spółczynniki przejścia dla aktynometru systemu Ångströma-Chwolsona winny, w ciągu okresu rocznego lub dziennego, jednocześnie wzrastać lub maleć w zależności od temperatury. W stałych pomiarach rocznych wartości K' będą przeto wykazywały pewne zmiany określone, przyczem kierunek tych zmian może być w pierwszem przybliżeniu rozpatrywany jako proporcyonalny także do wahań w wartościach natężenia promieniowania słonecznego ze względu na ich, w głównych zarysach, synchroniczną okresowość z biegiem rocznym temperatury.

§ 12. Zmiany w spółczynnikach przejścia według pomiarów warszawskich.

Jak wielkie są te zmiany spółczynnika K', o tem najpewniej przekonać się można z porównawczych obserwacyj promieniowania słonecznego. W rzeczy samej, okazało się z jednoczesnych pomiarów, przeprowadzanych na Stacyi Centralnej Meteorologicznej w Warszawie w okresie 1901—1905 r. z elektrycznym pyrheliometrem kompensacyjnym i aktynometrem systemu Ångströma-Chwolsona, że powyższe wnioski teoretyczne sprawdzają się na drodze doświadczalnej. Dla czterech aktynometrów, badanych w tym względzie, otrzymano mianowicie następujące przyrosty przeciętne spółczynnika K', gdy następnie promieniowania słonecznego wzrastało o 0,1 gr. cal.:

0.024, 0.005, 0.02, 0.030.

Z liczb tych każda kolejno odpowiada jednemu z czterech użytych aktynometrów; zauważymy przytem, że same spółczynniki, co do swej wartości, zazwyczaj niewiele tylko odbiegają od 1.

Różnica w zmianach spółczynnika K' objaśnia się tem, że własności (d i k) powłoczki szklanej nie były jednakowe dla poszczególnych par termometrów aktynometrycznych, a stąd i czynnik $(1+h^d/_k)$ posiadał różne wartości dla różnych egzemplarzy nawet przy jednakowem h.

Nie jest tu naszym zamiarem wchodzić w bliższe szczegóły tych doświadczeń i odnośnych rezultatów liczbowych; podane są one w pracy naszej p. t. „Sur la marche annuelle de l'intensité du rayonnement solaire à Varsovie et sur la théorie des appareils employés" (1906, 8-o, str. 202). Zauważymy tu tylko, że nieuwzględnienie zmienności spółczynnika K' prowadzi do błędów w wyliczonych wartościach radyacyi, które dochodzić mogą nawet do 10% wartości mierzonej. Wzory zmodyfikowane, usuwając to źródło błędów, pozwalają jednocześnie na osiągnięcie dokładności do 1% w pomiarach z aktynometrem systemu Ångströma-Chwolsona.

W. SIERPIŃSKI.

O SYSTEMATYCZNYCH ROZWINIĘCIACH LICZB NA ILOCZYNY NIESKOŃCZONE.

(SUR LES DÉVELOPPEMENTS SYSTÉMATIQUES DES NOMBRES EN PRODUITS INFINIS).

Każda liczba może być, jak wiadomo, nieskończenie wieloma sposobami rozwinięta na iloczyn nieskończony. Ze wszystkich jednak rozwinięć każdej danej liczby jedno zasługuje na szczególniejszą uwagę, tak ze względu na prostotę i jednostajność metody, którą się otrzymuje, jak też i ze względu na swe różne ciekawe własności, a przedewszystkiem nadzwyczaj szybką zbieżność. Rozwinięcia, o których mowa, nazywać będziemy systematycznemi. O ile mi wiadomo, rozwinięciami tego rodzaju nikt się dotąd nie zajmował; dlatego też pozwolę sobie teoryę ich wyłożyć na tem miejscu obszerniej.

Uważajmy jakąkolwiek liczbę x, większą od jedności. Wyznaczmy najmniejszą liczbę naturalną k_1, spełniającą warunek:

$$x > 1 + \frac{1}{k_1}.$$

Połóżmy:

$$x = \left(1 + \frac{1}{k_1}\right) x_1.$$

Liczba

$$x_1 = \frac{x}{1 + \frac{1}{k_1}}$$

będzie oczywiście też większa od jedności: możemy więc z nią postąpić, jak z liczbą x i t. d. Otrzymamy w ten sposób oznaczone w zupełności rozwinięcie:

$$x = \left(1 + \frac{1}{k_1}\right)\left(1 + \frac{1}{k_2}\right)\ldots \tag{I}$$

Jeżeli y jest liczbą dodatnią, mniejszą od jedności, to wyznaczmy najmniejszą liczbę naturalną l_1, spełniającą warunek:

$$y < 1 - \frac{1}{l_1}$$

i połóżmy $y = \left(1 - \frac{1}{l_1}\right) y_1$. Liczba $y_1 = \frac{y}{1 - \frac{1}{l_1}}$ będzie dodatnia i mniejsza od jedności. Postąpimy z nią, jak z liczbą y i t. d. Otrzymamy rozwinięcie:

(II)
$$y = \left(1 - \frac{1}{l_1}\right)\left(1 - \frac{1}{l_2}\right) \ldots.$$

Rozwinięcia (I) i (II) nazywać będziemy s y s t e m a t y c z n e m i. Zajmiemy się obecnie bliżej zbadaniem różnych własności tak określonych rozwinięć.

1.

