A. ROSENBLATT.

Über Reihenentwicklungen der Integrale der Differentialgleichungen erster Ordnung in der Umgebung einer wesentlich singulären Stelle.

(O ROZWINIĘCIACH NA SZEREG CAŁEK RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH RZĘDU PIERWSZEGO W OTOCZENIU MIEJSCA ISTOTNIE OSOBLIWEGO).

Die Herren I. Bendixson[1]) und J. Horn[2]) haben die Integrale der Differentialgleichung:

$$x^n \frac{dy}{dx} = ay + bx + f(x,y) , \tag{1}$$

in welcher $n>1$ ist und $f(x,y)$ eine mit Gliedern zweiter Ordnung in x und y beginnende Potenzreihe bedeutet, für reelle Veränderliche und Functionen in der Umgebung der Stelle $x=y=0$ untersucht. Für $a \neq 0$ werden von den genannten Autoren allgemeingültige (d. h. sämmtliche Charakteristiken darstellende) Reihenentwicklungen mit Hilfe der Methode successiver Approximationen gegeben. Für $a=0$ gibt Herr Bendixson eine vollständige qualitative Untersuchung der Charakteristiken, während zugleich eine analytische Darstellung als schwierige Aufgabe bezeichnet wird. Auch Herr Painlevé sagt diesbezüglich in seinem Artikel „Gewöhnliche Differentialgleichungen. Existenz der Lösungen" der deutschen Ausgabe der mathematischen Encyclopädie: „man kennt keine Darstellung der vom Ursprung ausgehenden Charakteristiken".

---

1) „Sur les points singuliers des équations différentielles". „Öfversight", Stockholm 1898; 1-te ud 3-te Note.

2) Mathematische Annalen Bd. 51.

Im Folgenden werden unter einschränkenden Voraussetzungen über die rechte Seite von (1) Reihentwicklungen für $a=0$ gegeben und ihre Convergenz für einen Teil der Charakteristiken bewiesen. Wir schreiben (1) in der Form:

$$x^n \frac{dy}{dx} = ay^m + yf(x,y) + \Psi(x)\,, \tag{2}$$

worin $f(x,y)$ und $\Psi(x)$ die Bedeutung haben:

$$f(x,y) = bx^h[1+\varphi(x)] + x,y\chi(x,y) + cy^p[1+f(y)]\,,$$
$$\Psi(x) = dx^k[1+\sigma(x)]\,,$$

und $\varphi(x)$, $\chi(x,y)$, $f(y)$, $\sigma(x)$ Potenzreihen bedeuten, deren erste, dritte und vierte mit den Argumenten verschwinden, worin weiter die ganzen Zahlen m, h, p, k die Ungleichungen erfüllen:

$$m \geqq 2\,,\quad h \geqq 1\,,\quad p \geqq m\,,\quad k \geqq 1$$

und $a \neq 0$ ist. Wir setzen nunmehr

$$h \geqq n-1,\quad \frac{n-1}{m-1} > n-2,\quad d=0 \tag{3}$$

voraus; für $n=2$ sind die beiden ersten Voraussetzungen stets erfüllt. Indem wir statt $f(x,y)$, $\frac{f(x,y)}{1-m}$ setzen, die abhängige Variable $z=\frac{y^{1-m}}{1-m}$ einführen und $a=\varepsilon=\pm 1$ setzen, erhalten wir aus (2) die lineare Gleichung

$$x^n \frac{dz}{dx} = \varepsilon + zf(x,y)\,, \tag{4}$$

auf die wir die Methode der successiven Approximationen anwenden. Wir setzen $z_k = \frac{y_k^{1-m}}{1-m}$, bilden das Gleichungsystem:

$$x^n \frac{dz_k}{dx} = \varepsilon + z_k f(x,y_{k-1})\,, \tag{5}$$

$k=1,2\ldots$ und integrieren dasselbe mit den Bedingungen $y_k=y^0$ für $x=x_0$, und $y_0=0$. Wir erhalten

$$z_k = e^{\int\limits_{x_0}^{x} \frac{f(x,y_{k-1})}{x^n}dx} \left[\varepsilon \int\limits_{x_0}^{x} e^{-\int\limits_{x_0}^{x} \frac{f(x,y_{k-1})}{x^n}dx} \frac{dx}{x^n} + z^0\right], \tag{6}$$

