Hier sind die η wieder zwischen y_{k-1} und y_{k-2} verlaufende Curven. Wir erhalten jetzt ebenso wie früher zuerst dass $y_2 - y_1$ absolut kleiner als

$$M(x_0^{\alpha} - x^{\alpha})\, x^{\frac{n-1}{m-1}}$$

ist, wo $\alpha > 0$ ist, woraus die Convergenz der Reihenentwicklung folgt.

Ist $b = 1 - n$, dann tritt in (12) $\log x$ und $\log x_0$ auf, im zuletzt geschriebenen Ausdruck tritt dann $\log x$ auf.

Ist endlich $b < 1 - n$, dann wenden wir uns zu (6^a), indem wir wieder $x_0 > 0$, $y^0 > 0$, $\varepsilon = +1$ voraussetzen. Ist x_0 genügend klein, und ist ausserdem die Bedingung erfüllt, dass der Punkt (x_0, y^0) zwischen der Curve

$$\text{(C)} \qquad y^{m-1} - N x^{-b} = 0\,,$$

wo N eine beliebige positive Zahl ist, und der positiven x-Achse liegt, dann kann man den Convergenzbeweis leicht führen, wobei noch die zweite Bedingung (3) durch

$$-\frac{b}{m-1} > n - 2$$

ersetzt werden kann. Aus (6^a) erhalten wir:

$$K_1 \left(\frac{x_0}{x}\right)^b y^{0\,m-1} < y_k^{m-1} < K_3 \left(\frac{x_0}{x}\right)^b y^{0\,m-1}\,,$$

wo K_1 und K_2 zwei positive von k unabhängige Zahlen bedeuten. Aus (12) folgt dann:

$$|y_2 - y_1| < M x^{-\frac{b}{m-1}}\,,$$

worauf man sofort zum Ziele gelangt.

Kraków w sierpniu 1908 r.

Z. KRYGOWSKI.

SUR LE DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS HYPERELLIPTIQUES EN SÉRIES TRIGONOMETRIQUES.

O ROZWINIĘCU FUNKCYJ HYPERELIPTYCZNYCH NA SZEREGI TRYGONOMETRYCZNE).

DEUXIÈME PARTIE.

1. Périodes des intégrales canoniques.

En posant

$$\text{(1)} \qquad \int d\omega_\mu = \int \frac{x^{\mu-1}dx}{\sqrt{R(x)}}\,;\ (\mu = 1, 2, \ldots, \varrho)\,,$$

on a dans le cas

$$a_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, \text{ quand } \alpha = \beta\,, \\ 0, \text{ quand } \alpha \neq \beta\,, \end{cases}$$

comme l'expression des demipériodes $\omega_{\mu\nu}$, $\omega'_{\mu\nu}$, les formules:

$$\text{(2)} \qquad \omega_{\mu\nu} = \int_{\alpha_{2\nu-1}}^{\alpha_{2\nu}} d\omega_\mu\,;\ \omega'_{\mu\nu} = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\omega_\mu + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} d\omega_\mu + \ldots + \int_{\alpha_{2\nu-2}}^{\alpha_{2\nu-1}} d\omega_\mu\,;\ (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, \varrho)\,,$$

donc

$$\text{(3)} \qquad \int_{\alpha_{2\nu-1}}^{\alpha_{2\nu}} d\omega_\mu = \omega_{\mu\nu}\,;\ \int_{\alpha_{2\nu}}^{\alpha_{2\nu+1}} d\omega_\mu = \omega'_{\mu,\nu+1} - \omega_{\mu\nu}.$$

De plus on déduit:

$$\int_{\infty}^{\alpha_0} d\omega_\mu + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\omega_\mu + \ldots + \int_{\alpha_{2\varrho-1}}^{\alpha_{2\varrho}} d\omega_\mu = 0\,,$$

donc

$$\int_{\infty}^{a_0} d\omega_\mu = -(\omega_{\mu 1} + \omega_{\mu 2} + \dots + \omega_{\mu \varrho}). \tag{4}$$

Nous introduirons maintenant des intégrales dont le chemin d'intégration se trouve sur la surface de Riemann rendue simplement connexe. On aura d'abord d'après la figure (2) sur le premier feuillet de la surface

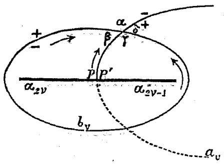

Fig. 2.

$$\omega_\mu(a_{2\nu}) - \omega_\mu(a_{2\nu-1}) = \omega_\mu(a_{2\nu}) - \omega_\mu(P) + \omega_\mu(P') - \omega_\mu(a_{2\nu-1}) - 2\omega_{\mu\nu}, \tag{5}$$

et sur le second [1])

$$\omega_\mu(a_{2\nu}) - \omega_\mu(a_{2\nu-1}) = \overline{\omega}_\mu(a_{2\nu}) - \overline{\omega}_\mu(P) + \overline{\omega}_\mu(P') - \overline{\omega}_\mu(a_{2\nu-1}), \tag{6}$$

donc à cause de la relation

$$\overline{\omega}_\mu(a_{2\nu}) = -\omega_\mu(a_{2\nu})$$

on obtient en ajoutant les équations (5) et (6):

$$\omega_\mu(a_{2\nu}) - \omega_\mu(a_{2\nu-1}) = -\omega_{\mu\nu}. \tag{7}$$

On déduit des équations (3) et (7):

$$\int_{a_{2\nu-1}}^{a_{2\nu}} d\omega_\mu = \omega_\mu(a_{2\nu}) - \omega_\mu(a_{2\nu-1}) + 2\omega_{\mu\nu}, \tag{8}$$

et de même

$$\int_{a_{2\nu}}^{a_{2\nu+1}} d\omega_\mu = \omega_\mu(a_{2\nu+1}) - \omega_\mu(a_{2\nu}) + 2\omega'_{\mu,\nu+1} - 2\omega'_{\mu\nu}, \tag{9}$$

$$\int_{\infty}^{a_0} d\omega_\mu = \omega_\mu(a_0) - \omega_\mu(\infty) - 2(\omega_{\mu 1} + \omega_{\mu 2} + \dots + \omega_{\mu\varrho}), \tag{10}$$

[1]) voir p. e. l'ouvrage de M. Baker: Abel's theorem and the theory of theta functions, p. 298, ou l'ouvrage de M. Krazer: Lehrbuch der Thetafunctionen p. 445.

donc en vertu des équations (3) et (4) on aura:

$$\left\{\begin{aligned} &\omega_\mu(a_0) - \omega_\mu(\infty) = \omega_{\mu 1} + \omega_{\mu 2} + \dots + \omega_{\mu\varrho}, \\ &\omega_\mu(a_{2\nu}) - \omega_\mu(a_{2\nu-1}) = -\omega_{\mu\nu}, \\ &\omega_\mu(a_{2\nu+1}) - \omega_\mu(a_{2\nu}) = -(\omega'_{\mu,\nu+1} - \omega_{\mu,\nu}). \end{aligned}\right. \tag{11}$$

À l'aide de ces dernières formules on déduit:

$$\left\{\begin{aligned} &\omega_\mu(a_{2\nu}) - \omega_\mu(\infty) = \sum_{k=\nu+1}^{k=\varrho} \omega_{\mu k} - \omega'_{\mu\nu}, \\ &\omega_\mu(a_{2\nu+1}) - \omega_\mu(\infty) = \sum_{k=\nu+1}^{k=\varrho} \omega_{\mu k} - \omega'_{\mu,\nu+1}. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

On aura par exemple pour $\varrho = 2$ les formules:

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{\infty}^{a_0} d\omega_k = \omega_{k1} + \omega_{k2}; \int_{\infty}^{a_1} d\omega_k = \omega_{k1} + \omega_{k2} - \omega'_{k1}; \int_{\infty}^{a_2} d\omega_k = \omega_{k2} - \omega'_{k1}; \\ &\int_{\infty}^{a_3} d\omega_k = \omega_{k2} - \omega'_{k2}; \int_{\infty}^{a_4} d\omega_k = -\omega'_{k2}; \quad (k=1,2), \end{aligned}\right. \tag{13}$$

et, en passant aux intégrales normales, on obtient:

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{\infty}^{a_0} dw_1 = \frac{1}{2}; \int_{\infty}^{a_1} dw_1 = \frac{1}{2} - \frac{\tau_{11}}{2}; \int_{\infty}^{a_2} dw_1 = -\frac{\tau_{11}}{2}; \int_{\infty}^{a_3} dw_1 = -\frac{\tau_{12}}{2}; \int_{\infty}^{a_4} dw_1 = -\frac{\tau_{12}}{2}; \\ &\int_{\infty}^{a_0} dw_2 = \frac{1}{2}; \int_{\infty}^{a_1} dw_2 = \frac{1}{2} - \frac{\tau_{12}}{2}; \int_{\infty}^{a_2} dw_2 = \frac{1}{2} - \frac{\tau_{12}}{2}; \int_{\infty}^{a_3} dw_2 = \frac{1}{2} - \frac{\tau_{22}}{2}; \int_{\infty}^{a_4} dw_2 = -\frac{\tau_{22}}{2}. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Dans toutes les intégrales (13) et (14) le chemin d'intégration ne traverse jamais les coupures, c'est à dire est situé sur la surface de Riemann rendue simplement connexe. On aura de même dans le cas $\varrho = 3$ les formules suivantes:

$$\int_{\infty}^{a_0} dw_k = \omega_{k1} + \omega_{k2} + \omega_{k3}; \int_{\infty}^{a_1} d\omega_k = \omega_{k1} + \omega_{k2} + \omega_{k3} - \omega'_{k1}; \int_{\infty}^{a_2} d\omega_k = \omega_{k2} + \omega_{k3} - \omega'_{k1};$$

$$\int_{\infty}^{a_3} d\omega_k = \omega_{k2} + \omega_{k3} - \omega'_{k2}; \int_{\infty}^{a_4} d\omega_k = \omega_{k3} - \omega'_{k2}; \int_{\infty}^{a_5} d\omega_k = \omega_{k3} - \omega'_{k3}; \int_{\infty}^{a_6} d\omega_k = -\omega'_{k3}; \ (k=1,2,3),$$

et pour les intégrales normales les expressions:

$$
(15)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\int_{\infty}^{a_0} dw_k=\frac{1}{2}\,;\ \int_{\infty}^{a_1} dw_k=\frac{1}{2}-\frac{\tau_{k1}}{2}\,;\ \int_{\infty}^{a_6} dw_k=-\frac{\tau_{k3}}{2}\,;\ (k=1,2,3)\,,\\
&\int_{\infty}^{a_2} dw_1=-\frac{\tau_{11}}{2}\,;\ \int_{\infty}^{a_3} dw_1=-\frac{\tau_{12}}{2}\,;\ \int_{\infty}^{a_4} dw_1=-\frac{\tau_{12}}{2}\,;\ \int_{\infty}^{a_5} dw_1=-\frac{\tau_{13}}{2}\,,\\
&\int_{\infty}^{a_2} dw_2=\frac{1}{2}-\frac{\tau_{21}}{2}\,;\ \int_{\infty}^{a_3} dw_2=\frac{1}{2}-\frac{\tau_{22}}{2}\,;\ \int_{\infty}^{a_4} dw_2=-\frac{\tau_{22}}{2}\,;\int_{\infty}^{a_5} dw_2=-\frac{\tau_{23}}{2}\,,\\
&\int_{\infty}^{a_2} dw_2=\frac{1}{2}-\frac{\tau_{31}}{2}\,;\int_{\infty}^{a_3} dw_3=\frac{1}{2}-\frac{\tau_{32}}{2}\,;\int_{\infty}^{a_4} dw_2=\frac{1}{2}-\frac{\tau_{32}}{2}\,;\ \int_{\infty}^{a_5} dw_3=\frac{1}{2}-\frac{\tau_{33}}{2}.
\end{aligned}\right.
$$

2. Zéros de la fonction $\vartheta(w_\mu-e_\mu)$.

En effectuant le calcul de l'integrale

$$
(1)\quad \frac{1}{2\pi i}\int w_\mu\, d\log\vartheta(w_\mu-e_\mu)=\frac{1}{2\pi i}\int w_\mu\, d\log\vartheta\left[\begin{smallmatrix}0\ldots0\\0\ldots0\end{smallmatrix}\right](w_1-e_1,\ldots,w_\varrho-e_\varrho),
$$

prise le long du bord de la surface de Riemann rendue simplement connexe, on arrive après quelques calculs à l'équation [1]):

$$
(2)\qquad e_\mu=\frac{1}{2}(\tau_{\mu\mu}-1)-\sum_{\nu=1}^{\nu=\varrho}{}'\int_{b_n}^{+}\overline{w_\mu}\,dw_\nu+\sum_{\nu=1}^{\nu=\varrho}w_\mu(\eta_\nu);\ (\mu=1,2,\ldots,\varrho)
$$

où le signe de sommation Σ' se rapporte à toutes les valeurs de ν excepté $\nu=\mu$, et les valeurs η_ν désignent ϱ zéros de la fonction:

$$
\vartheta\left[\begin{smallmatrix}0\ldots0\\0\ldots0\end{smallmatrix}\right](w_1-e_1,\ldots,w_\varrho-e_\varrho)
$$

sur la surface de Riemann. En posant:

$$
(3)\qquad k_\mu=\frac{1}{2}(\tau_{\mu\mu}-1)-\sum_{\nu=1}^{\nu=\varrho}{}'\int_{b_n}^{+}\overline{w_\mu}\,dw_\nu;\ (\mu=1,2,\ldots,\varrho)\,,
$$

on aura, en employant la méthode de M. C. Neumann[1]) pour la détermination des constantes k_μ, dans le cas des coupures de Weierstrass, les valeurs suivantes:

[1]) vo r Kraz er l. c.: p. 450.