Niech x oznacza liczbę większą od jedności. Różnica $x-1$ jest więc dodatnia, istnieją przeto liczby naturalne k takie, iż

$$x - 1 > \frac{1}{k},$$

czyli

$$x > 1 + \frac{1}{k}.$$

Oznaczmy najmniejszą z nich przez k_1; będzie to więc liczba, wyznaczona przez liczbę x w zupełności.

Jeżeli $x > 2$, to będzie:

$$x > 1 + \frac{1}{1}$$

i już liczba 1 spełniać będzie żądany warunek. Liczba 1 będzie wówczas oczywiście najmniejszą liczbą naturalną, spełniającą wiadomą nierówność, a więc będziemy mieli $k_1 = 1$. W razie $x \leqslant 2$, mielibyśmy:

$$x \leqslant 1 + \frac{1}{1}$$

i przeto byłoby w każdym razie $k_1 \geqslant 2$.

Połóżmy w obu przypadkach

$$x = \left(1 + \frac{1}{k_1}\right) x_1.$$

Liczba $x_1 = \frac{x}{1 + \frac{1}{k_1}}$ będzie większa od jedności, gdyż mamy $x > 1 + \frac{1}{k_1}$.
Z liczbą x_1 możemy więc postąpić, jak z liczbą x i t. d. Oznaczając ogólnie przez k_n najmniejszą liczbę naturalną, spełniającą nierówność:

$$x_{n-1} > 1 + \frac{1}{k_n}$$

i kładąc:

$$x_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{k_n}\right) x_n,$$

będziemy mieli stale:

$$x_n > 1$$

oraz

$$x = \left(1 + \frac{1}{k_1}\right)\left(1 + \frac{1}{k_2}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{k_n}\right) x_n.$$

Ciąg nieskończony:

$$k_1, \ k_2, \ k_3, \ldots$$

liczb naturalnych k_n będzie przez liczbę x wyznaczony w zupełności.

Liczba x, jako większa od jedności, musi być albo jednym z wyrazów, albo też zawartą między dwoma kolejnemi wyrazami postępu geometrycznego:

$$2^0, \ 2^1, \ 2^2, \ 2^3, \ldots;$$

w każdym więc razie przy pewnem naturalnem m będziemy mieli:

$$2^{m-1} < x \leqslant 2^m.$$

Powiadamy, że będzie wówczas stale:

$$k_n = 1 \quad \text{dla} \quad n < m, \quad \text{zaś} \quad x_{m-1} \leqslant 2.$$

Istotnie, mamy stale:

$$x_{n-1} = \frac{x}{\left(1 + \frac{1}{k_1}\right)\left(1 + \frac{1}{k_2}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{k_{n-1}}\right)},$$

a że k są liczby naturalne, zatem $1 + \frac{1}{k} \leqslant 2$ oraz:

$$x_{n-1} \geqslant \frac{x}{2^{n-1}} > \frac{2^{m-1}}{2^{n-1}}.$$

Dla $n<m$ będzie więc $x_{n-1}>2$, czyli $x_{n-1}>1+\frac{1}{1}$, zatem $k_n=1$.

Będzie więc:

$$k_1=k_2=\ldots=k_{m-1}=1.$$

Ale w takim razie z wypisanego wyżej wzoru na x_{n-1} wynika:

$$x_{m-1}=\frac{x}{2^{m-1}}\leqslant\frac{2^m}{2^{m-1}},$$

czyli $x_{m-1}\leqslant 2$, co było do okazania.

Możemy więc wobec tego, nie uszczuplając ogólności naszych rozważań, zająć się w dalszym ciągu tylko rozwijaniem liczb, nie większych od 2.

2.

Uważajmy liczbę x, spełniającą warunki:

$$1<x\leqslant 2.$$

Powiadamy, że będziemy mieli stale $k_n\geqslant 2$.

W samej rzeczy, z równości:

$$x=\left(1+\frac{1}{k_1}\right)\left(1+\frac{1}{k_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{k_n}\right)x_n$$

i nierówności $x_n>1$, która stale zachodzi, wynika, że gdyby było $k_n=1$, to mielibyśmy:

$$x\geqslant 2x_n>2,$$

co przeczy założeniu.

Musi więc być stale $k_n>1$, czyli $k_n\geqslant 2$.

Lecz k_n oznacza najmniejszą liczbę naturalną, przy której

$$x_{n-1}>1+\frac{1}{k_n};$$

$k_n-1\geqslant 1$ jest mniejszą od k_n liczbą naturalną, będzie zatem:

$$x_{n-1}\leqslant 1+\frac{1}{k_n-1},$$

czyli:

$$x_{n-1}\leqslant\frac{k_n}{k_n-1},$$

a więc:

$$x_n=\frac{x_{n-1}}{1+\frac{1}{k_n}}=\frac{k_nx_{n-1}}{k_n+1}\leqslant\frac{k_n^2}{k_n^2-1},$$

t. j.

