

WŁ. GORCZYŃSKI.

## O wpływie powłoczki szklanej na wskazania termometrów radyacyjnych i o modyfikacji wzorów dla aktynometru systemu Ångströma-Chwolsona<sup>1)</sup>.

(SUR L'INFLUENCE DE L'ENVELOPPE DE VERRE DANS LES INDICATIONS DES THERMOMÈTRES DE RADIATION ET SUR LA MODIFICATION DE LA FORMULE FONDAMENTALE POUR L'ACTINOMÈTRE DU SYSTÈME ÅNGSTRÖM-CHWOLSON).

W artykule niniejszym rozważać będziemy jedynie termometry rtęciowe, których rezerwoary szklane wystawiane są nie wprost, lecz za pośrednictwem absorbującej warstwy „sadzy“ (jakiegokolwiek substancji, silnie pochłaniającej daną radyację) na działanie promieniowania zewnętrznego. Jest rzeczą oczywistą, że w tym przypadku zasadnicze ognisko zmian ciepłych tkwić będzie w absorbującej warstwie „sadzy“, że więc wskazania jedynie tylko masy rtęci nie mogą być przyjmowane jako miarodajne, bez zastrzeżeń, dla całego układu termometrycznego. Nie ulega wątpliwości, że w wielu przypadkach może być uprawnione założenie upraszczające, że przebieg rzeczywisty temperatury jest praktycznie identyczny z wskazaniami słupka rtęci; dla złożonych jednak systemów termometrycznych (jakie spotykamy np. w aktynometrach) stosunki te bynajmniej nie zawsze mogą być poczytywane za tak proste, tak że w tych przypadkach uprzednie zbadanie rzeczywistego rozkładu temperatury w całym układzie termometrycznym staje się rzeczą niezbędną. Zresztą, nawet w przypadku bardziej różnorodnej struktury, założenie jednej „temperatury ciała“ wymaga już bliższego określenia.

W dalszym ciągu mieć będziemy jedynie na myśli układ termometryczny, jaki spotyka się w aktynometrze systemu Ångströma-Chwolsona, i wykazemy na tym przykładzie, że zasadniczą rolę posiada tam

<sup>1)</sup> Rzecz przedstawiona na posiedzeniu Wydziału mat.-przyr. Towarzystwa Naukowego Warszawskiego d. 5 listopada 1908. Patrz Sprawozdania z posiedzeń T. N. W. Rocznik I, str. 212—214.

powłoczka szklana na wartości radyacji, wyprowadzone z odczytań pary termometrów aktywnometrycznych. Z rozważań tych wynika jednocześnie potrzeba modyfikacji obecnych wzorów teoretycznych, przyjmowanych dotychczas powszechnie dla aktywnometrów systemu Ångström a - Ch w o l - s o n a.

### CZĘŚĆ I.

#### WPLYW POWŁOCZKI SZKLANEJ.

##### § 1. Wzory zasadnicze.

Rozpatrzmy trzy warstwy jednorodne, złożone z „sadyz“, szkła i rtęci i wprowadźmy znakowania, wyszczególnione w tabelce.

Powietrze	$\tau$
„Sadza“	$\theta'$
.....	.....
Szkło	$t_e$
.....	.....
Rtęć	$t_i$
.....	.....
.....	$\theta''$

	„Sa- dza“	Szkło	Rtęć
Temperatura . . .	$\theta'$	$t_e \dots t_i$	$\theta''$
Grubość . . . . .	$d'$	$d$	$d''$
Spółczynnik prze- wodnictwa ciepl- nego (wewn.) . . .	$k'$	$k$	$k''$

Chodzi nam o znalezienie różnicy  $\theta' - \theta''$  w założeniu, że górna powierzchnia „sadyz“ poddana jest działaniu promieniowania słonecznego.

Wielkość tej energii promienistej oznaczmy przez  $q$  (na jednostkę czasu i powierzchni, zakładając stałe wiązki, normalnie padającą); niechaj  $h$  oznacza dalej współczynnik zewnętrznego przewodnictwa cieplnego, a  $\tau$  temperaturę otaczającej warstwy powietrza; wtedy wyrażenie:

$$(1) \quad q - h(\theta' - \tau)$$

przedstawia energię, otrzymywaną przez górną warstwę sadzy, przyczem odjemnik wskazuje część utraconą wskutek wypromieniowywania. Część ta uważana jest jako proporcjonalna do różnicy temperatur  $\theta' - \tau$ .

Energia, przechodząca przez dowolną płaszczyznę  $s_1$ , pomyślaną wewnątrz warstwy „sadyz“, przedstawia się w formie:

$$(2) \quad \frac{k'}{d'} (\theta' - t_e),$$

(20)

i podobnie, dla płaszczyzny  $s_2$  w szkłe, otrzymamy:

$$(3) \quad \frac{k}{d} (t_e - t_i),$$

przyjmując, że temperatury w szkłe prawidłowo zmieniają się od  $t_e$  do  $t_i$ .

