A. HOBORSKI.

CAŁKOWANIE RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO O CZĄSTKOWYCH POCHODNYCH:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.$$

(INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE AUX DÉRIVÉES PARTIELLES:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\Bigg).$$

PRZEDMOWA.

W „Rozprawach Akademii Umiejętności" w Krakowie ukazała się w r. 1905 praca prof. S. Zaremby, p. t. „Ogólne rozwiązanie zagadnienia Fouriera". W pracy tej udało się po raz pierwszy p. Zarembie zcałkować pewne równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych w warunkach bardzo ogólnych, równanie, którego znaczenie dla Fizyki matematycznej jest kapitalne. Praca ta oczywiście miała na oku przestrzeń trójwymiarową.

Mniej więcej przed rokiem, zachęcony przez p. Zarembę do rozwinięcia metody całkowania analogicznego równania dla przestrzeni dwuwymiarowej, próbowałem od początku przyjąć warunki ogólniejsze, niż te, które przyjął p. Zaremba, ale ze względu na pewne trudności zmuszony byłem powrócić do warunków p. Zaremby. Wskutek tego metody analityczne, które podał p. Zaremba, pozwoliły i obecne zagadnienie rozwiązać. Najprzód trzeba było podać nieco z teoryi potencyałów uogólnionych— w studyum ich oparłem się na pracy p. Zaremby p. t. „O równaniu o pochodnych cząstkowych $\Delta u + \xi u + f = 0$ i o funkcyach harmonicznych" (1900, drukowanej w „Pracach matematycz.-fiz."); na tej pracy, jak i na pracy H. Poincarégo p. t. „Sur les équations de la Physique". (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo 1894) oparłem rozdział piąty obecnej pracy. Oprócz tego korzystałem z rozpraw:

St. Zaremba: „O t. zw. funkcyach zasadniczych z teoryi równań Fizyki matematycznej". 1901. Rozp. Akad. Um.

St. Zaremba: „Les fonctions fondamentales de M. Poincaré et la méthode de Neumann pour une frontière composée de polygones curvilignes". 1904. Journal de Mathématiques pures et appliquées.

Publikacya mej pracy następuje z tego powodu, że zawiera dużo rachunków, bądź przeprowadzonych zupełnie, bądź tylko naznaczonych, które, jak sądzę, wielce mogą się przyczynić do zrozumienia prac wyżej cytowanych.

Na końcu pragnę wyrazić moją najwyższą wdzięczność Panu Profesorowi Zarembie za Jego niezwykłą życzliwość, z którą zawsze jak najchętniej udzielał mi wielu cennych rad i wskazówek przy układaniu niniejszej pracy.

I. WSTĘP.

§ 1. Uważajmy na płaszczyźnie spółrzędnych kartezyuszowskich (x,y) krzywą C, ograniczającą pewien obszar, wewnątrz jej leżący D, który nie rozciąga się do nieskończoności i jest jednospójny; przez D' będziemy oznaczali obszar zewnątrz krzywej C leżący. Nadto założymy o tej krzywej C, że:

1) w każdym swym punkcie posiada określoną styczną;

2) kąt ostry, utworzony przez dwie normalne w dwóch punktach A i B krzywej C, jest mniejszy od iloczynu odległości AB i stałej dodatniej, zależnej jedynie od krzywej C;

3) dla krzywej C istnieje stała liczba dodatnia δ taka, iż koło, zatoczone promieniem $\delta_1 \leqslant \delta$ z dowolnego punktu O na krzywej C, odcina część C_0 o tej własności, że każda równoległa do normalnej w punkcie O do krzywej C, przecina łuk C_0 w jednym tylko punkcie.

Przy tych założeniach o krzywej C zagadnienie, stanowiące treść niniejszej pracy, będzie następujące:

Wyznaczyć funkcyę V zmiennych x,y, będących spółrzędnemi kartezyuszowskiemi punktów płaszczyzny i zmiennej t, o własnościach:

1) funkcya V ma być określona i ciągła dla wszystkich położeń punktu x,y, wewnątrz obszaru D i na jego ograniczeniu C i dla dodatnich wartości zmiennej t;

2) dla wszystkich dodatnich wartości zmiennej t, należących do przedziału $(0, T)$, gdzie T jest liczbą dodatnią, dowolną, moduł $|V|$ ma mieć górną granicę niezależną od położenia punktu x,y wewnątrz obszaru D lub na jego ograniczeniu;

