E. LANDAU.

Über die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze der Herren Hardy und Axer.

(O znaczeniu niektórych nowych twierdzeń Hardy'ego i Axera o wartościach granicznych.)

Einleitung.

Die folgenden Betrachtungen gehen von der analytischen Zahlentheorie aus. Sie knüpfen an zwei Sätze der Primzahltheorie an, welche — längst vermutet — zuerst im Jahre 1896 durch die Herren Hadamard und de la Vallée Poussin bewiesen wurden:[1]

Erstens

(1) $$\sum_{p \leqq x} \log p = x + o(x);$$

zweitens

(2) $$\sum_{p \leqq x} \frac{\log p}{p} = \log x + E + o(1),$$

wo E eine absolute Konstante[2] bedeutet.

[1]) Über die Bezeichnungen und das Historische vergl. mein *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* [Leipzig und Berlin (Teubner), 1909].

[2]) Übrigens ist

$$E = -C - \sum_{p} \frac{\log p}{p(p-1)},$$

wo p alle Primzahlen durchläuft und C die Euler'sche Konstante bezeichnet, so dass (2) auch so geschrieben werden kann:

Aus (1) und (2) folgt unmittelbar

$$(3)\qquad x\sum_{p\leqq x}\frac{\log p}{p}-\sum_{p\leqq x}\log p = x\log x+(E-1)\,x+o\,(x)\,.$$

Natürlich folgt auch aus (2) und (3) sofort (1), desgleichen aus (1) und (3) unmittelbar (2).

Aus (2) lässt sich leicht auf elementarem Wege (durch partielle Summation) (1) herleiten, so dass (1) nicht tiefer liegt als (2). Diesen — natürlich nicht neuen — Übergang werde ich der Vollständigkeit wegen in § 1 ausführen.

Andererseits ist der historische Verlauf gewesen, dass (1) keinen Moment früher als (2) entdeckt wurde. Sondern Herr de la Vallée Poussin[1] entwickelte aus der Tiefe seiner Untersuchungen über die Zetafunktion heraus zunächst (3); aus (3) gelangte er alsdann durch eine sehr feine elementare Schlussweise zu (1); damit war zugleich, wie er auch besonders betonte, (2) bewiesen.

Dieser Übergang des Herrn de la Vallée Poussin von (3) zu (1) lässt sich nun durch die Anwendung eines allgemeinen Limessatzes ersetzen.

Herr Hardy[2] hat nämlich die folgende Entdeckung gemacht:

Es sei a_n $(n=1,\ 2,\ldots)$ *eine Folge reeller*[3] *Grössen und summabel erster*[4] *Ordnung; d. h., wenn*

$$\sum_{p\leqq x}\frac{\log p}{p-1}=\log x-C+o\,(1)\,.$$

Es kommt aber auf den Wert der Konstanten E für meine gegenwärtigen Zwecke gar nicht an, und es wäre auch vor 1896 ein Leichtes gewesen, zu beweisen: Wenn der Grenzwert

$$\lim_{x=\infty}\left(\sum_{p\leqq x}\frac{\log p}{p}-\log x\right)$$

existiert, so ist er gleich dem obigen E.

[1]) Vergl. seine im Litteraturverzeichnis des Handbuchs mit 2 bezeichnete Abhandlung, S. 247—250.

[2]) *Theorems relating to the Summability and Convergence of Slowly Oscillating Series* [Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. II, Bd. VIII (1910), S. 301—320], S. 302—307.

[3]) Der Fall komplexer a_n würde nicht mehr besagen; d. h. der Satz für komplexe a_n ist richtig und eine unmittelbare Folge des Satzes für reelle a_n. Daher nehme ich im Text gleich die a_n reell an.

[4]) Auch im Falle der Summabilität zweiter oder dritter, ..., allgemein r-ter Ordnung (wo r irgend eine positive ganze Zahl ist) hat Herr Hardy die obige Thatsache bewiesen, d. h. unter der Annahme (4) die Konvergenz festgestellt.

$$\sum_{m=1}^{n} a_m = s_n$$

gesetzt wird, es existiere

$$\lim_{n=\infty}\frac{s_1+\ldots+s_n}{n}=s\,.$$

Es sei ferner

$$(4)\qquad a_n=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Dann konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\lim_{n=\infty} s_n$$

(*und ist natürlich* $=s$).

Ich werde nun in § 2 einen etwas weitergehenden Satz (III) beweisen; dieser unterscheidet sich von dem Hardy'schen nur dadurch, dass die Annahme (4), d. h.

$$|\,n\,a_n\,|\leqq c$$

($n\,a_n$ beschränkt) durch die geringere

$$n\,a_n\geqq -c$$

($n\,a_n$ nach unten beschränkt) ersetzt ist[1]).

Im § 3 werde ich zeigen, dass der (von analytischer Zahlentheorie freie) Satz III des § 2 ohne weiteres gestattet, von (3) zu (1) (und damit zu (2)) überzugehen. Ich bemerke aber ausdrücklich, dass die Betrachtungen des § 2, die zu jenem Satze III führen, im Grunde genommen nichts anderes sind als die von Herrn de la Vallée Poussin für den Übergang von (3) zu (1) a. a. O. angewandte Schlusskette in herauspräparierter und etwas vereinfachter Form. Allerdings ist bereits der oben zitierte Hardy'sche Satz von hohem Interesse.[2])

Ganz analog hatte ich seinerzeit zwei allgemeine Limessätze der Differentialrechnung aus den scharfsinnigen Schlüssen herauspräpariert, durch wel-

---

[1]) Entsprechend beweise ich am Ende des § 2 auch den in der vorigen Anmerkung genannten Hardy'schen Satz mit der obigen geringeren Annahme.

[2]) Herr Hardy (l. c., S. 308) hat z. B. ausdrücklich eine für Vorlesungszwecke sehr wichtige Anwendung auf die Theorie der Fourier'schen Reihen hervorgehoben, die im einfachsten Fall folgendermassen lautet. Es sei $f(x)$ überall stetig und habe die Periode 2π. Im Intervall $(0\ldots 2\pi)$ sei $f(x)$ von beschränkter Variation. Dann besagt Dirichlets klassisches Theorem, dass die zugehörige Fourier'sche Reihe überall konvergiert und $=f(x)$ ist. Herr Hardy beweist es jetzt einfacher so: Nach dem Fejér'schen Theorem— welches die Annahme der beschränkten Variation nicht einmal erfordert—ist die Fourier'-

che Herr Hadamard[1] am Ende seines berühmten Beweises zu (1) gelangt. Nicht von (3) aus; denn diese Zwischenstation kam bei seinem Beweise nicht vor. Vielmehr kam er aus der Tiefe zu der auch bei Herrn de la Vallée Poussin (zwischen (3) und (1) in anderer Gestalt) auftretenden Relation

$$\sum_{p \leqq x} \log p \, \log \frac{x}{p} = x + o(x) \tag{5}$$

und von hier aus elementar zu (1). Seine für diesen Übergang von (5) zu (1) benutzten Schlüsse verwandte ich[2] dann zur Aufstellung zweier neuen Limessätze der Differentialrechnung, die ich in § 4 nennen werde (Sätze VI und VII). Ebenda werde ich deren Beziehungen zu den Sätzen des § 2 untersuchen und dort schliesslich einen Satz (VIII) beweisen, der sowohl jene Sätze VI, VII als auch den wesentlichsten Satz aus § 2 (Satz I, der dort unmittelbar zum Satz III führte) enthält.

Im § 5 werde ich zeigen, dass (an Stelle jenes Limessatzes VII der Differentialrechnung) auch der Satz III aus § 2 gestattet, den Übergang von (5) zu (1) zu machen; es ist dabei unter a_n eine andere Funktion zu verstehen wie in § 3 beim Übergange von (3) zu (1).

Ich war davon ausgegangen, die verschiedenen Möglichkeiten zu be-

---

sche Reihe für $f(x)$ überall summabel erster Ordnung; nach dem zweiten Mittelwertsatz ist ihr n-tes Glied $= O\left(\frac{1}{n}\right)$, da ja $f(x) = g(x) - h(x)$ mit monotonen $g(x)$, $h(x)$ ist und für $n \geqq 1$ z. B.

$$\int_0^{2\pi} g(x) \cos nx \, dx = g(0) \int_0^{\xi} \cos nx \, dx + g(2\pi) \int_{\xi}^{2\pi} \cos nx \, dx$$

$$= g(0) \frac{\sin n\xi}{n} - g(2\pi) \frac{\sin n\xi}{n},$$

$$\left| \int_0^{2\pi} g(x) \cos nx \, dx \right| \leqq \frac{|g(0)| + |g(2\pi)|}{n}$$

ist. Daher ist nach dem Hardy'schen Satz die Fourier'sche Reihe für alle x konvergent (und $= f(x)$). Dieser Beweis ist einfacher als jede der älteren Beweisanordnungen, weil bekanntlich der Konvergenzbeweis des Dirichlet'schen Integrals viel komplizierter ist als der des Fejér'schen Integrals. Bei diesem ist der Faktor von f unter dem Integralzeichen ein Quadrat, d. h. stets $\geqq 0$, bei jenem beider Vorzeichen fähig; daran liegt es. Im Übrigen pflegt man ja jetzt in Vorlesungen und Lehrbüchern über diesen Gegenstand das Fejér'sche Theorem ohnedies zu beweisen.

[1]) Vergl. **4**, S. 217—218.

[2]) Vergl. **34**, S. 218—221; Handbuch, S. 260—261.

sprechen, um von (3) zu (1) und (2) überzugehen. Nun sei von (1) und (2) selbst die Rede. Schon oben erwähnte ich, dass aus (2) leicht (1) hergeleitet werden kann. Die ganze Sache hat nun eine überraschende Wendung durch eine kürzlich erschienene schöne Arbeit von Herrn Axer[1] bekommen, der allerdings von ganz anderen Problemen spricht, aber ein hier anwendbares Werkzeug geschaffen hat. Herr Axer hat einen allgemeinen Limessatz bewiesen, der (worauf ich ihn brieflich bald nach seiner Mitteilung des Satzes aufmerksam machte) es gestattet, elementar von (1) zu (2) überzugehen, so dass die Sätze (1) und (2) äquivalent sind; es erscheint also jetzt begreiflich, dass man (1) nicht früher als (2) entdeckt hat. Im § 6 werde ich den Axer'schen Satz nennen und für ihn diejenigen neuen Beweisanordnungen angeben, auf die er in seiner Abhandlung[2] anspielt. Im § 7 leite ich (2) aus (1) her und gebe noch eine andere Anwendung.

Ich beziehe mich bei diesen ausführlichen Darlegungen nur auf diejenige Fassung des Axer'schen Satzes, welche sich auf den natürlichen Rationalitätsbereich beschränkt und bei der ein gewisser Parameter (der bei Herrn Axer jeden reellen Wert haben kann) $= 1$ ist. Das ist nämlich der Kern des von Herrn Axer gefundenen schönen Resultates. Im Falle des Parameters r — den ich kurz in § 8 nachtrage — und des beliebigen algebraischen Zahlkörpers — den ich, auch mit dem Parameter r, nur der Vollständigkeit wegen im § 9 kurz behandle — würde der Leser die Beziehung zu klassischen Stellen einer allmählich entstandenen Litteratur vermissen, was gerade das Interessante an (1), (2), (3) ausmacht. Mich persönlich freut es natürlich ganz besonders, dass Herr Axer so erfolgreich im Gebiete der analytischen Idealtheorie thätig gewesen ist, in welchem ich die ersten Schwierigkeiten überwunden und schliesslich die Analoga zu den Hauptsätzen der analytischen Zahlentheorie bewiesen hatte, ohne bisher von irgend einer Seite Mitarbeit gefunden zu haben. Indem ich dem Leser das Studium der Axer'schen Arbeit (schon mit Rücksicht auf die interessanten dort ausgeführten Beispiele) empfehle, möchte ich doch hier wenigstens ein Ergebnis daraus nennen, weil es auch im natürlichen Rationalitätsbereich neu ist und weil der Leser meines Handbuchs aus einer Stelle daselbst[3] ersehen wird, dass ich es nicht einmal vermutet hatte. Ich[4] hatte zuerst für einen beliebigen Zahlkörper bewiesen, dass

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \mu(\mathfrak{n}) = o(x) \tag{6}$$

---

[1]) *Beitrag zur Kenntnis der zahlentheoretischen Funktionen* $\mu(n)$ *und* $\lambda(n)$ [Prace matematyczno-fizyczne, Bd. XXI (1910), S. 65—95].

[2]) S. 72, Anm. 1.

[3]) S. 590, Z. 13.

[4]) Vergl. **14**, S. 554—565.

und

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}} = o(1) \tag{7}$$

ist. Dass (6) aus (7) elementar folgt, ist ziemlich trivial; dass aber (7) aus (6) elementar folgt, habe ich erst aus Herrn Axers Abhandlung gelernt. Als ich (7) zum ersten Male bewiesen habe, musste ich dazu über

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \mu(\mathfrak{n})$$

eine schärfere Relation als (6) entwickeln.

Im § 10 spreche ich von einem wichtigen Satze, den man Herrn Marcel Riesz verdankt und der in Zusammenhang mit dem Vorangehenden steht.

Im § 11 spreche ich von den analytischen Hilfsmitteln, welche zum Beweis der in meiner vorliegenden Abhandlung behandelten asymptotischen Gesetze in der Verteilung der Primzahlen und der Werte von $\mu(n)$ benutzt zu werden pflegen.

§ 1.

In diesem Paragraphen soll der einfache Übergang von (2) zu (1) gezeigt werden.

Wenn

$$\sum_{p \leqq x} \frac{\log p}{p} = F(x)$$

und

$$F(x) - \log x - E = \delta(x)$$

gesetzt wird, ist nach (2)

$$\delta(x) = o(1),$$

und es ergiebt sich

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leqq x} \log p$$

$$= \sum_{n=2}^{x} n\,(F(n) - F(n-1))^{1)}$$

1) Eine Summe $\sum\limits_{n=v}^{w}$ bedeute stets 0, falls $w < v$ ist, dagegen $\sum\limits_{n=[v]}^{[w]}$, falls $w \geqq v$ ist.

$$= \sum_{n=2}^{x} n \left(\log \frac{n}{n-1} + \delta(n) - \delta(n-1)\right)$$

$$= -\sum_{n=2}^{x} n \log\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \sum_{n=2}^{x} \delta(n)\,(n-(n+1)) - 2\,\delta(1) + \delta([x])\,([x]+1)$$

$$= \sum_{n=1}^{x} n \cdot \frac{1}{n} + O \sum_{n=1}^{x} n \cdot \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{x} \delta(n) + o(x)$$

$$= [x] + O(\log x) + o(x) + o(x)$$

$$= x + o(x).$$

§ 2.

In diesem Paragraphen soll die verschärfte Form des Hardy'schen Satzes zunächst für $r=1$ und dann für allgemeines r bewiesen werden. Das wird durch Satz III und Satz IV geschehen, denen zwei vorbereitende Sätze I und II vorangeschickt werden sollen.

Satz I: *Es sei $P(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine Folge von Zahlen $\geqq 0$; es werde (der Bequemlichkeit[1] wegen auch für nicht ganze x)*

$$\sum_{n=1}^{x} P(n) = R(x)$$

gesetzt. Es sei

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{R(n)}{n} = g\,x + o(x), \tag{8}$$

wo g eine Konstante[2] ist. Dann ist

$$R(x) = g\,x + o(x). \tag{9}$$

Mit anderen Worten: Wenn für ganzzahlig wachsendes m

$$\lim_{m=\infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} \frac{R(n)}{n} = g$$

1) Die Voraussetzung (8) bedeutet genau dasselbe, falls man x ganzzahlig oder stetig variabel nimmt. Desgleichen die Behauptung (9).

2) Eo ipso ist alsdann $g \geqq 0$.

ist, so ist

$$\lim_{m=\infty} \frac{R(m)}{m} = g$$

unter der Annahme, dass

$$0 \leqq R(1) \leqq R(2) \leqq \ldots$$

ist.

Beweis: δ sei irgend eine positive Konstante. Dann ist nach (8), worin ja $x + \delta x$ statt x geschrieben werden kann,

$$\sum_{n=1}^{x+\delta x} \frac{R(n)}{n} = g\,(1+\delta)\,x + o(x)\,,$$

also, wenn (8) hiervon subtrahiert wird,

$$\sum_{n=x+1}^{x+\delta x} \frac{R(n)}{n} = g\,\delta x + o(x)$$

$$= x\,(g\,\delta + o(1))\,. \tag{10}$$

Da die $P(n) \geqq 0$ sind, also $R(x)$ mit wachsendem x niemals abnimmt, ist einerseits

$$\sum_{n=x+1}^{x+\delta x} \frac{R(n)}{n} \geqq \sum_{n=x+1}^{x+\delta x} \frac{R(x)}{x+\delta x}$$

$$= \frac{R(x)}{x+\delta x}\,([x+\delta x] - [x])$$

$$= R(x) \left(\frac{\delta}{1+\delta} + o(1)\right), \tag{11}$$

andererseits

$$\sum_{n=x+1}^{x+\delta x} \frac{R(n)}{n} \leqq \sum_{n=x+1}^{x+\delta x} \frac{R(x+\delta x)}{x}$$

$$= \frac{R(x+\delta x)}{x}\,([x+\delta x] - [x])$$

$$= R(x+\delta x)\,(\delta + o(1))\,. \tag{12}$$

Aus (10) und (11) ergiebt sich:

$$R(x) \leqq x\,\frac{g\,\delta + o(1)}{\frac{\delta}{1+\delta} + o(1)}\,,$$

$$\frac{R(x)}{x} \leqq g\,(1+\delta) + o(1)\,,$$

d. h.

$$\limsup_{x=\infty} \frac{R(x)}{x} \leqq g\,(1+\delta)$$

für alle $\delta > 0$, folglich

$$\limsup_{x=\infty} \frac{R(x)}{x} \leqq g\,. \tag{13}$$

Aus (10) und (12) ergiebt sich

$$R(x+\delta x) \geqq x\,\frac{g\,\delta + o(1)}{\delta + o(1)}\,,$$

$$\frac{R(x+\delta x)}{x} \geqq g + o(1),$$

$$\frac{R(x+\delta x)}{x+\delta x} \geqq \frac{g}{1+\delta} + o(1)\,,$$

folglich, wenn x durch $\frac{x}{1+\delta}$ ersetzt wird,

$$\frac{R(x)}{x} \geqq \frac{g}{1+\delta} + o(1)\,,$$

d. h.

$$\liminf_{x=\infty} \frac{R(x)}{x} \geqq \frac{g}{1+\delta}$$

für alle $\delta > 0$ und daher

$$\liminf_{x=\infty} \frac{R(x)}{x} \geqq g\,. \tag{14}$$

(13) und (14) besagen zusammengenommen

$$\lim_{x=\infty} \frac{R(x)}{x} = g\,,$$

womit (9), d. h. der Satz I bewiesen ist.