Wreszcie dla płaszczyzny dowolnej  $s_3$ , wziętej w rtęci, <sup>1)</sup> mieć będziemy:

$$(4) \quad \frac{k''}{d''} (t_i - \theta'').$$

Dla przebiegu umiejscowionego, w warunkach, które nas specjalnie zajmują, przyjąć można:

$$(5) \quad q - h(\theta' - \tau) = \frac{k'}{d'} (\theta' - t_e) = \frac{k}{d} (t_e - t_i) = \frac{k''}{d''} (t_i - \theta''),$$

skąd wynika:

$$(5bis) \quad q - h(\theta' - \tau) = \frac{\theta' - \theta''}{\frac{d'}{k'} + \frac{d}{k} + \frac{d''}{k''}}$$

lub

$$(6) \quad \theta' - \theta'' = \frac{\frac{d'}{k'} + \frac{d}{k} + \frac{d''}{k''}}{1 + h \left( \frac{d'}{k'} + \frac{d}{k} + \frac{d''}{k''} \right)} \cdot [q - h(\theta' - \tau)].$$

Różnica:

$$(7) \quad \theta'' - \tau$$

przedstawia nadwyżkę temperatury rtęci ponad temperaturę powietrza; wielkość tę, łatwą do otrzymania na drodze obserwacji, oznaczmy krótko przez  $T$ .

Wzór:

$$(8) \quad \psi = \theta' - \theta'' = \frac{\frac{d'}{k'} + \frac{d}{k} + \frac{d''}{k''}}{1 + h \left( \frac{d'}{k'} + \frac{d}{k} + \frac{d''}{k''} \right)} \cdot (q - hT)$$

daje nam szukaną różnicę dla przypadków nagrzewania się układu pod wpływem promieniowania słonecznego; analogiczna różnica dla ochładzania się w cieniu otrzymuje się bezpośrednio z wzoru (8), zakładając  $q=0$ . Otrzymamy mianowicie:

<sup>1)</sup> W masie rtęci zaniedbujemy wpływ prądów konwekcyjnych na wewnętrzny rozkład temperatury.

$$(9) \quad \varphi = \theta'' - \theta' = \frac{\frac{d'}{k'} + \frac{d}{k} + \frac{d''}{k''}}{1 + h \left( \frac{d'}{k'} + \frac{d}{k} + \frac{d''}{k''} \right)} \cdot hT.$$

§ 2. Uproszczenie wzorów. W stosowaniu wzorów (8) i (9) do układu termometrycznego, jaki spotykamy w aktynometrze systemu Ångströma-Chwolsona, można przyjąć uproszczenie, że zarówno grubość  $d'$  warstwy sadzy, jak i grubość  $d''$  rtęci, może być we wzorach pominięta. Wyrażenia na  $\psi$  i  $\varphi$  przedstawiają się wtedy w postaci:

$$(10) \quad \psi = \frac{\frac{d}{k}}{1 + h \frac{d}{k}} \cdot (q - hT),$$

$$(11) \quad \varphi = \frac{h \frac{a}{k}}{1 + h \frac{a}{k}} \cdot T.$$

## CZĘŚĆ II.

### TEORIA AKTYNOMETRU SYSTEMU ÅNGSTRÖMA-CHWOLSONA.

§ 3. Zasadniczy związek różniczkowy. Rozpoczynamy od przedstawienia związku różniczkowego, zasadniczego w rozważanej przez nas kwestyi.

W każdym przyrządzie aktynometrycznym musi istnieć jakieś ciało, pochłaniające promieniowanie. Mierzony wzrost temperatury tego ciała zależy przede wszystkim od ilości pochłoniętej energii, a także od utraty ciepła przez ciało w tymże czasie.

Ogólny sposób obliczania energii, padającej na ciało ogrzewane, polega na zastosowaniu następującej zasady:

Ilość ciepła, otrzymana przez ciało w ciągu czasu  $dt$ , jest dla każdego momentu równa ilości ciepła, powodującego zwiększenie się temperatury ciała o  $dT$ , więcej ta ilość energii cieplnej, którą ciało rozważane traci w przeciągu tegoż momentu czasu  $dt$ .

Aby zależności tej nadać szatę analityczną, podatną następnie do całkowania, musimy wprowadzić cały szereg warunków ograniczających. Jest rzeczą oczywistą, że ewentualny wpływ odstępstw od tych warunków winien być następnie poddany odpowiedniemu badaniu.

Niechaj na pewne ciało  $K$  o rozmiarach skończonych, o powierzchni całkowitej  $\sigma$  i pojemności cieplnej  $c$  pada wiązka promieni o przecięciu poprzecznem  $s$ ; jeżeli wiązka ta ma dla wszystkich punktów kierunek normalny do powierzchni, to wartość  $s$  odpowiada jednocześnie wielkości powierzchni insolowanej.

Oznaczmy przez  $T = T_k - T_c$  przewyżkę „temperatury ciała“  $T_k$  nad „temperaturą otaczającego ośrodka“  $T_c$  (posiadającej w danym czasie pewną wartość stałą, np. zero). Aby założenie co do temperatur było określone, zakładamy, że spełnia się następujący warunek:

A) Wszystkie części ciała, wystawionego na działanie promieniowania lub pozostawionego w cieniu, posiadają w każdym danym momencie odpowiednio jedną i tą samą temperaturę  $T$ , której dajemy też miano „temperatury ciała“. Pomijamy trudności, związane z pojęciem „temperatury otaczającego ośrodka“, zakładając jej stałość w ciągu danego pomiaru lub przypuszczając, w razie potrzeby, że ciało otoczone jest odpowiednią powłoką, utrzymywaną przy stałej temperaturze.

Dalej wprowadzamy warunki:

B) Ilość energii  $Q$ , dochodzącej do powierzchni ciała i mierzącej natężenie promieniowania, pozostaje niezmienną co do swej wartości, swego składu i warunków padania w ciągu danego przedziału czasu (jednego pomiaru). Jednocześnie nie nęgają też zmianom zewnętrzne warunki atmosferyczne, a także prądy w warstwach, bezpośrednio otaczających nasze ciało odbiorcze. Nadto dla prostoty odnieśmy  $Q$  do jednostki czasu i jednostki powierzchni, ustawionej prostopadle względem promieni.