$$
(4)\qquad k_\mu=-\frac{\mu}{2}+\frac{1}{2}(\tau_{\mu1}+\tau_{\mu2}+\ldots+\tau_{\mu\varrho});\ (\mu=1,2,\ldots,\varrho).
$$

En effet, en partant de l'intégrale

$$
(5)\qquad I(x)=\int_{a}^{x} w_\mu\, dw_\nu\,,
$$

on aura (fig. 2) successivement:

$$
\int_{b_\nu}^{+}\overline{w_\mu}\,dw_\nu=\int_{\beta}^{\gamma} w_\mu\, dw_\nu=\int_{a}^{\gamma} w_\mu\, dw_\nu-\int_{a}^{\beta} w_\mu\, dw_\nu=I(\gamma)-I(\beta)\,,
$$

$$
I(\gamma)-I(a_{2\nu-1})=\int_{a_{2\nu-1}}^{\gamma} w_\mu\, dw_\nu,
$$

$$
I(\overline{\gamma})-I(a_{2\nu-1})=\int_{a_{2\nu-1}}^{\overline{\gamma}} w_\mu\, dw_\nu,
$$

$$
dw_\nu(\overline{x})=-\,dw_\nu(x);\ w_\mu(\overline{x})-w_\mu(a_{2\nu-1})=-\,[w_\mu(x)-w_\mu(a_{2\nu-1})]\,,
$$

$$
I(\overline{\gamma})-I(a_{2\nu-1})=\int_{a_{2\nu-1}}^{\gamma}[w_\mu-2w_\mu(a_{2\nu-1})]\,dw_\nu=\int_{a_{2\nu-1}}^{\gamma} w_\mu\, dw_\nu-2w_\mu(a_{2\nu-1})\int_{a_{2\nu-1}}^{\gamma} dw_\nu,
$$

$$
I(\overline{\gamma})-I(a_{2\nu-1})=I(\gamma)-I(a_{2\nu-1})-2w_\mu(a_{2\nu-1})\,[w_\nu(\gamma)-w_\nu(a_{2\nu-1})].
$$

Donc la dernière équation nous donne la relation:

$$
(6)\qquad I(\gamma)-I(\overline{\gamma})=2w_\mu(a_{2\nu-1})\,[w_\nu(\gamma)-w_\nu(a_{2\nu-1})]\,,
$$

et d'une manière analogue:

$$
(7)\qquad I(\beta)-I(\overline{\beta})=2w_\mu(a_{2\nu})\,[w_\nu(\beta)-w_\nu(a_{2\nu})].
$$

Comme $I(\overline{\beta})=I(\overline{\gamma})$, on arrive à la relation:

$$
(8)\qquad \left\{
\begin{aligned}
I(\gamma)-I(\beta)=\int_{b_\nu}^{+}\overline{w_\mu}\,\overline{dw_\nu}&=2w_\mu(a_{2\nu-1})\,[w_\nu(\gamma)-w_\nu(a_{2\nu-1})]\\
&-2w_\mu(a_{2\nu})\,[w_\nu(\beta)-w_\nu(a_{2\nu})]\,,
\end{aligned}\right.
$$

qui, en introduisant les valeurs établies dans le numéro précédent et en ayant soin de les prendre pour les intégrales normales;

$$w_\mu(a_{2\nu-1}) - w_\mu(a_{2\nu}) = \omega_{\mu\nu} = 0\,; \quad w_\nu(a_{2\nu-1}) - w_\nu(a_{2\nu}) = \frac{1}{2}\,,$$

se transforme en la suivante:

$$\int_{b_\nu}^{+} \overline{w_\mu}\, d\overline{w_\nu} = 2w_\mu(a_{2\nu-1})\left[w_\nu(\gamma) - w_\nu(\beta) - \left(w_\nu(a_{2\nu-1}) - w_\nu(a_{2\nu})\right)\right]$$

$$= 2w_\mu(a_{2\nu-1})\left[w_\nu(\gamma) - w_\nu(\beta) - \frac{1}{2}\right].$$

Mais d'après la figure

$$w_\nu(\gamma) - w_\nu(\beta) = 1\,,$$

donc

$$\int_{b_\nu}^{+} \overline{w_\mu}\, d\overline{w_\nu} = w_\mu(a_{2\nu-1}). \tag{9}$$

En posant:

$$w_\mu(x) = \int_\infty^x dw_\mu\,,$$

c'est à dire en prenant l'infini comme limite inférieure de l'intégrale, on peut présenter la formule du numéro précédent:

$$w_\mu(a_{2\nu-1}) - w_\mu(\infty) = \sum_{k=\nu}^{k=\varrho} \omega_{\mu k} - \omega'_{\mu\nu} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{\tau_{\mu\nu}}{2}\,, \text{ pour } \mu \geqq \nu\,, \\ -\dfrac{\tau_{\mu\nu}}{2}\,, \text{ pour } \mu < \nu\,, \end{cases} \tag{10}$$

sous la forme suivante:

$$w_\mu(a_{2\nu-1}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{\tau_{\mu\nu}}{2}\,, \text{ pour } \mu > \nu\,, \\ -\dfrac{\tau_{\mu\nu}}{2}\,, \text{ pour } \mu < \nu\,, \end{cases} \tag{11}$$

donc l'intégrale (9) s'écrit:

$$\int_{b_\nu}^{+} \overline{w_\mu}\, d\overline{w_\nu} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{\tau_{\mu\nu}}{2}\,, \text{ pour } \mu > \nu, \\ -\dfrac{\tau_{\mu\nu}}{2}\,, \text{ pour } \mu < \nu\,, \end{cases} \tag{12}$$

et de plus

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\nu=\varrho} \int_{b_\nu}^{+} \overline{w_\mu}\, d\overline{w_\nu} &= \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu-1} \int_{b_\nu}^{+} \overline{w_\mu}\, d\overline{w_\nu} + \sum_{\nu=\mu+1}^{\nu=\varrho} \int_{b_\nu}^{+} \overline{w_\mu}\, d\overline{w_\nu} = \frac{1}{2}(\mu-1) \\ &\quad - \frac{1}{2}(\tau_{\mu1} + \tau_{\mu2} + \dots + \tau_{\mu,\mu-1} + \tau_{\mu,\mu+1} + \dots + \tau_{\mu\varrho}). \end{aligned} \tag{12}$$

En introduisant cette valeur (12) dans l'équation (3), on obtient la formule (4):

$$k_\mu = -\frac{\mu}{2} + \frac{1}{2}(\tau_{\mu1} + \dots + \tau_{\mu\varrho}). \tag{13}$$

L'expression

$$\vartheta\left(\int_\infty^x dw_\mu - \sum_{\nu=1}^{\nu=\varrho} \int_\infty^{\eta_\nu} dw_\mu + \frac{\mu}{2} - \frac{1}{2}(\tau_{\mu1} + \dots + \tau_{\mu\varrho})\right),$$

comme fonction de x possède ϱ zéros $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_\rho$, donc la fonction

$$\vartheta\left(\sum_{\nu=1}^{\nu=\varrho} \int_\infty^{x_\nu} dw_\mu + \frac{\mu}{2} + \frac{1}{2}(\tau_{\mu1} + \dots + \tau_{\mu\varrho})\right) \tag{14}$$

considérée comme fonction de x_1 a ϱ zéros: $x_1 = \infty, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_\varrho$. Mais d'après la formule (10) on aura:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\varrho} \int_\infty^{a_{2\nu-1}} dw_\mu = \sum_{\nu=1}^{\nu=\rho} [w_\mu(a_{2\nu-1}) - w_\mu(\infty)] = \frac{\mu}{2} - \frac{1}{2}(\tau_{\mu1} + \dots + \tau_{\mu\varrho}),$$

donc au lieu de la fonction (14) on peut écrire:

$$\vartheta\left[\sum_{\nu=1}^{\nu=\rho} \int_{a_{2\nu-1}}^{x_\nu} dw_\mu\right] = \vartheta(v_1, v_2, \dots, v_\rho). \tag{15}$$

On voit donc finalement que la fonction (15), considerée comme fonction de l'argument x_1, possède ϱ zéros: $x_1 = \infty, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_\rho$.

3. Fonctions $I_k(v_1, v_2, \dots, v_\rho)$.

Considérons le système des équations hyperelliptiques

$$\sum_{i=1}^{i=\rho} \int_{a_{2i-1}}^{x_i} \frac{x^{k-1}dx}{\sqrt{R(x)}} = u_k; \quad (k=1,2,\dots,\varrho), \tag{1}$$

auquel se réduit le système (2) du numéro (1) dans la première partie, si on a soin d'y prendre:

$$a_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0, \text{ pour } \alpha \neq \beta\,, \\ 1, \text{ pour } \alpha = \beta\,, \end{cases}$$

et étudions les développements des fonctions x_i suivant les puissances de u_k.

En posant:

$$(12)\qquad \begin{cases} Q(x) = (x-a_0)\,(x-a_2)\,\ldots\,(x-a_{2\varrho})\,, \\ P(x) = (x-a_1)\,(x-a_3)\,\ldots\,(x-a_{2\varrho-1})\,, \end{cases}$$

on aura

$$R(x) = P(x)\,Q(x)\,,$$

et dans le voisinage du point a_{2i-1} les développements [1])

$$(3)\qquad \begin{aligned} x_i &= a_{2i-1} + \frac{Q(a_{2i-1})}{P'(a_{2i-1})}\,t_i^2 + \ldots\,, \\ y_i &= Q(a_{2i-1})\,t_i + \ldots\,;\quad (i=1,2,\ldots,\varrho)\,, \end{aligned}$$

représentent tous les points (x_i, y_i) de la courbe hyperelliptique $y_i^2 = R(x_i)$.

En introduisant ces développements dans l'équation (1) on obtient le système:

$$(4)\qquad u_k = \sum_{i=1}^{i=\varrho} \left\{ \frac{a_{2i-1}^{k-1}}{P'(a_{2i-1})}\,t_i + t_i\,\mathfrak{P}(t_i) \right\};\quad (k=1,2,\ldots,\varrho)$$

d'où, à cause du déterminant de la partie homogène du premier degré dans le second membre

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{P'(a_1)}, & \frac{1}{P'(a_3)}, & \ldots, & \frac{1}{P'(a_{2\varrho-1})} \\ \frac{a_1}{P'(a_1)}, & \frac{a_3}{P'(a_3)}, & \ldots, & \frac{a_{2\varrho-1}}{P'(a_{2\varrho-1})} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{a_1^{\varrho-1}}{P'(a_1)}, & \frac{a_3^{\varrho-1}}{P'(a_3)}, & \ldots, & \frac{a_{2\varrho-1}^{\varrho-1}}{P'(a_{2\varrho-1})} \end{vmatrix} = \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{i=\varrho} P'(a_{2i-1})} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a_1 \ldots & a_1^{\varrho-1} \\ 1 & a_3 \ldots & a_3^{\varrho-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_{2\varrho-1} \ldots & a_{2\varrho-1}^{\varrho-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

différent de zéro, on parvient aux développements:

$$(6)\qquad t_i = \mathfrak{P}_i(u_1, \ldots, u_\varrho)\,;\quad (i=1,2,\ldots,\varrho)\,,$$

convergents pour valeurs suffisament petites des arguments $u_1, \ldots, u_\varrho$.

[1]) Weierstrass: Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transcendenten Werke, t. IV, str. 343.

En posant, comme nous l'avons fait dans le numéro (1), équation (4), de la première partie

$$(7)\qquad u_k = \sum_{i=1}^{i=\varrho} 2\omega_{ki}\,v_i\,;\quad (k=1,2,\ldots,\varrho)$$

on obtient les développements:

$$(8)\qquad t_i = \mathfrak{P}'_i(v_1, \ldots, v_\varrho)\,;\quad (i=1,2,\ldots,\varrho)\,,$$

qui, portés dans les équations (3), nous donnent les fonctions analytiques:

$$(9)\qquad x_i = \varphi_i(v_1, \ldots, v_\varrho)\,;\quad y_i = \psi_i(v_1, \ldots, v_\varrho)\,;\quad (i=1,2,\ldots,\varrho).$$

Les développements $\varphi_i(v_1, \ldots, v_\varrho)$ se réduisent pour $v_1 = v_2 = \ldots = v_\varrho = 0$ aux valeurs $a_1, a_3, \ldots, a_{2\varrho-1}$ respectivement; quant aux développements $\psi_i(v_1, \ldots, v_\varrho)$, on aura:

$$(10)\qquad \psi_i(0, \ldots,) = 0\,,$$

de plus les séries (9) convergent pour les valeurs suffisamment petites.

Dans le cas de $\varrho > 1$ les fonctions (9) ne sont plus uniformes, en effet les formules de Weierstrass [1])

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{(-1)^k\,.\,\varphi(a_{2k})}{\sqrt{R'(a_{2k})}} = \dfrac{\vartheta^2(v_1, \ldots, v_\varrho)_{2k}}{\vartheta^2(v_1, \ldots, v_\varrho)}\,, \\ \dfrac{(-1)^{k-1}\varphi(a_{2k-1})}{\sqrt{-R'(a_{2k-1})}} = \dfrac{\vartheta^2(v_1, \ldots, v_\varrho)_{2k-1}}{\vartheta^2(v_1, \ldots, v_\varrho)}\,, \\ \varphi(x) = (x-x_1)\ldots(x-x_\varrho)\,, \end{cases}$$

permettent de démontrer que les fonctions x_i sont les racines d'une équation algébrique du degré ϱ, qu'il est aisé à former.