Satz II: *Es sei $P(n)$ $(n=1, 2, \ldots)$ eine Folge reeller Zahlen, die nach unten beschränkt sind:*

$$P(n) \geqq -c.$$

Es werde

$$\sum_{n=1}^{x} P(n) = R(x)$$

gesetzt und für ein konstantes[1] g

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{R(n)}{n} = gx + o(x) \tag{8}$$

vorausgesetzt. Dann ist

$$R(x) = gx + o(x). \tag{9}$$

Man sieht, dass hierin der Satz I als Spezialfall $c=0$ enthalten ist. Andererseits wird dieser Satz II aus dem zuvor bewiesenen Satz I unmittelbar folgen.

Beweis: Wenn die für kein n negative Zahl

$$P(n) + c = \overline{P}(n)$$

gesetzt wird und

$$\sum_{n=1}^{x} \overline{P}(n) = \overline{R}(x)$$

eingeführt wird, so ist für $x \geqq 0$

$$\overline{R}(x) = \sum_{n=1}^{x} P(n) + \sum_{n=1}^{x} c$$

$$= R(x) + c[x],$$

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{\overline{R}(n)}{n} = \sum_{n=1}^{x} \frac{R(n)}{n} + \sum_{n=1}^{x} c$$

$$= gx + o(x) + cx$$

$$= (g+c)x + o(x),$$

[1]) Eo ipso ist $g \geqq -c$.

also nach Satz I

$$\overline{R}(x) = (g+c)x + o(x),$$

$$R(x) = gx + o(x),$$

was zu beweisen war.

Satz III: *Es erfülle eine Folge reeller Zahlen a_n $(n=1, 2, \ldots)$ folgende zwei Voraussetzungen:*

Erstens sei sie summabel erster Ordnung; d. h.,

$$s_n = a_1 + \ldots + a_n$$

gesetzt, es habe

$$\frac{s_1 + \ldots + s_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} s_m$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_k$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k (n-k+1)$$

$$= \frac{n+1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k a_k$$

$$= \frac{n+1}{n} s_n - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k a_k$$

für $n=\infty$ einen Limes s.

Zweitens sei $n a_n$ nach unten beschränkt; d. h. bei passender Wahl eines konstanten c sei für alle $n = 1, 2, \ldots$

$$n a_n \geqq -c. \tag{15}$$

Alsdann ist

$$\lim_{n=\infty} s_n = \lim_{n=\infty} \sum_{m=1}^{n} a_m$$

vorhanden und

$$\lim_{n=\infty} s_n = s. \tag{16}$$

Beweis: Es ist

$$\frac{s_1 + \ldots + s_n}{n} = s_n - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (k-1)\, a_k . \tag{17}$$

Die Voraussetzung

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_1 + \ldots + s_n}{n} = s \tag{18}$$

liefert also, wenn das Zeichen o sich auf Funktionen der ganzzahlig wachsenden Variablen n (später m) bezieht,

$$s + o(1) = s_n - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (k-1)\, a_k , \tag{19}$$

so dass die Behauptung (16) mit

$$\sum_{k=1}^{n} (k-1)\, a_k = o(n) \tag{20}$$

gleichbedeutend ist.

(20) wird nun folgendermassen bewiesen. Es werde für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$(n-1)\, a_n = P(n)$$

gesetzt, so dass nach (15)

$$P(n) = \frac{n-1}{n}\, n a_n$$

nach unten beschränkt ist. Es werde ferner

$$\sum_{n=1}^{x} P(n) = R(x)$$

gesetzt. Dann ist nach (19)

$$\frac{R(n)}{n} = s_n - s + o(1),$$

also

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{R(n)}{n} = \sum_{n=1}^{m} s_n - ms + o(m)$$

und daher, wenn (18) nochmals angewendet wird,

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{R(n)}{n} = o(m) .$$

Der Satz II, in welchem $g = 0$ zu nehmen ist, liefert hieraus

$$\lim_{n=\infty} \frac{R(n)}{n} = 0,$$

was mit der Behauptung (20) übereinstimmt.

Satz IV: *Es erfülle eine Folge reeller Zahlen* a_n $(n = 1, 2, \ldots$ *folgende zwei Voraussetzungen:*

Erstens sei sie für ein gewisses positiv-ganzzahliges r *summabel* r*-ter Ordnung im Hölder'schen Sinne*[1]. *D. h., wenn*

$$s_n = a_1 + \ldots + a_n ,$$

$$s_n^{(1)} = \frac{s_1 + \ldots + s_n}{n} ,$$

$$s_n^{(2)} = \frac{s_1^{(1)} + \ldots + s_n^{(1)}}{n} ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s_n^{(r)} = \frac{s_1^{(r-1)} + \ldots + s_n^{(r-1)}}{n}$$

gesetzt wird, so sei

$$\lim_{n=\infty} s_n^{(r)} = s .$$

Zweitens sei $n a_n$ *nach unten beschränkt:*

$$n a_n \geqq -c .$$

Alsdann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

konvergent, d. h.

$$s_n = s + o(1) .$$

---

[1]) Summabilität r-ter Ordnung im Cesàro'schen Sinne bedeutet dasselbe, wie zuerst Herr Schnee bewiesen hat; vergl. seine Abhandlung *Die Identität des Cesàroschen und Hölderschen Grenzwertes* [Mathematische Annalen, Bd. LXVII (1909), S. 110—125]. Ein zweiter Beweis wurde kürzlich von Herrn Ford gegeben: *On the Relation between the Sum-Formulas of Hölder and Cesàro* [American Journal of Mathematics, Bd. XXXII (1910), S. 315—326]. Übrigens führt Herr Hardy den Beweis seines Satzes bei Summabilität r-ter Ordnung (unter der Annahme $|n a_n| \leqq c$ statt (15)) für den Cesàro'schen Grenzwert.

Erster Beweis: Der Beweis ist durch vollständige Induktion geführt, wenn gezeigt werden kann, dass

$$\lim_{n=\infty} s_n^{(r-1)} = s$$

ist.

Nach Voraussetzung ist $n a_n$ nach unten beschränkt, also $(n-1)\, a_n$ desgleichen ($\geqq -b$). Die Identität

(17) $$\frac{s_1+\ldots+s_n}{n} = s_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(k-1)\, a_k$$

bedeutet

$$s_n^{(1)} = s_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(k-1)\, a_k$$

und liefert weiter durch successive Mittelbildung

$$s_n^{(2)} = \frac{s_1^{(1)}+\ldots+s_n^{(1)}}{n}$$

$$= \frac{s_1+\ldots+s_n}{n} - \frac{1}{n}\sum_{n_1=1}^{n}\frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n_1}(k-1)\, a_k$$

$$= s_n^{(1)} - \frac{1}{n}\sum_{n_1=1}^{n}\frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n_1}(k-1)\, a_k,$$

$$s_n^{(3)} = s_n^{(2)} - \frac{1}{n}\sum_{n_2=1}^{n}\frac{1}{n_2}\sum_{n_1=1}^{n_2}\frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n_1}(k-1)\, a_k,$$

. . . .

$$s_n^{(r)} = s_n^{(r-1)} - \frac{1}{n}\sum_{n_{r-1}=1}^{n}\frac{1}{n_{r-1}}\sum_{n_{r-2}=1}^{n_{r-1}}\frac{1}{n_{r-2}}\cdots\sum_{n_1=1}^{n_2}\frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n_1}(k-1)\, a_k$$

(21) $$= s_n^{(r-1)} - \frac{R(n)}{n},$$

wo $R(n)$ eben hierdurch als jene r-fache Summe erklärt sei.

Aus der für alle $n \geqq 1$ giltigen Ungleichung

$$(n-1)\, a_n \geqq -b$$

ergiebt sich für alle $n \geqq 1$

$$P(n) = R(n) - R(n-1)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{n_{r-2}=1}^{n}\frac{1}{n_{r-2}}\cdots\sum_{n_1=1}^{n_2}\frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n_1}(k-1)\, a_k$$

$$\geqq -b;$$

d. h. $P(n)$ ist nach unten beschränkt. Aus (21) folgt nun durch nochmalige Mittelbildung

$$s_n^{(r+1)} = s_n^{(r)} - \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{R(m)}{m},$$

$$s + o(1) = s + o(1) - \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{R(m)}{m},$$

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{R(m)}{m} = o(n);$$

der Satz II liefert also

$$\frac{R(n)}{n} = o(1);$$

nach (21) ist daher

$$\lim_{n=\infty} s_n^{(r-1)} = s,$$

d. h. die gegebene Reihe summabel $(r-1)$-ter Ordnung. Damit ist, wie schon am Anfang bemerkt, der Satz IV bewiesen.

Dem zweiten Beweise des Satzes IV möge ein Hilfssatz[1]) vorausgeschickt werden:

---

[1]) Sowohl diesen Satz V als die Art, auf welche er nachher zum Übergang vom Satz III zum Satz IV verwendet wird, habe ich nur dadurch erhalten, dass Herr Bohr mir mit Beweis u. a. folgendes mitteilte: Erstens, dass aus der Beschränktheit von $n\,(b_n - b_{n-1})$ die Beschränktheit von $n\,(c_n - c_{n-1})$ folgt; zweitens, dass infolgedessen aus dem Hardy'schen Satz mit $r=1$ der Hardy'sche Satz mit beliebigem r sofort folgt. Ich hatte nur nötig, in den Bohr'schen Beweisen statt von Beschränktheit jetzt von Beschränktheit nach unten zu sprechen und an den entsprechenden Stellen der Formeln statt des absoluten Betrages runde Klammern zu setzen, um zum Satz V und zum Übergang vom Satz III zum Satz IV auf Grund des Satzes V zu gelangen. Beides muss also Herrn Bohr zugeschrieben werden.

Satz V: *Es möge eine Folge reeller Zahlen* $b_0 = 0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots$ *die Ungleichung*

(22) $$n\,(b_n - b_{n-1}) \geqq -c \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

erfüllen, wo $c \geqq 0$ *ist. Es werde* $c_0 = 0$ *und für* $n \geqq 1$

$$\frac{b_1 + \ldots + b_n}{n} = c_n$$

gesetzt. Dann ist für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$n\,(c_n - c_{n-1}) \geqq -c\,.$$

Beweis des Satzes V: Es werde für $n \geqq 1$

$$a_n = b_n - b_{n-1}$$

gesetzt.

Für $n = 1$ ist

$$\begin{aligned} n\,(c_n - c_{n-1}) &= c_1 \\ &= b_1 \\ &\geqq -c\,. \end{aligned}$$

Für $n \geqq 2$ ergiebt sich

$$\begin{aligned} n\,(c_n - c_{n-1}) &= n\left(\frac{b_1 + \ldots + b_n}{n} - \frac{b_1 + \ldots + b_{n-1}}{n-1}\right) \\ &= b_n - \frac{b_1 + \ldots + b_{n-1}}{n-1} \\ &= a_1 + \ldots + a_n - \frac{(n-1)\,a_1 + (n-2)\,a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1} \\ &= a_2\,\frac{1}{n-1} + a_3\,\frac{2}{n-1} + \ldots + a_{n-1}\,\frac{n-2}{n-1} + a_n\,\frac{n-1}{n-1}\,. \end{aligned}$$

Nach (22) ist nun

$$a_2 \geqq -\frac{c}{2} \geqq -c, \quad a_3 \geqq -\frac{c}{3} \geqq -\frac{c}{2}, \ \ldots, \quad a_n \geqq -\frac{c}{n} \geqq -\frac{c}{n-1};$$

man erhält also

$$\begin{aligned} n\,(c_n - c_{n-1}) &\geqq -\frac{c}{n-1} - \frac{c}{n-1} - \ldots - \frac{c}{n-1} \\ &= -c\,, \end{aligned}$$

womit der Satz V bewiesen ist.

Daraus ergiebt sich nun der zweite Beweis des Satzes IV: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf $c \geqq 0$ angenommen werden. Der (schon bewiesene) Satz III lässt sich auch so formulieren: Aus[1)]

$$n\,(s_n - s_{n-1}) \geqq -c \qquad (n \geqq 1)$$

und der Existenz von

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_1 + \ldots + s_n}{n} = s$$

folgt

$$\lim_{n=\infty} s_n = s\,.$$

Dieser Wortlaut lässt sich nun auf diejenige Zahlenfolge anwenden, welche entsteht, wenn $s_n^{(r-1)}$ statt s_n geschrieben wird. Erstens folgt nämlich durch wiederholte Anwendung des Satzes V aus

$$n\,(s_n - s_{n-1}) \geqq -c$$

für alle $n \geqq 1$

$$\begin{aligned} & n\,(s_n^{(1)} - s_{n-1}^{(1)}) \geqq -c\,, \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & n\,(s_n^{(r-1)} - s_{n-1}^{(r-1)}) \geqq -c\,. \end{aligned}$$

Zweitens ist nach Voraussetzung

$$\lim_{n=\infty} s_n^{(r)} = s\,,$$

d. h.

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_1^{(r-1)} + \ldots + s_n^{(r-1)}}{n} = s\,.$$

Daher ist nach Satz III

$$\lim_{n=\infty} s_n^{(r-1)} = s\,,$$

womit durch vollständige Induktion der Satz IV bewiesen ist.

§ 3.

In diesem Paragraphen soll mit Hilfe des Satzes III der Übergang von

(3) $$x \sum_{p \leqq x} \frac{\log p}{p} - \sum_{p \leqq x} \log p = x \log x + (E-1)\,x + o\,(x)$$

---

1) Es möge s_0 Null bedeuten, desgl. $s_0^{(1)}, \ldots, s_0^{(r-1)}$.

zu

(1) $$\sum_{p \leqq x} \log p = x + o(x)$$

ausgeführt werden.

Ich setze

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{\log n - 1}{n} & \text{für } n = \text{Primzahl}, \\ -\dfrac{1}{n} & \text{für die anderen ganzen } n \geqq 1. \end{cases}$$

Dann ist

$$\sum_{n=1}^{x} a_n = \sum_{p \leqq x} \frac{\log p}{p} - \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n}$$

$$= \sum_{p \leqq x} \frac{\log p}{p} - \log x - C + o(1)$$

und

$$\sum_{n=1}^{x} n a_n = \sum_{p \leqq x} \log p - \sum_{n=1}^{x} 1$$

$$= \vartheta(x) - x + O(1),$$

also nach (3)

$$(x+1) \sum_{n=1}^{x} a_n - \sum_{n=1}^{x} n a_n$$

$$= x \sum_{p \leqq x} \frac{\log p}{p} + \sum_{p \leqq x} \frac{\log p}{p} - x \log x - Cx + o(x) - \vartheta(x) + x$$

$$= x \sum_{p \leqq x} \frac{\log p}{p} - \vartheta(x) - x \log x - (C-1)x + o(x)$$

$$= (E - C)x + o(x);$$

da dies insbesondere für ganzzahlig wachsendes x gilt, ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

summabel erster Ordnung und der zugehörige

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_1 + \ldots + s_n}{n} = E - C.$$

Andererseits ist offenbar $n a_n$ nach unten beschränkt (nämlich $\geqq -1$). Der Satz III ergiebt also die Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

genauer:

$$\sum_{n=1}^{x} a_n = E - C + o(1),$$

$$\sum_{p \leqq x} \frac{\log p}{p} = \log x + C + (E - C) + o(1)$$

(2) $$= \log x + E + o(1)$$

und damit die Relation (1).

Dass Herr de la Vallée Poussin von (3) aus zuerst zu (1) und dann erst durch Kombination von (1), (3) zu (2) gelangt war, erklärt sich durch einen Blick auf den obigen Beweis des Satzes III. Denn die dabei unterwegs erhaltene Relation (20), d. h.

$$\sum_{n=1}^{x} (n-1) a_n = o(x),$$

bedeutet für den vorliegenden Fall wegen der trivialen Abschätzung

$$\sum_{n=1}^{x} a_n = o(x),$$

dass

$$\sum_{n=1}^{x} n a_n = o(x),$$

d. h.

$$\sum_{p \leqq x} \log p - \sum_{n=1}^{x} 1 = o(x),$$

also

(1) $$\sum_{p \leqq x} \log p = x + o(x)$$

ist.

§ 4.

In diesem Paragraphen soll ein früherer Satz von mir (Limessatz der Differentialrechnung), den ich für Zwecke der Primzahltheorie abgeleitet hatte, mit den Sätzen des § 2 in Verbindung gebracht werden. Jener Satz hatte ursprünglich folgenden Wortlaut[1]:

Satz VI: *Es sei die reelle Funktion $f(x)$ für $x > x_0$ definiert, stetig und differentiierbar. Es nehme $xf'(x)$ für $x > x_0$ mit wachsendem x niemals ab; d. h. für $x_0 < x < \bar{x}$ sei*

$$xf'(x) \leqq \bar{x} f'(\bar{x}).$$

Es sei ferner

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 .$$

Dann existiert

$$\lim_{x=\infty} f'(x),$$

und es ist

$$\lim_{x=\infty} f'(x) = 1 .$$

Dieser Satz VI gestattet z. B.[2], wenn $c_n \geqq 0$ für $n = 1, 2, \ldots$ und λ eine ganze Zahl $\geqq 1$ ist, aus

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \frac{1}{(\lambda+1)!} \sum_{n=1}^{x} c_n \log^{\lambda+1}\left(\frac{x}{n}\right) = 1 \tag{23}$$

auf

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \frac{1}{\lambda!} \sum_{n=1}^{x} c_n \log^{\lambda}\left(\frac{x}{n}\right) = 1 \tag{24}$$

zu schliessen, da für

$$f(x) = \frac{1}{(\lambda+1)!} \sum_{n=1}^{x} c_n \log^{\lambda+1}\left(\frac{x}{n}\right)$$

nebst $x_0 = 0$ genau die Voraussetzungen des Satzes VI erfüllt sind und

$$f'(x) = \frac{1}{x} \frac{1}{\lambda!} \sum_{n=1}^{x} c_n \log^{\lambda}\left(\frac{x}{n}\right)$$

ist. Er gestattet jedoch nicht, für $\lambda = 0$ den Übergang zu machen, da das betreffende

$$f(x) = \sum_{n=1}^{x} c_n \log \frac{x}{n}$$

zwar für nicht ganzzahlige $x > 0$ differentiierbar ist, mit dem Ergebnis

$$f'(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{x} c_n ,$$

aber für ganzzahlige x nicht notwendig differentiierbar ist. Auch für ganzzahlige positive x ist jedoch der vordere Differentialquotient $f'_+(x)$ vorhanden und

$$f'_+(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{x} c_n ,$$

und ich konnte den Übergang von (23) zu (24) im Falle $\lambda = 0$ doch mit Hilfe eines Limessatzes der Differentialrechnung machen, den ich a. a. O [1] als Verallgemeinerung von VI mit folgendem Wortlaut bewies:

Satz VII: *Es sei die reelle Funktion $f(x)$ für $x > x_0$ definiert und stetig. Es existiere $f'(x)$ für alle $x > x_0$ mit etwaiger Ausnahme einer Folge von Punkten ohne Häufungsstelle im Endlichen; d. h. $f'(x)$ existiere für*

$$x_0 < x < x_1, \quad x_1 < x < x_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1} < x < x_n, \quad \ldots,$$

wo x_n mit n ins Unendliche wächst. In den Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ existiere der vordere Differentialquotient $f'_+(x)$ (dessen Existenz also für alle $x > x_0$ vorausgesetzt wird). Die Funktion $x f'_+(x)$ nehme für $x > x_0$ mit wachsendem x niemals ab.