C) Zdolność absorbcyjna powierzchni, na którą padają promienie, jest wielkością stałą. Innymi słowy: istnieje określony, niezmienny stosunek między ilością energii  $Q$ , dochodzącej do powierzchni ciała, i tą ilością ciepła (nazwijmy ją przez  $q$ ), którą ciało to w tymże czasie pochłania. Bez ujmy dla ogólności dalszych rozważań, można przyjąć stosunek ten, jako równy jedności, pamiętając, że w razie innej jego wartości liczebnej wypadnie tylko rezultat ostateczny pomnożyć przez tę liczbę.

D) Utrata ciepła z danego ciała może być przedstawiona jako pewna funkcja  $f$ , zależna od temperatury ciała i temperatury ośrodka, także od przeciągu czasu, a pozatem ni-zależna od innych czynników. Strata więc ciepła w ciągu czasu  $dt$  daje się przedstawić w postaci:

$$(12) \quad a \cdot f(T_k, T_c, t) \cdot dt,$$

gdzie  $a$  jest nadto pewną wartością stałą, charakterystyczną dla danego ciała.

Po-iłkując się wspomnianą wyżej zasadą i zakładając, że spełniają się postawione warunki, otrzymujemy wzór następujący:

$$(13) \quad cdT = qs \cdot dt - a \cdot f(T_h, T_c, t) \cdot dt.$$

Wzór ten jest niedogodny z powodu obecności funkcji nieznannej  $f$ ; aby więc iść dalej, uczynimy dodatkowo założenie co do postaci tej funkcji, które możemy rozpatrywać, jako rozszerzenie warunku D). Zakładamy mianowicie, że:

Dbis) Strata ciepła pod działaniem promieni słonecznych podlega t. zw. prawu Newtona, a więc że dla każdego momentu jest ona proporcjonalna do temperatury (nadmiaru) ciała  $T$ . Zgodnie z tem wzór (12) można zastąpić wyrażeniem:

$$(14) \quad \sigma \cdot h \cdot T \cdot dt,$$

gdzie  $h$  oznacza współczynnik zewnętrznego przewodnictwa cieplnego, odniesiony do jednostki temperatury, powierzchni i czasu. Zaznaczamy, że warunek obecny nie zakłada jeszcze stałości współczynnika  $h$ , który istotnie też zależy od temperatury.

Aby ominąć i tę ostatnią trudność, przypuśćmy wreszcie, że:

E) Wartość współczynnika  $h$  nie ulega zmianom, przynajmniej w ciągu każdorazowego pomiaru.

Dzięki tym założeniom wzór (13) przyjmie postać:

$$(15) \quad qs \, dt = cdT + \sigma h \, l \, dt,$$

łatwo nadającą się do całkowania.

§ 4. Całkowanie równania i metoda statycznej aktynometrii.

Z wzoru (15) wynikają następujące wnioski:

1) Jeżeli  $q=0$  (t. j. jeżeli ciało po uprzednim nagraniu pozostawione jest w cieniu), to:

$$(16) \quad \frac{dT}{T} + \frac{\sigma \cdot h}{c} dt = 0,$$

skąd, całkując, otrzymamy:

$$(17) \quad T = T_0 \cdot e^{-mt}.$$

Czynnik

$$(18) \quad m = \frac{\sigma h}{c}$$

nazwany został przez Ch w o l s o n a „współczynnikiem ochładzania“ (Erkaltungskoeffizient); dla  $m$  stosuje się oczywiście tenże warunek ograniczający, który był podany pod E) dla  $h$ . Wreszcie  $T_0$  oznacza  $T_{t=0}$ .

2) Oznaczając przez  $T=l$ , temperaturę dla  $dT=0$ , mamy:

$$qs \, dt = \sigma h \, l \, dt,$$

skąd:

$$(19) \quad T_l = \frac{q \cdot s}{h \cdot \sigma} = \frac{1}{m} = \frac{s}{c} q$$

lub ostatecznie:

$$(20) \quad q = \frac{c}{s} - m T_l.$$

Wzór ostatni pozwala na otrzymanie szukanej wartości  $q$ , jeżeli znamy wartość iloczynu  $m T_l$ , gdyż wielkości  $c$  i  $s$  mogą być naprzód oznaczone dla danego przyrządu. Wzór ten był punktem wyjścia dla konstrukcji przyrządów, opartych na t. zw. metodzie statycznej aktynometrii (jak np. wszelkie termometry radyacyjne).

Można wykazać, że metoda ta musi być z góry uważana za nieściłą. W rzeczy samej wielkości  $T_l$  można przypisać znaczenie wyłącznie algebraiczne ułamku, określonego wzorem (19); oznaczenie zaś jej przez obserwacje temperatury po ustaleniu się wskazań ( $dT=0$ ) przy danym  $q$  jest błędne, gdyż w tym przypadku, wskutek dużych wartości na  $T$  i niestałości współczynnika  $h$ , warunki Dbis) i E) nawet w przybliżeniu nie mogą być uważane za spełnione i sam wzór (15) traci swoje znaczenie.

Przed przejściem do dalszych rozważań, zauważmy jeszcze następujące wnioski z wzoru (15), napisanego w postaci:

$$m T_l \, dt - m T \, dt = dT$$

lub

$$(21) \quad \frac{dT}{T - T_l} = m \, dt,$$

skąd:

$$(22) \quad T = T_0 e^{-mt} + T_l (1 - e^{-mt}),$$

gdzie dla

$$t = 0 \text{ jest } T = T_0.$$

Zależność (22) stosuje się do przypadku nagrzewania się ciała; dla ochładzania się mamy wzór (17), powyżej wyprowadzony.