$k=1, 2\ldots$ und für $h=n-1$, wenn noch

$$bx^h\varphi(x) + x,y\chi(x,y) + cy^p[1+f(y)] = \vartheta(x,y)$$

gesetzt wird

$$z_k = \left(\frac{x}{x_0}\right)^b e^{\int\limits_{x_0}^{x} \vartheta(x,y_{k-1})\frac{dx}{x^n}} \left[\varepsilon \int\limits_{x_0}^{x} \frac{x_0^{\,b}}{x^{b+n}}\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} \vartheta(x,y_{k-1})\frac{dx}{x^n}} dx + z^0\right]. \tag{6^a}$$

Durch partielle Integration erhält man dann:

$$\left\{\begin{aligned} z_k = &-\frac{\varepsilon}{(n-1)x^{n-1}} + e^{\int\limits_{x_0}^{x}\frac{f(x,y_{k-1})}{x^n}dx}\left[\frac{\varepsilon}{(n-1)x_0^{\,n-1}} + z^0\right] \\ &-\varepsilon e^{\int\limits_{x_0}^{x}\frac{f(x,y_{k-1})}{x^n}dx} \int\limits_{x_0}^{x} \frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{f(x,y_{k-1})}{x^n}dx}\, \frac{f(x,y_{k-1})}{x^n}dx \end{aligned}\right. \tag{7}$$

und für $h=n-1$

$$\left\{\begin{aligned} z_k = &-\frac{\varepsilon}{(b+n-1)x^{n-1}} + \left(\frac{x}{x_0}\right)^b e^{\int\limits_{x_0}^{x}\vartheta(x,y_{k-1})\frac{dx}{x^n}} \cdot \left[\frac{\varepsilon}{(b+n-1)x_0^{\,n-1}} + z^0\right] \\ &-\varepsilon\left(\frac{x}{x_0}\right)^b e^{\int\limits_{x_0}^{x}\vartheta(x,y_{k-1})\frac{dx}{x^n}} \int\limits_{x_0}^{x} \frac{x_0^{\,b}}{(b+n-1)\,x^{b+n-1}}\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x}\vartheta(x,y_{k-1})\frac{dx}{x^n}}\, \vartheta(x,y_{k-1})\,\frac{dx}{x^n}\,, \end{aligned}\right. \tag{7^a}$$

welche Formel auch für $b+n-1=0$ gültig bleibt, wenn man im ersten und dritten Summanden rechts $\frac{1}{b+n-1}$ durch $-\log x$ und in der Klammer des zweiten Summanden durch $-\log x_0$ ersetzt.

Aus den Formeln (6) und (6^a) erkennen wir jetzt, wann die Functionen y_k mit x gegen Null convergieren können. Betrachten wir in der Tat y_1 und es sei I) n gerade, a) m gerade. Ist $\varepsilon=+1$ und $h>n-1$ oder $h=n-1$, $b\geqq 1-n$, dann ist das erste Glied der Summen in den Klammern in (6) und (6^a) für $x_0>x>0$ negatif und strebt mit abnehmendem x gegen $-\infty$, es ist positif für $0>x>x_0$ und wächst mit wachsendem x gegen $+\infty$. Ist also $y^0>0$, dann sind im ersten Falle die Klammerausdrücke stets negatif, im zweiten Falle gehen sie durch Null; ist $y^0<0$ dann gehen die Klammerausdrücke im ersten Falle durch Null und sind im zweiten Falle stets positif. Ist $b<1-n$, dann ist das erste Glied der Summen endlich und die