Es sei ferner

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 .$$

---

[1]) Der Leser, welcher den Satz nicht kennt, braucht den Beweis nicht anderweitig nachzulesen, da er weiter unten im Beweise des Satzes VIII mitenthalten sein wird. Der Satz VI steht zuerst in meiner Abhandlung **34**, S. 218—219 bewiesen. Statt des Limeswertes 1 könnte natürlich irgend eine andere Konstante $g > 0$ stehen, da man im Falle $g > 0$ den Satz VI nur auf $\frac{f(x)}{g}$ anzuwenden braucht.

[2]) **34**, S. 221—223.

[1]) **34**, S. 220 — 221. Den Beweis braucht der Leser a. a. O. nicht nachzulesen, da ich nachher mit Satz VIII mehr beweisen werde.

Dann existiert

$$\lim_{x=\infty} f'_+(x),$$

und es ist

$$\lim_{x=\infty} f'_+(x) = 1.$$

Wenn auch Satz VII allgemeiner ist als Satz VI, so ist jener doch nur durch die Bedürfnisse einer ganz speziellen Anwendung entstanden, und es mögen daher die Erörterungen an Satz VI anknüpfen. Da fällt nun zunächst eine grosse Analogie zum Satz I auf, der ja den Kern der Sätze des § 2 ausmachte. Der Satz I, wenn darin $g=1$ gesetzt wird[1]), und der Satz VI (bei dem ich gleich $g=1$ gesetzt hatte und natürlich $x_0=0$ annehmen darf) lauten, nebeneinandergestellt, folgendermassen:

Satz I.	Satz VI.
Es sei $$\lim_{m=\infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} \frac{R(n)}{n} = 1$$	Es sei $$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} f(x) = 1$$
und[2]) $$R(1) \leqq R(2) \leqq \ldots.$$	und für $0 < x < \bar{x}$ $$x f'(x) \leqq \bar{x} f'(\bar{x}).$$
Dann ist $$\lim_{m=\infty} \frac{R(m)}{m} = 1.$$	Dann ist $$\lim_{x=\infty} f'(x) = 1.$$

Der Wortlaut ist, wie man sieht, wörtlich derselbe, wenn links Differenz $\left(\text{nämlich } \sum_{n=1}^{m} - \sum_{n=1}^{m-1}\right)$, rechts Differentialquotient genommen wird. Anders ausgedrückt[3]): Wenn links Summe, rechts Integral genommen wird.

[1]) Der Satz I besagt für jedes konstante $g > 0$ genau dasselbe wie für $g=1$. Allerdings war er oben auch für $g=0$ bewiesen. Von diesem Werte spreche ich hier nicht, weil der Satz VI (desgl. VII) a. a. O. nur für den Limeswert 1 (d. h. $g > 0$), nicht auch für $g=0$ bewiesen wurde; Satz VI (desgl. VII) ist aber auch für $g=0$ richtig, und die Beweismethode bleibt dann wörtlich dieselbe. Das wird auch nachher durch Satz VIII miterledigt werden.

[2]) A. a. O. hiess es zwar ausserdem noch $0 \leqq R(1)$. Doch ist dies unerheblich, da man ja die etwaigen negativen Anfangsglieder passend abändern kann.

[3]) Diese Ausdrucksweise ist korrekt; denn, da $x f'(x)$ monoton ist, ist von jedem positiven x an $x f'(x)$ integrabel, also $f'(x)$ integrabel.

Es liegt also nahe zu fragen, ob man nicht einen Wortlaut angeben kann, der beide Sätze (I und VI) umfasst. In der That liefert genau meine alte Beweismethode für die Sätze VI und VII den folgenden Satz VIII, den ich erst beweisen werde, um dann zu zeigen, dass er die Sätze I und VI, auch VII, enthält.

Satz VIII: *Es sei eine reelle Funktion $F(x)$ für $x \geqq 1$ definiert, und es sei $x F(x)$ mit wachsendem x niemals abnehmend, so dass*

$$\int_1^x F(u)\,du$$

für $x \geqq 1$ einen Sinn hat. Es sei bei konstantem[1]) g

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \int_1^x F(u)\,du = g.$$

Dann ist

$$\lim_{x=\infty} F(x) = g.$$

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf angenommen werden, dass $x F(x)$ mit x unendlich wird; denn sonst strebt $F(x)$ gegen 0, und die Behauptung ist trivial. Es sei $\delta > 0$ gegeben. Wegen

$$\int_1^x F(u)\,du = gx + o(x)$$

ist

$$\int_1^{x+\delta x} F(u)\,du = g(1+\delta)x + o(x),$$

also

$$\int_x^{x+\delta x} F(u)\,du = g\delta x + o(x). \tag{25}$$

Nun ist für $1 \leqq x \leqq u \leqq x + \delta x$

$$x F(x) \leqq u F(u) \leqq (x+\delta x) F(x+\delta x),$$

[1]) Eo ipso ist dann $g \geqq 0$. Denn entweder wächst $x F(x)$ für $x=\infty$ über alle Grenzen (so dass $F(x)$ von einem gewissen x an positiv, also $g \geqq 0$ ist), oder $x F(x)$ hat für $x=\infty$ einen endlichen Grenzwert (so dass $F(x)$ gegen 0 strebt, also $g=0$ ist).

$$\frac{x}{u}\, F(x) \leqq F(u) \leqq \frac{x+\delta x}{u}\, F(x+\delta x),$$

also für alle hinreichend grossen x (wenn nur $F(x) \geqq 0$ ist)

$$\frac{1}{1+\delta}\, F(x) \leqq F(u) \leqq (1+\delta)\, F(x+\delta x).$$

(25) liefert also erstens

$$\frac{1}{1+\delta}\, F(x)\, \delta x \leqq g\, \delta x + o(x),$$

$$F(x) \leqq g(1+\delta) + o(1),$$

$$\limsup_{x=\infty} F(x) \leqq g(1+\delta),$$

(26) $$\limsup_{x=\infty} F(x) \leqq g,$$

zweitens

$$(1+\delta)\, F(x+\delta x)\, \delta x \geqq g\, \delta x + o(x),$$

$$F(x+\delta x) \geqq \frac{g}{1+\delta} + o(1),$$

$$F(x) \geqq \frac{g}{1+\delta} + o(1),$$

$$\liminf_{x=\infty} F(x) \geqq \frac{g}{1+\delta},$$

(27) $$\liminf_{x=\infty} F(x) \geqq g.$$

Zusammengenommen besagen (26) und (27), dass

$$\lim_{x=\infty} F(x) = g$$

ist.

Damit ist der Satz VIII bewiesen. Er enthält offenbar den Satz I als folgenden Spezialfall:

$$F(x) = \frac{R(m)}{m} \quad \text{für} \quad m \leqq x < m+1 \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots),$$

d. h.

$$F(x) = \frac{R(x)}{[x]} \quad \text{für} \quad x \geqq 1.$$

In der That ist dann wegen

$$0 \leqq R(1) \leqq R(2) \leqq \ldots$$

$x\,F(x)$ mit wachsendem x niemals abnehmend. Ferner ist für $x \geqq 1$, da $F(x)$ streckenweise konstant ist,

$$\int_1^x F(u)\, du = \frac{R(1)}{1} + \frac{R(2)}{2} + \ldots + \frac{R(x)}{[x]} + \frac{R(x)}{[x]}\,(x-[x]-1),$$

und hierin erstens wegen der Annahme

$$\lim_{m=\infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} \frac{R(n)}{n} = g$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{R(1)}{1} + \frac{R(2)}{2} + \ldots + \frac{R(x)}{[x]}\right) = g,$$

zweitens wegen

$$|\, x-[x]-1 \,| \leqq 1$$

offenbar[1])

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x}\, \frac{R(x)}{[x]}\,(x-[x]-1) = 0.$$

Es ist also

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \int_1^x F(u)\, du = g,$$

und der Satz VIII ergiebt

$$\lim_{x=\infty} F(x) = g,$$

d. h. die Behauptung des Satzes I.

[1]) Denn aus

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{R(n)}{n} = g\,m + o(m)$$

folgt

$$\sum_{n=1}^{m-1} \frac{R(n)}{n} = g\,(m-1) + o(m),$$

$$\frac{R(m)}{m} = o(m).$$

Ebenso ist der Satz VII (und damit auch der Satz VI) folgendermassen als Spezialfall des Satzes VIII aufzufassen. Unter den Voraussetzungen des Satzes VII, bei denen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x_0 < 1$ angenommen werden darf, werde für $x \geqq 1$

$$F(x) = f'_+(x)$$

gesetzt. Dann ist für $x \geqq 1$, wenn zwischen 1 und x die Ausnahmepunkte $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_l$ liegen,

$$f(x) - f(1) = (-f(1) + f(x_k)) + (-f(x_k) + f(x_{k+1})) + \ldots + (-f(x_l) + f(x))$$

$$= \int_1^{x_k} f'(u)\,du + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(u)\,du + \ldots + \int_{x_l}^{x} f'(u)\,du \quad {}^{1)}$$

$$= \int_1^{x_k} f'_+(u)\,du + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'_+(u)\,du + \ldots + \int_{x_l}^{x} f'_+(u)\,du \quad {}^{2)}$$

$$= \int_1^{x} f'_+(u)\,du$$

$$= \int_1^{x} F(u)\,du.$$

Die Voraussetzung

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{x} = g,$$

wo $g \geqq 0$ ist, liefert also

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \int_1^x F(u)\,du = g.$$

Nach Satz VIII ist daher

$$\lim_{x=\infty} F(x) = g,$$

$$\lim_{x=\infty} f'_+(x) = g.$$

[1]) Uneigentliche Integrale, da $f'(u)$ in den Ausnahmepunkten nicht zu existieren braucht.

[2]) Jetzt sind es eigentliche Integrale.

Was hier als Satz VIII formuliert wurde, ist einfach als Interpretation der Schlussweise anzusehen, welche Herr de la Vallée Poussin an einer Stelle[1]) seines Übergangs von (3) zu (1) verwandte. Von (3) war er nämlich zuerst zu der (übrigens mit (5) gleichbedeutenden[2])) Gleichung

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \int_1^x \frac{\vartheta(u)}{u}\,du = 1$$

gelangt, und sein Übergang hiervon zu

$$\lim_{x=\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1$$

ist dem obigen Beweise des Satzes VIII völlig gleichwertig, indem Herr de la Vallée Poussin über $\vartheta(x)$ thatsächlich nur benutzt, dass es mit wachsendem x niemals abnimmt.

Der Satz VIII lässt sich leicht zu folgendem Satz erweitern, von dem er den Spezialfall $r = 1$ darstellt:

Satz IX: *Es sei $F(x)$ für $x \geqq 1$ reell und $x\,F(x)$ mit wachsendem x nicht abnehmend. Es werde*

$$\frac{1}{x} \int_1^x F(u)\,du = F_1(x),$$

$$\frac{1}{x} \int_1^x F_1(u)\,du = F_2(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{x} \int_1^x F_{r-1}(u)\,du = F_r(x),$$

also[3])

[1]) L. c., S. 248 – 250.

[2]) In der That ist $\sum_{p \leqq x} \log p \log \frac{x}{p} = \sum_{p \leqq x} \log p \int_p^x \frac{du}{u} = \int_1^x \frac{du}{u} \sum_{p \leqq u} \log p$ $= \int_1^x \frac{\vartheta(u)}{u}\,du.$

[3]) Dieses Analogon zum Hölder'schen r-fachen Mittel einer Zahlenfolge hat bereits du Bois-Reymond zu anderen Zwecken betrachtet: *Ueber den Convergenzgrad der variablen Reihen und den Stetigkeitsgrad der Functionen zweier Argumente* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. C (1887), S. 331—358], S. 354—358.

$$F_r(x) = \frac{1}{x} \int_1^x \frac{dx_1}{x_1} \int_1^{x_1} \frac{dx_2}{x_2} \cdots \int_1^{x_{r-1}} F(x_r)\, dx_r$$

gesetzt.

Es sei

$$\lim_{x=\infty} F_r(x) = g\,.$$

Dann ist

$$\lim_{x=\infty} F(x) = g\,.$$

Beweis: Da $x F(x)$ mit wachsendem x niemals abnimmt, sind nur zwei Fälle möglich.

1) Erstens kann $x F(x)$ für $x = \infty$ einen endlichen Grenzwert haben. Dann konvergiert $F(x)$ gegen 0, und die Behauptung ist trivial, da auch $F_r(x)$ gegen Null konvergiert.

2) Zweitens kann $x F(x)$ über alle Grenzen wachsen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf angenommen werden, dass es von Anfang an (für alle $x \geqq 1$) positiv ist. Dann ist $F(x)$ von Anfang an positiv; folglich wächst $x F_1(x)$ mit x, und $F_1(x)$ ist für alle $x > 1$ positiv; folglich wächst $x F_2(x)$ mit x, und $F_2(x)$ ist für alle $x > 1$ positiv; ...; folglich wächst $x F_{r-1}(x)$ mit x. Aus

$$\lim_{x=\infty} F_r(x) = g\,,$$

d. h.

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \int_1^x F_{r-1}(u)\, du = g\,,$$

folgt also nach Satz VIII

$$\lim_{x=\infty} F_{r-1}(x) = g\,.$$

Hieraus wird auf Grund von Satz VIII successive ebenso weitergeschlossen, bis zu

$$\lim_{x=\infty} F(x) = g\,.$$

Es sei zum Satz VIII noch Folgendes bemerkt. Sein Beweis ist offenbar nicht gerade darauf basiert, dass das Produkt der speziellen Funktion x mit $F(x)$ für wachsendes $x \geqq 1$ niemals abnimmt. Es könnte statt x auch z. B. x^2 oder $x \log(x+1)$ stehen. Schon in meiner früheren Arbeit[1] hatte ich bemerkt, dass man die beiden Sätze VI und VII viel allgemeiner fassen kann, und dass ich nur vorzog, sie gerade so zu formulieren, wie sie für die dortigen Anwendungen am bequemsten gebraucht werden konnten. Hier sei dies ausgeführt, da die Grenzwertsätze an sich betrachtet werden. Was die ohne Mühe erreichbare grösste Allgemeinheit betrifft, so hatte Herr Knopp, dem ich den Satz VI[1] vorher mitgeteilt hatte, mir bereits in einem Briefe vom 27. 11. 1907 die betreffende Modifikation des Satzes VI angegeben: statt x darf irgend eine positive Funktion $\varphi(x)$ stehn, welche für $x > x_0$ mit wachsendem x niemals abnimmt und die für zu 0 abnehmendes δ die Bedingung

$$\lim_{\delta=0} \limsup_{x=\infty} \frac{\varphi(x+\delta x)}{\varphi(x)} = 1$$

erfüllt. Genau dies lässt sich auch beim Satz VIII anbringen, und ich will daher zum Schluss dieses Paragraphen den so entstehenden Satz (wörtlich durch die obige Beweismethode) herleiten:

Satz X: *Es sei eine reelle Funktion $F(x)$ für $x \geqq 1$ definiert. Es sei $\varphi(x)$ für $x = 1$ positiv und nehme mit wachsendem $x \geqq 1$ nie ab; es sei für zu 0 abnehmendes δ*

$$\lim_{\delta=0} \limsup_{x=\infty} \frac{\varphi(x+\delta x)}{\varphi(x)} = 1\,.$$

Es nehme $\varphi(x) F(x)$ für wachsendes $x \geqq 1$ niemals ab, so dass

$$\int_1^x F(u)\, du$$

für $x \geqq 1$ einen Sinn hat. Es sei

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \int_1^x F(u)\, du = g\,.$$

Dann ist

$$\lim_{x=\infty} F(x) = g\,.$$

Vorbemerkung: Die Limesvoraussetzung über das als nie abnehmend angenommene $\varphi(x)$ enthält natürlich speziell, dass für alle hinreichend kleinen positiven δ

[1] **34**, S. 218, Anm. 57.

[1] In damaliger Bezeichnung Satz III.

$$\limsup_{x=\infty} \frac{\varphi(x+\delta x)}{\varphi(x)} = \psi(\delta)$$

endlich ist, und das erfordert natürlich, dass der lim sup für alle $\delta > 0$ endlich ist. Insbesondere ist jene Voraussetzung erfüllt, wenn für alle $\delta > 0$

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x+\delta x)}{\varphi(x)}$$

existiert und bei zu 0 abnehmendem δ gegen 1 konvergiert.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf angenommen werden, dass $\varphi(x) F(x)$ mit x unendlich wird; denn sonst strebt $F(x)$ gegen einen endlichen Limes, und die Behauptung ist trivial. Es sei $\delta > 0$ gegeben. Dann ist

$$\int_x^{x+\delta x} F(u)\, du = g(1+\delta)x + o(x) - gx,$$

$$\frac{1}{\delta x} \int_x^{x+\delta x} F(u)\, du = g + o(1).$$

Nun ist für $1 \leqq x \leqq u \leqq x + \delta x$

$$\varphi(x) F(x) \leqq \varphi(u) F(u) \leqq \varphi(x+\delta x) F(x+\delta x),$$

also für alle hinreichend grossen x (wenn nur $F(x) \geqq 0$ ist)

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+\delta x)} F(x) \leqq F(u) \leqq \frac{\varphi(x+\delta x)}{\varphi(x)} F(x+\delta x).$$

Daher ist erstens

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+\delta x)} F(x) \leqq g + o(1),$$

$$F(x) \leqq \frac{\varphi(x+\delta x)}{\varphi(x)} (g + o(1)),$$

$$\limsup_{x=\infty} F(x) \leqq g\psi(\delta),$$

$$\limsup_{x=\infty} F(x) \leqq g \lim_{\delta=0} \psi(\delta)$$

$$= g,$$

zweitens

$$\frac{\varphi(x+\delta x)}{\varphi(x)} F(x+\delta x) \geqq g + o(1),$$

$$F(x+\delta x) \geqq \frac{\varphi(x)}{\varphi(x+\delta x)} (g + o(1)),$$

$$\liminf_{x=\infty} F(x+\delta x) \geqq \frac{g}{\psi(\delta)},$$

$$\liminf_{x=\infty} F(x) \geqq \frac{g}{\psi(\delta)},$$

$$\liminf_{x=\infty} F(x) \geqq g \lim_{\delta=0} \frac{1}{\psi(\delta)}$$

$$= g.$$

Folglich ist, wie behauptet,

$$\lim_{x=\infty} F(x) = g.$$

§ 5.