§ 5. Metody dynamiczne aktynometrii.

Nieściłość pomiarów według „metody statycznej“, t. j. obserwacji termometrów po ustaleniu się temperatury, zniewoliła do mierzenia temperatur w ruchu, co jest też właściwością wspólną i charakterystyczną dla „metod dynamicznych“ aktynometrii.

Jeżeli uprzytomnimy sobie wzór (15)  $qs \, dt = cdT + \sigma \cdot h \cdot T \, dt$ , to widzimy, że dla wyznaczenia wielkości  $q$  potrzebna jest przedewszystkiem znajomość dwóch czynników. Pierwszy z nich jest proporcjonalny do prędkości nagrzewania się ciała (w stopniach na jednostkę czasu), która daje się wprost wyznaczyć przez obserwacje termometryczne; cała zaś trudność polega na zna-

lezeniu czynnika drugiego, który jest proporcjonalny do prędkości ochładzania się w tymże momencie. Ta ostatnia nie poddaje się prawie pomiarom bezpośrednim; okazuje się jednak możebne wyeliminowanie tej wielkości:

I) albo przez obserwacje dla danego ciała nie tylko całego szeregu nagrzań, ale także, bezpośrednio po pierwszych, drugiego szeregu oziębień, dla jednakowych w obu przypadkach nadmiarów temperatur i przy identycznych warunkach zewnętrznych;

II) albo przez jednoczesne obserwacje dwu ciał identycznych, z których jedno nagrzewa się, drugie zaś ochładza się w warunkach, o ile możliwości jednakowych.

Metoda I jest wspólna większości dawniej skonstruowanych aktynometrów; metoda dynamiczna II została zastosowana przez *Ångström*a w jego aktynometrze z r. 1887, zmodyfikowanym następnie przez *Chwolson*a w r. 1893.

Ponieważ ten ostatni aktynometr mamy tu specjalnie na widoku, zajmujemy się też bliżej rozważaniem metody dynamicznej II i podamy wzory, potrzebne do obliczeń radiacji według wskazań tego aktynometru.

Zasadniczym momentem w metodzie *Ångströma-Chwolsona* jest obserwacja różnic temperatur dwu ciał, z których jedno znajduje się na słońcu, gdy drugie pozostawione jest w cieniu. To rozszerzenie wymaga jednak zarazem i nowych warunków ograniczających, które sformułować można w sposób następujący:

F) Obydwa ciała aktynometryczne, poddawane kolejno (lub też jednocześnie) działaniu promieniowania, winny, prócz jednakowej powierzchni i objętości, posiadać jednakową pojemność cieplną, zdolność absorbcyjną i odpowiednio jednakowe współczynniki ochładzania;

f) zakłada się, że istnieje możliwość oznaczenia dla każdego momentu różnicy temperatur tych dwu ciał, a także umieszczenia jednego z nich w cieniu z pozostawieniem drugiego na słońcu, i że:

G) prócz promieni słonecznych żadne inne postronne (dodatnie lub ujemne) źródła ciepła nie działają w stopniu niejednakowym na obydwa ciała.

Przyjmując, że i nowe warunki są spełnione, można bez trudności wyprowadzić wzory dla jednoczesnej obserwacji dwu ciał. Przypuśćmy, że pierwsze ciało (o temp. początkowej  $T'_0$ ), pozostawione w cieniu, ochładza się, gdy tymczasem drugie (o temp. początkowej  $T''_0$ ) nagrzewa się pod działaniem promieni słonecznych. Oznaczając wogóle przez  $T'$  i  $T''$  zmienne wartości temperatur obydwu ciał, a przez  $\theta = T' - T''$  ich każdorazowe różnice, szukamy przedewszystkiem wzoru na  $\theta$  w funkcji czasu.

Według (17) i (21) będzie:

$$T' = T'_0 e^{-mt} \quad \text{i} \quad T'' = T''_0 e^{-mt} + T_1(1 - e^{-mt}),$$

skąd przez odejmowanie otrzymujemy:

$$(23) \quad \theta = \theta_0 e^{-mt} - T_1(1 - e^{-mt}),$$

co też przedstawia szukany wzór zasadniczy dla metody dynamicznej dwóch ciał.

§ 6. Rozwiązanie ogólne według metody dynamicznej.

Jeszcze *Desains*, a następnie *Violle* i inni fizycy i meteorologowie wskazali na następujące ogólne rozwiązanie teoretyczne pytania o wyznaczeniu wielkości  $q$  według metod dynamicznych aktynometrii. Rozważamy w tym celu prędkości ogrzewania się i ochładzania, które w przypadku dwóch ciał wyznaczać należy jednocześnie dla momentu, kiedy temperatury ich są równe. Zakładając nadto zupełną identyczność ciał w stadyum ogrzewania się i ochładzania, będziemy mieli dla tych stadyów związku różniczkowe:

$$(24) \quad \begin{cases} qsd t = cdT_e + a \cdot f(T_e, T_c, t) dt, \\ 0 = cdT_r + af(T_r, T_c, t) dt, \end{cases}$$

gdzie  $T_e$  oznacza wartość temperatury dla ciała nagrzewanego, a  $T_c$  odpowiednią wartość dla ciała ochładzanego (dla  $q=0$ ).