Nous avons d'abord:

$$(12)\qquad \frac{\varphi(x)}{P(x)} = 1 + \sum_{k=1}^{k=\varrho} \frac{\varphi(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})} \cdot \frac{1}{x-a_{2k-1}}\,,$$

de plus l'équation

$$R(x) = P(x)\,.\,Q(x)$$

donne

$$(13)\qquad R'(a_{2k-1}) = P'(a_{2k-1})\,Q(a_{2k-1})\,,$$

[1]) Weierstrass: Oeuvres complètes, t. III, p. 292.

donc, en portant cette valeur dans la seconde équation (11), on aura:

$$\frac{\varphi(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})} = (-1)^{k-1} \cdot \sqrt{\frac{-Q(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}} \cdot \frac{\vartheta^2(v_1, \ldots, v_\rho)_{2k-1}}{\vartheta^2(v_1, \ldots, v_\rho)} . \tag{14}$$

En substituant cette valeur (14) dans l'équation (12), on obtient pour $x=x_1, x_2, \ldots, x_\rho$, l'équation cherchée:

$$1 + \sum_{k=1}^{k=\rho} (-1)^{k-1} \cdot \sqrt{-\frac{Q(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}} \cdot \frac{\vartheta^2(v_1, \ldots, v_\rho)_{2k-1})}{\vartheta^2(v_1, \ldots, v_\rho)} \cdot \frac{1}{x-a_{2k-1}} = 0 \tag{15}$$

à laquelle on peut donner la forme:

$$P(x) + \sum_{k=1}^{k=\rho} (-1)^{k-1} \cdot \sqrt{-\frac{Q(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}} \cdot \frac{\vartheta^2(v_1, \ldots, v_\rho)_{2k-1}}{\vartheta^2(v_1, \ldots, v_\rho)} \cdot \frac{P(x)}{x-a_{2k-1}} = 0 . \tag{16}$$

On peut montrer que les fonctions $y_i = \psi_i(v_1, \ldots, v_\rho)$ ne sont non plus uniformes. En effet, considérons les équations (1), on en aura le système suivant des équations linéaires pouvant servir à déterminer les dérivées partielles $\frac{\partial x_i}{\partial u_k}$:

$$\sum_{i=1}^{i=\rho} \frac{x_i^{l-1}}{\sqrt{R(x_i)}} \frac{\partial x_i}{\partial u_k} = \begin{cases} 0, & \text{quand } l \neq k \\ 1, & \text{quand } l = k \end{cases} ; \quad (l=1,2,\ldots,\rho). \tag{17}$$

La résolution de ce système par rapport à $\frac{\partial x_i}{\partial u_k}$ donne l'expression:

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_k} = (-1)^{i+k} \cdot \frac{\sqrt{R(x_i)}}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{k-2} & x_1^k & \ldots & x_1^{\rho-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{k-2} & x_2^k & \ldots & x_2^{\rho-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{i-1} & x^2_{i-1} & \ldots & x_{i-1}^{k-2} & x^k_{i-1} & \ldots & x_{i-1}^{\rho-1} \\ 1 & x_{i+1} & x^2_{i+1} & \ldots & x_{i+1}^{k-2} & x^k_{i+1} & \ldots & x_{i+1}^{\rho-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_\rho & x_\rho^2 & \ldots & x_\rho^{k-2} & x_\rho^k & \ldots & x_\rho^{\rho-1} \end{vmatrix} , \tag{18}$$

où Δ désigne le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_\rho \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_\rho^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{\rho-1} & x_2^{\rho-1} & \ldots & x_\rho^{\rho-1} \end{vmatrix} = \Pi_{(\alpha,\beta)}(x_\alpha - x_\beta) ; \; \begin{pmatrix} \beta=1,2,\ldots,(\rho-1) \\ \alpha=\beta+1, \beta+2, \ldots \rho) \end{pmatrix} . \tag{19}$$

Le déterminant au second membre de l'équation (18) peut être calculé de la manière suivante. Considérons le déterminant nouveau

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{k-1} & x_1^k & \ldots & x_1^{\rho-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{i-1} & x^2_{i-1} & \ldots & x_{i-1}^{k-1} & x^k_{i-1} & \ldots & x_{i-1}^{\rho-1} \\ 1 & x_{i+1} & x^2_{i+1} & \ldots & x_{i+1}^{k-1} & x^k_{i+1} & \ldots & x_{i+1}^{\rho-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_\rho & x_\rho^2 & \ldots & x_\rho^{k-1} & x_\rho^k & \ldots & x_\rho^{\rho-1} \\ 1 & x & x^2 & \ldots & x^{k-1} & x^k & \ldots & x^{\rho-1} \end{vmatrix} = \frac{\varphi(x)}{x-x_i} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{\rho-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{i-1} & \ldots & x_{i-1}^{\rho-2} \\ 1 & x_{i+1} & \ldots & x_{i+1}^{\rho-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_\rho & \ldots & x_\rho^{\rho-2} \end{vmatrix} ; \tag{20}$$

$$\varphi(x) = (x-x_1)(x-x_2) \ldots (x-x_\rho)$$

dans lequel le coefficient de $(-1)^{\rho+k} \cdot x^{k-1}$ est le déterminant qui figure au second membre de l'équation (18), on aura donc, en désignant par le symbole

$$\left(\frac{\varphi(x)}{x-x_i}\right)_{x^{k-1}}$$

le coefficient de x^{k-1} dans le polynôme $\frac{\varphi(x)}{x-x_i}$, l'expression suivante du déterminant cherché:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{k-2} & x_1^k & \ldots & x_1^{\rho-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{k-2} & x_2^k & \ldots & x_2^{\rho-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{i-1} & x^2_{i-1} & \ldots & x_{i-1}^{k-2} & x^k_{i-1} & \ldots & x_{i-1}^{\rho-1} \\ 1 & x_{i+1} & x^2_{i+1} & \ldots & x_{i+1}^{k-2} & x^k_{i+1} & \ldots & x_{i+1}^{\rho-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x & x_\rho^2 & \ldots & x_\rho^{k-2} & x_\rho^k & \ldots & x_\rho^{\rho-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\rho+k} \cdot \left(\frac{\varphi(x)}{x-x_i}\right)_{x^{k-1}} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{\rho-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{i-1} & \ldots & x_{i-1}^{\rho-2} \\ 1 & x_{i+1} & \ldots & x_{i+1}^{\rho-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_\rho & \ldots & x_\rho^{\rho-2} \end{vmatrix} . \tag{21}$$

En substituant cette valeur (21) dans l'équation (18), on arrive à l'équation:

$$(22)\qquad \frac{\partial x_i}{\partial u_k} = (-1)^{i+\rho}.\sqrt{R(x_i)}.\left(\frac{\varphi(x)}{x-x_i}\right)_{x^{k-1}}.\frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{\rho-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{i-1} & \dots & x_{i-1}^{\rho-2} \\ 1 & x_{i+1} & \dots & x_{i+1}^{\rho-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_\rho & \dots & x_\rho^{\rho-2} \end{vmatrix}}{\Delta},$$

qui à cause de l'identité

$$\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{\rho-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{i-1} & \dots & x_{i-1}^{\rho-2} \\ 1 & x_{i+1} & \dots & x_{i+1}^{\rho-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_\rho & \dots & x_\rho^{\rho-2} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{\rho(\rho-1)}{2}}.\left.\begin{array}{r} (x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_{i-1})(x_1-x_i)(x_1-x_{i+1})\dots(x_1-x_\rho) \\ (x_2-x_3)\dots(x_2-x_{i-1})(x_2-x_i)(x_2-x_{i+1})\dots(x_2-x_\rho) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ (x_{i-2}-x_{i-1})(x_{i-2}-x_i)(x_{i-2}-x_{i+1})\dots(x_{i-2}-x_\rho) \\ (x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})\dots(x_{i-1}-x_\rho) \\ (x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_\rho) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ (x_{\rho-1}-x_\rho) \end{array}\right\}$$

$$:(-1)^{\frac{(\rho-1)(\rho-2)}{2}}.\left.\begin{array}{r} (x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_{i-1})(x_1-x_{i+1})\dots(x_1-x_\rho) \\ (x_2-x_3)\dots(x_2-x_{i-1})(x_2-x_{i+1})\dots(x_2-x_\rho) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ (x_{i-2}-x_{i-1})(x_{i-2}-x_{i+1})\dots(x_{i-2}-x_\rho) \\ (x_{i-1}-x_{i+1})\dots(x_{i-1}-x_\rho) \\ (x_{i+1}-x_{i+2})\dots(x_{i+1}-x_\rho) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ (x_{\rho-1}-x_\rho) \end{array}\right\}$$

$$= (x_1-x_i)(x_2-x_i)\dots(x_{i-1}-x_i)(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+2})\dots(x_i-x_\rho)$$

est égal à l'expression

$$(23)\qquad \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial x_i}{\partial u_k} = (-1)^{i+\rho}.\sqrt{R(x_i)}.\left(\dfrac{\varphi(x)}{x-x_i}\right)_{x^{k-1}} \\ .\dfrac{(-1)^{i+\rho}}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_\rho)} \end{array}\right.,$$

qui se transforme en la suivante:

$$(24)\qquad \frac{\partial x_i}{\partial u_k} = \left(\frac{\varphi(x)}{x-x_i}\right)_{x^{k-1}}.\frac{\sqrt{R(x_i)}}{\varphi'(x_i)}.$$

On en déduit finalement:

$$(25)\qquad \frac{\partial x_i}{\partial v_k} = 2\sum_{l=1}^{l=\rho}\omega_{lk}\frac{\partial x_i}{\partial u_l} = \frac{2\sqrt{R(x_i)}}{\varphi'(x_i)}\sum_{l=1}^{l=\rho}\omega_{lk}\left(\frac{\varphi(x)}{x-x_i}\right)_{x^{l-1}},$$

donc la racine carrée

$$(26)\qquad y_i = \sqrt{R(x_i)} = \frac{\varphi'(x_i)\dfrac{\partial x_i}{\partial v_k}}{2\sum\limits_{l=1}^{l=\rho}\omega_{lk}.\left(\dfrac{\varphi(x)}{x-x_i}\right)_{x^{l-1}}},$$

a la forme [1])

$$(27)\qquad y_i = \sqrt{R(x_i)} = \frac{Q_1x_i^{\rho-1}+Q_2x_i^{\rho-2}+\dots+.Q_\rho}{Q_0},$$

d'un polynôme du degré $(\varrho-1)$ en x_i. Dans l'expression (27) les coefficients $Q_0, Q_1, \dots, Q_\rho$, sont d'àprès les équations (9)

$$x_i = \varphi_i(v_1, \dots, v_\rho)$$

fonctions analytiques des arguments $v_1, \dots, v_\rho$. Comme les fonctions $\varphi_i(v_1, \dots, v_\rho)$ sont racines de l'équation algébrique (16), la non-uniformité des fonctions (27) est démontrée.

Passons maintenant aux expressions:

$$(28)\qquad I_k(v_1, \dots, v_\rho) = \sum_{i=1}^{i=\rho}\int_{\alpha_{2i-1}}^{x_i} dI_k\,; \quad (k=1,2,\dots,\varrho),$$

[1]) Weierstrass: Vorlesungen über Abelsche Transcendenten, Oeuvres complètes t. IV, p. 454 et suiv.

dans lesquelles I_k désignent les intégrales canoniques de seconde espéce étudiées dans la première partie et les chemins d'intégrations sont les mêmes que dans les intégrales du système (1). En substituant dans les intégrales au second membre des équations (28) les développements (3), on pourra obtenir les développements des fonctions $I_k(v_1, \dots, v_\rho)$ suivant les puissances entières et positives des arguments $t_1, t_2, \dots, t_\rho$:

$$I_k(v_1, \dots, v_\rho) = \mathfrak{P}_k(t_1, \dots, t_\rho)\,; \quad (k=1, \dots, \varrho). \tag{29}$$

En tenant compte des valeurs des variables $t_1, \dots, t_\rho$ données par les séries (8), on aura dans le voisinage de $v_1 = a_1, v_2 = a_3, \dots, v_\rho = a_{2\rho-1}$, les développements nouveaux:

$$I_k(v_1, \dots, v_\rho) = \mathfrak{P}'(v_1, \dots, v_\rho); \quad (k=1, \dots, \varrho). \tag{30}$$

On serait conduit par la méthode du prolongement analytique appliquée aux développements (30) à des fonctions analytiques uniformes; pour le démontrer, il suffit de suivre la même voie que celle de Weierstrass dans la démonstration de l'uniformité des fonctions $E(x,y; u_1, \dots, u_\rho)$ et $I(u_1, \dots, u_\rho)_k$.[1] On aura de plus pour les fonctions analytiques uniformes $I_k(v_1 \dots, v_\rho)$ les formules:

$$(31)\quad \begin{cases} I_k(v_1+1, \dots, v_\rho+1) = I_k(v_1, \dots, v_\rho) \\ I_k(v_1+\tau_{1\alpha}, \dots, v_\rho+\tau_{\rho\alpha}) = I_k(v_1, \dots, v_\rho) - 2\pi i \varepsilon_{k\alpha}; \quad \varepsilon_{k\alpha} = \begin{cases} 1, \text{ quand } \alpha = k \\ 0, \text{ quand } \alpha \neq k \end{cases} \\ \qquad (\alpha, k = 1, \dots, \varrho). \end{cases}$$