In diesem Paragraphen sollen verschiedene Arten der Übergangs von

$$\sum_{p \leqq x} \log p \log \frac{x}{p} = x + o(x) \tag{5}$$

zu

$$\sum_{p \leqq x} \log p = x + o(x) \tag{1}$$

dargelegt werden.

Dass umgekehrt (5) eine Folge von (1) ist, ist auf Grund der schon auf S. 123 erwähnten Identität

$$\sum_{p \leqq x} \log p \log \frac{x}{p} = \int_1^x \frac{\vartheta(u)}{u} du$$

trivial. Diese Identität setzt natürlich auch in Evidenz, dass Satz VIII einen Übergang von (5) zu (1) liefert.

Bereits der Satz VII gestattet einen solchen Übergang zu machen. Dies ergiebt sich aus dem vor dem Wortlaut des Satzes VII angedeuteten; ich will es hier direkt vorrechnen.

Es werde für $x > 0$

$$f(x) = \sum_{p \leqq x} \log p \log \frac{x}{p}$$

gesetzt. Wenn dann x keine ganze Zahl ist, ist offenbar

$$f'(x) = \sum_{p \leqq x} \log p \, \frac{d \log \frac{x}{p}}{dx}$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{p \leqq x} \log p$$

$$= \frac{\vartheta(x)}{x}.$$

Wenn x eine ganze Zahl ist, ist für $0 < h < 1$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{p \leqq x} \log p \, \frac{\log \frac{x+h}{p} - \log \frac{x}{p}}{h},$$

also

$$f'_{+}(x) = \sum_{p \leqq x} \log p \, \frac{d \log \frac{x}{p}}{dx}$$

$$= \frac{\vartheta(x)}{x}.$$

Wenn also der Punkt x_n des Satzes VII für $n = 0, 1, \ldots$ gleich n gesetzt wird, sind im Hinblick auf (5) alle Voraussetzungen des Satzes VII erfüllt. Er liefert also

$$\lim_{x=\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1,$$

d. h. (1).

Ich will nun zeigen, dass der Übergang von (5) zu (1) auch auf Grund des Satzes III ausgeführt werden kann. Es werde für $x > 0$ eine Funktion $\varepsilon(x)$ durch die Gleichung

$$\vartheta(x) = x + x\varepsilon(x)$$

definiert; dann lautet die Behauptung (1):

$$\varepsilon(x) = o(1).$$

Die Ausgangsgleichung (5) kann geschrieben werden:

$$\sum_{n=2}^{x} (\vartheta(n) - \vartheta(n-1)) \log \frac{x}{n} = x + o(x),$$

und sie liefert:

$$x + o(x) = \sum_{n=2}^{x} \log \frac{x}{n} + \sum_{n=2}^{x} (n\varepsilon(n) - (n-1)\varepsilon(n-1)) \log \frac{x}{n}$$

$$= \log x \sum_{n=2}^{x} 1 - \sum_{n=2}^{x} \log n + \sum_{n=2}^{x} n\varepsilon(n) \left(\log \frac{x}{n} - \log \frac{x}{n+1}\right) - \varepsilon(1) \log \frac{x}{2}$$

$$+ [x]\,\varepsilon([x]) \log \frac{x}{[x]+1}$$

$$= x \log x - x \log x + x + \sum_{n=2}^{x} n\varepsilon(n) \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) + o(x)$$

$$= x + \sum_{n=2}^{x} n\varepsilon(n) \frac{1}{n} + O \sum_{n=2}^{x} n \frac{1}{n^2} + o(x),$$

wobei ich für $\varepsilon(n)$ im dritten Glied[1] die Tschebyschef'sche Abschätzung

(28) $$\varepsilon(x) = O(1)$$

angewendet habe. Es ist also

$$x + o(x) = x + \sum_{n=1}^{x} \varepsilon(n) + O(\log x) + o(x),$$

$$\sum_{n=1}^{x} \varepsilon(n) = o(x).$$

Die Reihe mit der Partialsumme

$$s_n = \varepsilon(n)$$

(d. h. dem allgemeinen Glied $a_1 = \varepsilon(1)$, $a_n = \varepsilon(n) - \varepsilon(n-1)$ für $n \geqq 2$) ist also summabel erster Ordnung. Wegen

$$\vartheta(n) \geqq \vartheta(n-1)$$

[1]) Hier würde auch eine ungenauere Abschätzung genügen; aber (28) wird sofort doch gebraucht.

ist nun

$$n + n\varepsilon(n) \geqq (n-1) + (n-1)\,\varepsilon(n-1),$$

$$n\varepsilon(n) - n\varepsilon(n-1) \geqq -1 - \varepsilon(n-1),$$

d. h. für $n \geqq 2$

$$a_n = \varepsilon(n) - \varepsilon(n-1)$$

$$\geqq \frac{-1-\varepsilon(n-1)}{n},$$

also nach (28) für $n \geqq 1$

$$a_n \geqq -\frac{c}{n}.$$

Der Satz III ist daher anwendbar und liefert für ganzzahlig wachsendes n

$$\varepsilon(n) = o(1),$$

also wegen

$$x + x\varepsilon(x) = [x] + [x]\,\varepsilon([x])$$

für stetig wachsendes x

$$x\varepsilon(x) = O(1) + [x]\,\varepsilon([x])$$

$$= o(x),$$

$$\varepsilon(x) = o(1),$$

was zu beweisen war.

§ 6.

In diesem Paragraphen soll der Satz XI, d. h. der Axer'sche Satz in seiner prägnantesten Form ($r = 1$ und Körper der rationalen Zahlen) bewiesen werden. Meine beiden Beweisanordnungen weichen insofern von den beiden[1] Axer'schen Beweisen ab, als ich — wie oftmals bei derartigen Beweisen — den (natürlich nicht erst von mir herrührenden) Kunstgriff anwende: Einteilung der Gitterpunkte des Gebietes $u \geqq 1$, $v \geqq 1$, $uv \leqq c_1 c_2$ (wo $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ ist) in drei Teile: 1) $u \leqq c_1$; 2) $v \leqq c_2$; 3) (als doppelt berücksichtigt in Abrechnung zu bringen) gleichzeitig $u \leqq c_1$ und $v \leqq c_2$.

Es sei x eine positive Variable, und es werde für alle ganzen $n \geqq 1$

$$\frac{x}{n} - \left[\frac{x}{n}\right] = \rho(x, n)$$

gesetzt, so dass stets $0 \leqq \rho(x, n) < 1$ ist. Dann gilt der

Satz XI: *Es sei $f(n)$ eine zahlentheoretische Funktion, und es werde*

[1]) l. c., S. 68–72 und 87–90.

$$F(x) = \sum_{n=1}^{x} f(n),$$

$$G(x) = \sum_{n=1}^{x} |f(n)|$$

gesetzt. Es sei

(29) $$F(x) = o(x)$$

und

(30) $$G(x) = O(x).$$

Dann ist

$$\sum_{n=1}^{x} f(n)\,\rho(x, n) = o(x).$$

Vorbemerkung: Die Behauptung lässt sich auch so schreiben:

$$x\sum_{n=1}^{x}\frac{f(n)}{n} - \sum_{n=1}^{x} f(n)\left[\frac{x}{n}\right] = o(x).$$

Die Voraussetzung (30) ist im Falle

$$f(n) = O(1)$$

($f(n)$ beschränkt für alle ganzzahligen positiven n) gewiss erfüllt. Im Spezialfall

$$f(n) = \mu(n)$$

sagt also der Axer'sche Satz XI mit Rücksicht auf die bekannte, für $x \geqq 1$ giltige Identität

$$\sum_{n=1}^{x} \mu(n)\left[\frac{x}{n}\right] = 1$$

aus, dass aus

$$\sum_{n=1}^{x} \mu(n) = o(x)$$

unmittelbar folgt:

$$x\sum_{n=1}^{x}\frac{\mu(n)}{n} + O(1) = o(x),$$

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{\mu(n)}{n} = o(1),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0.$$

Hierauf habe ich in der Einleitung schon hingewiesen.

Erster Beweis: (30) bedeutet, dass nach passender Annahme einer Konstanten A für alle $x > 0$

$$G(x) < Ax$$

ist.

$\delta > 0$ sei gegeben und darf $< \frac{1}{2}$ angenommen werden. Es werde auf Grund von (29) ein $\omega = \omega(\delta) \geqq 1$ so gewählt, dass für $x \geqq \omega$ die Ungleichung

$$|F(x)| < \delta x$$

erfüllt ist. Für $x \geqq \frac{\omega}{\delta}$ ist alsdann

$$\sum_{n=1}^{x} f(n) \left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{\substack{n,m \\ nm \leqq x}} (f(n) \cdot 1)$$

$$= \sum_{n=1}^{\delta x} f(n) \sum_{m=1}^{\frac{x}{n}} 1 + \sum_{m=1}^{\frac{1}{\delta}} \sum_{n=1}^{\frac{x}{m}} f(n) - \sum_{n=1}^{\delta x} f(n) \cdot \sum_{m=1}^{\frac{1}{\delta}} 1$$

(31) $$= \sum_{n=1}^{\delta x} f(n) \left[\frac{x}{n}\right] + \sum_{m=1}^{\frac{1}{\delta}} F\left(\frac{x}{m}\right) - F(\delta x) \left[\frac{1}{\delta}\right],$$

$$\sum_{n=1}^{x} f(n) \left[\frac{x}{n}\right] - \sum_{n=1}^{\delta x} f(n) \frac{x}{n} = -\sum_{n=1}^{\delta x} f(n) \rho(x, n)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\frac{1}{\delta}} F\left(\frac{x}{m}\right) - F(\delta x) \left[\frac{1}{\delta}\right],$$

$$\left| \sum_{n=1}^{x} f(n) \left[\frac{x}{n}\right] - x \sum_{n=1}^{\delta x} \frac{f(n)}{n} \right| < \sum_{n=1}^{\delta x} |f(n)|$$

$$+ \sum_{m=1}^{\frac{1}{\delta}} \delta \frac{x}{m} + \delta \cdot \delta x \cdot \frac{1}{\delta}$$

$$= G(\delta x) + \delta x \sum_{m=1}^{\frac{1}{\delta}} \frac{1}{m} + \delta x$$

$$< A \delta x + \delta x \left(1 + \log \frac{1}{\delta}\right) + \delta x$$

(32) $$= \delta x \left(A + 2 + \log \frac{1}{\delta}\right).$$

Nun ist $\left(\text{für } x \geqq \frac{\omega}{\delta}, \text{ weil dabei eo ipso } x \geqq \frac{1}{\delta} > \frac{1}{1-\delta}, \text{ also } x > \delta x + 1 \text{ ist}\right)$

$$\sum_{n=\delta x+1}^{x} \frac{f(n)}{n} = \sum_{n=\delta x+1}^{x} \frac{F(n) - F(n-1)}{n}$$

$$= \sum_{n=\delta x+1}^{x} F(n) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{F(\delta x)}{[\delta x]+1} + \frac{F(x)}{[x]+1},$$

also

$$\left| \sum_{n=\delta x+1}^{x} \frac{f(n)}{n} \right| < \delta \sum_{n=\delta x+1}^{x} n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{\delta \cdot \delta x}{\delta x} + \frac{\delta x}{x}$$

$$= \delta \sum_{n=\delta x+1}^{x} \frac{1}{n+1} + 2\delta$$

$$= \delta \sum_{n=\delta x+2}^{x+1} \frac{1}{n} + 2\delta$$

$$< \delta \int_{[\delta x]+1}^{[x]+1} \frac{du}{u} + 2\delta$$

$$< \delta\left(\int_{\delta x}^{x}\frac{du}{u}+\int_{x}^{x+1}\frac{du}{u}\right)+2\delta$$

$$< \delta\left(\log\frac{1}{\delta}+1\right)+2\delta$$

(33) $$= \delta\log\frac{1}{\delta}+3\delta.$$

Aus (32) und (33) folgt $\left(\text{für } x \geqq \frac{\omega}{\delta}\right)$

$$\left|\sum_{n=1}^{x} f(n)\,\rho(x,n)\right| = \left|\sum_{n=1}^{x} f(n)\left[\frac{x}{n}\right] - x\sum_{n=1}^{x}\frac{f(n)}{n}\right|$$

$$= \left|\sum_{n=1}^{x} f(n)\left[\frac{x}{n}\right] - x\sum_{n=1}^{\delta x}\frac{f(n)}{n} - x\sum_{n=\delta x+1}^{x}\frac{f(n)}{n}\right|$$

$$\leqq \left|\sum_{n=1}^{x} f(n)\left[\frac{x}{n}\right] - x\sum_{n=1}^{\delta x}\frac{f(n)}{n}\right| + \left|x\sum_{n=\delta x+1}^{x}\frac{f(n)}{n}\right|$$

$$< \delta x\left(A+2+\log\frac{1}{\delta}\right)+\delta x\left(\log\frac{1}{\delta}+3\right)$$

$$= \delta x\left(A+5+2\log\frac{1}{\delta}\right);$$

daher ist

$$\limsup_{x=\infty}\left|\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{x} f(n)\,\rho(x,n)\right| \leqq \delta\left(A+5+2\log\frac{1}{\delta}\right),$$

für alle δ zwischen 0 und $\frac{1}{2}$. Da nun für zu Null abnehmendes δ

$$\lim_{\delta=0}\delta\left(A+5+2\log\frac{1}{\delta}\right)=0$$

ist, so ist die Behauptung

$$\lim_{x=\infty}\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{x} f(n)\,\rho(x,n)=0$$

bewiesen.

Zweiter Beweis: Es werde für $x>0$

$$\eta(x)=\operatorname{Max.}_{y\geqq\sqrt{x}}\frac{|F(y)|}{y}$$

gesetzt; dies Maximum existiert natürlich[1] nach (29) und hat für $x=\infty$ den Limes 0. Es werde nun für $x>0$

$$\delta(x)=\operatorname{Max.}\left(\frac{1}{\sqrt{x}},\quad\eta(x)\right)$$

gesetzt. Dann ist $\delta(x)$ stets positiv, und es ist

$$\lim_{x=\infty}\delta(x)=0.$$

Aus der Definition von $\delta(x)$ folgt, dass für $y\geqq\delta(x)\,.\,x$

$$|F(y)|\leqq\delta(x)\,.\,y$$

ist; in der That ist jenes

$$y\geqq\sqrt{x},$$

also

$$\frac{|F(y)|}{y}\leqq\eta(x)$$

$$\leqq\delta(x).$$

Aus der Identität

(31) $$\sum_{n=1}^{x} f(n)\left[\frac{x}{n}\right]=\sum_{n=1}^{\delta x} f(n)\left[\frac{x}{n}\right]+\sum_{m=1}^{\frac{1}{\delta}}F\left(\frac{x}{m}\right)-F(\delta x)\left[\frac{1}{\delta}\right]$$

(wo jetzt im Gegensatz zur ersten Beweisanordnung δ obige Funktion $\delta(x)$, keine Konstante bezeichnet) ergiebt sich nun (mit Rücksicht auf $\frac{x}{m}\geqq\delta x$ in allen Gliedern der zweiten Summe rechts)

$$\sum_{n=1}^{x} f(n)\left[\frac{x}{n}\right]=\sum_{n=1}^{\delta x} f(n)\,\frac{x}{n}+O(\delta x)\text{[2]}+O\left(\delta\sum_{m=1}^{\frac{1}{\delta}}\frac{x}{m}\right)+O\left(\delta\,.\,\delta x\,.\,\frac{1}{\delta}\right)$$

[1]) $F(y)$ ist ja zwischen je zwei konsekutiven ganzen Zahlen konstant. Übrigens würde es genügen, von der oberen Grenze statt des Maximums zu sprechen.

[2]) In der That ist

$$\left|\sum_{n=1}^{\delta x} f(n)\left(\left[\frac{x}{n}\right]-\frac{x}{n}\right)\right|\leqq\sum_{n=1}^{\delta x}|f(n)|=G(\delta x)=O(\delta x).$$

$$= x \sum_{n=1}^{\delta x} \frac{f(n)}{n} + O(\delta x) + O\left(\delta x \log \frac{1}{\delta}\right) + O(\delta x)$$

$$= x \sum_{n=1}^{x} \frac{f(n)}{n} - x \sum_{n=\delta x+1}^{x} \frac{f(n)}{n} + o(x),$$

(34) $$\sum_{n=1}^{x} f(n)\, \rho(x, n) = x \sum_{n=\delta x+1}^{x} \frac{f(n)}{n} + o(x).$$

Hierin ist

$$\sum_{n=\delta x+1}^{x} \frac{f(n)}{n} = \sum_{n=\delta x+1}^{x} F(n)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{F(\delta x)}{[\delta x]+1} + \frac{F(x)}{[x]+1}$$

$$= O\left(\delta \sum_{n=\delta x+1}^{x} n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right) + o(1) + o(1)$$

$$= O\left(\delta \sum_{n=\delta x+1}^{x} \frac{1}{n+1}\right) + o(1)$$

$$= O\left(\delta \log \frac{1}{\delta}\right) + o(1)$$

$$= o(1).$$

Daher ist nach (34)

$$\sum_{n=1}^{x} f(n)\, \rho(x, n) = o(x),$$

was zu beweisen war.