Oznaczmy przez  $t=t_0$  ten moment obserwacyjny, w którym temperatury obu ciał stają się równe (a przeto są caeteris paribus jednakowe i straty ciepła), wtedy z związków (24) bezpośrednio wyprowadzamy:

$$(25) \quad q = \frac{c}{s} \cdot \left( \frac{dT_e}{dt} - \frac{dT_r}{dt} \right)_{t=t_0}.$$

Jest to więc wzór ogólny dla wszystkich metod dynamicznych aktynometrii, dający wyrażenie na  $q$  w funkcji szybkości nagrzewania i ochładzania się termometrów, które należy wyznaczyć dla momentu:

$$t=t_0, \text{ w którym według założenia } T_e = T_r.$$

Ważną jest także rzeczą zauważyć, że wzór (25) nie wymaga znajomości prawa ochładzania się ciała w przyrządzie; przeto nie zakłada też istnienia i prawa *Newtona*. Przypuszcza się tylko, że mamy prawo mówić o „temperaturze ciała“, pomijając, że przy konstrukcji mamy tu do czynienia z niejednorodnością ciał termometrycznych, wpływem powłoki szklanej termometrów, konwekcji w rtęci i t. p.



Posiłkowanie się wzorem (25) wymaga oznaczeń dla określonego momentu szybkości ogrzewania i ostudzenia, co w praktyce pomiarów napotyka na wielkie trudności i nie daje się skutecznie z dostateczną dokładnością. Jeżeli przyjmiemy, że wartości  $T_e$  i  $T$ , dają się przedstawić jako funkcje ciągłe czasu  $t$ , to zaleźności:

$$T_e = a + \beta(t-t_0) + \gamma(t-t_0)^2 + \varepsilon(t-t_0)^3 + \dots$$

$$T = a' + \beta'(t-t_0) + \gamma'(t-t_0)^2 + \varepsilon'(t-t_0)^3 + \dots$$

dawałyby możliwość na zasadzie szeregu odczytań w jednakowych odstępach czasu, temperatur dwóch jednakowych ciał, z których jedno ogrzewa się na słońcu, a drugie, po uprzednim nagraniu, ochładza się, wyznaczyć najodpowiedniejsze wartości współczynników rozkładu, znaleźć czas, dla którego  $T_e = T$ , i przejść do oznaczeń jednoczesnych szybkości.

Sposób ten ma atoli dotychczas znaczenie czysto teoretyczne i przeto zajmować się nim nie będziemy, ograniczając się na wzmiance powyższej.

§ 7. Zasada aktywnometryczna Angströma i metoda równych odstępów czasu Chwolsona.

Ostatnio wyprowadzony wzór jest wspólny dla wszystkich aktywnometrów, opartych na pomiarach różnicy temperatur dwóch ciał identycznych, z których jedno wystawione jest na działanie promieni słonecznych, a drugie pozostawione w cieniu (zasada Angströma).

Od wzoru (23) przejdziemy teraz specjalnie do przypadku aktywnometru, według konstrukcji Chwolsona, który, zachowując zasadę Angströma, wprowadził następującą modyfikację w metodzie pomiarów:

dla wyeliminowania czynników nieznanymi i otrzymania szukanej wartości  $q$  wprost w funkcji zaobserwowanych temperatur i czasu, obserwuje się zmiany różnic temperatur dwóch ciał identycznych, w jednakowych czasu odstępach (metoda równych odstępów czasu).

Zauważymy mimochodem, że Angström przy konstrukcji swego przyrządu z r. 1887 posługiwał się metodą równych różnic temperatur, a pomiar polegał na mierzeniu przeciągów czasu.

Dla pomiarów z aktywnometrem Angströma-Chwolsona bierzemy dwa równe przeciągi czasu  $t$  i mierzymy odpowiadające im wielkości  $\theta$ . Niechaj różnice temperatur będą:  $\theta_1$  dla czasu  $t=0$ ,  $\theta_2$  po upływie czasu  $t$ ,  $\theta_3$  w czasie  $2t$ . Mając te dane, łatwo znaleźć  $q$  z wartości zaobserwowanych  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  i  $\theta_3$ , przy danym  $t$ .

W rzeczy samej na zasadzie wzoru (23) mamy:

$$(26) \quad \begin{cases} \theta_2 = \theta_1 e^{-mt} - T_1(1 - e^{-mt}), \\ \theta_3 = \theta_1 e^{-2mt} - T_1(1 - e^{-2mt}), \end{cases}$$

skąd:

$$(27) \quad e^{mt} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_2 - \theta_3}, \quad m = \frac{1}{t} \log \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_2 - \theta_3} \quad \text{i} \quad T_1 = \frac{\theta_2^2 - \theta_1 \theta_3}{\theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3}.$$

Posiłkując się wzorem (22), mamy ostatecznie:

$$(28) \quad q = \frac{c}{s} m T_1 = \frac{c}{s} \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{\theta_2^2 - \theta_1 \theta_3}{\theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3} \cdot \log \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_2 - \theta_3}.$$

Wzór ostatni, wyrażając  $q$  w funkcji  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  i  $\theta_3$ , prócz czynników stałych, rozwiązuje też postawione zadanie; zauważymy, że gdy wzory, podane w ustępach poprzedzających, były znane i dyskutowane już dawniej, to zależność (28) i wypływające z niej konsekwencje były po raz pierwszy przedstawione przez Chwolsona w jego znanych pracach w „Reperatorium für Meteorologie“, wydawanem przez H. Wilda.

§ 8. Uproszczenie wzoru zasadniczego dla aktywnometru systemu Angströma-Chwolsona.

