W. SIERPIŃSKI.

O PEWNEJ WŁASNOŚCI CHARAKTERYSTYCZNEJ LICZB WYMIERNYCH.

(Sur une propriété caractéristique des nombres rationnels.)

Nazwijmy **resztą** liczby rzeczywistej x różnicę między x i największą, nie większą od x liczbą całkowitą, t. j. $x - \mathrm{E}x$.

Dla ciągu kolejnych wielokrotności:

$$x,\ 2x,\ 3x,\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

utwórzmy ciąg odpowiednich reszt:

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (r)$$

(kładąc: $r_k = kx - \mathrm{E}kx$).

Twierdzenie. Na to, aby liczba x była wymierną, potrzeba i wystarcza, iżby średnią wartością reszt (r) była liczba mniejsza od $\frac{1}{2}$.

Twierdzenie to jest natychmiastowym wnioskiem z dwóch następujących twierdzeń:

1) Jeżeli x jest liczbą wymierną, $\frac{a}{b}$ jej ułamkiem nieprzywiedlnym (mianownik b ma być liczbą naturalną, większą od jedności w razie niecałkowitego x, oraz równą jedności w razie całkowitego x, włączając tu i przypadek $x = 0$), to wartością średnią reszt (r) jest liczba:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2b},$$

wyrażając się analitycznie:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (kx - \mathrm{E}kx) = \frac{b-1}{2b}.$$

2) Jeżeli x jest liczbą niewymierną, to wartością średnią liczb (r) nie może być liczba różna od $\frac{1}{2}$; wysłowiając się analitycznie: wyrażenie

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(kx - \mathrm{E}\,kx)$$

w razie niewymiernych x nie może zmierzać do różnej od $\frac{1}{2}$ granicy.

Przedmiotem niniejszego artykułu jest dowód obu tych twierdzeń.

Przypuśćmy, że x jest liczbą wymierną i oznaczmy przez $\frac{a}{b}$ jej ułamek nieprzywiedlny (z wyżej zrobioną umową co do mianownika b). Mamy:

$$r_k = \frac{ak}{b} - \mathrm{E}\frac{ak}{b},$$

skąd:

$$\rho_k = br_k = ak - b\,\mathrm{E}\frac{ak}{b}.$$

Wyrazy ciągu

$$\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3,\ \ldots\ldots\ldots$$

są więc resztami z dzielenia kolejnych wielokrotności

$$a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots\ldots$$

przez liczbę b.

Reszty

$$\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3,\ \ldots\ldots\ \rho_b$$

będą wszystkie różne, gdyż liczby a i b są względnie pierwsze. Porządkiem więc conajwyżej różnić się będą od liczb ciągu

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots\ b-1,$$

i przeto:

$$\rho_1 + \rho_2 + \ldots\ldots + \rho_b = \frac{b(b-1)}{2},$$

skąd:

$$r_1 + r_2 + \ldots\ldots + r_b = \frac{b-1}{2}.$$

Mamy oczywiście $r_{k+b} = r_k$ przy wszelkiem k, więc też:

$$r_{mb+1} + r_{mb+2} + \ldots\ldots + r_{mb+b} = \frac{b-1}{2}.$$

Jest więc:

$$\sum_{k=1}^{b\mathrm{E}\frac{n}{b}} r_k = \frac{b-1}{2}\,\mathrm{E}\frac{n}{b} \geqslant \frac{b-1}{2b}\,n - \frac{b-1}{2},$$

oraz

$$\sum_{k=1}^{b\mathrm{E}\frac{n}{b}+b} r_k = \frac{b-1}{2}\left(\mathrm{E}\frac{n}{b} + 1\right) \leqslant \frac{b-1}{2b}\,n + \frac{b-1}{2}.$$

Lecz wszystkie wyrazy ciągu (r) są nieujemne; mamy więc:

$$\sum_{k=1}^{b\mathrm{E}\frac{w}{b}} r_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} r_k \leqslant \sum_{k=1}^{b\mathrm{E}\frac{n}{b}+b} r_k,$$

(jest bowiem $b\mathrm{E}\,\frac{n}{b} \leqslant n < b\mathrm{E}\frac{n}{b} + b$). Stąd, wobec powyższych nierówności:

$$\frac{b-1}{2b} - \frac{b-1}{2n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{a=1}^{n} r_k \leqslant \frac{b-1}{2b} + \frac{b-1}{2n},$$

i przeto:

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r_k = \frac{b-1}{2b} < \frac{1}{2},$$

co dowodzi prawdziwości pierwszego twierdzenia.