3) pochodne $\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ mają istnieć i być ciągłe dla każdej dodatniej wartości t i dla każdego położenia punktu x,y wewnątrz obszaru D; nadto mają spełniać równanie:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \Delta V,$$

gdzie jest:

$$\Delta V \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2};$$

4) dla każdej dodatniej wartości zmiennej t i w każdym punkcie P krzywej C ma być:

$$h'\left(\frac{dV}{dN}\right)_i = h(V)_i + \varphi,$$

gdzie jest $h'=0$ lub $h'=1$, zaś h jest funkcyą ciągłą spółrzędnych punktu P, φ jest daną funkcyą spółrzędnych punktu P i zmiennej t; nadto pochodna $\frac{dV}{dN}$ ma być wzięta wzdłuż normalnej w punkcie P do krzywej C, skierowanej na wewnątrz obszaru D;

5) do każdego układu dwu liczb dodatnich ε, δ, choćby dowolnie małych, można znaleść dodatnią liczbę η taką, iż, gdy tylko jest $0<t<\eta$, $d \geqslant \delta$, przyczem d jest najkrótszą odległością punktu x,y obszaru D od krzywej C, to jest także:

$$|V(x,y,t) - F(x,y)| < \varepsilon,$$

gdzie $F(x,y)$ oznacza daną funkcyę, określoną wewnątrz obszaru D.

§ 2. W ostatnim rozdziale wykażemy, że łatwo rozwiązać powyższe zagadnienie, gdy rozwiążemy je dla szczególnego przypadku $\varphi \equiv 0$ i dlatego zajmiemy się najpierw tym szczególnym przypadkiem.

Przyjąwszy $\varphi \equiv 0$, wykażemy, że i w przypadku dwu zmiennych otrzymuje się:

$$V = \sum_{1}^{\infty} A_k U_k e^{-\xi_k t},$$

gdzie stałe $A_1, A_2, \ldots$ zależą od funkcyi $F(x,y)$, zaś liczby ξ_k są rzeczywiste, spełniające nierówności $\xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \xi_3 \leqslant \ldots$ —, związane z funkcyami $U_1, U_2, \ldots$ zależnemi jedynie od zmiennych x,y, które znów ze swej strony sprawdzają równanie:

$$\Delta U_k + \xi_k U_k = 0 \qquad (k=1, 2, 3, \ldots)$$

wewnątrz obszaru D, przyczem na krzywej C jest:

$$h'\left(\frac{dU_k}{dN}\right)_i = h(U_k)_i\,, \qquad (k=1,2,3,\ldots)$$

zarazem liczby ξ_k i funkcye U_k nie zależą od funkcyi $F(x,y)$, a symbole h', h mają to samo znaczenie, jak wyżej.

Wobec tego, traktując zagadnienie t. zw. uproszczone, t. j. zagadnienie, w którem jest $\varphi=0$, musimy:

a) wykazać istnienie funkcyi U_k o wyżej podanych własnościach;

b) okazać zbieżność szeregu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k U_k e^{-\xi_k t}$ dla wszystkich punktów x,y wewnątrz obszaru D i na krzywej C i dodatnich wartości zmiennej t, oraz i ciągłość funkcyi, jaką ten szereg przedstawia;

c) wykazać różniczkowalność tego szeregu raz co do zmiennej t, dwukrotnie co do zmiennych x,y, przyczem mają te szeregi być zbieżne wewnątrz obszaru D, nadto na krzywej C ma istnieć pochodna normalna, a to wszystko, gdy zmienna t ma dowolną wartość dodatnią;

d) nadto mamy wykazać, że szereg ten spełnia wszystkie inne warunki, nałożone na funkcyę V, warunki zagadnienia uproszczonego.

U w a g a 1. Dla krótkości wysłowienia się, zagadnienie, którem się w niniejszej pracy zajmujemy, zwać będziemy zagadnieniem F o u r i e r a.

U w a g a 2. Przez punkty „wewnątrz obszaru D" leżące rozumieć będziemy stale punkty obszaru D, a nie będące na krzywej C; przez punkty „obszaru D" lub „całego obszaru D" rozumieć będziemy także i te punkty, które stanowią krzywą C.

§ 3. Ponieważ metoda całkowania wymaga znajomości potencyałów uogólnionych, przeto w tym rozdziale zajmiemy się niemi.