Wzór (28) zawiera logarytm naturalny i jest niedogodny do obliczeń; Chwolson wskazał na możliwość jego uproszczenia, jeśli wprowadzić następujące ograniczenia co do sposobu pomiarów:

a) Wielkości  $\theta_1$  i  $\theta_2$  winny posiadać zawsze znaki przeciwne; jest także pożądane, aby  $\theta_2$  przedstawiało możliwie małą liczbę dodatnią lub ujemną.

Ponieważ warunek co do znaków przeciwnych wskazuje, że różnice temperatur obu ciał zmieniają znak, gdy porównujemy je w początku i końcu pomiaru, wynika stąd, że w czasie pomiaru muszą one przechodzić przez zero. Warunek więc co do małości liczby  $\theta_2$  daje się łatwo uskutecznić, jak to też wskazuje praktyka obserwacyjna.

b) Co do wyboru odstępów czasu, załóżmy, że odstęp  $t$  nie przewyższa nigdy 1 minuty; ponieważ nadto, jak się o tem dalej przekonamy, wartość  $mt$  przy pomiarach aktywnometrycznych nie przewyższa 0,35, więc iloczyn  $mt$  przedstawia ułamek, którego wysokie potęgi mogą być pominięte.

Uwagi te pozwalają na znaczne uproszczenie wzoru (28), które Chwolson przeprowadza w sposób następujący.

Szereg:

$$(29) \quad \log \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right)$$

po podstawieniu:

$$(30) \quad \frac{1+x}{1-x} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_2 - \theta_3} = \frac{a}{b},$$

gdzie dla krótkości  $\theta_1 - \theta_2$  zostało oznaczone przez  $a$ , a  $\theta_2 - \theta_3$  przez  $b$ , daje:

$$(31) \quad \log \frac{a}{b} = 2 \cdot \frac{a-b}{a+b} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^2 + \dots \right\}.$$

Pomijając potęgi wyższe i przyjmując w nawiasie ostatniego wyrazu stosunek przybliżony:

$$(32) \quad \frac{a-b}{a+b} = \frac{1}{2} \log \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \log \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_2 - \theta_3},$$

otrzymujemy według drugiego ze wzorów (27):

$$(33) \quad mt = \log \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_2 - \theta_3} = 2 \frac{\theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3}{\theta_1 - \theta_3} \cdot \left( 1 + \frac{m^2 t^2}{12} \right)$$

i według (28):

$$(34) \quad q = \frac{2c}{s} \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{\theta_2^2 - \theta_1 \theta_3}{\theta_1 - \theta_3} \cdot \left( 1 + \frac{m^2 t^2}{12} \right).$$

Praktyka spostrzeżeń aktynometrycznych uczy, że wogóle wystarcza obliczać  $q$  według wzoru:

$$(35) \quad q = \frac{1}{t} \frac{2c}{s} \cdot \frac{\theta_2^2 - \theta_1 \theta_3}{\theta_1 - \theta_3},$$

przyczem czynnik dodatkowy  $1 + \frac{1}{12} m^2 t^2$  może być ewentualnie obliczany ze wzoru:

$$(36) \quad mt = 2 \frac{\theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3}{\theta_1 - \theta_3}.$$

### CZEŚĆ III.

#### WZORY ZMODYFIKOWANE DLA AKTYNOMETRU ÁNGSTRÖMA-CHWOLSONA.

§ 9. O błędach, związanych z wprowadzeniem pojęcia o „temperaturze ciała“.

Przy wyprowadzaniu wzorów dla aktynometru, poczyniliśmy w Części II cały szereg założeń upraszczających, których odstępstwa winny być zbadane, i ocenione ewentualne błędy, wynikające stąd przy pomiarach radyacji. Zaznaczymy, że takie szczegółowe badania przeprowadzone zostały

przez Chwolsona w r. 1892 (dla aktynometrów i pyrhelimetrów różnego typu w pracy „Ueber den gegenwärtigen Zustand der Aktinometrie“) i w r. 1893 (dla pyrhelimetru i aktynometru systemu Ángströma-Chwolsona w „Aktinometrische Untersuchungen“). Dodamy, że badania poszczególnych błędów doprowadzały do powyższego wniosku co do dokładności wskazanego aktynometru, opartego na metodzie Ángströma-Chwolsona.

Pozostał tylko do rozpatrzenia błąd, który, jak wskazują obserwacje warszawskie, może być źródłem niedokładności, mogących dochodzić niekiedy nawet do 10% wartości mierzonej, i który dla aktynometru systemu Ángströma-Chwolsona nie był dotąd brany pod uwagę. To zaś było powodem, że liczne serie dawnych pomiarów z tym aktynometrem są między sobą nieporównywalne i wymagają nowego opracowania.

Chodzi tu o rzecz następującą: formułując warunek  $\Delta$ ) (w § 3), założyliśmy, że ciało, wystawione na działanie promieniowania, albo pozostawione w cieniu, posiada we wszystkich swych częściach odpowiednio jedną i tą samą temperaturę, której dajemy też miano „temperatury ciała“. Takie założenie może być uważane za usprawiedliwione dla nadzwyczaj cienkich płytek absorbujących pyrhelimetru kompensacyjnego Ángströma; dla ciał zaś termometrycznych o budowie złożonej, jak to ma miejsce w aktynometrze systemu Ángströma-Chwolsona, i o rezerwuarach, pokrytych warstwą sadzy oraz o dość grubych termokach szklanych, zawierających rtęć, odstępstwa mogą być znaczne i wpływ ten winien ulec rozpatrzeniu.