Klammerausdrücke sind für $x_0 > x > 0$ von Null verschieden, wenn $y^0 > 0$ oder $y_0 < 0$ und absolut klein ist, sie gehen durch Null wenn $y^0 < 0$ absolut gross ist; für $0 > x > x_0$ vertauschen sich die Zeichen $>$ und $<$. Der Fall $\varepsilon = -1$ entspricht der Transformation $y = -y'$. Die Transformation $y = y'^2$ zeigt das Verhalten für b) ungerades m und $\varepsilon = +1$, und $y = -y'^2$ für $\varepsilon = -1$. Ebenso zeigt die Transformation $x = x'^2$ das Verhalten für II) ungerades n a) gerades m und $x = x'^2$, $y = y'^2$ für b) ungerades m.

Es sei jetzt zuerst $h > n-1$. Setzen wir im Folgenden $x_0 > 0$, $y^0 > 0$ voraus und betrachten die Curve

$$\text{(C)} \qquad (m-1)\, y^{m-1} - (n-1)\, x^{n-1} = 0.$$

Wir behaupten, dass wenn x_0 klein genug ist und der Punkt (x_0, y^0) zwischen der Curve (C) und der positiven x-Achse liegt, die durch denselben gehende Charakteristik durch die Methode der successiven Approximationen gegeben wird.

Zunächst ergiebt sich leicht aus (7) und den Bedingungen (3), dass die y_k für $0 < x \leqq x_0$ sämmtlich erstens Ungleichungen von der Form

$$y_k^{m-1} < \frac{n-1}{m-1}\, x^{n-1}\, [1 + \varepsilon_k(x)]$$

erfüllen und zweitens durch die Formeln

$$\text{(8)} \qquad y_k^{m-1} = \frac{1 + \delta_k(x)}{(m-1)\left[\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} - \left(z^0 + \frac{1}{(n-1)x_0^{\,n-1}}\right)\right]}$$

dargestellt werden. Dabei sind die $\varepsilon_k(x)$ und die $\delta_k(x)$ Functionen, die für alle Werte von k dem Absolutwert nach unter einer beliebig kleinen positiven Grösse bleiben. Dabei ist $x_0 < \delta$, wo δ eine genügend kleine positive Grösse bedeutet. Dies wird auf bekannte Weise bewiesen. Um jetzt Convergenz der Reihe

$$\text{(9)} \qquad y_1 + \sum_2^{\infty} (y_k - y_{k-1})$$

darzutun, bilden wir die Differenzen

$$z_k - z_{k-1} = \left[e^{\int_{x_0}^{x} \frac{f(x, y_{k-1})}{x^n} dx} - e^{\int_{x_0}^{x} \frac{f(x, y_{k-2})}{x^n} dx} \right] \cdot \left[\frac{1}{(n-1) x_0^{\,n-1}} + z^0 \right]$$

$$- \left[e^{\int_{x_0}^{x} \frac{f(x, y_{k-1})}{x^n} dx} \int_{x_0}^{x} \frac{1}{(n-1)\, x^{n-1}}\, e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{f(x, y_{k-1})}{x^n} dx}\, \frac{f(x, y_{k-1})}{x^n}\, dx \right.$$

$$\left. - e^{\int_{x_0}^{x} \frac{f(x, y_{k-2})}{x^n} dx} \int_{x_0}^{x} \frac{1}{(n-1)\, x^{n-1}}\, e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{f(x, y_{k-2})}{x^n} dx}\, \frac{f(x, y_{k-2})}{x^n}\, dx \right]$$

$$k = 1, 2 \ldots$$

Mit Hilfe des Mittelwertsatzes ergiebt sich jetzt:

$$\text{(10)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{y_k^{m-1} - y_{k-1}^{m-1}}{m-1} = y_k^{m-1}\, y_{k-1}^{m-1} & \left| e^{\int_{x_0}^{x} \frac{f(x, \eta_1)}{x^n} dx} \int_{x_0}^{x} (y_{k-1} - y_{k-2})\, \frac{\partial f(x, \eta_2)}{\partial y}\, \frac{dx}{x^n} \right. \\ & \cdot \left[\frac{1}{(n-1) x_0^{\,n-1}} + z_0 \right] - \left[e^{\int_{x_0}^{x} \frac{f(x, \eta_3)}{x^n} dx} \int_{x_0}^{x} (y_{k-1} - y_{k-2})\, \frac{\partial f(x, \eta_4)}{\partial y}\, \frac{dx}{x^n} \right. \\ & \cdot \int_{x_0}^{x} \frac{1}{(n-1)\, x^{n-1}}\, e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{f(x, y_{k-1})}{x^n} dx}\, \frac{f(x, y_{k-1})}{x^n}\, dx \\ & + e^{\int_{x_0}^{x} \frac{f(x, y_{k-2})}{x^n} dx} \int_{x_0}^{x} \frac{1}{(n-1)\, x^{n-1}} \left[e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{f(x, y_{k-1})}{x^n} dx}\, (y_{k-1} - y_{k-2})\, \frac{\partial f(x, \eta_5)}{\partial y} \right. \\ & \left. \left. \left. + e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{f(x, \eta_6)}{x^n} dx}\, f(x, y_{k-2}) \int_{x_0}^{x} (y_{k-1} - y_{k-2})\, \frac{\partial f(x, \eta_7)}{\partial y}\, \frac{dx}{x^n} \right] \frac{dx}{x^n} \right] \right| . \end{aligned} \right.$$

Hier sind die η zwischen y_{k-1} und y_{k-2} verlaufende Curven. Aus (10) folgt jetzt leicht die Convergenz der Reihe der Approximationen. Es ist

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x \chi(x, y) + x, y\, \frac{\partial \chi(x, y)}{\partial y} + p c y^{p-1} [1 + f(y)] + c y^p\, \frac{d f(y)}{dy}\, .$$

Ist zuerst $m=2$, dann ist für $k=2$ der erste Summand rechts in (10) absolut kleiner als

$$M(x_0-x)x^{n-1},$$

wo M eine positive Zahl ist, und ebenso ist der zweite Summand kleiner als dieser Ausdruck. Daraus folgt dann am einfachsten auf bekannte Weise die Convergenz von (9) durch Vergleichung mit der Reihe:

$$1+\sum_1^{\infty}(x_0-x)^i.$$

Ist jetzt $m>2$, dann schreiben wir

$$(10^a)\qquad \frac{y_k-y_{k-1}}{m-1}=\frac{y_k^{m-1}-y_{k-1}^{m-1}}{\sum\limits_0^{m-2} y_k^{m-2-i}\,y_{k-1}^i}\{\ldots\}.$$

Dann ergiebt sich ebenso leicht, dass für $k=2$ die beiden Summanden rechts in (10^a) absolut kleiner als

$$M(x_0{}^a-x^a)x^{\frac{n-1}{m-1}}$$

sind, wo $a>0$ ist. Durch Vergleichung mit der Reihe

$$1+\sum_1^{\infty}(x_0{}^a-x^a)^i,$$

folgt dann die Convergenz von (9). Damit ist bekanntlich unsere Behauptung bewiesen.

Es sei jetzt $h=n-1$, $b\geqq 1-n$. Der Beweis für die Convergenz von (9) wird genau ebenso geführt. Es sei $x_0>0$, $y^0>0$. Wir behaupten, dass alle durch zwischen der Curve:

$$(C)\qquad (m-1)y^{m-1}-(b+n-1)x^{n-1}=0$$

und der positiven x-Achse liegende Punkte (x_0,y^0) laufenden Charakteristiken durch die successiven Approximationen gegeben werden, wenn $x_0<\delta$ ist, wo δ eine genügend kleine positive Grösse bedeutet, und wo in (C) für $b=1-n$, $b+n-1$ durch $-\frac{1}{\log x}$ zu ersetzen ist. Da $b\geqq 1-n$ ist, hat man erstens aus (7^a) für $0<x\leqq x_0$ die Ungleichungen

$$y_k^{m-1}<\frac{b+n-1}{m-1}x^{n-1}[1+\varepsilon_k(x)],$$

und zweitens die Darstellung

$$(11)\qquad y_k^{m-1}=\frac{1+\delta_k(x)}{(m-1)\left[\frac{1}{(b+n-1)x^{n-1}}-\left(\frac{x}{x_0}\right)^b\left(z_0+\frac{1}{(b+n-1)x_0{}^{n-1}}\right)\right]}.$$