$$x_n\leqslant 1+\frac{1}{k_n^2-1}.$$

Lecz, z drugiej strony:

$$x_n>1+\frac{1}{k_{n+1}}.$$

Będzie więc:

$$1+\frac{1}{k_n^2-1}>1+\frac{1}{k_{n+1}},$$

zatem:

$$k_{n+1}>k_n^2-1,$$

czyli:

$$k_{n+1}\geqslant k_n^2.$$

Załóżmy, że mamy przy pewnem n:

$$k_n\geqslant 2^{2^{n-1}}$$

(jest to prawdziwe dla $n=1$, gdyż $k_1\geqslant 2$); mielibyśmy wówczas:

$$k_{n+1}\geqslant k_n^2\geqslant 2^{2^{n-1}\cdot 2},$$

czyli:

$$k_{n+1}\geqslant 2^{2^n}.$$

Wnosimy stąd przez indukcyę, że mamy stale:

$$k_n\geqslant 2^{2^{n-1}}.$$

Lecz:

$$1<x_n\leqslant 1+\frac{1}{k_{n+1}-1};$$

jest więc:

$$0<x_n-1\leqslant\frac{1}{2^{2^n}-1},$$

skąd:

$$\lim_{n=\infty}x_n=1.$$

Jeżeli położymy:

$$p_n=\left(1+\frac{1}{k_1}\right)\left(1+\frac{1}{k_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{k_n}\right),$$

to będziemy mieli:

$$x=p_nx_n,\quad p_n=\frac{x}{x_n},$$

a więc:

$$\lim_{n=\infty} p_n = x.$$

Dowiedliśmy więc, że uważane przez nas rozwinięcie daje iloczyn nieskończony zbieżny, którego wartością jest liczba x. Mamy więc:

$$x = \left(1+\frac{1}{k_1}\right)\left(1+\frac{1}{k_2}\right)\left(1+\frac{1}{k_3}\right)\dots$$

Otrzymany iloczyn nieskończony jest nadzwyczaj szybko zbieżny, jak to wynika z nierówności:

$$0 < x_n - 1 \leqslant \frac{1}{2^{2^n}-1},$$

którą mieliśmy wyżej.

Np. dla $n=10$ mamy $2^{2^{10}}=2^{1024}$, skąd:

$$0 < x_{10} - 1 < \frac{1}{10^{308}}.$$

Mamy stale $p_n < x \leqslant 2$, a więc:

$$0 < x - p_n = (x_n - 1)\, p_n < 2(x_n - 1),$$

a przeto:

$$0 < x - p_{10} < \frac{2}{10^{308}} < \frac{1}{10^{307}}.$$

Iloczyn pierwszych dziesięciu czynników daje więc już rozwijaną liczbę z dokładnością p r z e s z ł o t r z y s t u z n a k ó w d z i e s i ę t n y c h!

Mamy dalej:

$$2^{2^{15}} = 2^{33008} > 10^{9943},$$

skąd wywnioskowalibyśmy, że iloczyn pierwszych 15-tu czynników wyznacza rozwijaną liczbę z dokładnością o k o ł o d z i e s i ę c i u t y s i ę c y z n a k ó w d z i e s i ę t n y c h!

3.

Uważajmy znowu jakąkolwiek liczbę $x>1$.

Jak wiemy, istnieje taka liczba naturalna m, iż będziemy mieli $k_n=1$ dla $n=1,2,\dots,m-1$, zaś $x_{m-1}\leqslant 2$. Liczba x_{m-1} da więc rozwinięcie:

$$x_{m-1} = \left(1+\frac{1}{k_1'}\right)\left(1+\frac{1}{k_2'}\right)\dots,$$

gdzie będzie $k_1'>1$, stale zaś $k'_{n+1}\geqslant k'^2_n$.

Będziemy zatem mieli:

$$k_n = k'_{n-m+1} \text{ dla } n=m,\ m+1,\dots$$

i przeto dla $n\geqslant m$:

$$k_{n+1}\geqslant k_n^2.$$

Nierówność ta zachodzi jednak oczywiście i dla $n<m$, gdyż przy $n=m-1$ zamienia się na $k_1'\geqslant 1$, zaś przy $n<m-1$ na $1\geqslant 1$.

Możemy więc powiedzieć, że każda liczba x większa od jedności daje oznaczone w zupełności rozwinięcie na iloczyn nieskończony:

$$x = \left(1+\frac{1}{k_1}\right)\left(1+\frac{1}{k_2}\right)\left(1+\frac{1}{k_3}\right)\dots,$$

gdzie k są liczby naturalne, spełniające przy wszelkiem n nierówność:

$$k_{n+1}\geqslant k_n^2.$$

Powiadamy, że nierówność ta jest dla naszego rozwinięcia charakterystyczna, innemi słowy, że jedna i ta sama liczba nie może dawać dwóch różnych rozwinięć:

$$x = \left(1+\frac{1}{k_1}\right)\left(1+\frac{1}{k_2}\right)\dots = \left(1+\frac{1}{l_1}\right)\left(1+\frac{1}{l_2}\right)\dots,$$

gdzie k i l są liczby naturalne, spełniające warunki:

$$k_{n+1}\geqslant k_n^2, \quad l_{n+1}\geqslant l_n^2$$

przy wszelkich naturalnych n.

Dla dowodu zauważymy przedewszystkiem, że gdybyśmy mieli $l_1=1$, to byłoby $x>2$, a więc też i $k_1=1$ i byłoby w tym razie $l_1=k_1$.

Załóżmy, że $l_1>1$.

Zauważymy, że gdybyśmy mieli:

$$l_n\geqslant l_1^{2^{n-1}}$$

(co jest prawdziwe dla $n=1$), to byłoby:

$$l_{n+1}\geqslant l_n^2\geqslant l_1^{2^n},$$

skąd przez indukcyę wnosimy o nierówności:

$$l_n\geqslant l_1^{2^{n-1}}$$

przy wszelkiem naturalnem n.