Uważajmy w tym celu równanie:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \xi w = 0, \tag{1}$$

gdzie liczba ξ nie zależy od zmiennych x,y,t, a zresztą jest dowolna. Niech będzie:

$$\xi = \rho_1 (\cos\theta + i \sin\theta) \tag{2}$$

przy warunku: $0 \leqslant \theta < 2\pi$: nadto niech μ będzie taką liczbą zespoloną $\mu=\tau(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, iż jest $\mu^2=-\xi$, a więc:

$$\tau = \sqrt{\rho_1}\,,\quad 2\varphi = \theta + (2k+1)\pi, \qquad (k=\pm1,\pm2,\ldots)$$

niech nadto liczba μ ma część rzeczywistą dodatnią $(\theta>0)$, więc jest $k=-1$ i przeto:

$$\mu = \sqrt{\rho_1}\left(\sin\frac{\theta}{2} - i\cos\frac{\theta}{2}\right). \tag{2bis}$$

Oznaczmy przez ρ odległość dwu punktów x,y; x',y', z których ostatni leży na krzywej C, i uważajmy funkcyę:

$$f(\rho,\mu) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\mu\sqrt{\rho^2+t^2}}}{\sqrt{\rho^2+t^2}}\,dt. \tag{3}$$

Połóżmy:

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_C \sigma(x',y')\,f(\varrho,\mu)\,ds\,, \tag{4}$$

$$v(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_C \sigma(x',y')\frac{df(\varrho,\mu)}{d\varrho}\cos\vartheta\,ds\,, \tag{5}$$

przyczem σ oznacza daną funkcyę ciągłą punktu krzywej C, zaś ϑ oznacza kąt, który tworzy normalna wewnętrzna do elementu ds z odległością ρ skierowaną od elementu ds do punktu x,y. Funkcye $u(x,y)$, $v(x,y)$ spełniają, jako funkcye spółrzędnych x,y punktu, położonego poza krzywą C, równanie (1), jeżeli zamiast symbolu w położymy symbol u, względnie v; funkcye $u(x,y)$, $v(x,y)$ zowią się właśnie uogólnionemi potencyałami warstwy pojedyńczej, względnie podwójnej, rozpostartej wzdłuż krzywej C z gęstością $\sigma(x'y')$ o liczbie charakterystycznej μ[1]).

§ 4 Musimy najpierw zbadać funkcyę $f(\varrho,\mu)$ i jej pochodną $\dfrac{df(\varrho,\mu)}{d\varrho}$.

Zauważmy, że jest także:

$$f(\varrho,\mu) = \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-\mu\sqrt{\varrho^2+t^2}}}{\sqrt{\varrho^2+t^2}}\,dt;$$

jeżeli więc położymy $\mu=a+bi$, przyczem jest $a>0$, to:

$$|f(\varrho,\mu)| < \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-a\sqrt{\varrho^2+t^2}}}{\sqrt{\varrho^2+t^2}}\,dt.$$

---

[1]) Ten specyalny kształt uogólnionych potencyałów otrzymać łatwo przez podobne rozważania graniczne z potencyałów trójwymiarowych, jak się otrzymuje potencyał logarytmowy z potencyału Newtonowskiego; dość więc uważać walec o kierownicy C i tworzących równoległych do trzeciej osi kartezyuszowskiej z, przecięty dwiema płaszczyznami $z=+\delta$, $z=-\delta$, gdzie liczba δ jest dodatnią i potem zakłada się, że liczba δ rośnie nieograniczenie.

Jeżeli liczba ϱ jest dowolna, byle nie mniejsza od dodatniej liczby ϱ_0, będzie:

$$|f(\varrho,\mu)| < \frac{1}{a\varrho_0},$$

nadto z łatwością można ustawić następujące nierówności:

$$(6) \qquad |f(\varrho,\mu)| < \frac{2}{a\varrho} \cdot e^{-\frac{a\varrho}{2}},$$

$$(7) \qquad \left|\frac{df(\varrho,\mu)}{d\varrho}\right| < \frac{\pi}{2} m e^{-a\varrho} + \frac{e^{-a\varrho}}{\varrho},$$

przyczem jest $a>0$, $m=|\mu|$.

§ 5. Ze względu na ciąg dalszy rozwiniemy funkcyę $f(\varrho,\mu)$ na szereg przy naszych założeniach, że jest $a>0$, $\varrho \geqslant \varrho_0 > 0$.