Die $\varepsilon_k(x)$ und die $\delta_k(x)$ sind der Null beliebig nahe und $\frac{1}{b+n-1}$ muss für $b=1-n$ durch $-\log x$ respective durch $-\log x_0$ ersetzt werden.

Jetzt bilden wir die Differenzen

$$\begin{aligned}
z_k-z_{k-1}=\left(\frac{x}{x_0}\right)^b\Bigg\{&\left[e^{\int_{x_0}^{x}\vartheta(x,y_{k-1})\frac{dx}{x^n}}-e^{\int_{x_0}^{x}\vartheta(x,y_{k-2})\frac{dx}{x^n}}\right]\left[\frac{1}{(b+n-1)x_0{}^{n-1}}+z^0\right]\\
&-\Bigg[e^{\int_{x_0}^{x}\vartheta(x,y_{k-1})\frac{dx}{x^n}}\int_{x_0}^{x}\frac{x_0{}^b}{(b+n-1)\,x^{b+n-1}}\,e^{-\int_{x_0}^{x}\vartheta(x,y_{k-1})\frac{dx}{x^n}}\,\vartheta(x,y_{k-1})\frac{dx}{x^n}\\
&-e^{\int_{x_0}^{x}\vartheta(x,y_{k-2})\frac{dx}{x^n}}\int_{x_0}^{x}\frac{x_0{}^b}{(b+n-1)\,x^{b+n-1}}\,e^{-\int_{x_0}^{x}\vartheta(x,y_{k-2})\frac{dx}{x^n}}\,\vartheta(x,y_{k-2})\frac{dx}{x^n}\Bigg]\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Mittelwertsatzes erhält man:

$$(12)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{y_k^{m-1}-y_{k-1}^{m-1}}{m-1}=y_k^{m-1}y_{k-1}^{m-1}\left(\frac{x}{x_0}\right)^b\Bigg\{&e^{\int_{x_0}^{x}\vartheta(x,\eta_1)\frac{dx}{x^n}}\int_{x_0}^{x}(y_{k-1}-y_{k-2})\frac{\partial\vartheta(x,\eta_2)}{\partial y}\frac{dx}{x^n}\\
&\cdot\left[\frac{1}{(b+n-1)\,x_0{}^{n-1}}+z^0\right]-\Bigg[e^{\int_{x_0}^{x}\vartheta(x,\eta_3)\frac{dx}{x^n}}\int_{x_0}^{x}(y_{k-1}-y_{k-2})\frac{\partial\vartheta(x,\eta_4)}{\partial y}\frac{dx}{x^n}\\
&\cdot\int_{x_0}^{x}\frac{x_0{}^b}{(b+n-1)\,x^{b+n-1}}\,e^{-\int_{x_0}^{x}\vartheta(x,y_{k-1})\frac{dx}{x^n}}\,\vartheta(x,y_{k-1})\frac{dx}{x^n}\\
&+e^{\int_{x_0}^{x}\vartheta(x,y_{k-2})\frac{dx}{x^n}}\int_{x_0}^{x}\frac{x_0{}^b}{(b+n-1)\,x^{b+n-1}}\Bigg[e^{-\int_{x_0}^{x}\vartheta(x,y_{k-1})\frac{dx}{x^n}}(y_{k-1}-y_{k-2})\frac{\partial\vartheta(x,\eta_5)}{\partial y}\\
&+e^{-\int_{x_0}^{x}\vartheta(x,\eta_6)\frac{dx}{x^n}dx}\,\vartheta(x,y_{k-2})\int_{x_0}^{x}(y_{k-1}-y_{k-2})\frac{\partial\vartheta(x,\eta_7)}{\partial y}\frac{dx}{x^n}\Bigg]\frac{dx}{x^n}\Bigg]\Bigg\}.
\end{aligned}\right.$$

Hier sind die η wieder zwischen y_{k-1} und y_{k-2} verlaufende Curven. Wir erhalten jetzt ebenso wie früher zuerst dass y_2-y_1 absolut kleiner als

$$M(x_0{}^{\alpha}-x^{\alpha})\,x^{\frac{n-1}{m-1}}$$

ist, wo $\alpha>0$ ist, woraus die Convergenz der Reihenentwicklung folgt.