Mamy więc przy wszelkiem n:

$$\left(1+\frac{1}{l_1}\right)\left(1+\frac{1}{l_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{l_n}\right)\leqslant\left(1+\frac{1}{l_1}\right)\left(1+\frac{1}{l_1{}^2}\right)\left(1+\frac{1}{l_1{}^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{l_1{}^{2^{n-1}}}\right).$$

Lecz, jak to łatwo sprawdzamy, dla $l_1>1$:

$$\left(1+\frac{1}{l_1}\right)\left(1+\frac{1}{l_1{}^2}\right)\left(1+\frac{1}{l_1{}^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{l_1{}^{2^{n-1}}}\right)=\frac{1-\frac{1}{l_1{}^{2^n}}}{1-\frac{1}{l_1}}<\frac{1}{1-\frac{1}{l_1}}$$

Będzie więc w każdym razie:

$$x\leqslant\frac{1}{1-\frac{1}{l_1}},$$

czyli:

$$x\leqslant 1+\frac{1}{l_1-1}.$$

Lecz z drugiej strony oczywiście:

$$x>1+\frac{1}{l_1}.$$

Nierówności

$$1+\frac{1}{l_1-1}\geqslant x>1+\frac{1}{l_1},$$

które znaleźliśmy dla liczby naturalnej l_1, wskazują na to, że jest ona najmniejszą, przy której:

$$x>1+\frac{1}{l_1};$$

wnioskujemy stąd, że $l_1=k_1$.

A więc, czy będzie $l_1=1$, czy też $l_1>1$, w każdym razie mamy $l_1=k_1$. Dzieląc równość:

$$\left(1+\frac{1}{k_1}\right)\left(1+\frac{1}{k_2}\right)\cdots=\left(1+\frac{1}{l_1}\right)\left(1+\frac{1}{l_2}\right)\cdots$$

przez

$$1+\frac{1}{k_1}=1+\frac{1}{l_1},$$

otrzymamy:

$$\left(1+\frac{1}{k_2}\right)\left(1+\frac{1}{k_3}\right)\cdots=\left(1+\frac{1}{l_2}\right)\left(1+\frac{1}{l_3}\right)\cdots,$$

skąd, rozumując jak wyżej, dostaniemy $l_2=k_2$ i t. d.

Mamy więc ogólnie $l_n=k_n$, co było do okazania.

Otrzymujemy więc następujące twierdzenie:

Każda liczba, większa od jedności, da się zawsze i to w jeden tylko sposób rozwinąć na iloczyn nieskończony:

$$\left(1+\frac{1}{k_1}\right)\left(1+\frac{1}{k_2}\right)\left(1+\frac{1}{k_3}\right)\cdots,$$

gdzie wszystkie k są liczby naturalne, spełniające warunek:

$$k_{n+1}\geqslant k_n{}^2 \text{ dla } n=1,2,3,\ldots$$

4.

Zapytamy obecnie, co w naszych rozwinięciach cechuje liczby wymierne. Powiadamy, że charakterystyczną własnością liczb wymiernych jest stałe zachowanie warunku

$$k_{n+1}=k_n{}^2$$

dla dostatecznie wielkich wartości wskaźnika.

Udowodnimy przedewszystkiem, że jeżeli mamy $k_{n+1}=k_n{}^2$ dla $n\geqslant m$, to rozwijana liczba jest wymierna.

Zauważymy najpierw, że jeżeli dla $n\geqslant m$ zachodzi stale równość $k_{n+1}=k_n{}^2$, to $k_m>1$, gdyż w razie $k_m=1$ wszystkie wyrazy ciągu k_n byłyby równe jedności, co, jak wiemy, mieć miejsca nie może.

Możemy napisać:

$$x=p_{m-1}x_{m-1},$$

gdzie:

$$p_{m-1}=\left(1+\frac{1}{k_1}\right)\left(1+\frac{1}{k_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k_{m-1}}\right)$$

jest oczywiście liczbą wymierną, zaś:

$$x_{m-1}=\left(1+\frac{1}{k_m}\right)\left(1+\frac{1}{k_m{}^2}\right)\left(1+\frac{1}{k_m{}^4}\right)\cdots=\frac{k_m}{k_m-1}$$

również jest, jak widzimy, wymierne. Wymierną więc będzie i liczba x c. b. d. o.

Okażemy obecnie, że jeżeli $x>1$ jest liczbą wymierną, to istnieje taka liczba naturalna m, że dla $n\geqslant m$ będzie $k_{n+1}=k_n{}^2$.

Zauważymy przedewszystkiem, że wystarczy okazać prawdziwość twierdzenia dla liczb wymiernych $\leqslant 2$, gdyż, jak wiemy, w razie $x>2$ mamy rozwinięcie:

$$x=\left(1+\frac{1}{k_1}\right)\left(1+\frac{1}{k_2}\right)\cdots\cdot\left(1+\frac{1}{k_{m-1}}\right)x_{m-1},$$

gdzie $k_1=k_2=\ldots=k_{m-1}=1$, zaś liczba x_{m-1} (wymierna oczywiście w razie wymiernego x) jest $\leqslant 2$.

Zakładając więc, że w jest liczbą wymierną >1 oraz $\leqslant 2$, będziemy mogli położyć:

$$w=1+\frac{a}{b},$$

gdzie a i b są liczby naturalne. Gdyby b było podzielne przez a, czyli $b=pa$ przy naturalnem p, to mielibyśmy rozwinięcie systematyczne:

$$w=\left(1+\frac{1}{p+1}\right)\left(1+\frac{1}{(p+1)^2}\right)\left(1+\frac{1}{(p+1)^4}\right)\ldots$$

i twierdzenie byłoby oczywiście prawdziwe.