Kładąc

$$I_n = \int_0^\infty \frac{e^{-\mu\sqrt{\varrho^2+t^2}}}{\sqrt{(\varrho^2+t^2)^m}} dt, \quad I_{m,n} = \int_0^\infty \frac{e^{-\mu\sqrt{\varrho^2+t^2}}}{\sqrt{(\varrho^2+t^2)^m}} t^n dt,$$

otrzymujemy:

$$\Delta I_1 = \mu^2 I_1 + \mu I_2 + I_3 - \mu^2 I_{3,2} - 3\mu I_{4,2} - 3I_{5,2};$$

nadto z tożsamości:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{-\mu\sqrt{\varrho^2+t^2}}}{\sqrt{(\varrho^2+t^2)_m}} \cdot t^n\right) = -\frac{\mu e^{-\mu\sqrt{\varrho^2+t^2}}}{\sqrt{(\varrho^2+t^2)^{m+1}}} t^{n+1} - \frac{m e^{-\mu\sqrt{\varrho^2+t^2}}}{\sqrt{(\varrho^2+t^2)^{m+2}}} \cdot t^{n+1}$$
$$+ n \frac{e^{-\mu\sqrt{\varrho^2+t^2}}}{\sqrt{(\varrho^2+t^2)^m}} t^{n-1},$$

przez całkowanie od 0 do ∞, otrzymujemy:

$$nI_{m,n-1} - mI_{m+2,n+1} - \mu I_{m+1,n+1} = 0$$

Kładąc $n=1$ i $m=2,3$, mamy:

$$I_2 = \mu I_{3,2} + 2I_{4,2},$$
$$I_3 = \mu I_{4,2} + 3I_{5,2};$$

otrzymujemy stąd ostatecznie:

$$(8) \qquad \Delta f(\varrho,\mu) + \xi f(\varrho,\mu) = 0,$$

bo jest $\mu^2 = -\xi$, $I_1 = f(\varrho,\mu)$. Równanie to można napisać w postaci:

$$(8\text{bis}) \qquad \frac{d^2f}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{df}{d\varrho} - \mu^2 f = 0$$ [1].

Ażeby otrzymać rozwinięcie funkcyi $f(\varrho,\mu)$ na szereg, znajdziemy ogólną całkę tego równania.

Naprzód znajdziemy całkę szczególną równania (8bis), kładąc:

$$f = f_1 = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \varrho^{2k};$$

z równania otrzymujemy:

$$A_{k+1} = \frac{\mu^2 A_k}{4(k+1)^2},$$

a kładąc:

$$A_0 = 1,$$

mamy:

$$A_k = \frac{\mu^{2k}}{(2^k . k!)^2},$$

a więc jest:

$$f_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^{2k}}{(2^k . k!)^2} \cdot \varrho^{2k}.$$

Kładąc

$$f = f_1 \int z d\varrho,$$

otrzymamy:

$$z = \frac{\text{const.}}{\varrho . f_1^2}.$$

Połóżmy przeto:

$$f = f_1 [\log \varrho + c] + f_2,$$

gdzie c oznacza stałą, a f_2 funkcyę spełniającą równanie:

$$\frac{d^2 f_2}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{df_2}{d\varrho} - \mu^2 f_2 = -\frac{2}{\varrho}\frac{df_1}{d\varrho}.$$

Dość wyszukać tu całkę szczególną; kładziemy:

---

[1]) Gdy położymy $\xi = \mu i \rho$, $\eta = \mu i f$, otrzymamy równanie B e s s e l a.

$$f_2=\sum_{k=0}^{\infty} B_k \varrho^{2k}$$

i otrzymujemy:

$$\frac{B_k}{A_k}-\frac{B_0}{A_0}=-\sum_{i=1}^{i=k}\frac{1}{i}.$$

Kładąc $B_0=0$, mamy:

$$f_2=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu^{2k}}{(2^k.k!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}\right).\ \varrho^{2k};$$

jak łatwo się przekonać, szereg ten jest zbieżny i spełnia swe równanie różniczkowe. Ostatecznie mamy:

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} & f=C'\Bigg[(\log\varrho+c)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu^{2k}}{(2^k.k!)^2}\varrho^{2k}\\ & -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu^{2k}}{(2^k.k!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}\right)\varrho^{2k}\Bigg],\end{aligned}\right.$$

gdzie C', c oznaczają stałe dowolne.

Obecnie wyznaczymy stałe C', c tak, aby funkcya f, określona wzorem (9), stała się identyczną z funkcyą $f(\varrho,\mu)$.