Zu diesen zwei Beweisen des Satzes XI bemerke ich noch im Spezialfall

$$f(n) = \mu(n)$$

folgendes. Für den blossen Übergang von

$$\sum_{n=1}^{x} \mu(n) = o(x)$$

zu

$$g(x) = \sum_{n=1}^{x} \frac{\mu(n)}{n}$$

$$= o(1)$$

ist nicht die ganze Kette von Schlüssen erforderlich, welche den einen oder anderen Beweis von XI ausmacht. Vielmehr — um z. B. beim ersten Beweis zu bleiben — kann man aus (32) so weiter schliessen. Wegen der für $x \geqq 1$ giltigen Gleichung

$$\sum_{n=1}^{x} \mu(n) \left[\frac{x}{n}\right] = 1$$

ist für $x \geqq \frac{\omega}{\delta}$

$$\left| x \sum_{n=1}^{\delta x} \frac{\mu(n)}{n} \right| < \delta x \left(A + 2 + \log \frac{1}{\delta}\right) + 1,$$

$$| g(\delta x) | < \delta \left(A + 2 + \log \frac{1}{\delta}\right) + \frac{1}{x};$$

also ist

$$\limsup_{x=\infty} | g(\delta x) | \leqq \delta \left(A + 2 + \log \frac{1}{\delta}\right),$$

$$\limsup_{x=\infty} | g(x) | \leqq \delta \left(A + 2 + \log \frac{1}{\delta}\right),$$

$$\limsup_{x=\infty} | g(x) | = 0,$$

$$\lim_{x=\infty} g(x) = 0,$$

$$g(x) = o(1),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0.$$

§ 7.

In diesem Paragraphen sollen einige Anwendungen des Axer'schen Satzes XI gegeben werden.

I. Zunächst soll gezeigt werden, dass mit seiner Hilfe aus

$$\sum_{p \leqq x} \log p = x + o(x) \tag{1}$$

die Relation

$$\sum_{p \leqq x} \frac{\log p}{p} = \log x + E + o(1) \tag{2}$$

folgt.

Aus (1) ergiebt sich bekanntlich unmittelbar

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{p^m \leqq x} \log p \\ &= \sum_{p \leqq x} \log p + \sum_{p \leqq \sqrt{x}} \log p + \sum_{p \leqq \sqrt[3]{x}} \log p + \dots \\ &= \vartheta(x) + \vartheta(\sqrt{x}) + \vartheta(\sqrt[3]{x}) + \dots \\ &= x + o(x). \end{aligned} \tag{35}$$

Es werde nun

$$f(n) = \begin{cases} \log p - 1 & \text{für } n = p^m, \\ -1 & \text{für die anderen ganzen } n \geqq 1 \end{cases}$$

gesetzt. Dann ist nach (35)

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=1}^{x} f(n) \\ &= \psi(x) - [x] \\ &= o(x) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{n=1}^{x} |f(n)| \\ &\leqq \psi(x) + [x] \\ &= O(x). \end{aligned}$$

Daher ist nach Satz XI

$$x \sum_{n=1}^{x} \frac{f(n)}{n} - \sum_{n=1}^{x} f(n) \left[\frac{x}{n}\right] = o(x),$$

$$x \sum_{p^m \leqq x} \frac{\log p}{p^m} - x \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n} - \sum_{p^m \leqq x} \log p \left[\frac{x}{p^m}\right] + \sum_{n=1}^{x} \left[\frac{x}{n}\right] = o(x). \tag{36}$$

Hierin ist

$$x \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n} = x \log x + Cx + o(x),$$

ferner bekanntlich

$$\sum_{n=1}^{x} \left[\frac{x}{n}\right] = x \log x + (2C-1)x + o(x)$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{p^m \leqq x} \log p \left[\frac{x}{p^m}\right] &= \sum_{n=1}^{x} \log n \\ &= x \log x - x + o(x). \end{aligned}$$

Dies alles werde in (36) eingesetzt:

$$\begin{aligned} x \sum_{p^m \leqq x} \frac{\log p}{p^m} - x \log x - Cx + o(x) - x \log x + x + o(x) + x \log x \\ + (2C-1)x + o(x) = o(x), \end{aligned}$$

$$x \sum_{p^m \leqq x} \frac{\log p}{p^m} = x \log x - Cx + o(x),$$

$$\sum_{p^m \leqq x} \frac{\log p}{p^m} = \log x - C + o(1),$$

$$\begin{aligned} \sum_{p \leqq x} \frac{\log p}{p} &= \log x - C - \sum_{\substack{p^m \leqq x \\ m \geqq 2}} \frac{\log p}{p^m} + o(1) \\ &= \log x - C - \sum_{p} \log p \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots \text{ad inf.}\right) + o(1) \\ &= \log x - C - \sum_{p} \frac{\log p}{p(p-1)} + o(1) \\ &= \log x + E + o(1). \end{aligned}$$

II. Eine andere Anwendung des Satzes XI besteht in dem

Satz XII: *Es seien aus der Folge aller positiven ganzen Zahlen zwei (aus lauter verschiedenen Zahlen bestehende) Klassen hervorgehoben und* $\rho_1(x)$ *bezw.* $\rho_2(x)$ *die Anzahl der Zahlen* $\leqq x$ *in den Klassen. Es sei ferner*

$$\lim_{x=\infty} \frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)} = 1 \tag{37}$$

und, wenn n_1 *bezw.* n_2 *die Zahlen der einen bezw. anderen Klasse durchläuft,*

$$\sum_{n_1 \leqq x} \left[\frac{x}{n_1}\right] - \sum_{n_2 \leqq x} \left[\frac{x}{n_2}\right] = gx + o(x), \tag{38}$$

wo g *konstant ist. Dann existiert*

$$\lim_{x=\infty} \left(\sum_{n_1 \leqq x} \frac{1}{n_1} - \sum_{n_2 \leqq x} \frac{1}{n_2} \right);$$

d. h. es konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=n_1,\, n_2} \frac{\pm 1}{n},$$

wo n *alle Zahlen* n_1, n_2 *der Grösse nach durchläuft und den* n_1 *das obere, den* n_2 *das untere Zeichen entspricht. Der Wert der Reihe ist* g.

Beweis: Es werde

$$f(n) = \begin{cases} 1 \text{ für } n = n_1, \\ -1 \text{ für } n = n_2, \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

gesetzt. Nach (37) ist

$$\lim_{x=\infty} \frac{\rho_1(x) - \rho_2(x)}{\rho_2(x)} = 0,$$

also a fortiori [1)]

$$\lim_{x=\infty} \frac{\rho_1(x) - \rho_2(x)}{x} = 0,$$

d. h.

$$F(x) = \sum_{n=1}^{x} f(n)$$

$$= \rho_1(x) - \rho_2(x)$$

$$= o(x),$$

[1)] Überhaupt würde es genügen, statt (37) die hier folgende Gleichung vorauszusetzen

ferner

$$G(x) = \sum_{n=1}^{x} |f(n)|$$

$$\leqq \sum_{n=1}^{x} 1$$

$$= O(x).$$

Nach (38) ist

$$\sum_{n=1}^{x} f(n) \left[\frac{x}{n}\right] = gx + o(x).$$

Der Satz XI ergiebt also

$$x \sum_{n=1}^{x} \frac{f(n)}{n} = gx + o(x),$$

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{f(n)}{n} = g + o(1).$$

Damit ist der Satz XII bewiesen. Wenn speziell die beiden Klassen durch $\mu(n_1) = 1$ bezw. $\mu(n_2) = -1$ definiert sind (d. h. das $f(n)$ des Beweises $= \mu(n)$ ist), besagt er offenbar genau die schon oben aus Satz XI gefolgerte Thatsache, dass aus

$$M(x) = \sum_{n=1}^{x} \mu(n)$$

$$= o(x)$$

die Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n}$$

folgt. In der That ist bei diesem Beispiel, wenn $Q(x)$ die Anzahl der quadratfreien Zahlen $\leqq x$ bezeichnet,

$$\rho_1(x) - \rho_2(x) = M(x),$$

$$\rho_1(x) + \rho_2(x) = Q(x),$$

also für $x \geqq 2$

$$\frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)} = \frac{Q(x) + M(x)}{Q(x) - M(x)}$$

$$= \frac{1+\frac{M(x)}{Q(x)}}{1-\frac{M(x)}{Q(x)}},$$

und wegen der bekannten Relation [1)]

$$Q(x) = \frac{6}{\pi^2}\, x + o(x)$$

ist

$$\lim_{x=\infty} \frac{M(x)}{Q(x)} = 0,$$

also

(37) $$\lim_{x=\infty} \frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)} = 1.$$

Natürlich ist die Feststellung der Giltigkeit von (37) für die Erledigung dieses Spezialfalls $f(n) = \mu(n)$ unnötig.

§ 8.

In diesem Paragraphen soll der allgemeine Axer'sche Satz für den Körper der rationalen Zahlen bewiesen werden.

Der obige Satz XI liegt nämlich als spezieller Fall in folgendem gleichfalls von Herrn Axer [2)] bewiesenen Satz enthalten:

Satz XIII: *Es sei r eine positive* [3)] *Konstante,*

$$F(x) = \sum_{n=1}^{x} f(n)$$

$$= o(x),$$

$$G(x) = \sum_{n=1}^{x} |f(n)|$$

$$= O(x);$$

1) Die Thatsache, dass $\liminf_{x=\infty} \frac{Q(x)}{x} > 0$ ist, genügt für den obigen Zweck.

2) l. c., S. 87–90.

3) Wie Herr Axer hervorhebt, ist der Satz für $r < 0$ richtig, aber fast trivial und uninteressant, indem das wesentlichste Glied $\left[\sqrt[r]{\frac{x}{n}}\right]$ für alle $n < x$ den Wert 0 hat. Daher spreche ich nur von dem Fall $r > 0$.

es werde für $x > 0$ und ganzes $n \geqq 1$

$$\rho_r(x, n) = \sqrt[r]{\frac{x}{n}} - \left[\sqrt[r]{\frac{x}{n}}\right]$$

gesetzt. [1)] *Dann ist*

$$\sum_{n=1}^{x} f(n)\, \rho_r(x, n) = o(x).$$

Vorbemerkung: Ich werde die zweite der obigen Beweismethoden des Satzes XI anwenden, zumal ich dazu nur wörtlich die Rechnungen zu wiederholen habe, welche mich schon vor Jahren [2)] zu einem Spezialfall des mir erst jetzt durch Herrn Axer zum Bewusstsein gekommenen Satzes XIII geführt haben. Der damalige Spezialfall war

$$r = \frac{1}{2}, \quad f(n) = \mu(n).$$

Ich bewies a. a. O., von

(39) $$\sum_{n=1}^{x} \mu(n) = o(x)$$

ausgehend, die Relation

$$\sum_{n=1}^{x} \mu(n) \left(\frac{x^2}{n^2} - \left[\frac{x^2}{n^2}\right]\right) = o(x),$$

anders geschrieben

$$\sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \mu(n) \left(\frac{x}{n^2} - \left[\frac{x}{n^2}\right]\right) = o(\sqrt{x}),$$

$$x \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{\mu(n)}{n^2} - \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \mu(n) \left[\frac{x}{n^2}\right] = o(\sqrt{x}).$$

Dies stimmt mit meinem damaligen Ergebnis [3)]

$$Q(x) = \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \mu(n) \left[\frac{x}{n^2}\right]$$

1) Für nicht ganzes r bedeutet natürlich $\sqrt[r]{y}$ die Potenz $y^{\frac{1}{r}}$.

2) **25**, S. 611–613; Handbuch, S. 606–609.

3) $Q(x)$ ist, wie am Ende des § 7, die Anzahl der quadratfreien Zahlen $\leqq x$.

$$= \frac{6}{\pi^2} x + o(\sqrt{x})$$

überein; denn auf Grund von (39) leuchtet durch partielle Summation ein, dass

$$\sum_{n=1}^{y} \frac{\mu(n)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^2} - \sum_{n=y+1}^{\infty} \frac{M(n)-M(n-1)}{n^2}$$

$$= \frac{6}{\pi^2} - \sum_{n=y+1}^{\infty} M(n)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right) + \frac{M(y)}{([y]+1)^2}$$

$$= \frac{6}{\pi^2} + o\sum_{n=y+1}^{\infty} n\cdot\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{y}{y^2}\right)$$

$$= \frac{6}{\pi^2}+o\left(\frac{1}{y}\right)$$

ist.

Es ist bequemer und dem obigen Beispiel analoger, im Satz XIII x^r statt x zu schreiben, ferner

$$\frac{1}{r} = s$$

zu setzen, d. h. die Behauptung so zu formulieren:

(40) $$\sum_{n=1}^{x^r} f(n)\left(\frac{x}{n^s}-\left[\frac{x}{n^s}\right]\right) = o(x^r).$$

Beweis: Es werde für $x>0$

$$\eta(x) = \left(\underset{y \geqq x^{\frac{r}{2}}}{\text{Max.}} \frac{|F(y)|}{y}\right)^r$$

und

$$\delta(x) = \text{Max.}\left(\frac{1}{x^{\frac{r}{2}}},\ \eta(x)\right)$$

gesetzt. Dann ist

$$\delta(x)>0$$

und

$$\lim_{x=\infty}\delta(x)=0.$$

Ferner ist für $y \geqq \delta(x)x^r$ wegen $\delta(x)x^r \geqq x^{-\frac{r}{2}}x^r = x^{\frac{r}{2}}$

$$\frac{|F(y)|}{y} \leqq (\eta(x))^s$$

$$\leqq (\delta(x))^s.$$

Nun ergiebt sich

$$\sum_{n=1}^{x^r} f(n)\left[\frac{x}{n^s}\right] = \sum_{n^s m \leqq x}(f(n)\cdot 1)$$

$$= \sum_{n=1}^{\delta x^r} f(n)\sum_{m=1}^{\frac{x}{n^s}} 1 + \sum_{m=1}^{\frac{1}{\delta^s}}\sum_{n=1}^{\frac{x^r}{m^r}} f(n) - \sum_{n=1}^{\delta x^r} f(n)\cdot\sum_{m=1}^{\frac{1}{\delta^s}} 1$$

$$= \sum_{n=1}^{\delta x^r} f(n)\left[\frac{x}{n^s}\right] + \sum_{m=1}^{\frac{1}{\delta^s}} F\left(\frac{x^r}{m^r}\right) - F(\delta x^r)\left[\frac{1}{\delta^s}\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\delta x^r} f(n)\frac{x}{n^s} + O(\delta x^r) + O\left(\delta^s\sum_{m=1}^{\frac{1}{\delta^s}}\frac{x^r}{m^r}\right) + O\left(\delta^s\cdot\delta x^r\cdot\frac{1}{\delta^s}\right)$$

$$= x\sum_{n=1}^{\delta x^r}\frac{f(n)}{n^s} + O(\delta x^r) + O\left(\delta^s x^r\sum_{m=1}^{\frac{1}{\delta^s}}\frac{1}{m^r}\right)+O(\delta x^r)$$

(41) $$= x\sum_{n=1}^{x^r}\frac{f(n)}{n^s} - x\sum_{n=\delta x^r+1}^{x^r}\frac{f(n)}{n^s} + O\left(\delta^s x^r \sum_{m=1}^{\frac{1}{\delta^s}}\frac{1}{m^r}\right) + o(x^r).$$

Hierin ist wegen $r>0$

$$\sum_{m=1}^{\frac{1}{\delta^s}}\frac{1}{m^r} = o\sum_{m=1}^{\frac{1}{\delta^s}} 1$$

$$= o\left(\frac{1}{\delta^s}\right),$$

also das dritte Glied der rechten Seite von (41)

$$= o\left(\delta^s x^r \frac{1}{\delta^s}\right)$$

$$= o(x^r).$$

Ferner ist die Summe im zweiten Glied der rechten Seite von (41)

$$\sum_{n=\delta x^r+1}^{x^r} \frac{f(n)}{n^s} = \sum_{n=\delta x^r+1}^{x^r} \frac{F(n)-F(n-1)}{n^s}$$

$$= \sum_{n=\delta x^r+1}^{x^r} F(n)\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right) - \frac{F(\delta x^r)}{([\delta x^r]+1)^s} + \frac{F(x^r)}{([x^r]+1)^s}$$

$$= O\left(\delta^s \sum_{n=\delta x^r+1}^{x^r} n\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right)\right) + O\left(\frac{\delta^s \cdot \delta x^r}{\delta^s x}\right) + O\left(\frac{\delta^s \cdot x^r}{x}\right)$$

$$= O\left(\delta^s \sum_{n=\delta x^r+1}^{x^r} \frac{1}{n^s}\right) + O(\delta x^{r-1}) + O(\delta^s x^{r-1}).$$

Hierin ist für $r > 1$, d. h. $0 < s < 1$

$$\sum_{n=\delta x^r+1}^{x^r} \frac{1}{n^s} = O \sum_{n=1}^{x^r} \frac{1}{n^s}$$

$$= O(x^{r(1-s)})$$

$$= O(x^{r-1}),$$

für $0 < r < 1$, d. h. $s > 1$

$$\sum_{n=\delta x^r+1}^{x^r} \frac{1}{n^s} = O \sum_{n=\delta x^r+1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

$$= O((\delta x^r)^{1-s})$$

$$= O(\delta^{1-s} x^{r-1});$$

das zweite Glied der rechten Seite von (41) ist also in jedem beim Beweise in Betracht kommenden Falle [1])

$$O(x \cdot \delta x^{r-1}) + O(x \cdot \delta^s x^{r-1}) = O(\delta x^r) + O(\delta^s x^r)$$

$$= o(x^r).$$

(41) liefert daher

$$\sum_{n=1}^{x^r} f(n)\left[\frac{x}{n^s}\right] = x \sum_{n=1}^{x^r} \frac{f(n)}{n^s} + o(x^r),$$

$$\sum_{n=1}^{x^r} f(n)\left(\frac{x}{n^s} - \left[\frac{x}{n^s}\right]\right) = o(x^r),$$

womit (40), d. h. der Satz XIII bewiesen ist.

§ 9.

In diesem Paragraphen soll kurz der Fall des beliebigen algebraischen Zahlkörpers $\varkappa$ behandelt werden.

Es sei k der Grad von $\varkappa$, $E(x)$ die Anzahl der Ideale des Körpers, deren Norm $\leqq x$ ist. Bekanntlich ist

(42)
$$E(x) = \alpha x + O(x^\vartheta)$$

wo der echte Bruch

$$\vartheta = \frac{k-1}{k}$$

ist und α eine gewisse, nur vom Körper abhängige positive Konstante ist. [2])
Es werde für $r > 0$, $x > 0$ und jede positive ganze Zahl n

$$\rho_r(x, n) = \alpha \sqrt[r]{\frac{x}{n}} - E\left(\sqrt[r]{\frac{x}{n}}\right)$$

gesetzt. Dann gilt der Axer'sche [3])

Satz XIV: *Es sei $f(\mathfrak{n})$ eine idealtheoretische Funktion,*

$$F(x) = \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} f(\mathfrak{n})$$

$$= o(x)$$

---

[1]) Der Fall $r = 1$ war durch Satz XI schon erledigt.

