $v_2(s)$ w punktach A, D; N, L; E, G.

Z chwilą, gdyśmy znaleźli funkcye $v_1(s)$, $v_2(s)$, $w_1(s)$, $w_2(s)$, zagadnienie Schwarza jest rozwiązane. Równania (20) są zawsze rozwiązalne. W przeciwnym bowiem razie, równania, którebyśmy otrzymali, zakładając $u(s)=0$, $k=0$, miałyby rozwiązanie nierówne tożsamościowo zeru. Co za tem idzie, otrzymalibyśmy funkcyę potencyalną ciągłą i jednowartościową wewnątrz pola C, równą zeru na obwodzie i nierówną tożsamościowo zeru.

Niechaj początek spółrzędnych leży wewnątrz pola, ograniczonego krzywą S_2. Niechaj r i φ będą spółrzędne biegunowe punktów na płaszczyźnie. Szukaną jest funkcya potencyalna $u(x,y)=u(r,\varphi)$, ciągła wewnątrz pola C,

przyjmująca pewien przepisany szereg wartości $u_1(s)$ i $u_2(s)$ na obwodzie i czyniąca zadość równaniu:

$$u(r, \varphi + 2\pi) = k\, u(r, \varphi).$$

$u_1(s)$ i $u_2(s)$ są funkcye ciągłe zmiennej u, czyniące zadość równaniom:

$$u_1(s + l_1) = k u(s_1),$$
$$u_2(s + l_2) = k u_2(s).$$

k jest pewna stała rzeczywista.

Zagadnienie powyższe prowadzi do układu równań całkowych liniowych, podobnego do układu (14), . . , (17). Zamiast $v_2(t)+k$, $w_2(s)+k$ należy napisać $kv_2(t)$ i $kw_2(s)$. Prócz tego należy we wzorach (14), . . , (17) nadać funkcyi $u(t)$ wartości $u_2(t)$ i $u_1(t)$ na łukach LHA_2 i NKA_1 i wartości $ku_2(t)$ $ku_1(t)$ na łukach A_2DE i A_1AG.

Zachodzi jeden z dwu następujących przypadków możliwych. Albo zagadnienie ma jedno tylko rozwiązanie bez względu na to, jakie są funkcye ciągłe $u_1(s)$ i $u_2(s)$, albo też istnieje skończona liczba funkcyj potencyalnych ciągłych wewnątrz pola C, równych zeru na obwodzie i czyniących zadość równaniu:

$$u(r, \varphi + 2\pi) = k u(r, \varphi).$$

W podobny sposób można rozwiązać zagadnienie następujące, bardziej, ogólne. Szukane są dwie funkcye potencyalne, ciągłe wewnątrz pola C, $U(r, \varphi)$ i $V(r, \varphi)$, przyjmujące wartości przepisane $u_1(s)$, $v_1(s)$ i $u_2(s)$, $v_2(s)$ na obwodzie i czyniące zadość równaniom:

$$(21) \quad \begin{cases} U(r, \varphi + 2\pi) = c_1 U(r, \varphi) + c_2 V(r, \varphi), \\ V(r, \varphi, + 2\pi) = c_3 U(r, \varphi) + c_4 V(r, \varphi). \end{cases}$$

c_1, c_2, c_3, c_4 są wielkości stałe, rzeczywiste, których wyznacznik jest różny od zera. Funkcye $u_1(s), \ldots, v_1(s)$ są ciągłe i czynią zadość równaniom:

$$(22) \quad \begin{cases} u_1(s+l_1) = c_1 u_1(s) + c_2 v_1(s), \quad u_2(s+l_2) = c_1 u_2(s) + c_2 v_2(s), \\ v_1(s+l_1) = c_3 u_1(s) + c_4 v_1(s), \quad v_2(s+l_2) = c_3 u_2(s) + c_4 v_2(s). \end{cases}$$

Zagadnienie prowadzi do układu ośmiu równań całkowych liniowych, których jądra są funkcyami ciągłemi.

I tu mogą zachodzić dwa rozmaite przypadki. Albo zagadnienie ma zawsze jedno tylko rozwiązanie, albo też istnieje liczba skończona układów funkcyj U i V, równych zeru na obwodzie i czyniących zadość równaniom (21).

Metoda naprzemienna H. A. Schwarza daje się zastosować do całkowania równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych li tylko wtedy, jeżeli całka, równa zeru na obwodzie, tem samem już musi być równa zeru wewnątrz całego pola. Wyżej wskazałem na niektóre zastosowania metody

naprzemiennej, jakie uczynił sam H. A. Schwarz. E. Picard zastosował metodę tę do całkowania równań różniczkowych typu:

$$(23) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0, \quad c \leqq 0,$$

$$(24) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y, u), \quad \frac{\partial F}{\partial u} > 0.$$

Tak równanie (23) jak i równanie (24) mają własność zasadniczą, o której przed chwilą wspomniałem.

Jakeśmy wskazali w tej pracy, metoda Schwarza prowadzi do szeregu równań całkowych liniowych. W tej formie metoda Schwarza nie jest już zależna od warunku szczególnego, podanego wyżej, i daje się stosować do całkowania najogólniejszych równań różniczkowych liniowych drugiego rzędu o pochodnych cząstkowych typu eliptycznego.