Zauważymy, że ze wzoru:

$$\rho_1 + \rho_2 + \ldots\ldots + \rho_b = \frac{b(b-1)}{2},$$

wobec uwagi, że $\rho_b = 0$, oraz

$$\sum_{k=1}^{b-1}\mathrm{E}\frac{ak}{b} = \sum_{k=1}^{b-1}\frac{ak-\rho_k}{b} = \frac{a(b-1)}{2} - \frac{b-1}{2},$$

wynika następująca ciekawa tożsamość:

$$\sum_{k=1}^{b-1}\mathrm{E}\,\frac{ak}{b} = \frac{(a-1)(b-1)}{2},$$

dla względnie pierwszych a i b [1].

Załóżmy teraz, że x jest liczbą niewymierną. Niech $\frac{a}{b}$ oznacza jakikolwiek ułamek nieprzywiedlny o mianowniku większym od jedności. Jeżeli $x < \frac{a}{b}$, to oczywiście $\mathrm{E}\,kx \leqslant \mathrm{E}\frac{ak}{b}$ przy wszelkiem naturalnem k, i przeto:

$$\sum_{k=1}^{b-1}\mathrm{E}\,kx \leqslant \sum_{k=1}^{b-1}\mathrm{E}\,\frac{ak}{b} = \frac{(a-1)(b-1)}{2}.$$

---

[1]) Stern (Crelle, **102**, str. 12); Hacks, (Acta mathematica **17**, str. 206).

Mamy więc:

$$\sum_{k=1}^{b-1} r_k = \sum_{c=1}^{b-1} (kx - \mathrm{E}\,kx) \geqslant \frac{b(b-1)}{2}\,x - \frac{(a-1)(b-1)}{2},$$

skąd:

$$\frac{1}{b-1}\sum_{k=1}^{b-1} r_k \geqslant \frac{1}{2} + \frac{bx-a}{2}.$$

Załóżmy teraz, że $\frac{a}{b}$ przedstawia redukt rzędu nieparzystego, ułamka ciągłego (nieskończonego) dla x. Mamy, jak wiadomo, wówczas:

$$x < \frac{a}{b} \text{ oraz } x - \frac{a}{b} > -\frac{1}{b^2},$$

skąd $bx - a > -\frac{1}{b}$. Będzie więc:

$$\frac{1}{b-1}\sum_{k=1}^{b-1} r \geqslant \frac{1}{2} + \frac{bx-a}{2} > \frac{1}{2} - \frac{1}{2b}.$$

Załóżmy, że istnieje

$$g = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r_k.$$

Ciąg mianowników b kolejnych reduktów rzędu nieparzystego wzrasta nieograniczenie, mamy więc:

$$\lim \frac{1}{2b} = 0,$$

oraz

$$g = \lim \frac{1}{b-1}\sum_{k=1}^{b-1} r_k,$$

gdyż liczby $b-1$ też wzrastają nieograniczenie. Byłoby więc (wobec nierówności $\frac{1}{b-1}\sum_{k=1}^{b-1} r_k > \frac{1}{2} - \frac{1}{2b}$):

$$g \geqslant \frac{1}{2}.$$

Podobnież, biorąc redukty rzędu parzystego i opierając się na nierównościach

$$x > \frac{a}{b} \text{ oraz } x - \frac{a}{b} < \frac{1}{b^2},$$

otrzymaliśmy dla takich reduktów nierówność:

$$\frac{1}{b-1}\sum_{k=1}^{b-1} r_k < \frac{1}{2} + \frac{1}{2b},$$

skąd wniosek, iż

$$g \leqslant \frac{1}{2}.$$

Granica g, o ile istnieje, musi więc być równa $\frac{1}{2}$, zgodnie z drugiem naszem twierdzeniem. Zbadaniem czy, w razie niewymierności liczby x, granica g istnieje w samej rzeczy, zajmiemy się na innem miejscu [1].