Załóżmy więc, że iloraz $\frac{b}{a}$ nie jest liczbą całkowitą. Mamy $k_1>1$ wobec $w\leqslant 2$, oraz:

$$1+\frac{1}{k_1-1}\geqslant w,$$

a więc:

$$1+\frac{1}{k_1-1}\geqslant 1+\frac{a}{b},$$

skąd:

$$k_1\leqslant\frac{b}{a}+1.$$

Ponieważ, jak zakładamy, $\frac{b}{a}$ nie jest liczbą całkowitą, więc napisana przed chwilą nierówność może być zastąpiona przez:

$$k_1<\frac{b}{a}+1.$$

Kładąc:

$$w=\left(1+\frac{1}{k_1}\right)w_1,$$

będziemy mieli:

$$w_1=\frac{w}{1+\frac{1}{k_1}}=\frac{1+\frac{a}{b}}{1+\frac{1}{k_1}}=\frac{(b+a)k_1}{b(k_1+1)},$$

skąd:

$$w_1-1=\frac{(b+a)k_1}{b(k_1+1)}-1=\frac{ak_1-b}{b(k_1+1)}.$$

Kładąc:

$$ak_1-b=a_1,\quad b(k_1+1)=b_1,$$

będziemy mieli:

$$w_1=1+\frac{a_1}{b_1}.$$

Liczby a_1 i b_1 są oczywiście naturalne, mamy przytem:

$$a_1=ak_1-b<a\left(\frac{b}{a}+1\right)-b,$$

czyli:

$$a_1<a.$$

A więc: jeżeli iloraz $\frac{b}{a}$ nie jest całkowity, to mamy:

$$w=\left(1+\frac{1}{k_1}\right)w_1,$$

gdzie $w_1=1+\frac{a_1}{b_1}$ oraz $a_1<a$.

Gdyby iloraz $\frac{b_1}{a_1}$ nie był całkowity, znaleźlibyśmy, jak wyżej:

$$w_1=\left(1+\frac{1}{k_2}\right)w_2,$$

gdzie $w_2=1+\frac{a_2}{b_2}$ oraz $a_2<a_1$.

Ciąg nierówności $a>a_1>a_2>\ldots$ dla liczb naturalnych a_i nie może być oczywiście nieskończony, a więc przy pewnem $i=m$ (w każdym razie mniejszem od a) liczba b_i będzie podzielna przez a_i, czyli $b_m=pa_m$, gdzie p oznacza liczbę naturalną, a w takim razie, jak wiemy, będziemy mieli $k_{m+1}=p+1$, zaś $k_{n+1}=k_n^2$ dla $n>m$.

Twierdzenie możemy więc uważać za dowiedzione w zupełności.

Oto przykłady rozwinięć systematycznych liczb wymiernych:

1) $$\frac{22}{7}=\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{22}\right)\left(1+\frac{1}{22^2}\right)\ldots;$$

mamy tu:

$$k_1=1,\ k_2=2,\ k_3=22,\ k_{n+1}=k_n^2 \text{ dla } n>2.$$

2) Dla liczby $\frac{355}{113}$ znaleźlibyśmy:

$$k_1=1,\ k_2=2,\ k_3=22,\ k_4=600,\ k_5=1562000,$$

zaś:

$$k_{n+1} = k_n^2 \text{ dla } n > 4.$$

5.

Aby dać przykład rozwinięć systematycznych liczb niewymiernych, zauważymy tożsamość:

$$\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)\sqrt{\frac{(2k^2-1)+1}{(2k^2-1)-1}}.$$

Kładąc $k_1 = k (\neq 1)$, zaś $k_{n+1} = 2k_n^2 - 1$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$, będziemy oczywiście mieli:

$$\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} = \left(1 + \frac{1}{k_1}\right)\sqrt{\frac{k_2+1}{k_2-1}}, \quad \sqrt{\frac{k_2+1}{k_2-1}} = \left(1 + \frac{1}{k_2}\right)\sqrt{\frac{k_3+1}{k_3-1}} \text{ i t. d.},$$

a więc:

$$\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} = \left(1 + \frac{1}{k_1}\right)\left(1 + \frac{1}{k_2}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)\sqrt{\frac{k_{n+1}+1}{k_{n+1}-1}}$$

Jeżeli k oznacza liczbę naturalną, większą od jednosci, to liczby k_n (oczywiście wszystkie naturalne) będą wzrastały nieograniczenie; będziemy więc mieli:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt{\frac{k_{n+1}+1}{k_{n+1}-1}} = 1$$

oraz, co zatem idzie, rozwinięcie:

$$\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} = \left(1 + \frac{1}{k_1}\right)\left(1 + \frac{1}{k_2}\right)\left(1 + \frac{1}{k_3}\right) \ldots,$$

które będzie systematyczne, gdyż:

$$k_{n+1} = k_n^2 + (k_n^2 - 1) \geqslant k_n^2.$$

Kładąc np. $k = 3$, otrzymujemy:

$$\sqrt{2} = \left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{17}\right)\left(1 + \frac{1}{577}\right)\left(1 + \frac{1}{665857}\right) \ldots$$

Mamy tu $k_1 = 3$, $k_{n+1} = 2k_n^2 - 1$.