[2]) Für den Körper der rationalen Zahlen ist $E(x) = [x]$, $\alpha = 1$, $\vartheta = 0$.

[3]) l. c., S. 87—90.

und

$$G(x) = \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} |f(\mathfrak{n})|$$

(43) $$= O(x).$$

Es sei

(44) $$r > \vartheta.$$

Dann ist

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} f(\mathfrak{n})\, \rho_r(x, N\mathfrak{n}) = o(x).$$

Vorbemerkung: Es werde wieder

$$\frac{1}{r} = s$$

gesetzt und x^r statt x geschrieben. Dann lautet die Behauptung:

(45) $$\sum_{N\mathfrak{n} \leqq x^r} f(\mathfrak{n}) \left(\frac{\alpha x}{(N\mathfrak{n})^s} - E\left(\frac{x}{(N\mathfrak{n})^s} \right) \right) = o(x^r).$$

Beweis: Es werden für $x > 0$ die Funktionen $\eta(x)$ und $\delta(x)$ genau so erklärt wie beim Beweise des Satzes XIII. Dann ist wie dort für $y \geqq \delta(x) x^r$

$$|F(y)| \leqq (\delta(x))^s y.$$

Nun ergiebt sich

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leqq x^r} f(\mathfrak{n})\, E\left(\frac{x}{(N\mathfrak{n})^s} \right) = \sum_{(N\mathfrak{n})^s N\mathfrak{m} \leqq x} (f(\mathfrak{n}) \,.\, 1)$$

$$= \sum_{N\mathfrak{n} \leqq \delta x^r} f(\mathfrak{n})\, E\left(\frac{x}{(N\mathfrak{n})^s} \right) + \sum_{N\mathfrak{m} \leqq \frac{1}{\delta^s}} F\left(\frac{x^r}{(N\mathfrak{m})^r} \right) - F(\delta x^r)\, E\left(\frac{1}{\delta^s} \right),$$

also nach (42) [1]

$$= \alpha x \sum_{N\mathfrak{n} \leqq \delta x^r} \frac{f(\mathfrak{n})}{(N\mathfrak{n})^s} + O\left(x^\vartheta \sum_{N\mathfrak{n} \leqq \delta x^r} \frac{|f(\mathfrak{n})|}{(N\mathfrak{n})^{s\vartheta}} \right) + O\left(\delta^s x^r \sum_{N\mathfrak{m} \leqq \frac{1}{\delta^s}} \frac{1}{(N\mathfrak{m})^r} \right)$$

$$+ O\left(\delta^s \,.\, \delta x^r \,.\, \frac{1}{\delta^s} \right)$$

[1]) Im zweiten Gliede des folgenden Ausdrucks mag das Zeichen O ruhig gebraucht werden, obgleich in dem trivialen Falle, dass $f(\mathfrak{n})$ identisch 0 ist, dahinter einfach Null steht.

(46) $$\left\{ \begin{aligned} &= \alpha x \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x^r} \frac{f(\mathfrak{n})}{(N\mathfrak{n})^s} - \alpha x \sum_{\delta x^r < N\mathfrak{n} \leqq x^r} \frac{f(\mathfrak{n})}{(N\mathfrak{n})^s} + O\left(x^\vartheta \sum_{N\mathfrak{n} \leqq \delta x^r} \frac{|f(\mathfrak{n})|}{(N\mathfrak{n})^{s\vartheta}} \right) \\ &+ O\left(\delta^s x^r \sum_{N\mathfrak{m} \leqq \frac{1}{\delta^s}} \frac{1}{(N\mathfrak{m})^r} \right) + o(x^r). \end{aligned} \right.$$

Hierin ist mit Rücksicht auf (43)

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leqq \delta x^r} \frac{|f(\mathfrak{n})|}{(N\mathfrak{n})^{s\vartheta}} = \sum_{n=1}^{\delta x^r} \frac{G(n) - G(n-1)}{n^{s\vartheta}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\delta x^r} G(n) \left(\frac{1}{n^{s\vartheta}} - \frac{1}{(n+1)^{s\vartheta}} \right) + \frac{G(\delta x^r)}{([\delta x^r]+1)^{s\vartheta}}$$

$$= O \sum_{n=1}^{\delta x^r} n \frac{1}{n^{1+s\vartheta}} + O\left(\frac{\delta x^r}{(\delta x^r)^{s\vartheta}} \right)$$

$$= O \sum_{n=1}^{\delta x^r} \frac{1}{n^{s\vartheta}} + O((\delta x^r)^{1-s\vartheta}),$$

also (da nach (44) $s\vartheta < 1$ ist)

$$= O((\delta x^r)^{1-s\vartheta})$$

$$= O(\delta^{1-s\vartheta} x^{r-\vartheta});$$

das dritte Glied rechts in (46) ist also

$$O(x^\vartheta \delta^{1-s\vartheta} x^{r-\vartheta}) = O(\delta^{1-s\vartheta} x^r)$$

$$= o(x^r).$$

Ferner ist

$$\sum_{N\mathfrak{m} \leqq \frac{1}{\delta^s}} \frac{1}{(N\mathfrak{m})^r} = o \sum_{N\mathfrak{m} \leqq \frac{1}{\delta^s}} 1$$

$$= o\left(\frac{1}{\delta^s} \right),$$

also das vierte Glied rechts in (46)

$$o(x^r).$$

(46) liefert also

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leqq x^r} f(\mathfrak{n}) \left(\frac{\alpha x}{(N\mathfrak{n})^s} - E\left(\frac{x}{(N\mathfrak{n})^s}\right)\right) = \alpha x \sum_{\delta x^r < N\mathfrak{n} \leqq x^r} \frac{f(\mathfrak{n})}{(N\mathfrak{n})^s} + o(x^r).$$

Hierin ist

$$\sum_{\delta x^r < N\mathfrak{n} \leqq x^r} \frac{f(\mathfrak{n})}{(N\mathfrak{n})^s} = \sum_{n = \delta x^r + 1}^{x^r} \frac{F(n) - F(n-1)}{n^s},$$

und wörtlich wie beim Beweise des Satzes XIII (bezw. für $r=1$ des Satzes XI) ergiebt sich das Produkt der rechten Seite mit x gleich $o(x^r)$.

Damit ist (45), also der Satz XIV bewiesen.

Er besagt insbesondere für $r=1$, $f(\mathfrak{n}) = \mu(\mathfrak{n})$ die am Ende der Einleitung hervorgehobene Thatsache, dass (7) aus (6) folgt. In der That sind nach

(6) $$\sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \mu(\mathfrak{n}) = o(x)$$

nebst

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} |\mu(\mathfrak{n})| \leqq E(x)$$

$$= O(x)$$

die Voraussetzungen des Satzes XIV erfüllt, so dass er liefert:

$$\alpha x \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}} - \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \mu(\mathfrak{n})\, E\left(\frac{x}{N\mathfrak{n}}\right) = o(x);$$

da nun bekanntlich für $x \geqq 1$

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \mu(\mathfrak{n})\, E\left(\frac{x}{N\mathfrak{n}}\right) = 1$$

ist, ist

$$\alpha x \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}} = o(x),$$

(7) $$\sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}} = o(1).$$

§ 10.

Es wird den Leser interessieren, dass ein tieferliegender funktionentheoretischer Satz des Herrn M. Riesz auch gestattet, von (6) zu (7) überzugehen; dieser Übergang ist nicht so elementar wie der Axer'sche, aber prinzipiell und für andere Probleme von höchstem Interesse. Es hatte Herr Fatou[1] vor einigen Jahren die grosse Entdeckung gemacht:

Wenn

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0$$

ist und die infolgedessen für $|x| < 1$ *reguläre Funktion*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

im Punkte $x = 1$ *regulär ist, so ist die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

konvergent.

Herr M. Riesz, der demnächst einen neuen und besonders einfachen Beweis des Fatou'schen Satzes veröffentlichen[2] wird, hat den Satz auf Dirichlet'sche Reihen[3] verallgemeinert. Der Riesz'sche Satz[4] lautet:

Satz XV: *Wenn*

(47) $$\lim_{n=\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = 0$$

---

[1]) *Séries trigonométriques et séries de Taylor* [Acta Mathematica, Bd. XXX, (1906), S. 335—400], S. 389—391.

[2]) Im Journal für die reine und angewandte Mathematik unter dem Titel: *Über einen Satz des Herrn Fatou.*

[3]) Auch vom allgemeineren Typus $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$, der für den gegenwärtigen Zweck nicht in Betracht kommt. Der entsprechende Wortlaut enthält den Fatou'schen und den im Texte erwähnten Riesz'schen Satz.

[4]) Vergl. seine Note *Sur les séries de Dirichlet et les séries entières* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, Bd. CIL (1909), S. 309 – 312].

ist und die infolgedessen für $\Re(s) > 1$ *reguläre Funktion*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

für $s = 1$ *regulär ist, so ist*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

konvergent.

Natürlich folgt hieraus ohne weiteres, dass, wenn die Bedingung (47) erfüllt ist, die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

in jedem regulären Punkte der Geraden $\Re(s) = 1$ konvergiert; denn, wenn $1 + t_0 i$ ein solcher Punkt ist, ist die Funktion

$$f(s + t_0 i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n n^{-t_0 i}}{n^s}$$

$$= g(s)$$

für $s = 1$ regulär, und es ist für ganzzahlig wachsendes n, wenn

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = A_n$$

gesetzt wird,

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \nu^{-t_0 i} = \sum_{\nu=1}^{n} (A_\nu - A_{\nu-1}) \nu^{-t_0 i}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \left(\nu^{-t_0 i} - (\nu+1)^{-t_0 i}\right) + A_n (n+1)^{-t_0 i}$$

$$= o \sum_{\nu=1}^{n} \nu \cdot \frac{1}{\nu} + o(n \cdot 1)$$

$$= o(n),$$

so dass der Wortlaut des Satzes XV unmittelbar anwendbar ist und die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n n^{-t_0 i}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{1+t_0 i}}$$

liefert.

Um mit Hilfe des Riesz'schen Satzes XV den Übergang von (6) zu (7) zu erhalten, braucht man nur

$$a_n = \sum_{N\mathfrak{n} = n} \mu(\mathfrak{n})$$

zu setzen und die für $\Re(s) > 1$ giltige Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{\mathfrak{n}} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{(N\mathfrak{n})^s}$$

$$= \frac{1}{\zeta_\varkappa(s)}$$

zu beachten.

Natürlich lässt sich nicht etwa das allgemeine Axer'sche Ergebnis aus dem Riesz'schen Satz folgern, da ja z. B. in dem als Satz XII hervorgehobenen Spezialfall die Funktion

$$\sum_{n_1} \frac{1}{n_1^s} - \sum_{n_2} \frac{1}{n_2^s}$$

nicht für $s = 1$ regulär zu sein braucht. Aber der Riesz'sche Satz ist an sich von grosser Bedeutung; erfüllt er doch ein altes Desideratum von mir [1]). Herr Mertens [2]) hatte nämlich im Jahre 1887, als man noch nicht wusste, dass $\zeta(1 + ti)$ stets $\neq 0$ ist, durch eine sehr sinnreiche spezielle Abschätzung bewiesen: Wenn für ein reelles t

$$\zeta(1 + ti) \neq 0$$

ist, oder, was ganz dasselbe bedeutet, wenn die für $\Re(s) > 1$ durch die Reihe

$$\sum_{p} \frac{1}{p^s} = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \ldots$$

---

[1]) Vergl. **25**, S. 615—616.

[2]) Vergl. seine im Handbuch mit **8** bezeichnete Abhandlung.

definierte analytische Funktion[1] für $s = 1 + ti$ regulär ist, so ist

$$\sum_p \frac{1}{p^{1+ti}}$$

konvergent. Ich fügte seinerzeit noch das einfachere Beispiel

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s \log n} = \int_s^{\infty} \left(\frac{1}{\zeta(u)} - 1\right) du$$

und das wohlbekannte Beispiel

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s \log n} = \int_s^{\infty} (\zeta(u) - 1)\, du$$

hinzu, in denen man leicht durch spezielle Kunstgriffe zeigen kann, dass die Reihen in jedem regulären Punkte der Geraden $\Re(s) = 1$ konvergieren, und sagte: „aus der Tatsache, dass diese drei Funktionen für $s = 1 + ti$ $(t \gtreqless 0)$ regulär sind, kann also merkwürdigerweise gefolgert werden, dass die betreffenden Dirichlet'schen Reihen im Punkte $s = 1 + ti$ konvergieren". Hierfür ist nun durch den Riesz'schen Satz der tiefe Grund klargelegt; die Voraussetzungen dieses Satzes sind selbstverständlich alle drei Male wegen

$$\sum_{p \leqq x} 1 = \pi(x)$$
$$= o(x),$$

$$\sum_{n=2}^{x} \frac{\mu(n)}{\log n} = O \sum_{n=2}^{x} \frac{1}{\log n}$$
$$= o(x),$$

$$\sum_{n=2}^{x} \frac{1}{\log n} = o(x)$$

[1]) $\log \zeta(s)$ minus der für $\Re(s) > \frac{1}{2}$ absolut konvergenten Dirichlet'schen Reihe $\sum_{\substack{p,\, m \\ m \geqq 2}} \frac{1}{m\, p^{ms}}$.

erfüllt. Eine andere — wiederum wie beim Ausgangsbeispiel (7) reelle — Reihe, welche historisch besonders wichtig ist und deren Konvergenz durch den Riesz'schen Satz beleuchtet wird, ist

$$\sum_p \frac{\chi(p)}{p},$$

wo $\chi(n)$ einen vom Hauptcharakter verschiedenen Charakter modulo k bezeichnet. Herr Mertens[1] hatte aus dem Nichtverschwinden von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n}$$

durch ein kunstvolles, aber völlig elementares Verfahren die Konvergenz der obigen Reihe als erster geschlossen. Mit Hilfe des Riesz'schen Satzes kommt es so heraus: Es ist für $\Re(s) > 1$

$$\log \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \sum_{p,\, m} \frac{\chi(p^m)}{m\, p^{ms}}$$
$$= \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + F(s),$$

wo $F(s)$ eine für $\Re(s) > \frac{1}{2}$ (absolut) konvergente Dirichlet'sche Reihe, also für $s = 1$ regulär ist. Aus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n} \neq 0$$

folgt daher, dass

$$\sum_p \frac{\chi(p)}{p^s}$$

für $s = 1$ regulär ist; wegen

$$\sum_{p \leqq x} \chi(p) = O \sum_{p \leqq x} 1$$
$$= o(x)$$

ist also

$$\sum_p \frac{\chi(p)}{p}$$

konvergent.

[1]) Vergl. **2**, S. 58—61.

Natürlich liefert der Satz XV auch den Übergang von

$$\sum_{p \leqq x} \log p = x + o(x) \tag{1}$$

zu

$$\sum_{p \leqq x} \frac{\log p}{p} = \log x + E + o(1); \tag{2}$$

denn er ist auf die Funktion

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \zeta(s) = \sum_{p,\, m} \frac{\log p}{p^{ms}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

anwendbar, und die Konvergenz der zugehörigen Dirichlet'schen Reihe im Punkte $s = 1$ führt offenbar zu (2).

Da Herr Riesz den Beweis seines oben erwähnten Satzes noch nicht veröffentlicht hat und auch seine oben genannte im Druck befindliche Arbeit jenen Beweis nicht enthält, so teile ich hier mit seiner Zustimmung seinen Beweis mit. Der Rest dieses Paragraphen rührt also von Herrn Riesz her.

Zunächst ist leicht einzusehen, dass der Satz XV dem folgenden äquivalent ist:

Satz XVI: *Wenn*

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0 \tag{48}$$

ist und die infolgedessen für $\Re(s) > 1$ *reguläre Funktion*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

für $s = 1$ *regulär ist, so ist*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

konvergent.

Dass Satz XVI aus Satz XV folgt, ist evident, da nach (48) a fortiori

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = 0 \tag{47}$$

ist. Dass umgekehrt Satz XV aus Satz XVI folgt, ergiebt sich so. Nach (47) ist, wenn

$$a_1 + \cdots + a_n = s_n$$

gesetzt wird, für $\Re(s) > 1$

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n - s_{n-1}}{n^s}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} s_n \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right);$$

also ergiebt sich mit Rücksicht auf

$$\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} - \frac{s}{n^{s+1}} = -s(s+1) \int_n^{n+1} du \int_n^u \frac{dv}{v^{s+2}},$$

$$\left| \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} - \frac{s}{n^{s+1}} \right| < \frac{|s|\,|s+1|}{n^{\Re(s)+2}},$$

wenn die ganze Funktion von s

$$s_n \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} - \frac{s}{n^{s+1}}\right) = \varphi_n(s)$$

gesetzt wird, aus

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{s\, s_n}{n^{s+1}} + \varphi_n(s)\right)$$

folgendes. Es ist wegen

$$s_n = o(n)$$

$$= O(n)$$

die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(s)$$

für $\Re(s) > 0$ konvergent und zwar in einer gewissen Umgebung jeder Stelle dieser Halbebene gleichmässig, so dass sie für $\Re(s) > 0$ eine reguläre Funktion von s darstellt; nach Voraussetzung ist somit die Funktion

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n^{s+1}}$$

$$= \frac{1}{s} \left(f(s) - \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(s)\right)$$

für $s=1$ regulär. Wegen

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{n} = 0$$

ist nach Satz XVI die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n^2}$$

konvergent; wegen

$$\frac{s_n}{n(n+1)} = \frac{s_n}{n^2} - \frac{s_n}{n^2(n+1)}$$

konvergiert also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Aus

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{a_n}{n} = \sum_{n=1}^{m} \frac{s_n - s_{n-1}}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{m} s_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{s_m}{m+1}$$

folgt schliesslich die Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}.$$

Alles reduziert sich also auf den

Beweis des Satzes XVI: Da $f(s)$ für $s=1$ regulär ist, kann ein positives τ so gewählt werden, dass $f(s)$ für $s=1+ti$, $-\tau \leqq t \leqq \tau$ regulär ist. Es mögen die drei Zahlen c_0, c_1, c_2 so bestimmt werden, dass die rationale Funktion

$$H(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{c_0}{s} + \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+2}$$

erstens für $s=\infty$ mindestens von der zweiten Ordnung verschwindet, zweitens für $s=1+\tau i$ verschwindet, drittens für $s=1-\tau i$ verschwindet.[1] Diese Wahl ist möglich; denn die drei Bedingungen besagen:

[1]) Statt $0, -1, -2$ könnte man auch drei beliebige andere verschiedene Grössen in der Halbebene $\Re(s) < 1$ wählen.

$$1 + c_0 + c_1 + c_2 = 0,$$

$$\frac{1}{\tau i} + \frac{c_0}{1+\tau i} + \frac{c_1}{2+\tau i} + \frac{c_2}{3+\tau i} = 0,$$

$$\frac{1}{-\tau i} + \frac{c_0}{1-\tau i} + \frac{c_1}{2-\tau i} + \frac{c_2}{3-\tau i} = 0,$$

und die Determinante der Koeffizienten von c_0, c_1, c_2 ist

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{1+\tau i} & \frac{1}{2+\tau i} & \frac{1}{3+\tau i} \\ \frac{1}{1-\tau i} & \frac{1}{2-\tau i} & \frac{1}{3-\tau i} \end{vmatrix} = \frac{1}{(1+\tau^2)(4+\tau^2)(9+\tau^2)} \begin{vmatrix} 1+\tau^2 & 4+\tau^2 & 9+\tau^2 \\ 1-\tau i & 2-\tau i & 3-\tau i \\ 1+\tau i & 2+\tau i & 3+\tau i \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(1+\tau^2)(4+\tau^2)(9+\tau^2)} \begin{vmatrix} 1+\tau^2 & 3 & 5 \\ 1-\tau i & 1 & 1 \\ 1+\tau i & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(1+\tau^2)(4+\tau^2)(9+\tau^2)} \begin{vmatrix} 1+\tau^2 & 3 & 2 \\ 1-\tau i & 1 & 0 \\ 1+\tau i & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{4\tau i}{(1+\tau^2)(4+\tau^2)(9+\tau^2)}$$

$$\neq 0.$$

Die komplexe Variable s werde durchweg $=\sigma+ti$ gesetzt, so dass $\Re(s)=\sigma$ ist. Es sei $x>0$. Man betrachte das Integral

$$\int_{\Gamma} x^{s-1} H(s)\, ds,$$

über folgende Bahn Γ erstreckt:

1) Die Gerade $\sigma=1$ von $t=-\infty$ bis $t=-\tau$;
2) den Halbkreis K nach rechts mit dem Radius τ über der Strecke $1-\tau i$ bis $1+\tau i$ als Durchmesser;
3) die Gerade $\sigma=1$ von $t=\tau$ bis $t=\infty$.