Zauważymy wreszcie, że nie mniej ciekawe wnioski zrobić można o granicy wyrażenia

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=-n}^{+n} (kx - \mathrm{E}kx),$$

mianowicie: wyrażenie to zmierza do $\frac{1}{2}$, jeżeli x jest liczbą niewymierną, oraz $\frac{1}{2} - \frac{1}{2b}$, jeżeli x jest liczbą wymierną, $\frac{a}{b}$ — jej ułamkiem nieprzywiedlnym.

Dla dowodu zauważymy przedewszystkiem tożsamości:

$$\sum_{k=-n}^{+n} (kx - \mathrm{E}kx) = -\sum_{k=-n}^{+n} \mathrm{E}\,kx = -\sum_{k=0}^{n}\Big[\mathrm{E}\,kx + \mathrm{E}(-kx)\Big].$$

Wyrażenie

$$\mathrm{E}\,u + \mathrm{E}(-u)$$

oczywiście równa się zeru w razie całkowitego u, oraz -1 w razie niecałkowitego u. Przy niewymiernem x wszystkie wielokrotności kx będą niecałkowite i przeto stale:

$$\mathrm{E}\,kx + \mathrm{E}(-kx) = -1,$$

skąd, wobec powyższej tożsamości:

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=-n}^{+n} (kx - \mathrm{E}\,kx) = \frac{1}{2},$$

i przeto również:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{2n}\sum_{k=-n}^{+n} (kx - \mathrm{E}\,kx) = \frac{1}{2}.$$

Jeżeli zaś x równa się ułamkowi nieprzywiedlnemu $\frac{a}{b}$, to dla całkowitości

[1]) Zob. moją pracę: „Pewne twierdzenie o liczbach niewymiernych.“ T. 49 Rozpraw Wydz. mat.-przyr. Akad. Um. w Krakowie.

iloczynu $kx = \frac{ak}{b}$ potrzeba i wystarcza, iżby k było podzielne przez b; liczb takich $k \leqslant n$ jest dokładnie $\mathrm{E}\frac{n}{b}$, jest więc:

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\mathrm{E}\,kx + \mathrm{E}(-kx) \right] = -n + \mathrm{E}\frac{n}{b},$$

skąd:

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=-n}^{+n} (kx - \mathrm{E}\,kx) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\mathrm{E}\frac{n}{b},$$

i przeto:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=-n}^{+n} (kx - \mathrm{E}\,kx) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2b}.$$

Mamy więc:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=-n}^{+n} (kx - \mathrm{E}\,kx) < \frac{1}{2} \text{ lub } = \frac{1}{2},$$

zależnie od tego, czy liczba x jest, czy też nie jest wymierną.

LEON LICHTENSTEIN.

O niektórych zastosowaniach teoryi równań całkowych liniowych.[1]

(Sur quelques applications de la théorie des équations intégrales linéaires;)

Na wstępie kilka uwag o teoryi równań całkowych liniowych.

Niechaj $K(s,t)$ będzie funkcya ciągła, rzeczywista zmiennych rzeczywistych s i t w zakresie:

$$(1) \qquad a \leqq s \leqq b, \quad a \leqq t \leqq b;$$

$f(s)$ funkcya ciągła, rzeczywista zmiennej s w zakresie:

$$a \leqq s \leqq b;$$

λ stała, $\varphi(s)$ funkcya niewiadoma.

Równanie:

$$(2) \qquad \varphi(s) + \lambda \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt = f(s)$$

nazywamy według D. Hilberta równaniem całkowem liniowem niejednorodnem:

---

[1]) Rzecz niniejsza była przedstawiona na posiedzeniu Wydziału Matem.-Przyr. Tow. Naukowego Warszawskiego dnia 13 stycznia 1910 r.