Ciekawym jest bezpośredni wzór na k_n dla uważanego rozwinięcia.

Mamy:

$$k_n = \frac{(\sqrt{2}+1)^{2^n} + (\sqrt{2}-1)^{2^n}}{2},$$

jak to z łatwością sprawdzamy przez indukcyę.

Godnem uwagi jest, że chcąc podać bezpośredni wzór na wyraz ogólny pewnego ciągu liczb naturalnych, musimy się w danym razie uciekać do pomocy liczb niewymiernych.

Kładąc $k = 2$, otrzymujemy:

$$\sqrt{3} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{7}\right)\left(1 + \frac{1}{97}\right)\left(1 + \frac{1}{18817}\right) \ldots$$

I tu też z łatwością sprawdzamy przez indukcyę, że k_n może być wyrażone przez wzór:

$$k_n = \frac{(2+\sqrt{3})^{2^{n-1}} + (2-\sqrt{3})^{2^{n-1}}}{2}.$$

Dla $\sqrt{5}$ otrzymujemy rozwinięcie systematyczne:

$$\sqrt{5} = \left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{9}\right)\left(1 + \frac{1}{161}\right)\left(1 + \frac{1}{51841}\right) \ldots;$$

mamy tu $k_1 = 1$, $k_2 = 9$, zaś $k_{n+1} = 2k_n^2 - 1$ dla $n > 1$.

Uważane tu iloczyny nieskończone stoją w ścisłym związku z rozwinięciami pierwiastków na ułamki łańcuchowe, w co jednak bliżej nie będziemy tutaj wchodzili [1]). Zaznaczymy tylko, że są one bez porównania szybciej zbieżne od odpowiednich ułamków ciągłych. Np. obliczając iloczyn 10-ciu pierwszych czynników wypisanego wyżej rozwinięcia na $\sqrt{2}$, otrzymalibyśmy tę liczbę z dokładnością siedmiuset kilkudziesięciu znaków dziesiętnych, gdy tymczasem dziesiąty redukt ułamka na $\sqrt{2}$ nawet dziesięciu znaków tej liczby dokładnie nie wyznacza.

[1]) Oznaczając przez R_n n-ty redukt ułamka ciągłego na $\sqrt{2}$, zaś przez p_n iloczyn n pierwszych czynników rozwinięcia systematycznego tej liczby, n amy ogólnie:

$$p_n = \frac{2}{R_{2^n-1}}, \quad \text{a więc } p_1 = \frac{2}{R_1},\ p_2 = \frac{2}{R_3},\ p_3 = \frac{2}{R_7},\ p_{10} = \frac{2}{R_{1023}}.$$

Zauważymy jeszcze, że iloczyny kolejnych czynników rozwinięcia systematycznego na $\sqrt{2}$ otrzymać można zapomocą następującego logarytmu:

Kładziemy $a_0 = 2$, $b_0 = 1$. Średnią arytmetyczną liczb a_0, b_0 oznaczamy przez a_1, średnią harmoniczną tych liczb—przez b_1. Dla liczb a_1, b_1 wyznaczamy odpowiednie średnie a_2, b_2 i t. d. Liczba b_n jest iloczynem n pierwszych czynników naszego rozwinięcia.

6.

Uwzględniliśmy dotychczas tylko teoretyczną stronę rozwinięć systematycznych: wskażemy obecnie, w jaki sposób mogłyby być w każdym poszczególnym przypadku wykonane rachunki.

Mając liczbę $x > 1$, wyznaczamy przedewszystkiem najmniejszą liczbę naturalną m, przy której:

$$2^m \geqslant x.$$

Wyznaczenie takiej liczby może sprawiać pewne trudności przy wielkich wartościach x. Możemy się wówczas udać do pomocy tablic logarytmowych.

Liczba m jest najmniejszą naturalną, spełniającą powyższą nierówność, mamy więc:

$$2^m \geqslant x > 2^{m-1}.$$

Nierówności te pociągają za sobą:

$$m \log 2 \geqslant \log x > (m-1) \log 2,$$

skąd:

$$m \geqslant \frac{\log x}{\log 2} \text{ oraz } m-1 < \frac{\log x}{\log 2}.$$

Liczba m jest więc najmniejszą liczbą naturalną, nie mniejszą od ilorazu $\frac{\log x}{\log 2}$. Uwaga ta pozwala przy użyciu tablic logarytmowych wyznaczać liczbę m z łatwością.

(Np. dla $x = 10^{100}$ znajdujemy:

$$\frac{\log x}{\log 2} = \frac{100}{0{,}30103} = 332{,}2\,;$$

będzie więc $m = 333$).

Kładziemy następnie:

$$k_1 = k_2 = \dots = k_{m-1} = 1$$

oraz:

$$\frac{x}{2^{m-1}} = x_{m-1}.$$

Liczba x_{m-1} będzie $\leqslant 2$, a więc $k_m \geqslant 2$. Na liczbę k_m mamy nierówności:

$$1 + \frac{1}{k_m - 1} \geqslant x_{m-1} > 1 + \frac{1}{k_m},$$

skąd:

$$\frac{1}{x_{m-1} - 1} < k_m \leqslant \frac{1}{x_{m-1} - 1} + 1.$$

Nierówności te wskazują, że k_m jest całością, zawartą w $\frac{1}{x_{m-1} - 1} + 1$, czyli:

$$k_m = \mathrm{E}\,\frac{1}{x_{m-1} - 1} + 1.$$

Oczywiście, ogólnie dla $n \geqslant m$ będziemy mieli:

$$k_n = \mathrm{E}\,\frac{1}{x_{n-1} - 1} + 1.$$

P r z y k ł a d y.