Es darf oben und unten ins Unendliche integriert werden, weil für $\sigma=1$

$$| x^{s-1} | = 1$$

ist und $H(s)$ für $s=\infty$ von mindestens zweiter Ordnung verschwindet. Es ist für $x \geqq 1$ in der Halbebene $\sigma \leqq 1$

$$| x^{s-1} | = x^{\sigma-1} \leqq 1,$$

für $0 < x \leqq 1$ in der Halbebene $\sigma \geqq 1$

$$| x^{s-1} | \leqq 1;$$

daher hat das über den linken bezw. rechten Halbkreis mit dem Radius r um $s=1$ erstreckte Integral

$$\int x^{s-1} H(s)\, ds$$

für $x \geqq 1$ bezw. $0 < x \leqq 1$ mit unendlich wachsendem r den Limes 0. Es ist infolgedessen nach dem Cauchy'schen Satz, wenn die Pole berücksichtigt werden,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma x^{s-1} H(s)\, ds \begin{cases} = 0 & \text{für } 0 < x \leqq 1, \\ = 1 + \dfrac{c_0}{x} + \dfrac{c_1}{x^2} + \dfrac{c_2}{x^3} & \text{für } x \geqq 1. \end{cases}$$

Daher ist für alle ganzen $m \geqq 1$

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_\Gamma \frac{m^{s-1}}{n^s} H(s)\, ds = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{m} \frac{a_n}{n}\int_\Gamma \left(\frac{m}{n}\right)^{s-1} H(s)\, ds$$

$$= \sum_{n=1}^{m} \frac{a_n}{n}\left(1 + \frac{c_0 n}{m} + \frac{c_1 n^2}{m^2} + \frac{c_2 n^3}{m^3}\right)$$

(49) $$= \sum_{n=1}^{m} \frac{a_n}{n} + \frac{c_0}{m}\sum_{n=1}^{m} a_n + \frac{c_1}{m^2}\sum_{n=1}^{m} n a_n + \frac{c_2}{m^3}\sum_{n=1}^{m} n^2 a_n.$$

Wegen

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0$$

konvergieren die drei letzten Glieder der rechten Seite von (49) für $m=\infty$ gegen Null; der Satz XVI wird also bewiesen sein, wenn die Existenz von

(50) $$\lim_{m=\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_\Gamma \frac{m^{s-1}}{n^s} H(s)\, ds$$

festgestellt werden kann. Da alsdann dieser Limes

$$= 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

ist, so muss natürlich $2\pi i\, f(1)$ als sein Wert herauskommen.

Es ist der Weg Γ dreiteilig; wofern die Konvergenz zweier der drei Summen

$$J_1(m) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{1+\tau i}^{1+\infty i} \frac{m^{s-1}}{n^s} H(s)\, ds,$$

$$J_2(m) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{1-\infty i}^{1-\tau i} \frac{m^{s-1}}{n^s} H(s)\, ds,$$

$$J_3(m) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_K \frac{m^{s-1}}{n^s} H(s)\, ds$$

bewiesen werden kann, ist der Ausdruck unter dem Limeszeichen in (50)

(51) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_\Gamma \frac{m^{s-1}}{n^s} H(s)\, ds = J_1(m) + J_2(m) + J_3(m).$$

Aus Symmetriegründen braucht nur die Konvergenz der einen Summe $J_1(m)$ bewiesen zu werden.

Es ist für $n \gtrless m$

$$\int_{1+\tau i}^{1+\infty i} \frac{m^{s-1}}{n^s} H(s)\, ds = \frac{1}{n}\int_{1+\tau i}^{1+\infty i} \left(\frac{m}{n}\right)^{s-1} H(s)\, ds$$

$$= \frac{1}{n}\left(\left[\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{s-1}}{\log\frac{m}{n}} H(s)\right]_{1+\tau i}^{1+\infty i} - \frac{1}{\log\frac{m}{n}}\int_{1+\tau i}^{1+\infty i} \left(\frac{m}{n}\right)^{s-1} H'(s)\, ds\right),$$

also mit Rücksicht darauf, dass $H(s)$ für $s=1+\tau i$ und im Unendlichen verschwindet,

$$= -\frac{1}{n\log\frac{m}{n}}\int_{1+\tau i}^{1+\infty i}\left(\frac{m}{n}\right)^{s-1} H'(s)\,ds$$

$$= -\frac{1}{n\log\frac{m}{n}}\left(\left[\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{s-1}}{\log\frac{m}{n}}H'(s)\right]_{1+\tau i}^{1+\infty i} - \frac{1}{\log\frac{m}{n}}\int_{1+\tau i}^{1+\infty i}\left(\frac{m}{n}\right)^{s-1} H''(s)\,ds\right)$$

$$= \frac{1}{n\log^2\left(\frac{m}{n}\right)}\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\tau i} H'(1+\tau i) + \int_{1+\tau i}^{1+\infty i}\left(\frac{m}{n}\right)^{s-1} H''(s)\,ds\right),$$

$$\left|\int_{1+\tau i}^{1+\infty i}\frac{m^{s-1}}{n^s}H(s)\,ds\right| \leqq \frac{1}{n\log^2\left(\frac{m}{n}\right)}\left(\,|H'(1+\tau i)| + \int_{\tau}^{\infty}|H''(1+ti)|\,dt\right)$$

$$\text{(52)} \qquad = \frac{A}{n\log^2\left(\frac{m}{n}\right)},$$

wo A von m und n unabhängig ist. Aus (52) ergiebt sich die (absolute) Konvergenz der Reihe $J_1(m)$; denn es ist für alle n

$$|a_n| < a,$$

also ihr n-tes Glied für $n > m$ absolut kleiner als

$$Aa\frac{1}{n\log^2\left(\frac{n}{m}\right)}.$$

Damit ist (51) bewiesen. Nunmehr soll festgestellt werden, dass

$$\text{(53)} \qquad \lim_{m=\infty} J_1(m) = 0$$

ist.

Es ist für alle n, m (auch, wenn $n=m$ ist)

$$\left|\int_{1+\tau i}^{1+\infty i}\frac{m^{s-1}}{n^s}H(s)\,ds\right| = \frac{1}{n}\left|\int_{1+\tau i}^{1+\infty i}\left(\frac{m}{n}\right)^{s-1}H(s)\,ds\right|$$

$$\leqq \frac{1}{n}\int_{\tau}^{\infty}|H(1+ti)|\,dt$$

$$\text{(54)} \qquad = \frac{B}{n}.$$

$\delta > 0$ sei gegeben. Nach (48) giebt es ein ganzes positives $N = N(\delta)$, so dass für $n > N$

$$|a_n| < \delta$$

ist; für alle n ist

$$|a_n| < a.$$

Es sei $m > 2N$ gewählt. Dann werde im allgemeinen Gliede von $J_1(m)$ für $n \leqq \frac{m}{2}$ und $n > 2m$ die Abschätzung (52), für $\frac{m}{2} < n \leqq 2m$ die Abschätzung (54) angewendet. Das ergiebt

$$\text{(55)} \quad \left\{ \begin{aligned} |J_1(m)| < Aa\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n\log^2\left(\frac{m}{n}\right)} &+ A\delta\sum_{n=N+1}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\frac{1}{n\log^2\left(\frac{m}{n}\right)} + B\delta\sum_{n=\left[\frac{m}{2}\right]+1}^{2m}\frac{1}{n} \\ &+ A\delta\sum_{n=2m+1}^{\infty}\frac{1}{n\log^2\left(\frac{n}{m}\right)}. \end{aligned}\right.$$

Hierin ist, da bei festem m die Funktion

$$u\log^2\left(\frac{m}{u}\right)$$

ihr Maximum für

$$u = \frac{m}{e^2}$$

erreicht, d. h. im Intervall $u = \left(1 \ldots \frac{m}{2}\right)$ anfangs zunimmt und dann abnimmt,

$$\sum_{n=N+1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{1}{n \log^2\left(\frac{m}{n}\right)} < \sum_{n=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{1}{n \log^2\left(\frac{m}{n}\right)}$$

$$= O \int_1^{\frac{m}{2}} \frac{du}{u \log^2\left(\frac{m}{u}\right)} + O\left(\frac{1}{\log^2 m}\right) + O\left(\frac{1}{m}\right)^{1)}$$

$$= O \int_0^{\log m - \log 2} \frac{dv}{(\log m - v)^2} + O(1)$$

$$= O\left(\frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log m}\right) + O(1)$$

$$= O(1);$$

ferner ist

$$\sum_{n=\left[\frac{m}{2}\right]+1}^{2m} \frac{1}{n} < \frac{1}{\left[\frac{m}{2}\right]+1} + \int_{\left[\frac{m}{2}\right]+1}^{2m} \frac{du}{u}$$

$$< \frac{2}{m} + \int_{\frac{m}{2}}^{2m} \frac{du}{u}$$

$$= \frac{2}{m} + \log 4$$

$$= O(1)$$

und wegen des monotonen Abnehmens des Summanden

$$\sum_{n=2m+1}^{\infty} \frac{1}{n \log^2\left(\frac{n}{m}\right)} < \int_{2m}^{\infty} \frac{du}{u \log^2\left(\frac{u}{m}\right)}$$

1) Das zweite Glied giebt die Abschätzung des Gliedes $n=1$, das dritte des Gliedes $n=\left[\frac{m}{2}\right]$ in der vorangehenden Summe.

$$= \int_{\log m + \log 2}^{\infty} \frac{dv}{(v - \log m)^2}$$

$$= \frac{1}{\log 2}$$

$$= O(1).$$

Aus (55) folgt daher für $m > 2N = 2N(\delta)$

$$| J_1(m) | < D\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n \log^2\left(\frac{m}{n}\right)} + \delta\right),$$

wo D von m und δ unabhängig ist. Nunmehr werde $\nu = \nu(\delta) > 2N$ so gewählt, dass

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n \log^2\left(\frac{\nu}{n}\right)} < \delta$$

ist. Dann ist für $m \geqq \nu$

$$| J_1(m) | < 2D\delta.$$

Damit ist

(53) $$\lim_{m=\infty} J_1(m) = 0$$

bewiesen.

Aus Symmetriegründen ist klar, dass

$$\lim_{m=\infty} J_2(m) = 0$$

ist.

Nach (51) reduziert sich also der Beweis des Riesz'schen Satzes XVI auf den der Gleichung

(56) $$\lim_{m=\infty} J_3(m) = 2\pi i\, f(1).$$

Dieser Nachweis wird auf Grund einer eigentümlichen Darstellung von $J_3(m)$ durch $f(s)$ gelingen.

Die Reihe

(57) $$F(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\log^2 n} \frac{1}{n^s}$$

ist auf dem Halbkreise K gleichmässig konvergent; für $\sigma > 1$ ist

$$F''(s) = f(s) - a_1,$$

und die durch (57) definierte Funktion $F(s)$ ist auch in den Endpunkten von K regulär. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf

$$a_1 = 0$$

vorausgesetzt werden, so dass auf K

$$F''(s) = f(s)$$

ist, was für die analytischen Funktionen $F(s)$ und $f(s)$ auch noch in den Endpunkten $1 \pm \tau i$ gilt.

Nun ist für $n \geqq 2$

$$\int_K \frac{m^{s-1}}{n^s} H(s)\,ds = \left[-\frac{1}{n^s \log n} m^{s-1} H(s)\right]_{1-\tau i}^{1+\tau i} + \int_K \frac{1}{n^s \log n} \frac{d}{ds}(m^{s-1} H(s))\,ds$$

$$= \int_K \frac{1}{n^s \log n} \frac{d}{ds}(m^{s-1} H(s))\,ds$$

$$= \left[-\frac{1}{n^s \log^2 n} \frac{d}{ds}(m^{s-1} H(s))\right]_{1-\tau i}^{1+\tau i} + \int_K \frac{1}{n^s \log^2 n} \frac{d^2}{ds^2}(m^{s-1} H(s))\,ds.$$

Es werde mit a_n multipliziert und von $n = 2$ bis $n = \infty$ summiert. In Verbindung mit (57) folgt wegen der gleichmässigen Konvergenz

$$J_3(m) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \int_K \frac{m^{s-1}}{n^s} H(s)\,ds$$

$$= \left[-F(s) \frac{d}{ds}(m^{s-1} H(s))\right]_{1-\tau i}^{1+\tau i} + \int_K F(s) \frac{d^2}{ds^2}(m^{s-1} H(s))\,ds.$$

Andererseits ist

$$\int_K f(s)\, m^{s-1} H(s)\,ds = \int_K F''(s)\, m^{s-1} H(s)\,ds$$

$$= \left[F'(s)\, m^{s-1} H(s)\right]_{1-\tau i}^{1+\tau i} - \int_K F'(s) \frac{d}{ds}(m^{s-1} H(s))\,ds$$

$$= \left[-F(s) \frac{d}{ds}(m^{s-1} H(s))\right]_{1-\tau i}^{1+\tau i} + \int_K F(s) \frac{d^2}{ds^2}(m^{s-1} H(s))\,ds.$$

Also ergiebt sich [1])

$$J_3(m) = \int_K f(s)\, m^{s-1} H(s)\,ds.$$

Es werde von $1-\tau i$ bis $1+\tau i$ statt über K nunmehr über eine andere Kurve K' integriert, die der Halbebene $\sigma \leqq 1$ angehört, den Punkt $s = 1$ vermeidet und so beschaffen ist, dass auf K' und zwischen K' und K ausser dem Pol $s = 1$ keine singuläre Stelle des Integranden liegt. Dann ist nach dem Cauchy'schen Satze für $m \geqq 2$

$$J_3(m) - 2\pi i f(1) = \int_{K'} f(s)\, m^{s-1} H(s)\,ds$$

$$= \left[\frac{m^{s-1}}{\log m} f(s) H(s)\right]_{1-\tau i}^{1+\tau i} - \frac{1}{\log m} \int_{K'} m^{s-1} \frac{d}{ds}(H(s) f(s))\,ds$$

$$= -\frac{1}{\log m} \int_{K'} m^{s-1} \frac{d}{ds}(H(s) f(s))\,ds,$$

$$|J_3(m) - 2\pi i f(1)| \leqq \frac{1}{\log m} \int_{K'} \left|\frac{d}{ds}(H(s) f(s))\right| |ds|,$$

also

$$\lim_{m=\infty} (J_3(m) - 2\pi i f(1)) = 0.$$

Damit ist (56), d. h. der Riesz'sche Satz bewiesen.

§ 11.

Nunmehr soll auf die Quellen selbst zurückgegangen werden, aus denen die Sätze

(1) $$\sum_{p \leqq x} \log p = x + o(x)$$

[1]) Formal ist die jetzt folgende Gleichung klar; aber die Rechtfertigung der in ihr liegenden Vertauschung von Summe und Integral erforderte den obigen Kunstgriff.

und

$$\sum_{n=1}^{x} \mu(n) = o(x), \tag{58}$$

sowie ihre Verallgemeinerungen bei beliebigen algebraischen Zahlkörpern

$$\sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \log N\mathfrak{p} = x + o(x) \tag{59}$$

und

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \mu(\mathfrak{n}) = o(x) \tag{6}$$

geschöpft werden können. Es wird den Leser, welcher diese Dinge nicht kennt, interessieren, darüber einiges zu hören; es wird aber auch den Kenner interessieren, eine hübsche Bemerkung zu erfahren, welche Herr H. Weyl mir beim Studium meines Handbuchs gemacht hat und die gestattet, die Voraussetzungen eines allgemeinen Limessatzes von mir zu verringern.

Eines meiner wichtigsten Resultate besteht darin, dass ich folgenden allgemeinen Satz [1] entdeckt habe, der (1), (58), (59) und (6) als Spezialfälle [2] enthält.