Niechaj:

$$(25) \quad L(u) \equiv a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu = g$$

będzie takie równanie; $a, b, c, \ldots, g$ są funkcye ciągłe zmiennych x i y; a, b i c mają pochodne cząstkowe ciągłe pierwszego i drugiego rzędu, d i e takież pochodne pierwszego rzędu, f i g czynią zadość warunkowi Höldera:

$$(26) \quad \begin{cases} |f(x+k, y+h) - f(x, y)| < \text{const.}[|k| + |h|]^\lambda, \quad 0 < \lambda < 1, \\ |g(x+k, y+h) - g(x, y)| < \text{const.}[|k| + |h|]^\lambda, \quad 0 < \lambda < 1. \end{cases}$$

Prócz tego jest $ac - b^2 = 1$.

Niechaj C będzie pole jednospójne, zawarte wewnątrz koła, którego promień nie przenosi pewnej wartości określonej. Natenczas, jak to wykazałem na innem miejscu [1], równanie (25) ma jednę tylko całkę, ciągłą wewnątrz pola C i przyjmującą dowolny ciągły szereg wartości na obwodzie. Niechaj $s = (\bar{x}, \bar{y})$ i $t = (x, y)$ będą dwa różne punkty wewnątrz pola C. Przypuśćmy na chwilę, że pochodne $\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}$ czynią zadość warunkowi Höldera. Równanie:

$$(27) \quad M(u) \equiv \frac{\partial^2 (au)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 (bu)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (cu)}{\partial y^2} - \frac{\partial (du)}{\partial x} - \frac{\partial (eu)}{\partial y} + fu = 0$$

ma całkę $G(\bar{x}, \bar{y}; x, y)$, równą zeru na obwodzie i równą

$$(28) \quad \frac{1}{2} \log \left[c(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x})^2 - 2b(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x})(y - \bar{y}) + a(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y})^2 \right] + F(x, y)$$

[1]) W pracy jeszcze nie ogłoszonej drukiem.

w blizkości punktu $(\bar{x}, \bar{y})$. $F(x,y)$ oznacza funkcyę ciągłą. Niechaj wartość całki $U(\bar{x}, \bar{y}) = U(s)$ na obwodzie będzie $u(t)$. Natenczas zachodzi wzór:

$$(29) \quad U(s) = U(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2\pi}\iint G(\bar{x}, \bar{y}; x, y)\, g(x,y)\, dxdy - \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial G(s,t)}{\partial n_t} u(t) dt.$$

Wzór (29) zachodzi jeszcze i wtedy, jeżeli pochodne $\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}$ nie czynią zadość warunkowi Höldera. Funkcya $G(\bar{x}, \bar{y}; x, y)$ nie jest już wtedy całką równania (27).

Wzór (6) stanowi przypadek szczególny wzoru ogólnego (29). Metoda, wyłożona w pracy niniejszej, daje się z łatwością zastosować do równania (25) i prowadzi do następującego twierdzenia.

Niechaj C będzie pole jedno lub wielospójne, którego obwód stanowi układ krzywych zamkniętych $S_1, S_2, \ldots, S_n$ o krzywiźnie ciągłej, nie przecinających się i nie stykających się ze sobą. Natenczas zachodzi jeden z dwu przypadków następujących: albo równanie (25) ma jednę tylko całkę, ciągłą wraz z jej pochodnemi cząstkowemi pierwszego i drugiego rzędu wewnątrz pola C i przyjmującą dowolny ciągły szereg wartości na obwodzie; albo też istnieje liczba skończona całek równania $L(u) = 0$, równych zeru na obwodzie i nierównych tożsamościowo zeru wewnątrz pola.

26-go grudnia 1909 r.

W. SIERPIŃSKI.

Uwaga do twierdzenia Riemanna o szeregach warunkowo zbieżnych.

(Remarque sur le théorème de Riemann relatif aux séries semiconvergentes.)

Jeżeli szereg nieskończony jest zbieżny, ale nie bezwzględnie (t. j. jeżeli szereg jest zbieżny, ale odpowiedni szereg wartości bezwzględnych jest rozbieżny), to, jak dowiódł Riemann, można w nim tak zmienić porządek składników, żeby sumą powstałego przez to szeregu była dowolna, dana naprzód liczba.

Ze sposobu, w jaki Riemann dowodzi tego twierdzenia [1] — a dowód ten z pozostawieniem myśli przewodniej i nieznacznemi tylko zmianami powtarzany jest przez większość podręczników, traktujących o szeregach — wynika, że taką dowolną zmianę wartości sumy szeregu warunkowo zbieżnego można osiągnąć, zmieniając stosunkową częstość jego składników dodatnich i ujemnych.

Okazuje się jednak, że ten sam wynik osiągnięty być może z pozostawieniem bez zmiany stosunkowej częstości składników różnego znaku, jedynie przez taką zmianę uporządkowania składników szeregu warunkowo zbieżnego, przy której każdy składnik zostaje zastąpiony przez składnik tego samego znaku. Celem niniejszego artykułu jest właśnie dowód tego twierdzenia.

Niech $$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots \quad (1)$$

[1]) Bernhard Riemann's Gesammelte mathematische Werke. Lipsk 1892, str. 235.