1) Niech będzie $x = \pi$. Mamy tu oczywiście $m = 2$, a więc $k_1 = 1$. Mamy dalej $x_1 = \frac{\pi}{2}$, a więc:

$$k_2 = \mathrm{E}\,\frac{2}{\pi - 2} + 1 = 2.$$

Dalej:

$$x_2 = \frac{\pi}{3}, \text{ skąd } k_3 = \mathrm{E}\,\frac{3}{\pi - 3} + 1 = 22.$$

A więc:

$$x_3 = \frac{22\pi}{69}, \text{ skąd } k_4 = \mathrm{E}\,\frac{69}{22\pi - 69} + 1 = 600\,;$$

następny wyraz k_5 byłby już $\geqslant 360000$.

Mamy więc rozwinięcie:

$$\pi = \left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{22}\right)\left(1 + \frac{1}{600}\right)\cdots$$

2) Jako drugi przykład uważajmy liczbę e.

Mamy tu oczywiście $k_1 = 1$, $x_1 = \frac{e}{2}$, a więc:

$$k_2 = \mathrm{E}\,\frac{2}{e - 2} + 1 = 3,$$

stąd:

$$x_2 = \frac{3e}{8}, \quad k_3 = \mathrm{E}\,\frac{8}{3e - 8} + 1 = 52\,;$$

następny wyraz k_4 wynosiłby już kilka tysięcy.

Mamy więc rozwinięcie:

$$e = \left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{52}\right)\cdots$$

Ciekawem byłoby wykrycie ogólnego prawa na wyrazy k_n w rozwinięciach liczb π i e.

7.

Niech teraz y oznacza liczbę dodatnią, mniejszą od jedności. Określiliśmy już we wstępie, co nazywamy rozwinięciem systematycznem takiej liczby na iloczyn nieskończony

$$\left(1-\frac{1}{l_1}\right)\left(1-\frac{1}{l_2}\right)\left(1-\frac{1}{l_3}\right)\ldots$$

Teoryę tych rozwinięć możnaby z łatwością opracować analogicznie do wyłożonej wyżej teoryi rozwinięć liczb większych od jedności Istnieje jednak między obu tak ścisły związek, iż oddzielne badanie każdej z nich staje się zbytecznem.

Z samego już określenia wynika, że każda liczba dodatnia, mniejsza od jedności, daje oznaczone w zupełności rozwinięcie systematyczne.

$$\left(1-\frac{1}{l_1}\right)\left(1-\frac{1}{l_2}\right)\left(1-\frac{1}{l_3}\right)\ldots,$$

gdzie wszystkie l są liczby naturalne. Możemy mieć wątpliwości jedynie co do tego, czy wypisane rozwinięcie jest zawsze zbieżne, a jeżeli tak jest, to czy wartość otrzymanego w ten sposób iloczynu nieskończonego równa się zawsze rozwijanej liczbie. Wątpliwości te usuwa następujące

T w i e r d z e n i e. Jeżeli:

$$\left(1-\frac{1}{l_1}\right)\left(1-\frac{1}{l_2}\right)\left(1-\frac{1}{l_3}\right)\ldots$$

jest rozwinięciem systematycznem liczby dodatniej $y<1$, zaś:

$$\left(1+\frac{1}{k_1}\right)\left(1+\frac{1}{k_2}\right)\left(1+\frac{1}{k_3}\right)\ldots$$

rozwinięciem systematycznem liczby $x=\frac{1}{y}$, to mamy przy wszelkiem n:

$$k_n = l_n - 1.$$

D o w ó d.

Liczba l_1 jest, wedle definicyi, najmniejszą naturalną, spełniającą nierówność:

$$y<1-\frac{1}{l_1}.$$

Widać stąd, że musi być $l_1 \geqslant 2$, gdyż $1-\frac{1}{1}=0$ nie może być większe od liczby dodatniej y. Liczba l_1-1 jest więc naturalna, a że jest mniejsza od l_1, mamy tedy:

$$y \geqslant 1-\frac{1}{l_1-1}.$$

Nierówność:

$$y<1-\frac{1}{l_1},$$

której obie strony są dodatnie, jest równoważna nierówności:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{l_1}}<\frac{1}{y},$$

albo:

$$1+\frac{1}{l_1-1}<\frac{1}{y},$$

gdyż:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{l_1}}=1+\frac{1}{l_1-1}.$$

Jeżeli więc $l_1=2$, to mamy $1+\frac{1}{1}<x$, a więc $k_1=1$, czyli $k_1=l_1-1$.

Załóżmy, że $l_1>2$.

Nierówność:

$$y \geqslant 1-\frac{1}{l_1-1}, \text{ czyli } y \geqslant \frac{l_1-2}{l_1-1}$$

możemy wówczas przepisać w kształcie:

$$\frac{l_1-1}{l_1-2} \geqslant \frac{1}{y}, \text{ czyli } 1+\frac{1}{l_1-2} \geqslant \frac{1}{y}.$$

Zauważywszy, że $\frac{1}{y}=x$, mamy więc, przy $l_1>2$ nierówności:

$$1+\frac{1}{l_1-2} \geqslant x > 1+\frac{1}{l_1-1},$$

skąd natychmiastowy wniosek, że $k_1=l_1-1$.