Satz XVII: *Es sei die Dirichlet'sche Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \tag{60}$$

deren Koeffizienten sämtlich $\geqq 0$ *sind, für* $\sigma > 1$ *konvergent. Es sei die für* $\sigma > 1$ *durch die Reihe* (60) *definierte Funktion* $f(s)$ *für* $\sigma = 1$ *regulär mit etwaiger Ausnahme des Punktes* $s = 1$; *es sei dieser höchstens ein Pol erster Ordnung; d. h. es gebe eine Konstante* g *derart, dass*

$$f(s) - \frac{g}{s-1}$$

für $s = 1$ *regulär ist.* [1] *Es erfülle* $f(s)$ *für* $\sigma \geqq 1$ *gleichmässig die Relation*

$$f(s) = O(t^{\lambda}), \tag{61}$$

wo λ *eine Konstante ist.* [2] *Dann ist*

$$\sum_{n=1}^{x} a_n = gx + o(x).$$

Beim Beweise benutzte ich den

Hilfssatz: [3] *Es sei* $F(s)$ *eine analytische Funktion, welche für alle endlichen* s *mit dem reellen Teil* 1 *regulär und so beschaffen ist, dass das geradlinige Integral*

---

[1]) Vergl. **34**, S. 218—230; Handbuch, S. 258—269. Der Satz des jetzigen Textes ist dem damaligen Satze völlig äquivalent, wie man durch die Substitution $a_n = b_n + g$ sofort einsieht. Mein jetziger Wortlaut ist mir bequemer, weil ich dann sagen kann, dass die vier oben genannten Sätze als Spezialfälle darin stecken.

[2]) Dass diese vier Sätze als Spezialfälle darin stecken, will ich hier allerdings nicht beweisen, da ich meinen alten Beweisen nichts Neues hinzuzufügen habe. Die jenen vier Sätzen entsprechenden Funktionen

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}, \quad \frac{1}{\zeta(s)} + \zeta(s), \quad -\frac{\zeta_\varkappa'(s)}{\zeta_\varkappa(s)}, \quad \frac{1}{\zeta_\varkappa(s)} + \zeta_\varkappa(s)$$

genügen, wie in meiner Arbeit **10** zum ersten Male bewiesen wurde (vergl. für die beiden erstgenannten Funktionen die besonders einfache Darstellung in meiner Arbeit **36**), eben den Bedingungen des Textes. Ungefähr auf dem Wege, der mich später zum Satze XVII führte, ist es mir überhaupt zum ersten Male gelungen, die Sätze (59) und (6) zu beweisen.

[1]) Eo ipso ist $g \geqq 0$; für $g = 0$ ist eben auch der Punkt $s = 1$ regulär. Übrigens ist der Satz für $g = 0$ ziemlich trivial.

[2]) D. h. es giebt ein t_0 und ein c, so dass für $t \geqq t_0$, $\sigma \geqq 1$

$$\left|\frac{f(\sigma + ti)}{t^{\lambda}}\right| \leqq c$$

ist. Oder, was (wegen der Beschränktheit jenes Quotienten für $1 \leqq t \leqq t_0$, $\sigma \geqq 1$) ganz dasselbe besagt: Es giebt ein b, so dass für $t \geqq 1$, $\sigma \geqq 1$

$$\left|\frac{f(\sigma + ti)}{t^{\lambda}}\right| \leqq b$$

ist. Natürlich würde es dasselbe bedeuten, wenn das Bestehen von (61) nur gleichmässig für $\sigma > 1$ (statt $\sigma \geqq 1$) gefordert würde; denn aus

$$\left|\frac{f(\sigma + ti)}{t^{\lambda}}\right| \leqq b$$

für $t \geqq 1$, $\sigma > 1$ folgt

$$\left|\frac{f(1 + ti)}{t^{\lambda}}\right| \leqq b$$

für $t \geqq 1$.

[3]) Vergl. z. B. Handbuch, S. 265—266.

$$\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} F(s)\,ds$$

absolut konvergiert, d. h., dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\,F(1+ti)\,|\,dt$$

konvergiert. Dann ist

$$\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} x^s F(s)\,ds = o(x),$$

d. h.

$$\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} x^{s-1} F(s)\,ds = o(1).$$

Herr Weyl hat mich nun darauf aufmerksam gemacht, dass es genügt, statt der Regularität von $F(s)$ für $\sigma = 1$ beim obigen Hilfssatz vorauszusetzen, dass $F(1+ti)$ eine stetige (oder auch bloss über jedes endliche t-Intervall eigentlich integrable) Funktion der reellen Variablen t ist.

Beweis des modifizierten Hilfssatzes: Wie a. a. O. ist klar, dass

$$\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} x^{s-1} F(s)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} x^{ti} F(1+ti)\,i\,dt$$

wegen

$$|\,x^{ti} F(1+ti)\,i\,| = |\,F(1+ti)\,|$$

für alle positiven x gleichmässig konvergiert, und dass daher die Behauptung sich auf den Nachweis von

(62) $$\lim_{x=\infty} \int_{-T}^{T} x^{ti} F(1+ti)\,dt = 0$$

bei festem positivem T reduziert.

(62) folgt aber ohne weiteres daraus, dass die Fourier'schen Konstanten einer in einem endlichen Intervall $(a \ldots b)$ eigentlich integrablen Funktion $\psi(t)$, d. h. die beiden Zahlen

$$\int_a^b \psi(t) \cos nt\,dt$$

und

$$\int_a^b \psi(t) \sin nt\,dt$$

bekanntlich [1], auch wenn n stetig (nicht ganzzahlig) ins Unendliche wächst, für $n = \infty$ den Limes 0 haben. Dies ist auf die je zwei Integrale im reellen und imaginären Teil von

$$\int_{-T}^{T} x^{ti} F(1+ti)\,dt = \int_{-T}^{T} (\cos(t \log x) + i \sin(t \log x))\,(\psi_1(t) + i\,\psi_2(t))\,dt$$

anzuwenden; $\log x$ ist das n. Es sei jener bekannte Beweis hier reproduziert und, was natürlich möglich ist, gleich beim Integral

$$\int_{-T}^{T} x^{ti} F(1+ti)\,dt$$

ohne Zerspaltung in die vier Teile ausgeführt. Es sei $\delta > 0$ gegeben. $m = m(\delta)$ werde so gewählt, dass bei Einteilung der Strecke $-T \ldots T$ in m gleiche Intervalle die auf den reellen Teil $\psi_1(t)$ und den imaginären Teil $\psi_2(t)$ von $F(1+ti)$ bezüglichen Riemann'schen Summen (von Schwankung mal Länge)

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} S_\nu^{(1)} \frac{2T}{m} = \frac{2T}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} S_\nu^{(1)}$$

und

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} S_\nu^{(2)} \frac{2T}{m} = \frac{2T}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} S_\nu^{(2)}$$

beide $< \frac{\delta}{4}$ sind. [2] Dann ist, falls $t_0 = -T,\ t_1, \ldots, t_\nu, \ldots, t_m = T$ die Teilpunkte bezeichnen,

$$\int_{-T}^{T} x^{ti} F(1+ti)\,dt = \sum_{\nu=0}^{m-1} \int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} x^{ti} F(1+ti)\,dt$$

[1]) Vergl. z. B. Hobson, *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series* [Cambridge, 1907], S. 672—673.

[2]) In der That sind nach Voraussetzung $\psi_1(t)$ und $\psi_2(t)$ von $t = -T$ bis $t = T$ eigentlich integrabel.

$$=\sum_{\nu=0}^{m-1} F(1+t_\nu i)\int_{t_\nu}^{t_\nu+1} x^{ti}\,dt+\sum_{\nu=0}^{m-1}\int_{t_\nu}^{t_\nu+1} x^{ti}\,(F(1+ti)-F(1+t_\nu i))\,dt.$$

Hierin ist für $x>1$

$$\left|\sum_{\nu=0}^{m-1} F(1+t_\nu i)\int_{t_\nu}^{t_\nu+1} x^{ti}\,dt\right|=\left|\sum_{\nu=0}^{m-1} F(1+t_\nu i)\,\frac{x^{t_\nu+1\,i}-x^{t_\nu i}}{i\log x}\right|$$

$$\leqq\frac{2}{\log x}\sum_{\nu=0}^{m-1}|F(1+t_\nu i)|$$

und

$$\left|\sum_{\nu=0}^{m-1}\int_{t_\nu}^{t_\nu+1} x^{ti}\,(F(1+ti)-F(1+t_\nu i))\,dt\right|\leqq\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{2T}{m}\,(S_\nu^{(1)}+S_\nu^{(2)})$$

$$<\frac{\delta}{4}+\frac{\delta}{4}$$

$$=\frac{\delta}{2}.$$

Für alle $x>1$ ist daher

$$\left|\int_{-T}^{T} x^{ti}F(1+ti)\,dt\right|<\frac{2}{\log x}\sum_{\nu=0}^{m-1}|F(1+t_\nu i)|+\frac{\delta}{2}.$$

Wenn daher $\xi=\xi(\delta)>1$ so gewählt wird, dass

$$\frac{2}{\log\xi}\sum_{\nu=0}^{m-1}|F(1+t_\nu i)|<\frac{\delta}{2}$$

ist, so ist für $x\geqq\xi$

$$\left|\int_{-T}^{T} x^{ti}F(1+ti)\,dt\right|<\delta,$$

womit (62) bewiesen ist.

Diese Bemerkung von Herrn Weyl gestattet nun, wie ein Blick auf meinen alten Beweis des Satzes XVII lehrt, im Satz Regularität auf der Geraden $\sigma=1$ zu ersparen und dafür andere, geringere Annahmen einzuführen. Dadurch entsteht folgender Satz XVIII, den ich — zumal manche Hilfsbetrach-

tungen, die der Leser im vorangehenden kennen gelernt hat (insbesondere Satz VII), dabei Anwendung finden — nicht nur angeben, sondern vollständig beweisen will. Es kann für den Leser der gegenwärtigen Abhandlung, der ja jene Hilfsmittel kennen gelernt hat, der Beweis dieses vielleicht tiefsten Satzes der analytischen Zahlentheorie überraschend kurz dargestellt werden.

Satz XVIII: *Es sei die Dirichlet'sche Reihe*

(60)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s},$$

deren Koeffizienten sämtlich $\geqq 0$ *sind, für* $\sigma>1$ *konvergent. Es erfülle die für* $\sigma>1$ *durch die Reihe* (60) *definierte Funktion* $f(s)$ *für* $\sigma>1$ *gleichmässig die Relation*

(61)
$$f(s)=O(t^\lambda),$$

wo λ *eine Konstante ist. Es existiere bei jedem festen* t, *wenn* σ *zu* 1 *abnimmt, der Grenzwert*

$$\lim_{\sigma=1}\left(f(\sigma+ti)-\frac{g}{\sigma-1+ti}\right)=\lim_{s=1+ti}\left(f(s)-\frac{g}{s-1}\right),$$

und zwar in jedem endlichen Intervall $t_0\leqq t\leqq t_1$ *gleichmässig.*[1] *Dann ist*

$$\sum_{n=1}^{x} a_n=gx+o(x).$$

Beweis: λ darf $\geqq 1$ angenommen werden. Bekanntlich[2] ist für $\sigma>1$ gleichmässig

[1]) Hieraus folgt natürlich, dass im Intervall $t_0\leqq t\leqq t_1$, wo $t_1<0$ oder $t_0>0$ ist, gleichmässig

$$\lim_{\sigma=1} f(\sigma+ti)=\lim_{s=1+ti} f(s)$$

von rechts existiert.

[2]) Für $\sigma>0$ (exkl. $s=1$) ist ja

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+1-s\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}};$$

also ist für $1<\sigma<2$, $t\geqq 1$

$$|\zeta(s)|<1+1+(2+t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

so dass für $\sigma>1$ gleichmässig

$$\zeta(s)=O(t)$$

ist

$$\zeta(s) = O(t),$$

also, wenn

$$f(s) - g\,\zeta(s) = G(s)$$

gesetzt wird,

$$G(s) = O(t^\lambda).$$

Nach Voraussetzung ist, da

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$$

für $\sigma \geqq 1$ (übrigens sogar in der ganzen Ebene) regulär ist, in jedem endlichen Intervall $t_0 \leqq t \leqq t_1$ gleichmässig der Grenzwert von rechts

$$\lim_{\sigma=1} G(\sigma + ti)$$

vorhanden; dies folgt sofort aus

$$G(s) = f(s) - \frac{g}{s-1} - g\left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right).$$

Es werde

$$a_n - g = b_n$$

gesetzt. Die Dirichlet'sche Reihe

$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

konvergiert für $\sigma > 1$, insbesondere für $\sigma = 2$, absolut. Wenn ν eine ganze Zahl $\geqq 2$ bezeichnet, die für einen späteren Zweck ausserdem $> \lambda + 1$ gewählt sei, ist daher bei gerader Bahn und positivem x

$$\int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{x^s}{s^\nu} G(s)\, ds = \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{x^s}{s^\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}\, ds$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s^\nu}\, ds,$$

was nach einer bekannten Integralformel [1]

---

[1])
$$\int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{y^s}{s^\nu}\, ds \begin{cases} = 0 & \text{für } 0 < y \leqq 1, \\ = \dfrac{2\pi i}{(\nu-1)!} \log^{\nu-1} y & \text{für } y \geqq 1. \end{cases}$$

$$= \frac{2\pi i}{(\nu-1)!} \sum_{n=1}^{x} b_n \log^{\nu-1}\left(\frac{x}{n}\right)$$

ist. Nun werde der Cauchy'sche Satz auf das Rechteck mit den Ecken $2 \pm Ti$, $1 + \delta \pm Ti$ angewandt, wo $T > 0$ und $\delta > 0$ ist:

$$(63)\qquad \int_{1+\delta-Ti}^{1+\delta+Ti} \frac{x^s}{s^\nu} G(s)\, ds = \int_{1+\delta-Ti}^{2-Ti} \frac{x^s}{s^\nu} G(s)\, ds + \int_{2-Ti}^{2+Ti} \frac{x^s}{s^\nu} G(s)\, ds + \int_{2+Ti}^{1+\delta+Ti} \frac{x^s}{s^\nu} G(s)\, ds.$$

Nach dem obigen ist für $-T \leqq t \leqq T$ gleichmässig

$$\lim_{\delta=0} G(1 + \delta + ti)$$

vorhanden; wenn dieser infolgedessen stetige Limes einfach mit $G(1+ti)$ bezeichnet [1] wird, so ergiebt sich aus (63)

$$(64)\qquad \int_{1-Ti}^{1+Ti} \frac{x^s}{s^\nu} G(s)\, ds = \int_{1-Ti}^{2-Ti} \frac{x^s}{s^\nu} G(s)\, ds + \int_{2-Ti}^{2+Ti} \frac{x^s}{s^\nu} G(s)\, ds + \int_{2+Ti}^{1+Ti} \frac{x^s}{s^\nu} G(s)\, ds.$$

Da nun für $\sigma > 1$, also für $\sigma \geqq 1$ gleichmässig

$$(65)\qquad G(s) = O(t^\lambda)$$

ist, so hat in (64) das erste und dritte Integral rechts (wegen $\nu > \lambda + 1 > \lambda$) für $T = \infty$ den Limes 0, und, da (wegen $\nu > \lambda + 1$)

$$\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} \frac{x^s}{s^\nu} G(s)\, ds$$

existiert, so ergiebt sich aus (64)

$$\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} \frac{x^s}{s^\nu} G(s)\, ds = \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{x^s}{s^\nu} G(s)\, ds$$

$$= \frac{2\pi i}{(\nu-1)!} \sum_{n=1}^{x} b_n \log^{\nu-1}\left(\frac{x}{n}\right).$$

---

[1]) Diese Schreibweise darf natürlich weder den Irrtum hervorrufen, $G(s)$ sei für $s = 1 + ti$ notwendig regulär, noch den, dass die zugehörige Dirichlet'sche Reihe für $s = 1 + ti$ notwendig konvergent sei.

Da nun

$$\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} \frac{G(s)}{s^{\nu}}\, ds$$

wegen (65) absolut konvergiert, ist der obige Hilfssatz in der Weyl'schen Modifikation anwendbar und ergiebt

$$\sum_{n=1}^{x} b_n \log^{\nu-1}\left(\frac{x}{n}\right) = o(x);$$

mit Rücksicht auf [1)]

$$\sum_{n=1}^{x} \log^{\nu-1}\left(\frac{x}{n}\right) = (\nu-1)!\, x + o(x)$$

ist daher

$$\frac{1}{(\nu-1)!} \sum_{n=1}^{x} (b_n+g) \log^{\nu-1}\left(\frac{x}{n}\right) = gx + o(x),$$

$$\frac{1}{(\nu-1)!} \sum_{n=1}^{x} a_n \log^{\nu-1}\left(\frac{x}{n}\right) = gx + o(x).$$

Nach der in § 4 erwähnten Folgerung aus den Sätzen VI und VII ergiebt sich hieraus

$$\sum_{n=1}^{x} a_n = gx + o(x),$$

was zu beweisen war.

Für die Primzahltheorie ist allerdings diese Verschärfung des Satzes XVII zu XVIII gleichgiltig, da bei den klassischen Beispielen das Erfülltsein der weiteren Voraussetzung (Regularität) des Satzes XVII um nichts schwieriger zu konstatieren ist als das Erfülltsein der engeren Voraussetzung (gleich-

[1)] Die folgende bekannte Relation ergiebt sich leicht aus

$$\sum_{n=1}^{x} \log^{\nu-1}\left(\frac{x}{n}\right) = O(\log^{\nu-1} x) + \int_{1}^{x} \log^{\nu-1}\left(\frac{x}{u}\right) du = o(x) + x \int_{1}^{x} \log^{\nu-1} v\, \frac{dv}{v^2}$$

$$= o(x) + x \int_{1}^{\infty} \log^{\nu-1} v\, \frac{dv}{v^2} = o(x) + x \int_{0}^{\infty} e^{-w} w^{\nu-1}\, dw = (\nu-1)!\, x + o(x).$$

mässiger Limes) des Satzes XVIII. Der Satz XVIII ist aber an sich interessant, und, da diese Arbeit ohnedies den allgemeinen Grenzwertsätzen an sich gewidmet ist, war die Mitteilung des Satzes XVIII hier gerade am rechten Platze.

Unter den Voraussetzungen des Satzes XVII ist die Dirichlet'sche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - g}{n^s} \tag{66}$$

$$= f(s) - g\,\zeta(s)$$

selbstverständlich für $\sigma = 1$ nach dem Satz XVII und dem Riesz'schen Satz XV zusammengenommen konvergent. Es sei aber besonders bemerkt, dass sowohl der Satz XV als auch die von Herrn Riesz selbst in seiner Note [1)] angedeuteten wichtigen Verschärfungen des Satzes XV (in denen Regularität durch viel weniger ersetzt wird) immerhin nicht gestatten, unter den Voraussetzungen des Satzes XVIII die Konvergenz der Reihe (66) auch nur für einen einzigen Punkt der Geraden $\sigma = 1$ zu folgern.

Göttingen, den 21. Dezember 1910.

[1)] L. c. (siehe S. 151, Anm. 4).