Ist $b=1-n$, dann tritt in (12) $\log x$ und $\log x_0$ auf, im zuletzt geschriebenen Ausdruck tritt dann $\log x$ auf.

Ist endlich $b<1-n$, dann wenden wir uns zu (6^a), indem wir wieder $x_0>0$, $y^0>0$, $\varepsilon=+1$ voraussetzen. Ist x_0 genügend klein, und ist ausserdem die Bedingung erfüllt, dass der Punkt (x_0,y^0) zwischen der Curve

$$y^{m-1}-Nx^{-b}=0\,, \tag{C}$$

wo N eine beliebige positive Zahl ist, und der positiven x-Achse liegt, dann kann man den Convergenzbeweis leicht führen, wobei noch die zweite Bedingung (3) durch

$$-\frac{b}{m-1}>n-2$$

ersetzt werden kann. Aus (6^a) erhalten wir:

$$K_1\left(\frac{x_0}{x}\right)^b y^{0\,m-1}<y_k^{m-1}<K_3\left(\frac{x_0}{x}\right)^b y^{0\,m-1}\,,$$

wo K_1 und K_2 zwei positive von k unabhängige Zahlen bedeuten. Aus (12) folgt dann:

$$|y_2-y_1|<Mx^{-\frac{b}{m-1}}\,,$$

worauf man sofort zum Ziele gelangt.

Kraków w sierpniu 1908 r.

Z. KRYGOWSKI.

SUR LE DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS HYPERELLIPTIQUES EN SÉRIES TRIGONOMETRIQUES.

O ROZWINIĘCU FUNKCYJ HYPERELIPTYCZNYCH NA SZEREGI TRYGONOMETRYCZNE).

DEUXIÈME PARTIE.

1. Périodes des intégrales canoniques.

En posant

$$\int d\omega_\mu=\int\frac{x^{\mu-1}dx}{\sqrt{R(x)}}\,;\;(\mu=1,2,\dots,\varrho)\,, \tag{1}$$

on a dans le cas

$$a_{\alpha\beta}=\begin{cases}1, \text{ quand } \alpha=\beta\,,\\ 0, \text{ quand } \alpha\neq\beta\,,\end{cases}$$

comme l'expression des demipériodes $\omega_{\mu\nu}$, $\omega'_{\mu\nu}$, les formules:

$$\omega_{\mu\nu}=\int_{\alpha_{2\nu-1}}^{\alpha_{2\nu}}d\omega_\mu\,;\;\omega'_{\mu\nu}=\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}d\omega_\mu+\int_{\alpha_2}^{\alpha_3}d\omega_\mu+\dots+\int_{\alpha_{2\nu-2}}^{\alpha_{2\nu-1}}d\omega_\mu\,;\;(\mu,\nu=1.2,\dots,\varrho)\,, \tag{2}$$

donc

$$\int_{\alpha_{2\nu-1}}^{\alpha_{2\nu}}d\omega_\mu=\omega_{\mu\nu}\,;\;\int_{\alpha_{2\nu}}^{\alpha_{2\nu+1}}d\omega_\mu=\omega'_{\mu,\nu+1}-\omega_{\mu\nu}. \tag{3}$$

De plus on déduit:

$$\int_{\infty}^{\alpha_0}d\omega_\mu+\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}d\omega_\mu+\dots+\int_{\alpha_{2\varrho-1}}^{\alpha_{2\varrho}}d\omega_\mu=0\,,$$