Biorąc przypadek konkretny aktynometru Ángströma-Chwolsona, zauważmy, że mamy tu do czynienia z względnie dużym zbiornikiem rtęci w formie wąskiego walca o jednej podstawie, pokrytej substancją absorbującą, którą będziemy nazywali „sadzą“; w kierunku osi walca mamy rurkę termometryczną z nader cienkim wewnątrz słupkiem rtęci. Są tu więc do rozpatrzenia trzy ciała: „sadza“, szkło i rtęć.

Wobec takiej formy można z góry pominąć wpływ prądów konwekcyjnych na rozkład temperatury wewnątrz samej masy rtęci, ale zato nasuwa się ważna kwestya co do wpływu powłoczki szklanej termometru, odgrywającej tak znaczną rolę zwłaszcza dla oceny utraty ciepła.

§ 10. Układ różniczkowy i wzór ostateczny, bez uwzględniania wpływu powłoczki szklanej.

Abymóż przejsz do oceny wpływu powłoczki szklanej, wychodząc z założenia, że temperatura rtęci i „sadzy“ (powierzchni wyczerpniętej, przyjmującej bezpośrednio radyację) nie są każdorazowo jednakowe wskutek perturbacyjnej obecności powierzchni szklanych. Stąd wypływa nadto, że jeżeli (jak to ma miejsce dla aktynometru) z dwóch ciał termometrycznych

Jedno ogrzewa się na słońcu, a drugie ochładza się w cieniu, to np. dla momentów, w którym odczytane ich temperatury stają się równe, równość ta nie będzie jednak miała miejsca dla scianek szklanych. Widzimy stąd, że nawet w przypadku jednakowych wskazań temperatur utraty ciepła nie będą dla obu termometrów jednakowe; termometr ogrzewający się traci—przy jednakowych dla obu położeniach słupka rtęci—więcej ciepła, niż ochładzający się, gdyż jego ścianki zewnętrzne mają w porównaniu nieco wyższą temperaturę.

Ze te różnice w utracie ciepła wskutek wpływu powłoczki szklanej muszą modyfikować poprzednio wyprowadzone wzory dla aktynometru systemu *Angströma* - *Chwolsona*, to łatwo spostrzedz, jeżeli zauważymy, że wzór zasadniczy dla metody dynamicznej dwóch ciał:

$$(23 \text{ bis}) \quad \theta = \theta_0 e^{-mt} - T_1(1 - e^{-mt})$$

i wynikający stąd wzór do obliczeń aktynometrycznych:

$$(35 \text{ bis}) \quad q = K \cdot \omega, \text{ gdzie } K = \frac{2c}{s} \text{ i } \omega = \frac{1}{t} \frac{\theta_2^2 - \theta_1 \theta_3}{\theta_1 - \theta_3}$$

otrzymywany był jako rozwiązanie szczególne przy całkowaniu równań:

$$(37) \quad \begin{cases} qs \cdot dt = c dT + \sigma h T dt, \\ 0 = c dT + \sigma h T dt. \end{cases}$$

Dwa te równania istnieją jednocześnie, lecz pierwsze z nich stosuje się do tego termometru aktynometrycznego, który nagrzewa się pod działaniem promieni słonecznych, gdy równanie drugie ma miejsce dla drugiego termometru, który w tymże czasie ochładza się w cieniu.

W związku (37) straty ciepła dla jednakowych wartości  $T$  uważane były za jednakowe.

Wypada nam więc teraz uwzględnić w równaniach (37) wpływ powłoczki szklanej i znaleźć, jaką modyfikację wprowadza ta zmiana w wyrażeniu całkowem. Zauważymy, że w pierwszym wyrazie związku (37) zamiast  $qsdt$  przyjęto  $qsdt$ , gdyż dla aktynometru systemu *Angströma* - *Chwolsona* można przyjmując  $s = \sigma$ .

§ 11. Spółczynniki przejścia we wzorach zmodyfikowanych.

Aby otrzymać wzory ostateczne, wychodzimy teraz z założenia, że dla jednakowych wartości obserwowanych  $T$  ważny jest nie związek (37), lecz układ różniczkowy:

$$(38) \quad \begin{cases} qsdt = c dT + \sigma h(T + \psi) dt, \\ 0 = c dT + \sigma h(T - \varphi) dt, \end{cases}$$

gdzie  $\psi$  i  $\varphi$  mają znaczenie, wyjaśnione już wyżej w Części I, i równają się mianowicie:

$$(39) \quad \begin{cases} \psi = \frac{\frac{d}{k}}{1 + h \frac{d}{k}} (q - hT), \\ \varphi = \frac{h \frac{d}{k}}{1 + h \frac{d}{k}} \cdot T. \end{cases}$$

Wprowadzając wzory (39) do układu (38), otrzymamy dwa równania:

$$(40) \quad \begin{cases} qsdt = c \left(1 + h \frac{d}{k}\right) dT + \sigma h T dt, \\ 0 = c \left(1 + h \frac{d}{k}\right) dT + \sigma h T dt, \end{cases}$$

które istnieją jednocześnie, lecz stosują się do dwóch termometrów w różnych stanach cieplnych, jak to wyjaśniono wyżej.