Czy więc będzie $l_1=2$, czy też $l_1>2$, w każdym razie $k_1=l_1-1$.

Połóżmy:

$$y=\left(1-\frac{1}{l_1}\right)y_1,\ x=\left(1+\frac{1}{k_1}\right)x_1.$$

Liczba y_1 daje rozwinięcie systematyczne:

$$\left(1-\frac{1}{l_2}\right)\left(1-\frac{1}{l_3}\right)\ldots,$$

zaś liczba x_1 rozwinięcie systematyczne:

$$\left(1+\frac{1}{k_2}\right)\left(1+\frac{1}{k_3}\right)\ldots$$

Mieliśmy $x=\frac{1}{y}$, będzie więc:

$$x_1=\frac{x}{1+\frac{1}{k_1}}=\frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{1}{l_1-1}}=\frac{l_1-1}{l_1 y}=\frac{l_1-1}{l_1\left(1-\frac{1}{l_1}\right)y_1}=\frac{1}{y_1}.$$

A więc $x_1=\frac{1}{y_1}$. Rozumując o liczbach x_1, y_1, jak o liczbach x, y, znajdziemy: $k_2=l_2-1$. Dalej znaleźlibyśmy podobnież $k_3=l_3-1$, ogólnie:

$$k_n=l_n-1.$$

Oznaczmy:

$$q_n=\left(1-\frac{1}{l_1}\right)\left(1-\frac{1}{l_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{l_n}\right),$$

$$p_n=\left(1+\frac{1}{k_1}\right)\left(1+\frac{1}{k_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{k_n}\right).$$

Mamy ogólnie:

$$1-\frac{1}{l_n}=\frac{1}{1+\frac{1}{l_n-1}}=\frac{1}{1+\frac{1}{k_n}},$$

a więc $q_n=\frac{1}{p_n}$, a że, jak wiemy,

$$\lim_{n=\infty} p_n=x>1,$$

więc:

$$\lim_{n=\infty} q_n=\frac{1}{x}=y.$$

Każde więc rozwinięcie systematyczne liczby dodatniej, mniejszej od jedności, jest zbieżne, a wartością odpowiedniego iloczynu nieskończonego jest rozwijana liczba.

Nierówności

$$k_{n+1}\geqslant k_n^2 \quad (n=1,2,3,\ldots),$$

wobec $k_n=l_n-1$, są równoważne nierównościom

$$l_{n+1}-1\geqslant(l_n-1)^2,$$

albo:

$$l_{n+1}>(l_n-1)^2 \quad (\text{dla } n=1,2,3,\ldots).$$

Gdyby było więcej iloczynów nieskończonych o wartości y, dla których zachodzą wypisane przed chwilą nierówności, to mielibyśmy więcej, niż jeden iloczyn nieskończony na $x=\frac{1}{y}$, spełniający warunki $k_{n+1}\geqslant k_n^2$, co, jak wiemy, nie może mieć miejsca. Zestawiając razem otrzymane wyniki, możemy ostatecznie powiedzieć:

Każda liczba dodatnia, mniejsza od jedności, daje zawsze i przytem jedno tylko rozwinięcie na iloczyn nieskończony:

$$\left(1-\frac{1}{l_1}\right)\left(1-\frac{1}{l_2}\right)\left(1-\frac{1}{l_3}\right)\ldots,$$

gdzie wszystkie l są liczby naturalne, spełniające stale nierówność

$$l_{n+1}>(l_n-1)^2.$$

Widzimy też z łatwością, że *cechą charakterystyczną liczb wymiernych jest zachowanie dla dostatecznie wielkich wartości wskaźnika warunku:*

$$l_{n+1}=(l_n-1)^2+1,$$

jest on bowiem równoważny warunkowi $k_{n+1}=k_n^2$ w rozwinięciu systematycznem odwrotności uważanej liczby.

Jako ciekawy przykład rozwinięcia liczby wymiernej, podajemy je dla liczby $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{17}\right)\left(1-\frac{1}{257}\right)\left(1-\frac{1}{65537}\right)\ldots$$

Kolejne l przedstawiają tu tak zwane liczby *Fermata* $(l_{n+1}=2^{2^n}+1)$, o których w swoim czasie myślano, że są wszystkie pierwsze.

8.

Badania, które przeprowadziliśmy tu dla iloczynów nieskończonych, mogłyby być przeprowadzone analogicznie i dla szeregów nieskończonych. Ograniczę się wobec tego tylko na podaniu wyników.

Uważajmy jakąkolwiek liczbę dodatnią x. Wyznaczmy najmniejszą liczbę naturalną m_1, spełniającą nierówność:

$$x > \frac{1}{m_1}$$

i połóżmy $x = \frac{1}{m_1} + x_1$. Liczba x_1 będzie oczywiście dodatnią, możemy więc z nią postąpić, jak z liczbą x i t. d. Otrzymujemy w ten sposób oznaczony w zupełności szereg nieskończony:

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \ldots,$$

który nazywamy systematycznym.

Twierdzenie.

Każda liczba dodatnia daje się zawsze i to w jeden tylko sposób rozwinąć na szereg nieskończony

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \ldots,$$

gdzie wszystkie m są liczby naturalne, spełniające stale nierówność $m_{n+1} > m_n(m_n - 1)$.

Cechą charakterystyczną liczb wymiernych jest stałe zachowanie warunku $m_{n+1} = m_n(m_n - 1) + 1$ dla dostatecznie wielkich wartości wskaźnika.