En posant d'après Weierstrass

$$\vartheta\left[\begin{smallmatrix} \nu_1 \dots \nu_\rho \\ \mu_1 \dots \mu_\rho \end{smallmatrix}\right](v_\alpha) = \vartheta\left[\begin{smallmatrix} \nu_1 \dots \nu_\rho \\ \mu_1 \dots \mu_\rho \end{smallmatrix}\right](v_1, \dots, v_\rho)$$

$$= \sum_{(n_1, \dots, n_\rho) = -\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \sum\limits_{\alpha=1}^{\rho}\left(v_\alpha + \frac{\mu_\alpha}{2}\right)\left(n_\alpha + \frac{\nu_\alpha}{2}\right) + \pi i \sum\limits_{(\alpha,\beta)=1}^{\rho}\left(n_\alpha + \frac{\nu_\alpha}{\alpha}\right)\left(n_\beta + \frac{\nu_\beta}{2}\right)\tau_{\alpha\beta}}$$

on a l'équation

$$\vartheta\left[\begin{smallmatrix} \nu_1 \dots \nu_\rho \\ \mu_1 \dots \mu_\rho \end{smallmatrix}\right](v_\alpha + \mu'_\alpha + \nu_1'\tau_{\alpha 1} + \dots + \nu_\rho'\tau_{\alpha\rho})$$

$$= e^{\pi i\left[\sum\limits_{\alpha=1}^{\rho}\mu_\alpha \nu_\alpha + \sum\limits_{\alpha=1}^{\rho}\mu'_\alpha \nu'_\alpha + \sum\limits_{\alpha=1}^{\rho}(\mu_\alpha + \mu'_\alpha)(\nu_\alpha + \nu'_\alpha)\right] - 2\pi i \sum\limits_{\alpha=1}^{\rho}\nu'_\alpha v_\alpha - \pi i \sum\limits_{(\alpha,\beta)=1}^{\rho}\nu'_\alpha \nu'_\beta \tau_{\alpha\beta}}$$

$$\cdot\,\vartheta\left[\begin{smallmatrix} \nu_1 \dots \nu_\rho \\ \mu_1 \dots \mu_\rho \end{smallmatrix}\right](v_\alpha)$$

[1] Oeuvres complètes de Weierstrass, t. 4, p. 467 et suiv.

donc, en prenant la dérivée logarithmique, on arrive au système:

$$(32)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \log \vartheta\left[\begin{smallmatrix} \nu_1 \dots \nu_\rho \\ \mu_1 \dots \mu_\rho \end{smallmatrix}\right](v_1+1, \dots, v_\rho+1)}{\partial v_k} = \dfrac{\partial \log \vartheta\left[\begin{smallmatrix} \nu_1 \dots \nu_\rho \\ \mu_1 \dots \mu_\rho \end{smallmatrix}\right](v_1, \dots, v_\rho)}{\partial v_k}, \\ \dfrac{\partial \log \vartheta\left[\begin{smallmatrix} \nu_1 \dots \nu_\rho \\ \mu_1 \dots \mu_\rho \end{smallmatrix}\right](v_1+\tau_{1\alpha}, \dots, v_\rho+\tau_{\rho\alpha})}{\partial v_k} = \dfrac{\partial \log \vartheta\left[\begin{smallmatrix} \nu_1 \dots \nu_\rho \\ \mu_1 \dots \mu_\rho \end{smallmatrix}\right](v_1, \dots, v_\rho)}{\partial v_k} - 2\pi i \varepsilon_{k\alpha}, \end{cases}$$

tout à fait analogue au système (31).

Les fonctions

$$I_k(v_1, \dots, v_\rho) - \frac{\partial \log \vartheta\left[\begin{smallmatrix} \nu_1 \dots \nu_\rho \\ \mu_1 \dots \mu_\rho \end{smallmatrix}\right](v_1, \dots, v_\rho)}{\partial v_k}\,; \quad (k=1, \dots, \varrho), \tag{33}$$

considérées comme fonctions de x_1, sont uniformes sur la surface primitive de Riemann; d'ailleurs elles ne possèdent sur cette surface qu'un nombre fini de pôles, donc elles sont des fonctions rationnelles et symétriques des points $(x_1, \sqrt{R(x_1)}), \dots, (x_\rho, \sqrt{R(x_\rho)})$.

En particulier, les fonctions:

$$I_k(v_1, \dots, v_\rho) - \frac{\partial \log \vartheta(v_1, \dots, v_\rho)}{\partial v_k}\,; \quad (k=1, \dots, \varrho), \tag{34}$$

considérées comme fonctions de x_1, ont les pôles

$$\infty^{2\rho-1}, \ (x_2, -\sqrt{R(x_2)}), \ (x_3, -\sqrt{R(x_3)}), \dots, (x_\rho, -\sqrt{R(x_\rho)}), \tag{35}$$

dont le premier à l'infini et d'ordre $2\varrho-1$ et les $\varrho-2$ suivants sont simples.

Nous effectuons la détermination de ces fonctions dans les cas $\varrho=2$ et $\varrho=3$, d'ailleurs la méthode employée peut s'étendre facilement aux cas supérieurs.

4. Fonctions $I_k(v_1, v_2)$ et $I_k(v_1, v_2, v_3)$.

Étudions les développements des fonctions

$$(1)\quad \begin{cases} (\omega)_{11}\left[I_1(v_1,v_2) - \dfrac{\partial \log \vartheta_5(v_1,v_2)}{\partial v^1}\right] + (\omega)_{12}\left[I_2(v_1,v_2) - \dfrac{\partial \log \vartheta_5(v_1,v_2)}{\partial v_2}\right], \\ (\omega)_{21}\left[I_1(v_1,v_2) - \dfrac{\partial \log \vartheta_5(v_1,v_2)}{\partial v_1}\right] + (\omega)_{22}\left[I_2(v_1,v_2) - \dfrac{\partial \log \vartheta_5(v_1,v_2)}{\partial v_2}\right], \end{cases}$$

dans le voisinage de $x_1=\infty$. Ici $(\omega)_{ik}$ désigne le déterminant adjoint à l'élément ω_{ik} dans le déterminant $|\omega_{ik}|$, donc $(\omega)_{11}=\omega_{22}$; $(\omega)_{12}=-\omega_{21}$; $(\omega)_{22}=\omega_{11}$, de plus on a

$$I_k(v_1,v_2)=\sum_{i=1}^{i=2}\int_{a_{2i-1}}^{x_i}\frac{a_{0k}+a_{1k}x+a_{2k}x^2+a_{3k}x^3}{2\sqrt{R(x)}}dx;\quad (k=1,2)$$

où

$$a_{0k}=3\eta_{2k}+2p_1\eta_{1k}+p_2\omega_{2k};\quad a_{2k}=-\omega_{2k}-2p_1\omega_{1k},$$
$$a_{1k}=\eta_{1k}-p_2\omega_{1k};\quad a_{3k}=-3\omega_{1k}.$$

Comme on a

$$(\omega)_{11}a_{31}+(\omega)_{12}a_{32}=-3(\omega_{11}\omega_{22}-\omega_{12}\omega_{21})=-3\omega,$$
$$(\omega)_{21}a_{31}+(\omega)_{22}a_{32}=3(\omega_{12}\omega_{11}-\omega_{11}\omega_{12})=0,$$

nous aurons dans le voisinage de $x_1=\infty$ les développements:

$$(2)\quad \begin{cases}(\omega_{11})\left[I_1(v_1,v_2)-\dfrac{\partial\log\vartheta_5(v_1,v_2)}{\partial v_1}\right]+(\omega)_{12}\left[I_2(v_1,v_2)-\dfrac{\partial\log\vartheta_5(v_1,v_2)}{\partial v_2}\right]\\ \qquad =-\omega x_1^{\frac{3}{2}}+k_1x_1^{\frac{1}{2}}+\dots.\end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases}(\omega)_{21}\left[I_1(v_1,v_2)-\dfrac{\partial\log\vartheta_5(v_1,v_2)}{\partial v_1}\right]+(\omega)_{22}\left[I_2(v_1,v_2)-\dfrac{\partial\log\vartheta_5(v_1,v_2)}{\partial v_2}\right]\\ \qquad =m_1x_1^{\frac{1}{2}}+\dots\end{cases}$$

où $k_1, m_1,\dots$ désignent des coefficients dont la valeur n'est pas pour la suite nécessaire.

La fonction symétrique

$$(4)\quad -\omega\cdot\frac{\sqrt{R(x_1)}-\sqrt{R(x_2)}}{x_1-x_2}$$

a dans le voisinage de $x_1=\infty$ le développement:

$$(5)\quad -\omega\cdot\frac{\sqrt{R(x_1)}-\sqrt{R(x_2)}}{x_1-x_2}=-\omega x_1^{\frac{3}{2}}+l_1x_1^{\frac{1}{2}}+\dots$$

donc les fonctions suivantes

$$(6)\quad \begin{cases}(\omega)_{11}\left[I_1(v_1,v_2)-\dfrac{\partial\log\vartheta_5(v_1,v_2)}{\partial v_1}\right]+(\omega)_{12}\left[I_2(v_1,v_2)-\dfrac{\partial\log\vartheta_5(v_1,v_2)}{\partial v_2}\right]\\ \qquad +\omega\dfrac{\sqrt{R(x_1)}-\sqrt{R(x_2)}}{x_1-x_2},\\ (\omega)_{21}\left[I_1(v_1,v_2)-\dfrac{\partial\log\vartheta_5(v_1,v_2)}{\partial v_2}\right]+(\omega)_{22}\left[I_2(v_1,v_2)-\dfrac{\partial\log\vartheta_5(v_1,v_2)}{\partial v_2}\right],\end{cases}$$

ont toutes deux dans le voisinage du même point $x_1=\infty$ les développements de la forme $\alpha x_1^{\frac{1}{2}}+\dots$, donc elles n'ont que deux pôles simples $x_1=\infty$ et $(x_2,-\sqrt{R(x_2)})$. Donc les fonctions (6), comme fonctions rationnelles de x_1 et $\sqrt{R(x_1)}$ et n'ayant que deux pôles, dont l'un $x_1=x_2$, $\sqrt{R(x_1)}=-\sqrt{R(x_2)}$, est tout à fait arbitraire, se réduisent à deux constantes. En effet, les fonctions uniformes (6), comme fonctions algébriques du point x_1 appartenant à la courbe $y^2=R(x)$ du genre $\varrho=2$, ont d'après un theoréme bien connu au moins $\varrho+1=3$ pôles simples tout à fait arbitraires.

La valeur de ces constantes est facile à calculer; il suffit de poser $x_1=a_1$, $x_2=a_3$, pour voir qu'elles se réduisent à zéro. En effet pour $x_1=a_1$, $x_2=a_3$, on a $v_1=v_2=0$, $I_1(0,0)=I_2(0,0)=0$, $\vartheta_5(0,0)=\vartheta_5$ est différent de zéro et $\vartheta'_5(v_i)=\left(\dfrac{\partial\vartheta_5(v_1,v_2)}{\partial v_i}\right)_{v_1=v_2=0}=0$ comme fonctions impaires.

On a donc finalement:

$$(7)\quad \begin{cases}(\omega)_{11}\left[I_1(v_1,v_2)-\dfrac{\partial\log\vartheta_5(v_1,v_2)}{\partial v_1}\right]+(\omega)_{12}\left[I_2(v_1,v_2)-\dfrac{\partial\log\vartheta_5(v_1,v_2)}{\partial v_2}\right]\\ \qquad =-\omega\dfrac{\sqrt{R(x_1)}-\sqrt{R(x_2)}}{x_1-x_2},\\ (\omega)_{21}\left[I_1(v_1,v_2)-\dfrac{\partial\log\vartheta_5(v_1,v_2)}{\partial v_1}\right]+(\omega)_{22}\left[I_2(v_1,v_2)-\dfrac{\partial\log\vartheta_5(v_1,v_2)}{\partial v_2}\right]=0,\end{cases}$$

d'où à cause du déterminant $\omega\neq0$ on obtient:

$$(8)\quad \frac{\partial\log\vartheta_5(v_1,v_2)}{\partial v_k}=I_k(v_1,v_2)+\omega_{1k}\frac{\sqrt{R(x_1)}-\sqrt{R(x_2)}}{x_1-x_2};\quad (k=1,2).$$

Passons maintenant à la détermination des fonctions $I_k(v_1,v_2,v_3)$; $(k=1,2,3)$. Étudions dans ce but les développements des fonctions

$$(9)\quad \sum_{k=1}^{k=3}(\omega)_{ik}\left[I_k(v_1,v_2)-\frac{\partial\log\vartheta(v_1,v_2,v_3)}{\partial v_k}\right];\quad (i=1,2,3)$$

aux environs du point $x_1=\infty$. Nous commençons cette étude pour $i=1$, on aura d'abord

$$
(10)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{k=1}^{k=3} (\omega)_{1k} I_k(v_1,v_2,v_3) \\ &= \sum_{k=1}^{i=3} \int_{a_{2i-1}}^{x_i} \frac{\Sigma(\omega)_{1k} a_{0k} + \Sigma(\omega)_{1k} a_{1k} x + \Sigma(\omega)_{1k} a_{2k} x^2 + \Sigma(\omega)_{1k} a_{3k} x^3 + \Sigma(\omega)_{1k} a_{4k} x^4 + \Sigma(\omega)_{1k} a_{5k} x^5}{2\sqrt{R(x)}} \end{aligned} \right.
$$

où l'on a

$$
(11)\quad \left\{ \begin{aligned} a_{0k} &= 5\eta_{3k} + 4p_1\eta_{2k} + 3p_2\eta_{1k} + 2p_3\omega_{3k} + p_4\omega_{2k}, \\ a_{1k} &= 3\eta_{2k} + 2p_1\eta_{1k} + p_2\omega_{3k} - p_4\omega_{1k}, \\ a_{2k} &= \eta_{1k} - p_2\omega_{2k} - 2p_3\omega_{1k}, \\ a_{3k} &= -\omega_{3k} - 2p_1\omega_{2k} - 3p_2\omega_{1k}, \\ a_{4k} &= -3\omega_{2k} - 4p_1\omega_{1k}, \\ a_{5k} &= -5\omega_{1k}; \end{aligned} \right. \qquad (k=1,2,3),
$$

donc

$$
\sum_{k=1}^{k=3} (\omega)_{1k} a_{5k} = -5\left(\omega_{11}\begin{vmatrix} \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{32} & \omega_{33} \end{vmatrix} - \omega_{12}\begin{vmatrix} \omega_{21} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{33} \end{vmatrix} + \omega_{13}\begin{vmatrix} \omega_{21} & \omega_{22} \\ \omega_{31} & \omega_{32} \end{vmatrix}\right)
$$

$$
= -5\begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{vmatrix} = -5\omega,
$$

$$
\sum_{k=1}^{k=3} (\omega)_{1k} a_{4k} = -4p_1 \sum_{k=1}^{k=3} (\omega)_{1k}\omega_{1k} - 3\sum_{k=1}^{k=3} (\omega)_{1k}\omega_{2k} = -4p_1\omega,
$$

$$
\frac{\sum_{k=1}^{k=3} (\omega)_{1k} a_{4k} x^4 + \sum_{k=1}^{k=3} (\omega)_{1k} a_{5k} x^5}{2\sqrt{R(x)}}
$$

$$
= -\frac{1}{2} x^{-\frac{7}{2}} \left(1 + \frac{\beta_1}{x} + \frac{\beta_2}{x^2} + \dots\right)(5\omega x^5 + 4p_1\omega x^4) = -\frac{\omega}{2}\left(5x^{\frac{3}{2}} + \frac{3p_1}{2} x^{\frac{1}{2}} + \dots\right),
$$

$$
\sum_{k=1}^{k=3} (\omega)_{1k} I_k(v_1,v_2,v_3) = -\omega x_1^{\frac{5}{2}} - \frac{p_1\omega}{2} x_1^{\frac{3}{2}} + \dots
$$

et enfin, puisque $x_1 = \infty$ est un zéro simple pour la fonction $\vartheta(v_1,v_2,v_3)$, on arrive au développement suivant:

$$
(12)\quad \sum_{k=1}^{k=3} (\omega)_{1k} \left[I_k(v_1,v_2,v_3) - \frac{\partial \log \vartheta(v_1,v_2,v_3)}{\partial v_k} \right] = -\omega x_1^{\frac{5}{2}} - \frac{p_1\omega}{2} x_1^{\frac{3}{2}} + \dots
$$