Układ różniczkowy (40) najzupełniej odpowiada układowi (37), z którego wyprowadzony został wzór ostateczny (35 bis), podany przez *Chwolsona*; wzór, zmodyfikowany do obliczeń aktynometrycznych, przedstawia więc w kształcie:

$$(41) \quad q = K' \cdot \omega, \text{ gdzie } K' = \frac{2c}{s} \cdot \left(1 + h \frac{d}{k}\right) \text{ i } \omega = \frac{1}{t} \frac{\theta_2^2 - \theta_1 \theta_3}{\theta_1 - \theta_3}.$$

Względne wartości aktynometru ( $\omega$ ) pozostają tu bez zmiany, a tylko czynnik  $K'$  nie przedstawia już, jak poprzednio, pewnej stałej przyrządu, lecz winien być pożytywany za zmienny współczynnik przejścia, zależny od własności powłoczki szklanej ( $d$  i  $k$ ) oraz od współczynnika ( $h$ ) zewnętrznego przewodnictwa cieplnego. Ten ostatni rozpatrywany jest wprawdzie jako stały w ciągu każdego poszczególnego pomiaru aktynometrycznego [tylko w tym bowiem przypadku wzory ostateczne dają się przedstawić w formie (35 bis) i (41)], a założenie to jest uprawnione w praktyce pomiarów aktynometrycznych, jak to już szczegółowo wykazał *Chwolson*. Dla pomiarów jednak, dokonywanych w różnych czasach, należy rozważać  $h$  w funkcji temperatury i przytem tak, że dla wzrastających lub malejących temperatur i wartości  $h$  stają się wyższe lub niższe. W ten sposób i nowe



spółczynniki przejścia dla aktynometru systemu Ångström a-Ch w o l s o n a winny, w ciągu okresu rocznego lub dziennego, jednocześnie wznąć lub maleć w zależności od temperatury. W stałych pomiarach rocznych wartości  $K'$  będą przeto wykazywały pewne zmiany określone, przy czym kierunek tych zmian może być w pierwszym przybliżeniu rozpatrywany jako proporcjonalny także do wahań w wartościach natężenia promieniowania słonecznego ze względu na ich, w głównych zarysach, synchroniczną okresowość z biegiem rocznym temperatury.

§ 12. Zmiany w współczynnikach przejścia według pomiarów warszawskich.

Jak wielkie są te zmiany współczynnika  $K'$ , o tem najpewniej przekonać się można z porównawczych obserwacji promieniowania słonecznego. W rzeczy samej, okazało się z jednoczesnych pomiarów, przeprowadzanych na Stacji Centralnej Meteorologicznej w Warszawie w okresie 1901—1905 r. z elektrycznym pyrhelometrem kompensacyjnym i aktynometrem systemu Ångström a-Ch w o l s o n a, że powyższe wnioski teoretyczne sprawdzają się na drodze doświadczalnej. Dla czterech aktynometrów, badanych w tym względzie, otrzymano mianowicie następujące przyrosty przeciętne współczynnika  $K'$ , gdy nastąpiło promieniowania słonecznego wzrastało o 0,1 gr. cal.:

0.024, 0.005, 0.02, 0.030.

Z liczb tych każda kolejno odpowiada jednemu z czterech użytych aktynometrów; zauważymy przytem, że same współczynniki, co do swej wartości, zazwyczaj niewiele tylko odbiegają od 1.

Różnica w zmianach współczynnika  $K'$  objaśnia się tem, że własności (d i k) powłoczki szklanej nie były jednakowe dla poszczególnych par termometrów aktynometrycznych, a stąd i czynnik  $(1 + h''/k)$  posiadał różne wartości dla różnych egzemplarzy nawet przy jednakowym  $h$ .

Nie jest tu naszym zamiarem wchodzić w bliższe szczegóły tych doświadczeń i odnośnych rezultatów liczbowych; podane są one w pracy naszej p. t. „Sur la marche annuelle de l'intensité du rayonnement solaire à Varsovie et sur la théorie des appareils employés“ (1906, 8-o, str. 202). Zauważymy tu tylko, że nieuwzględnienie zmienności współczynnika  $K'$  prowadzi do błędów w wyliczonych wartościach radyacji, które dochodzić mogą nawet do 10% wartości mierzonej. Wzory zmodyfikowane, usuwając to źródło błędów, pozwalają jednocześnie na osiągnięcie dokładności do 1% w pomiarach z aktynometrem systemu Ångström a-Ch w o l s o n a.

W. SIERPIŃSKI.

## O SYSTEMATYCZNYCH ROZWIŃCIACH LICZB NA ILOCZYNY NIESKOŃCZONE.

(SUR LES DÉVELOPPEMENTS SYSTÉMATIQUES DES NOMBRES EN  
PRODUITS INFINIS).

Każda liczba może być, jak wiadomo, nieskończenie wieloma sposobami rozwinięta na iloczyn nieskończony. Ze wszystkich jednak rozwinięć każdej danej liczby jedno zasługuje na szczególniejszą uwagę, tak ze względu na prostotę i jednostajność metody, którą się otrzymuje, jak też i ze względu na swe różne ciekawe własności, a przede wszystkim nadzwyczaj szybką zbieżność. Rozwinięcia, o których mowa, nazywać będziemy systematycznymi. O ile mi wiadomo, rozwinięciami tego rodzaju nikt się dotąd nie zajmował; dlatego też pozwolę sobie teorię ich wyłożyć na tem miejscu obszerniej.

Uważajmy jakąkolwiek liczbę  $x$ , większą od jedności. Wyznamy najmniejszą liczbę naturalną  $k_1$ , spełniającą warunek:

$$x > 1 + \frac{1}{k_1}.$$

Połóżmy:

$$x = \left(1 + \frac{1}{k_1}\right) x_1.$$

Liczba

$$x_1 = \frac{x}{1 + \frac{1}{k_1}}$$

będzie oczywiście też większa od jedności; możemy więc z nią postąpić, jak z liczbą  $x$  i t. d. Otrzymamy w ten sposób oznaczone w zupełności rozwinięcie:

$$(I) \quad x = \left(1 + \frac{1}{k_1}\right) \left(1 + \frac{1}{k_2}\right) \dots$$