La fonction (9) ou (12) est une fonction algébrique de x_1 et symétrique en $(x_1, \sqrt{R(x_1)})$, $(x_2, \sqrt{R(x_2)})$, $(x_3, \sqrt{R(x_3)})$, de plus l'expression (12) considérée comme fonction de l'argument x_1 a encore deux pôles

$$
(13)\quad (x_1 = x_2, \sqrt{R(x_1)} = -\sqrt{R(x_2)}), \ (x_1 = x_3, \sqrt{R(x_1)} = -\sqrt{R(x_3)}),
$$

donc, puisque la fonction symétrique

$$
(14)\quad -\frac{\omega}{2}\left[\frac{\sqrt{R(x_1)} - \sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} + \frac{\sqrt{R(x_2)} - \sqrt{R(x_3)}}{x_2 - x_3} + \frac{\sqrt{R(x_3)} - \sqrt{R(x_1)}}{x_3 - x_1}\right]
$$

a les mêmes pôles simples (13) et dans le voisinage de $x_1 = \infty$ est représentée par la série:

$$
-\frac{\omega}{x_1}\left(1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_2^2}{x_1^2} + \dots\right) x_1^{\frac{7}{2}}\left(1 + \frac{p_1}{2}\cdot\frac{1}{x_1} + \dots\right) + \frac{\omega}{2}\frac{\sqrt{R(x_2)}}{x_1}\left(1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_2^2}{x_1^2} + \dots\right)
$$

$$
+ \frac{\omega}{2}\frac{\sqrt{R(x_3)}}{x_1}\left(1 + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_3^2}{x_1^2} + \dots\right) - \frac{\omega}{2}\frac{1}{x_1}\left(1 + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_3^2}{x_1^2} + \dots\right) x_1^{\frac{7}{2}}\left(1 + \frac{p_1}{2}\cdot\frac{1}{x_1} + \dots\right)
$$

c'est à dire par le développement

$$
(15)\quad -\omega x_1^{\frac{5}{2}} - \omega\left[\frac{p_1}{2} + \frac{x_2 + x_3}{2}\right] x_1^{\frac{3}{2}} + \dots,
$$

la nouvelle fonction

$$
(16)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{k=1}^{k=3} (\omega)_{1k} \left[I_k(v_1,v_2,v_3) - \frac{\partial \log \vartheta(v_1,v_2,v_3)}{\partial v_k} \right] \\ &+ \frac{\omega}{2}\left[\frac{\sqrt{R(x_1)} - \sqrt{R(x_3)}}{x_1 - x_2} + \frac{\sqrt{R(x_2)} - \sqrt{R(x_3)}}{x_2 - x_3} + \frac{\sqrt{R(x_3)} - \sqrt{R(x_1)}}{x_3 - x_1}\right] \end{aligned} \right.
$$

a les mêmes pôles simples (13) et dans les environs du point $x_1 = \infty$ est donnée par la série

$$
(17)\quad \omega \cdot \frac{x_2 + x_3}{2} x_1^{\frac{3}{2}} + \dots
$$

La fonction symétrique

$$-\frac{\omega}{2}\frac{\begin{vmatrix} \sqrt{R(x_1)} & (x_2+x_3) & x_1 & 1 \\ \sqrt{R(x_2)} & (x_3+x_1) & x_2 & 1 \\ \sqrt{R(x_3)} & (x_1+x_2) & x_3 & 1 \end{vmatrix}}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)}$$

$$=\frac{\omega}{2}\left[(x_2+x_3)\frac{\sqrt{R(x_1)}}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+(x_3+x_1)\frac{\sqrt{R(x_2)}}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+(x_1+x_2)\frac{\sqrt{R(x_3)}}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right]$$

comme fonction de $(x_1, \sqrt{R(x_1)})$ a les mêmes pôles simples (13) et le pôle triple $x_1=\infty$, dans les environs duquel on a le développement

$$\omega\,.\,\frac{x_2+x_3}{2}\,x_1^{\frac{3}{2}}+\ldots,$$

donc l'expression

$$(18)\quad\left\{\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{k=3}(\omega)_{1k}\left[I_k(v_1,v_2,v_3)-\frac{\partial\log\vartheta(v_1,v_2,v_3)}{\partial v_k}\right] \\ &+\frac{\omega}{2}\left[\frac{\sqrt{R(x_1)}-\sqrt{R(x_2)}}{x_1-x_2}+\frac{\sqrt{R(x_2)}-\sqrt{R(x_3)}}{x_2-x_3}+\frac{\sqrt{R(x_3)}-\sqrt{R(x_1)}}{x_3-x_1}\right] \\ &-\frac{\omega}{2}\left[(x_2+x_3)\frac{\sqrt{R(x_1)}}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+(x_3+x_1)\frac{\sqrt{R(x_2)}}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}\right. \\ &\qquad\left.+(x_1+x_2)\frac{\sqrt{R(x_3)}}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right]\end{aligned}\right.$$

a trois pôles simples

$$x_1=\infty,\ (x_1=x_2,\ \sqrt{R(x_1)}=-\sqrt{R(x_2)}),\ (x_1=x_3,\ \sqrt{R(x_1)}=-\sqrt{R(x_3)})$$

et par conséquent, comme fonction algébrique du point x_1 sur la surface de Riemann correspondant à l'équation

$$y^2=R(x),\ (\text{où } R(x)=x^7+p_1x^6+\ldots+p_6x_1+p_7)$$

de genre $\varrho=3$, se réduit à une constante. Cette constante est égale à zéro, puisque pour $x_1=a_1$, $x_2=a_3$, $x_3=a_3$, l'expression (18) se réduit à zéro.

On a donc finalement:

$$(19)\quad\left\{\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{k=3}(\omega)_{1k}\left[I_k(v_1,v_2,v_3)-\frac{\partial\log\vartheta(v_1,v_2,v_3)}{\partial v_k}\right] \\ &=-\frac{\omega}{2}\left[\frac{\sqrt{R(x_1)}-\sqrt{R(x_2)}}{x_1-x_2}+\frac{\sqrt{R(x_2)}-\sqrt{R(x_3)}}{x_2-x_3}+\frac{\sqrt{R(x_3)}-\sqrt{R(x_1)}}{x_3-x_1}\right] \\ &+\frac{\omega}{2}\left[(x_2+x_3)\frac{\sqrt{R(x_1)}}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+(x_3+x_1)\frac{\sqrt{R(x_2)}}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}\right. \\ &\qquad\left.+(x_1+x_2)\frac{\sqrt{R(x_3)}}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right].\end{aligned}\right.$$

L'expression analogue à celle introduite plus haut dans (10) a la forme

$$(20)\qquad\sum_{k=1}^{k=3}(\omega)_{2k}\,I_k(v_1,v_2,v_3)$$

et, comme on a

$$(\omega)_{21}a_{51}+(\omega)_{22}a_{52}+(\omega)_{23}a_{53}=-5[(\omega)_{21}\omega_{11}+(\omega)_{22}\omega_{12}+(\omega)_{23}\omega_{13}]=0\,,$$

$$(\omega)_{21}a_{41}+(\omega)_{22}a_{42}+(\omega)_{23}a_{43}=-(\omega)_{21}(3\omega_{21}+4p_1\omega_{11})-(\omega)_{22}(3\omega_{22}+4p_1\omega_{12})$$
$$-(\omega)_{23}(3\omega_{23}+4p_1\omega_{13})=-3\omega\,,$$

la fonction (9) aura pour $i=2$ le développement suivant:

$$(21)\qquad\sum_{k=1}^{k=3}(\omega)_{2k}\left(I_k(v_1,v_2,v_3)-\frac{\partial\log\vartheta(v_1,v_2,v_3)}{\partial v_k}\right)=-\omega x_1^{\frac{3}{2}}+\ldots$$

dans le voissinage du point $x_1=\infty$.

La fonction symétrique ayant les mêmes pôles (13) que la fonction (21)

$$-\omega\,.\,\frac{\begin{vmatrix} \sqrt{R(x_1)} & x_1 & 1 \\ \sqrt{R(x_2)} & x_2 & 1 \\ \sqrt{R(x_3)} & x_3 & 1 \end{vmatrix}}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)}$$

$$=\omega\left[\frac{\sqrt{R(x_1)}}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{\sqrt{R(x_2)}}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+\frac{\sqrt{R(x_3)}}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right],$$

considérée comme fonction de x_1 a dans le voisinage de $x_1=\infty$ le développement

$$\omega x_1^{\frac{3}{2}}+\dots,$$

donc la fonction algébrique de x_1

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{k=3}(\omega)_{2k}\left(I_k(v_1,v_2,v_3)-\frac{\partial\log\vartheta(v_1,v_2,v_3)}{\partial v_k}\right)\\&+\omega\left[\frac{\sqrt{R(x_1)}}{(x_1-x_2)\,(x_1-x_3)}+\frac{\sqrt{R(x_2)}}{(x_2-x_3)\,(x_2-x_1)}+\frac{\sqrt{R(x_3)}}{(x_3-x_1)\,(x_3-x_2)}\right]\end{aligned}\right.$$

a trois pôles simples

$$x_1=\infty,\ (x_1=x_2,\ \sqrt{R(x_1)}=-\sqrt{R(x_2)}),\ (x_1=x_3,\ \sqrt{R(x_1)}=-\sqrt{R(x_3)}),$$

donc elle se réduit à une constante, qui est d'ailleurs égale à zéro, puisque l'expression (22) disparait pour $x_1=a_1$, $x_2=a_2$, $x_3=a_3$.

Enfin la troisième expression (9):

$$(23)\qquad \sum_{k=1}^{k=3}(\omega)_{3k}\left(I_k(v_1,v_2,v_3)-\frac{\partial\log\vartheta(v_1,v_2,v_3)}{\partial v_k}\right)$$

a dans les environs de $x_1=\infty$ le développement de la forme $ax_1^{\frac{1}{2}}+\dots$ puisque

$$(\omega)_{31}a_{51}+(\omega)_{32}a_{52}+(\omega)_{33}a_{53}=0,$$
$$(\omega)_{31}a_{41}+(\omega)_{32}a_{42}+(\omega)_{33}a_{43}=0,$$
$$(\omega)_{31}a_{31}+(\omega)_{32}a_{32}+(\omega)_{33}a_{33}=-[(\omega)_{31}\omega_{31}+(\omega)_{32}\omega_{32}+(\omega)_{33}\omega_{33}]=-\omega,$$
$$\sum_{k=1}^{k=3}(\omega)_{3k}I_k(v_1,v_2,v_3)=-\omega x_1^{\frac{1}{2}}+\dots$$

L'expression (23) a trois pôles simples donc, puisque elle est uniforme sur la surface primitive de R i e m a n n, elle se réduit à une constante, qui comme plus haut est égale à zéro.

On a donc finalement trois équations suivantes, qui déterminent les fonctions $I_k(v_1,v_2,v_3)$:

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{k=3}(\omega)_{1k}\left[I_k(v_1,v_2,v_3)-\frac{\partial\log\vartheta(v_1,v_2,v_3)}{\partial v_k}\right]\\&=-\frac{\omega}{2}\cdot\left[\frac{\sqrt{R(x_1)}-\sqrt{R(x_3)}}{x_1-x_2}+\frac{\sqrt{R(x_2)}-\sqrt{R(x_3)}}{x_2-x_3}+\frac{\sqrt{R(x_3)}-\sqrt{R(x_1)}}{x_3-x_1}\right]\\&\quad+\frac{\omega}{2}\left[(x_2+x_3)\frac{\sqrt{R(x_1)}}{(x_1-x_2)\,(x_1-x_3)}+(x_3+x_1)\frac{\sqrt{R(x_2)}}{(x_2-x_3)\,(x_2-x_1)}\right.\\&\qquad\left.+(x_1+x_2)\frac{\sqrt{R(x_3)}}{(x_3-x_1)\,(x_3-x_2)}\right],\\&\sum_{k=1}^{k=3}(\omega)_{2k}\left[I_k(v_1,v_2,v_3)-\frac{\partial\log\vartheta(v_1,v_2,v_3)}{\partial v_k}\right]\\&=-\omega\left[\frac{\sqrt{R(x_1)}}{(x_1-x_2)\,(x_1-x_3)}+\frac{\sqrt{R(x_2)}}{(x_2-x_3)\,(x_2-x_1)}+\frac{\sqrt{R(x_3)}}{(x_3-x_1)\,(x_3-x_2)}\right],\\&\sum_{k=1}^{k=3}(\omega)_{3k}\left[I_k(v_1,v_2,v_3)-\frac{\partial\log\vartheta(v_1,v_2,v_3)}{\partial v_k}\right]=0,\end{aligned}\right.$$

et dont le déterminant ω^2 est différent de zéro. La résolution du système (24) donne les valeurs suivantes des dérivées logarithmiques de la fonction $\vartheta(v_1,v_2,v_3)$

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{\partial\log\vartheta(v_1,v_2,v_3)}{\partial v_k}=I_k(v_1,v_2,v_3)\\&+\frac{\omega_{1k}}{2}\left[\frac{\sqrt{R(x_1)}-\sqrt{R(x_2)}}{x_1-x_2}+\frac{\sqrt{R(x_2)}-\sqrt{R(x_3)}}{x_2-x_3}+\frac{\sqrt{R(x_3)}-\sqrt{R(x_1)}}{x_3-x_1}\right]\\&-\frac{\omega_{1k}}{2}\left[(x_2+x_3)\frac{\sqrt{R(x_1)}}{(x_1-x_2)\,(x_1-x_3)}+(x_3+x_1)\frac{\sqrt{R(x_2)}}{(x_2-x_3)\,(x_2-x_1)}\right.\\&\left.+(x_1+x_2)\frac{\sqrt{R(x_3)}}{(x_3-x_1)\,(x_3-x_2)}\right]+\omega_{2k}\left[\frac{\sqrt{R(x_1)}}{(x_1-x_2)\,(x_1-x_3)}+\frac{\sqrt{R(x_2)}}{(x_2-x_3)\,(x_2-x_1)}\right.\\&\left.+\frac{\sqrt{R(x_3)}}{(x_3-x_1)\,(x_3-x_2)}\right];\ (k=1,2,3)\end{aligned}\right.$$

Les formules (25) constituent la généralisation cherchée des formules (8), qui sous une forme complétement différente se trouvent pour la premiére fois dans le Mémoire cité de M. W e b e r. La méthode employée dans les deux cas $\varrho=2$ et $\varrho=3$ peut être étendue facilement aux cas supérieurs, il suffit évidemment d'étudier les développements des fonctions

$$(26)\qquad \sum_{k=1}^{k=\varrho}(\omega)_{ik}\left[I_k(v_1,\dots,v_\varrho)-\frac{\partial\log\vartheta(v_1,\dots,v_\varrho)}{\partial v_k}\right];\quad(i=1,\dots,\varrho)$$

dans les environs du point $x_1=\infty$, qui est un pôle d'ordre $2\varrho-1$. L'addition des fonctions algébriques et symétriques de ϱ points $(x_i, \sqrt{R(x_i)})$, convenablement choisies permet d'abaisser l'ordre du pôle $x_1=\infty$ à un, donc la fonction construite nouvelle

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{k=\varrho}(\omega)_{ik}\left[I_k(v_1,\dots,v_\varrho)-\frac{\partial\log\vartheta(v_1,\dots,v_\varrho)}{\partial v_k}\right]\\&+f_i(x_1,\sqrt{R(x_1)},\dots,x_\varrho,\sqrt{R(x_\varrho)});\quad(i=1,\dots,\varrho)\end{aligned}\right.$$

n'aura que ϱ pôles simples

$$x_1=\infty,\ (x_1=x_2,\ \sqrt{R(x_1)}=-\sqrt{R(x_2)}),\ (x_1=x_3,\ \sqrt{R(x_1)}=-\sqrt{R(x_3)}),\ \dots,$$
$$(x_1=x_\varrho,\ \sqrt{R(x_1)}=-\sqrt{R(x_\varrho)}),$$

donc puisque $\varrho-1$ de ces pôles sont tout à fait arbitraires, elle se réduira à une constante, qui est d'ailleurs égale à zéro, puisque tous les membres de l'expression (27) disparaissent pour $x_1=a_1,\dots,x_\varrho=a_{2\varrho-1}$. Comme le déterminant du système linéaire (27) est différent de zéro, la résolution de ce système (27) fournira les valeurs des dérivées logarithmiques de la fonction théta.

5. Développement des fonctions symétriques x_1x_2, x_1+x_2, en séries trigonométriques.

Le développement des fonctions x_1x_2, x_1+x_2, en séries trigonométriques a été obtenu par M. Appell pour le système des formules de Rosenhain; l'emploi de ces dernières formules a exigé une discussion minutieuse, ce qui était la cause d'un certain obscurcissement pour la lecture du beau mémoire. Toutes les difficultés disparaissent, si on se sert des formules de Weierstrass. Écrivons d'abord les périodes des intégrales de première espèce

$$\int\frac{x^{k-1}dx}{\sqrt{R(x)}};\quad(k=1,2)$$

d'après les formules générales du numéro (1) de la deuxième partie. Nous avons eu les formules suivantes

$$2\omega_{\mu\nu}=2\int_{a_{2\nu-1}}^{a_{2\nu}}d\omega_\mu;\quad 2\omega'_{\mu\nu}=2\int_{a_0}^{a_1}d\omega_\mu+2\int_{a_2}^{a_3}d\omega_\mu+\dots+2\int_{a_{2\nu-2}}^{a_{2\nu-1}}d\omega_\mu,$$

donc pour $\varrho=2$, on aura successivement

$$(1)\qquad\left\{\begin{aligned}&2\omega_{11}=-2\int_{a_1}^{a_2}\frac{dx}{\sqrt{+R(x)}};\quad 2\omega_{12}=2\int_{a_3}^{a_4}\frac{dx}{\sqrt{+R(x)}};\quad 2\omega'_{11}=-2i\int_{a_0}^{a_1}\frac{dx}{\sqrt{-R(x)}};\\&2\omega'_{12}=-2i\int_{a_0}^{a_1}\frac{dx}{\sqrt{-R(x)}}+2i\int_{a_2}^{a_3}\frac{dx}{\sqrt{-R(x)}};\quad 2\omega_{21}=-2\int_{a_1}^{a_2}\frac{xdx}{\sqrt{+R(x)}};\\&2\omega_{22}=2\int_{a_3}^{a_4}\frac{xdx}{\sqrt{+R(x)}};\quad 2\omega'_{21}=-2i\int_{a_0}^{a_1}\frac{xdx}{\sqrt{-R(x)}};\quad 2\omega'_{22}=-2i\int_{a_0}^{a_1}\frac{xdx}{\sqrt{-R(x)}}\\&\qquad+2i\int_{a_2}^{a_3}\frac{xdx}{\sqrt{-R(x)}},\end{aligned}\right.$$

puisque, en posant sous le signe d'intégrale dans l'intervalle $(+\infty\dots a_0)$ $\sqrt{R(x)}=+\sqrt{+R(x)}$, le prolongement analytique donne pour $\sqrt{R(x)}$ dans les intervalles $(a_0\dots a_1)$, $(a_1\dots a_2)$, $(a_2\dots a_3)$, $(a_3\dots a_4)$, $(a_4\dots-\infty)$ successivement

$$+i\sqrt{-R(x)},\ -\sqrt{+R(x)},\ -i\sqrt{-R(x)},\ +\sqrt{+R(x)},\ +i\sqrt{-R(x)},$$

où la racine carrée du nombre positif $\pm R(x)$ désigne la valeur arithmétique.

Nous pouvons écrire

$$(2)\qquad\left\{\begin{aligned}&\int\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}=\frac{1}{a_1-a_3}\left(\int\frac{x-a_3}{\sqrt{R(x)}}dx-\int\frac{x-a_1}{\sqrt{R(x)}}dx\right);\\&\int\frac{xdx}{\sqrt{R(x)}}=\frac{1}{a_1-a_3}\left(a_1\int\frac{x-a_3}{\sqrt{R(x)}}dx-a_3\int\frac{x-a_1}{\sqrt{R(x)}}dx\right)\end{aligned}\right.$$

donc, en posant

$$
(3)\quad \begin{cases}
2\Omega_{11} = -2\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{x-\alpha_3}{\sqrt{+R(x)}}\,dx; \;\; 2\Omega_{12} = 2\int\limits_{\alpha_3}^{\alpha_4} \frac{x-\alpha_3}{\sqrt{+R(x)}}\,dx; \;\; 2\Omega'_{11} = -2i\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{x-\alpha_3}{\sqrt{-R(x)}}\,dx, \\
2\Omega'_{12} = -2i\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{x-\alpha_3}{\sqrt{-R(x)}}\,dx + 2i\int\limits_{\alpha_2}^{\alpha_3} \frac{x-\alpha_3}{\sqrt{-R(x)}}\,dx; \;\; 2\Omega_{21} = -2\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{x-\alpha_1}{\sqrt{+R(x)}}\,dx; \\
2\Omega_{22} = 2\int\limits_{\alpha_3}^{\alpha_4} \frac{x-\alpha_1}{\sqrt{+R(x)}}\,dx; \;\; 2\Omega'_{21} = -2i\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{x-\alpha_1}{\sqrt{-R(x)}}\,dx; \;\; 2\Omega'_{22} = -2i\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{x-\alpha_1}{\sqrt{-R(x)}}\,dx \\
\qquad\qquad + 2i\int\limits_{\alpha_2}^{\alpha_3} \frac{x-\alpha_1}{\sqrt{-R(x)}}\,dx,
\end{cases}
$$

on aura:

$$
(4)\quad \begin{cases}
(\alpha_1-\alpha_3)\omega_{11} = \Omega_{11}-\Omega_{21}; \quad (\alpha_1-\alpha_3)\omega_{12} = \Omega_{12}-\Omega_{22}; \\
(\alpha_1-\alpha_3)\omega_{21} = \alpha_1\Omega_{11}-\alpha_3\Omega_{21}; \quad (\alpha_1-\alpha_3)\omega_{22} = \alpha_1\Omega_{12}-\alpha_3\Omega_{22}.
\end{cases}
$$

Mais les formules (3) donnent

$$
\Omega_{11} > 0; \quad \Omega_{12} > 0; \quad \Omega_{21} < 0; \quad \Omega_{22} > 0,
$$

donc

$$
(5)\qquad \Omega = \begin{vmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{vmatrix} > 0
$$

et d'après les formules (4) on obtient de même:

$$
(6)\quad \omega = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{(\alpha_1-\alpha_3)^2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \alpha_1 & -\alpha_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{21} \\ \Omega_{12} & \Omega_{22} \end{vmatrix} = \frac{\Omega}{\alpha_1-\alpha_3} > 0,
$$

car les nombres réels α_k sont rangés de la manière suivante

$$
(7)\qquad \alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4.
$$

Les intégrales normales

$$
(8)\qquad \int \frac{A_{11}+A_{12}x}{\sqrt{R(x)}}\,dx; \quad \int \frac{A_{21}+A_{22}x}{\sqrt{R(x)}}\,dx,
$$

prennent ici la forme

$$
(9)\qquad \int \frac{\omega_{22}-\omega_{12}x}{2\omega\sqrt{R(x)}}\,dx; \quad -\int \frac{\omega_{21}-\omega_{11}x}{2\omega\sqrt{R(x)}}\,dx
$$

puisque on a en général

$$
A_{\alpha\beta} = \frac{(\omega)_{\beta\alpha}}{2\omega};
$$

où ω est d'après la formule (6) un nombre positif différent de zéro

Les périodes des intégrales normales (9)

$$
\begin{matrix} 1, & 0, & \tau_{11}, & \tau_{12}, \\ 0, & 1, & \tau_{21}, & \tau_{22}, \end{matrix}
$$

sont données par les formules

$$
(10)\quad \begin{cases}
1 = -\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\omega_{22}-\omega_{12}x}{\omega\sqrt{+R(x)}}\,dx; \;\; 0 = \int\limits_{\alpha_3}^{\alpha_4} \frac{\omega_{22}-\omega_{12}x}{\omega\sqrt{+R(x)}}\,dx; \;\; \tau_{11} = -i\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{\omega_{22}-\omega_{12}x}{\omega\sqrt{-R(x)}}\,dx \\
\qquad \tau_{12} = -i\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{\omega_{22}-\omega_{12}x}{\omega\sqrt{-R(x)}}\,dx + i\int\limits_{\alpha_2}^{\alpha_3} \frac{\omega_{22}-\omega_{12}x}{\omega\sqrt{-R(x)}}\,dx, \\
0 = +\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\omega_{21}-\omega_{11}x}{\omega\sqrt{+R(x)}}\,dx; \;\; 1 = -\int\limits_{\alpha_3}^{\alpha_4} \frac{\omega_{21}-\omega_{11}x}{\omega\sqrt{+R(x)}}\,dx; \;\; \tau_{21} = +i\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{\omega_{21}-\omega_{11}x}{\omega\sqrt{-R(x)}}\,dx; \\
\qquad \tau_{22} = +i\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{\omega_{21}-\omega_{11}x}{\omega\sqrt{-R(x)}}\,dx - i\int\limits_{\alpha_2}^{\alpha_3} \frac{\omega_{21}-\omega_{11}x}{\omega\sqrt{-R(x)}}\,dx,
\end{cases}
$$

qui avec les inégalités

$$
(11)\qquad \omega_{11} > 0; \quad \omega_{12} < 0; \quad \omega_{21} > 0; \quad \omega_{22} < 0
$$

déduites des formules (1), donnent

$$
(12)\qquad \alpha_4 < \frac{\omega_{22}}{\omega_{12}} < \alpha_3; \quad \alpha_2 < -\frac{\omega_{21}}{\omega_{11}} < \alpha_1;
$$

donc, d'après les valeurs de $\tau_{\alpha\beta}$ dans les formules (10), on voit, que les modules $\tau_{\alpha\beta}$ sont purement imaginaires de la forme

$$
(13)\qquad \tau_{\alpha\beta} = i\tau'_{\alpha\beta}
$$

où $\tau'_{\alpha\beta}$ sont des quantités réelles.

On a encore des équations (10) les inégalités

$$
(14)\qquad \tau'_{11} > \tau'_{12} > 0; \quad \tau'_{22} > \tau'_{12} > 0
$$

donc enfin les inégalités:

$$\tau'_{11} > 0\,; \quad \tau'_{12} > 0\,; \quad \tau'_{11}\tau'_{22} - \tau'^2_{12} > 0\,, \tag{15}$$

qui assurent la convergence de la série

$$\vartheta\begin{bmatrix}\nu_1 & \nu_2\\ \mu_1 & \mu_2\end{bmatrix}(v_1, v_2)$$

$$= \sum_{(n_1,n_2)=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i\left[\left(n_1+\frac{\nu_1}{2}\right)^2\tau_{11}+2\left(n_1+\frac{\nu_1}{2}\right)\left(n_2+\frac{\nu_2}{2}\right)\tau_{12}+\left(n_2+\frac{\nu_2}{2}\right)^2\tau_{22}\right]+2\pi i\left[\left(n_1+\frac{\nu_1}{2}\right)\left(v_1+\frac{\mu_1}{2}\right)+\left(n_2+\frac{\nu_2}{2}\right)\left(v_2+\frac{\mu_2}{2}\right)\right]}$$

Les valeurs (10) des modules $\tau_{\alpha\beta}$ peuvent encore s'écrire

$$\left\{\begin{aligned} &\tau_{11} = \frac{\omega_{22}\omega'_{11} - \omega_{12}\omega'_{21}}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}}\,; \quad \tau_{22} = \frac{\omega_{11}\omega'_{22} - \omega_{21}\omega'_{12}}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}}\,;\\ &\tau_{12} = \tau_{21} = \frac{\omega_{22}\omega'_{12} - \omega_{12}\omega'_{22}}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}} = \frac{\omega_{11}\omega'_{21} - \omega_{21}\omega'_{11}}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}}\,, \end{aligned}\right. \tag{16}$$

ce qui correspond aux formules (11) du numéro (1) de la première partie.

La question des périodes étant complétement traitée nous pouvons passer au développement de deux fonctions hyperelliptiques x_1x_2 et x_1+x_2 qui naissent de l'inversion des équations

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{\alpha_1}^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \int_{\alpha_3}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = 2\omega_{11}v_1 + 2\omega_{12}v_2\,,\\ &\int_{\alpha_1}^{x_1}\frac{xdx}{\sqrt{R(x)}} + \int_{\alpha_3}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = 2\omega_{21}v_1 + 2\omega_{22}v_2\,, \end{aligned}\right. \tag{17}$$

ou encore des équations

$$\int_{\alpha_1}^{x_1} dw_1 + \int_{\alpha_3}^{x_2} dw_1 = v_1\,; \quad \int_{\alpha_1}^{x_1} dw_2 + \int_{\alpha_3}^{x_2} dw_2 = v_2 \tag{18}$$

dans lesquelles les intégrales

$$\int dw_k = \int \frac{A_{k1} + A_{k2}x}{\sqrt{R(x)}}\,dx \tag{19}$$

désignent les intégrales normales (9). Ces deux fonctions hyperelliptiques ont la propriété de la périodicité par rapport aux périodes du tableau

$$\begin{matrix} 1, & 0, & \tau_{11}, & \tau_{12},\\ 0, & 1, & \tau_{21}, & \tau_{22}, \end{matrix}$$

c'est à dire on a, en posant $x_1x_2 = f_1(v_1, v_2)$; $x_1+x_2 = f_2(v_1, v_2)$, les équations simultanées

$$f_k(v_1+1, v_2) = f_k(v_1, v_2)\,; \quad f_k(v_1, v_2+1) = f_k(v_1, v_2)\,,$$

$$f_k(v_1+\tau_{11}, v_2+\tau_{21}) = f_k(v_1, v_2)\,; \quad f_k(v_1+\tau_{12}, v_2+\tau_{22}) = f_k(v_1, v_2)\,; \quad (k=1,2)$$

donc aussi

$$f_k(v_1+1, v_2+1) = f_k(v_1, v_2); \quad (k=1,2).$$

En posant

$$\left\{\begin{aligned} &x_1x_2 = \sum_{(n_1,n_2)=-\infty}^{+\infty} P_{n_1,n_2}\, e^{2n_1\pi i v_1 + 2n_2\pi i v_2}\,,\\ &x_1x_2 = \sum_{(n_1,n_2)=\ \infty}^{+\infty} Q_{n_1,n_2}\, e^{2n_1\pi i v_1 + 2n_2\pi i v_2}\,, \end{aligned}\right. \tag{20}$$

on aura

$$\left\{\begin{aligned} &P_{n_1n_2} = \int_0^1\!\!\int_0^1 x_1x_2 . e^{-2n_1\pi i v_1 - 2n_2\pi i v_2}\, dv_1 dv_2\,;\\ &Q_{n_1n_2} = \int_0^1\!\!\int_0^1 (x_1+x_2) e^{-2n_1\pi i v_1 - 2n_2\pi i v_2}\, dv_1 dv_2. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Les développements (20) sont valables pour les valeurs réelles des arguments v_1, v_2, et ils convergent uniformément pour ces valeurs. Quand les arguments v_1, v_2 partent des valeurs réelles $v_1^{(0)}, v_2^{(0)}$, données par les équations

$$\int_{\alpha_1}^{\gamma_1} dw_1 + \int_{\alpha_3}^{\delta_1} dw_1 = v_1^{(0)}; \quad \int_{\alpha_1}^{\gamma_1} dw_2 + \int_{\alpha_3}^{\delta_1} dw_2 = v_2^{(0)},$$

où γ_1 désigne un point de la droite $\alpha_1\alpha_2$ et δ_1 un point de la droite $\alpha_4\alpha_3$ (voir la fig. 2), et varient par valeurs réelles de $v_1^{(0)}$ et $v_2^{(0)}$ à $v_1^{(0)}+1$, $v_2^{(0)}+1$, les points x_1 et x_2 restent sur l'axe des quantités réelles et passent: le point x_1 de γ_1 à α_2 sur le feuillet supérieur, de α_2 à α_1 sur le feuillet inférieur et au dessus de la droite $\alpha_2\alpha_1$, enfin de α_1 à γ_2 sur le feuillet supérieur; le point x_2 de δ_1 à α_4 sur le feuillet supérieur, de à α_4 à α_3 sur le feuillet inférieur et au dessus de la droite $\alpha_4\alpha_3$ et enfin de α_3 à δ_2 sur le feuillet supérieur. On voit tout cela des équations (10), dans lesquelles entrent les intégrales prises d'une part entre α_1 et α_2, d'autre part entre α_3 et α_4.

On voit donc qu'on peut opérer un changement des variables réelles dans les intégrales doubles (21) en introduisant au lieu des variables v_1, v_2, les variables x_1, x_2 décrivant sur la surface de Riemann les courbes fermées L_1, L_2, situées respectivement sur les droites $\alpha_2\alpha_1$ et $\alpha_4\alpha_3$.

Le déterminant fonctionnel $\frac{\partial(v_1,v_2)}{\partial(x_1,x_2)}$ se calcule aisément des équations (18); on obtient la valeur suivante

$$\frac{\partial(v_1,v_2)}{\partial(x_1,x_2)}=-\frac{x_1-x_2}{\sqrt{R(x_1)}\,\sqrt{R(x_2)}},$$

donc

$$P_{n_1,n_2}=-\frac{1}{4\omega}\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{x_1x_2(x_1-x_2)}{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}e^{-2n_1\pi i\left[\int\limits_{\alpha_1}^{x_1}dw_1+\int\limits_{\alpha_3}^{x_2}dw_1\right]-2n_2\pi i\left[\int\limits_{\alpha_1}^{x_1}dw_2+\int\limits_{\alpha_3}^{x_2}dw_2\right]}dx_1\,dx_2 \tag{22}$$

Mais d'après les formules finales du numéro (1) de la deuxième partie nous avons

$$\left\{\begin{aligned}&\int\limits_{\alpha_1}^{\infty}dw_1=-\frac{1}{2}+\frac{\tau_{11}}{2};\quad\int\limits_{\alpha_3}^{\infty}dw_1=\frac{\tau_{12}}{2};\quad\int\limits_{\alpha_1}^{\infty}dw_2=-\frac{1}{2}+\frac{\tau_{12}}{2};\\&\int\limits_{\alpha_3}^{\infty}dw_2=-\frac{1}{2}+\frac{\tau_{22}}{2},\end{aligned}\right. \tag{23}$$

donc

$$\int\limits_{\alpha_3}^{\alpha_1}dw_1=\frac{1}{2}-\frac{\tau_{11}-\tau_{12}}{2};\quad\int\limits_{\alpha_3}^{\alpha_1}dw_2=-\frac{\tau_{11}-\tau_{22}}{2} \tag{23*}$$

et la formule (22) pourra s'écrire

$$P_{n_1n_2}=-\frac{(-1)^{n_1}}{4\omega}e^{n_1\pi i(\tau_{11}-\tau_{12})+n_2\pi i(\tau_{12}-\tau_{22})}\cdot\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{x_1x_2(x_1-x_2)E(x_1)E(x_2)}{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}dx_1\,dx_2 \tag{24}$$

où $E(x)$ désigne l'expression

$$E(x)=e^{-2n_1\pi i\int\limits_{\alpha_1}^{x}dw_1-2n_2\pi i\int\limits_{\alpha_1}^{x}dw_2} \tag{25}$$

Dans l'intégrale double (24) les intégrales se séparent, donc

$$\left\{\begin{aligned}&P_{n_1n_2}=(-1)^{n_1-1}\cdot\frac{e^{n_1\pi i(\tau_{11}-\tau_{12})+n_2\pi i(\tau_{12}-\tau_{22})}}{4\omega}\\&\cdot\left\{\int\limits_{L_1}\frac{x_1^2E(x_1)dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}\cdot\int\limits_{L_2}\frac{x_2E(x_2)dx_2}{\sqrt{R(x_2)}}-\int\limits_{L_1}\frac{x_1E(x_1)dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}\cdot\int\limits_{L_2}\frac{x_2^2E(x_2)dx_2}{\sqrt{R(x_2)}}\right\}.\end{aligned}\right. \tag{26}$$

L'intégrale (21) aura de même la forme suivante

$$\left\{\begin{aligned}&Q_{n_1,n_2}=(-1)^{n_1-1}\cdot\frac{e^{n_1\pi i(\tau_{11}-\tau_{12})+n_2\pi i(\tau_{12}-\tau_{22})}}{4\omega}\\&\cdot\left\{\int\limits_{L_1}\frac{x_1^2E(x_1)dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}\cdot\int\limits_{L_2}\frac{E(x_2)dx_2}{\sqrt{R(x_2)}}-\int\limits_{L_1}\frac{E(x_1)dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}\cdot\int\limits_{L_2}\frac{x_2^2E(x_2)dx_2}{\sqrt{R(x_2)}}\right\}\end{aligned}\right. \tag{26*}$$

En posant

$$L_{u\nu}=\int\limits_{L_u}\frac{x^\nu E(x)dx}{\sqrt{R(x)}} \tag{27}$$

on obtient pour P_{n_1,n_2} et Q_{n_1,n_2} les formules suivantes:

$$\left\{\begin{aligned}&P_{n_1,n_2}=(-1)^{n_1-1}\cdot\frac{e^{n_1\pi i(\tau_{11}-\tau_{12})+n_2\pi i(\tau_{12}-\tau_{22})}}{4\omega}\cdot\begin{vmatrix}L_{12}&L_{11}\\L_{22}&L_{21}\end{vmatrix};\\&Q_{n_1,n_2}=(-1)^{n_1-1}\cdot\frac{e^{n_1\pi i(\tau_{11}-\tau_{12})+n_2\pi i(\tau_{12}-\tau_{22})}}{4\omega}\cdot\begin{vmatrix}L_{12}&L_{10}\\L_{22}&L_{20}\end{vmatrix}.\end{aligned}\right. \tag{28}$$

La fonction

$$\Phi_\nu(x)=\int\frac{x^\nu E(x)dx}{\sqrt{R(x)}} \tag{29}$$

est finie pour tous les points à distance finie de la surface de Riemann, et le point à l'infini est à partir de $\nu=2$ logarithmique. En effet, on a dans le voisinage de $x=\infty$ successivement les développements suivants:

$$\frac{1}{\sqrt{R(x)}}=x^{-\frac{5}{2}}\left[1+\frac{\beta_1}{x}+\frac{\beta_2}{x^2}+\ldots\right]$$

$$\int\limits_{\alpha_1}^{x}dw_1=\int\limits_{\alpha_1}^{x}\frac{A_{11}+A_{12}x}{\sqrt{R(x)}}\,dx=C-\frac{2A_{12}}{x^{\frac{1}{2}}}-\frac{2}{3}\cdot\frac{A_{11}+\beta_1A_{12}}{x^{\frac{3}{2}}}-\frac{2}{5}\cdot\frac{\beta_1A_{11}+\beta_2A_{12}}{x^{\frac{5}{2}}}-\ldots$$

$$\int\limits_{\alpha_1}^{x}dw_2=\int\limits_{\alpha_1}^{x}\frac{A_{21}+A_{22}x}{\sqrt{R(x)}}\,dx=C'-\frac{2A_{22}}{x^{\frac{1}{2}}}-\frac{2}{3}\cdot\frac{A_{21}+\beta_1A_{22}}{x^{\frac{3}{2}}}-\frac{2}{5}\cdot\frac{\beta_1A_{21}+\beta_2A_{22}}{x^{\frac{5}{2}}}-$$

Pour déterminer les constantes C et C', faisons $x=\infty$ et employons les formules (23), on aura

$$C=-\frac{1}{2}+\frac{\tau_{11}}{2}\,;\quad C'=-\frac{1}{2}+\frac{\tau_{12}}{2}\,,$$

donc

$$E(x)=e^{-2n_1\pi i\left(-\frac{1}{2}+\frac{\tau_{11}}{2}\right)-2n_2\pi i\left(-\frac{1}{2}+\frac{\tau_{12}}{2}\right)}$$

$$.\,e^{-2n_1\pi i\left[-\frac{2A_{12}}{x^{\frac{1}{2}}}-\frac{2}{3}\cdot\frac{A_{11}+\beta_1A_{12}}{x^{\frac{3}{2}}}-\frac{2}{5}\cdot\frac{\beta_1A_{11}+\beta_2A_{12}}{x^{\frac{5}{2}}}-\dots\right]}$$

$$.\,e^{-2n_2\pi i\left[-\frac{2A_{22}}{x^{\frac{1}{2}}}-\frac{2}{3}\,\frac{A_{21}+\beta_1A_{22}}{x^{\frac{3}{2}}}-\frac{2}{5}\,\frac{\beta_1A_{21}+\beta_2A_{22}}{x^{\frac{5}{2}}}-\dots\right]}$$

ou encore

$$E(x)=(-1)^{n_1+n_2}\,.\,e^{-n_1\pi i\tau_{11}-n_2\pi i\tau_{12}}\,.\,e^{\frac{4\pi i(n_1A_{12}+n_2A_{22})}{x^{1/2}}+\frac{4\pi i}{3}\,\frac{n_1(A_{11}+\beta_1A_{12})+n_2(A_{21}+\beta_1A_{22})}{x^{3/2}}+\dots}$$

En développant la fonction exponentielle et effectuant les réductions on arrive à la série

$$(30)\quad \begin{cases} E(x)=(-1)^{n_1+n_2}\,.\,e^{-\pi i(n_1\tau_{11}+n_2\tau_{12})}\Big[1+\dfrac{4\pi i(n_1A_{12}+n_2A_{22})}{x^{\frac{1}{2}}} \\ \qquad\qquad -\dfrac{8\pi^2(n_1A_{12}+n_2A_{22})^2}{x}+\dots\Big]. \end{cases}$$

On aura donc finalement dans la voisinage de $x=\infty$

$$(31)\quad \begin{cases} \Phi'_\nu(x)=\dfrac{x^\nu}{\sqrt{R(x)}}\,E(x)=(-1)^{n_1+n_2}\,.\,e^{-\pi i(n_1\tau_{11}+n_2\tau_{12})}.\,x^{\frac{2\nu-5}{2}} \\ \left[1+\dfrac{4\pi i(n_1A_{12}+n_2A_{22})}{x^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{\beta_1-8\pi^2(n_1A_{12}+n_2A_{22})^2}{x}+\dots\right], \end{cases}$$

et ce développement montre qu'il n'y pas du terme en $\frac{1}{x}$ pour $\nu=0$ et $\nu=1$ et que le résidu pour $\nu=2$ est égal à l'expression

$$(32)\qquad (-1)^{n_1+n_2}\,.\,e^{-\pi i(n_1\tau_{11}+n_2\tau_{12})}\,.\,4\pi i(n_1A_{12}+n_2A_{22}).$$

Les fonctions $\Phi_0(x)$, $\Phi_1(x)$ sont partout finies sur la surface de Riemann et la fonction $\Phi_2(x)$ a seulement un point logarithmique à l'infini, et le résidu correspondant a la valeur (32). Les fonctions $\Phi_0(x)$ et $\Phi_1(x)$ sont donc d'après la terminologie de M. Appell les intégrales des fonctions à multiplicateurs de première espèce et la fonction $\Phi_2(x)$ est une intégrale de troisième espèce.

On aura le long des coupures a_μ, b_μ, c_1, successivement les formules

$$(33)\quad \begin{cases} \Phi_\nu(x^+)=\Phi_\nu(x^-)+L_{\mu\nu} & \text{(le long de } a_\mu), \\ \Phi_\nu(x^+)=\Phi_\nu(x^-)\,.\,e^{-2\pi i[n_1\tau_{1\mu}+n_2\tau_{2\mu}]}+M_{\mu\nu} & \text{(le long de } b_\mu);\ (\mu=1,2;\ \nu=0,1,2), \\ \Phi_\nu(x^+)=\Phi_\nu(x^-)+C_\nu & \text{(le long de } c_1), \end{cases}$$

dans lesquelles $L_{\mu\nu}$, $M_{\mu\nu}$, C_ν sont des constantes et en particulier la constante $L_{\mu\nu}$ est identique à celle employée plus haut (voir la formule 27).

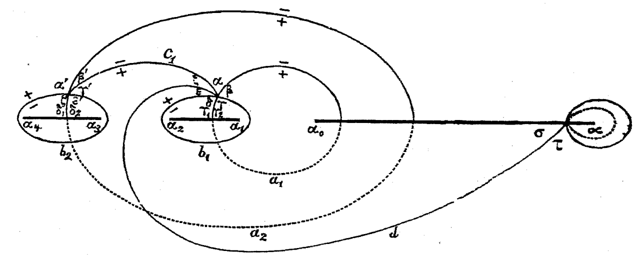

Fig. 3.

La figure (3) nous donne certaines relations entre ces diverses constantes. On a en effet successivement les relations

$$(34)\quad \begin{cases} \Phi_\nu(\beta)=\Phi_\nu(\alpha)+L_{1\nu}, & \Phi_\nu(\beta')=\Phi_\nu(\alpha')+L_{2\nu}, \\ \Phi_\nu(\beta)=\Phi_\nu(\gamma)\,.\,e^{-2\pi i(n_1\tau_{11}+n_2\tau_{21})}+M_{1\nu}, & \Phi_\nu(\gamma')=\Phi_\nu(\beta')+C_\nu, \\ \Phi_\nu(\gamma)=\Phi_\nu(\delta)+L_{1\nu}, & \Phi_\nu(\gamma')=\Phi_\nu(\delta').e^{-2\pi i(n_1\tau_{12}+n_2\tau_{22})}+M_{2\nu}; \\ \Phi_\nu(\varepsilon)=\Phi_\nu(\delta)e^{-2\pi i(n_1\tau_{11}+n_2\tau_{21})}+M_{1\nu}, & \Phi_\nu(\delta')=\Phi_\nu(\varepsilon')+L_{2\nu}, \\ \Phi_\nu(\xi)=\Phi_\nu(\varepsilon)+4\pi i\sigma_\nu, & \Phi_\nu(\alpha')=\Phi_\nu(\varepsilon')e^{-2\pi i(n_1\tau_{12}+n_2\tau_{22})}+M_{2\nu} \\ \Phi_\nu(\alpha)=\Phi_\nu(\xi)+C_\nu, & \end{cases}$$

où σ_ν désigne le résidu de l'intégrale $\Phi_\nu(x)$ au point $x=\infty$. Les équations (34) donnent par l'eliminations

$$(35)\qquad L_{1\nu}=\frac{4\pi i\sigma_\nu+C_\nu}{e^{-2\pi i(n_1\tau_{11}+n_2\tau_{21})}-1},\quad L_{2\nu}=\frac{C_\nu}{e^{-2\pi i(n_1\tau_{12}+n_2\tau_{22})}-1}$$

où

$$(36)\qquad \sigma_0=\sigma_1=0\,,\quad \sigma_2=(-1)^{n_1+n_2}\,.\,e^{-\pi i(n_1\tau_{11}+n_2\tau_{12})}\,.\,4\pi i\,.\,(n_1A_{12}+n_2A_{22}).$$

En substituant les valeurs (35) et (36) dans les formules (28) on arrive aux expressions

$$P_{n_1 n_2} = (-1)^{n_2} \frac{4\pi^2}{\omega} (n_1 A_{12} + n_2 A_{22}) C_1 \cdot \frac{e^{-n_1\pi i\tau_{12} - n_2\pi i\tau_{22}}}{(e^{-2\pi i(n_1\tau_{11}+n_2\tau_{21})} - 1)(e^{-2\pi i(n_1\tau_{12}+n_2\tau_{12})} - 1)},$$

$$Q_{n_1,n_2} = (-1)^{n_2} \cdot \frac{4\pi^2}{\omega} (n_1 A_{12} + n_2 A_{22}) C_0 \cdot \frac{e^{-n_1\pi i\tau_{12} - n_2\pi i\tau_{22}}}{(e^{-2\pi i(n_1\tau_{11}+n_2\tau_{21})} - 1) \cdot (e^{-2\pi i(n_1\tau_{12}+n_2 n_{22})} - 1)},$$

qui à l'aide de la première des formules (35) se transforment en les suivantes:

$$(37) \quad \begin{cases} P_{n_1,n_2} = (-1)^{n_2} \cdot \dfrac{4\pi^2}{\omega} (n_1 A_{12} + n_2 A_{22}) \dfrac{L_{11}}{e^{-\pi i(n_1\tau_{12}+n_2\tau_{22})} - e^{\pi i(n_1\tau_{12}+n_2\tau_{22})}}, \\ Q_{n_1,n_1} = (-1)^{n_2} \cdot \dfrac{4\pi^2}{\omega} \cdot (n_1 A_{12} + n_2 A_{22}) \dfrac{L_{10}}{e^{-\pi i(n_1\tau_{12}+n_2\tau_{22})} - e^{\pi i(n_1\tau_{12}+n_2\tau_{23})}}. \end{cases}$$

On peut donner aussi à ces formules la forme suivante

$$(38) \quad \begin{cases} P_{n_1,n_2} = (-1)^{n_2-1} \cdot \dfrac{2\pi^2}{\omega^2} (n_1\omega_{12} - n_2\omega_{11}) \dfrac{L_{11}}{e^{-\pi i(n_1\tau_{12}+n_2\tau_{22})} - e^{\pi i(n_1\tau_{12}+n_2\tau_{22})}}, \\ Q_{n_1,n_2} = (-1)^{n_2-1} \cdot \dfrac{2\pi^2}{\omega^2} (n_1\omega_{12} - n_2\omega_{11}) \dfrac{L_{10}}{e^{-\pi i(n_1\tau_{12}+n_2\tau_{22})} - e^{\pi i(n_1\tau_{12}+n_2\tau_{22})}}, \end{cases}$$

où les intégrales L_{10}, L_{11} peuvent aussi s'écrire

$$(39) \quad \begin{cases} L_{10} = \psi(n_1,n_2) + \psi(-n_1,-n_2); \quad L_{11} = \psi'(n_1,n_2) + \psi'(-n_1,-n_2), \\ \psi(n_1,n_2) = \displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{E(x)dx}{\sqrt{R(x)}}; \quad \psi'(n_1,n_2) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{xE(x)dx}{\sqrt{R(x)}}; \\ E(x) = e^{-2n_1\pi i} \displaystyle\int_{\alpha_1}^{x} dw_1 - 2n_2\pi i \int_{\alpha_1}^{x} dw_2, \end{cases}$$

où la racine carrée $\sqrt{R(x)}$ a la valeur arithmétique $-\sqrt{+R(x)}$ et le chemin d'intégration est rectiligne. Ces deux constantes L_{10}, L_{11} d'ailleurs variables avec n_1 et n_2 sont finies, puisque l'expression

$$2n_1\pi i \int_{\alpha_1}^{x} dw_1 + 2n_2\pi i \int_{\alpha_1}^{x} dw_2$$

est purement imaginaire, la racine carrée $\sqrt{R(x)}$ ayant dans les différentielles dw_1, dw_2 la valeur réelle négative, on aura donc

$$|\psi(n_1,n_2)| \leqslant \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{dx}{+\sqrt{+R(x)}}; \quad |\psi'(n_1,n_2)| \leqslant \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{xdx}{+\sqrt{+R(x)}}$$

où $+\sqrt{+R(x)}$ désigne la valeur arithmétique positive. En se reportant aux valeurs de ω_{11}, ω_{21}, on peut écrire encore

$$(40) \qquad |\psi(n_1,n_2)| \leqslant \omega_{11}; \quad |\psi'(n_1,n_2)| \leqslant \omega_{21}.$$

Les formules (39) sont valables pour toutes les valeurs positives et négatives des n_1 et n_2 excepté les valeurs simultanées $n_1 = n_2 = 0$. La formule générale montre que dans ce cas les coefficients $P_{0,0}$, $Q_{0,0}$ obtiennent des valeurs suivantes

$$P_{0,0} = -\frac{1}{4\omega} \int_{L_1}\int_{L_2} \frac{x_1 x_2(x_1 - x_2)}{\sqrt{R(x_1)}\ \sqrt{R(x_2)}} dx_1 dx_2; \quad Q_{0,0} = -\frac{1}{4\omega} \int_{L_1}\int_{L_2} \frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{R(x_1)}\ \sqrt{R(x_2)}} dx_1 dx_2$$

c'est à dire

$$(41) \qquad P_{0,0} = \frac{\omega_{21}\eta_{12} - \omega_{22}\eta_{11}}{\omega}; \quad Q_{0,0} = \frac{\omega_{11}\eta_{12} - \omega_{12}\eta_{11}}{\omega}.$$

(A suivre).