W tym celu połóżmy:

$$f(\varrho,\mu)=\int_0^1\frac{e^{-\mu\sqrt{\varrho^2+t^2}}}{\sqrt{\varrho^2+t^2}}dt+\int_1^{\infty}\frac{e^{-\mu\sqrt{\varrho^2+t^2}}}{\sqrt{\varrho^2+t^2}}dt.$$

Otóż jest:

$$\left|\int_1^{\infty}\frac{e^{-\mu\sqrt{\varrho^2+t^2}}}{\sqrt{\rho^2+t^2}}dt\right|<\frac{1}{a}.\ e^{-a},$$

bo tu jest $t\geqslant1$; wyraz ten osobliwości dawać nie może.

Pierwszy wyraz wolno napisać w postaci:

$$\int_0^1\frac{e^{-\mu\sqrt{\varrho^2+t^2}}}{\sqrt{\varrho^2+t^2}}dt=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{\varrho^2+t^2}}\sum_0^{\infty}(-1)^n.\frac{\mu^n}{n!}(\sqrt{\varrho^2+t^2})^n.$$

Zakładając, że jest $1\geqslant\varrho\geqslant\varrho_0>0$, możemy szereg wyraz za wyrazem całkować; przeto będzie:

$$\int_0^1\frac{e^{-\mu\sqrt{\rho^2+t^2}}}{\sqrt{\rho^2+t^2}}dt=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{\rho^2+t^2}}+\sum_1^{\infty}(-1)^n.\frac{\mu^n}{n!}\int_0^1(\rho^2+t^2)^{\frac{n-1}{2}}dt.$$

Szereg po stronie prawej osobliwości względem zmiennej ρ zawierać nie może. Otóż jest:

$$\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{\rho^2+t^2}}=\log\{1+\sqrt{\rho^2+1}\}-\log\rho,$$

przeto:

$$\lim_{\rho=0}\left\{\frac{f(\rho,\mu)}{\log\rho}\right\}=-1;$$

a więc:

$$C'=-1.$$

Nadto:

$$-c=\log 2+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\mu^k}{k!k}+\int_1^{\infty}\frac{e^{-\mu t}}{t}dt.$$

Wobec tego wolno położyć:

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} & f(\rho,\mu)=-c-\log\rho-\rho^2U\log\rho+\rho^2V,\\ & \frac{df(\rho,\mu)}{d\rho}=-\frac{1}{\rho}-\rho\,[F(\rho)+A_1\log\rho],\end{aligned}\right.$$

gdzie U, V, $F(\rho)$ i A_1 oznaczają pewne zbieżne szeregi potęgowe.

§ 6. Obecnie możemy przystąpić do badania własności potencyałów warstwy pojedyńczej, określonej wzorem (4).

Znajdziemy górną granicę funkcyi $|u|$. Oznaczmy przez S górną granicę funkcyi $|\sigma(x',y')|$ wzdłuż krzywej C.

Załóżmy naprzód, że punkt x,y tak jest obrany, że istnieje dolna granica ρ_0, różna od zera, dla odległości ρ punktu x,y od dowolnych punktów $x'y'$, położonych na krzywej C; wtedy $f(\rho,\mu)$ przedstawia funkcyę ciągłą i całka wzoru (4) ma sens i nadto według § 4 jest:

$$|f(\rho,\mu)|<\frac{1}{a\rho_0},$$

wskutek czego jest:

$$|u(x,y)|<\frac{S.A}{2\pi p_0 a},$$

gdzie A oznacza długość łuku krzywej C

Niech teraz punkt x,y leży dość blizko krzywej C; nadto niżej założymy, że punkt x,y nieograniczenie się zbliża do krzywej C w sposób, który później określimy; w takich warunkach dolna granica zmiennej ρ jest równa zeru.

Niech punkt O będzie punktem krzywej C najbliższym punktu x,y; za oś x weźmy normalną punktu O, za oś y styczną w punkcie O. Niech C_0 oznacza obustronne sąsiedztwo długości skończonej punktu O na krzywej C, zaś C_1 część pozostałą krzywej C. Na mocy założeń (§ 1) o krzywej C możemy przyjąć, że C_0 jest na tyle małe, iż spółrzędna x' punktu łuku C_0 jest funkcya jednowartościową spółrzędnej y' tegoż punktu; przy tem położeniu układu osi jest $y=0$, t. zn. punkt, w którym badamy wartość funkcyi $u(x,y)$, leży na normalnej najbliższego punktu krzywej C. Niech M będzie dowolnym punktem łuku C_0, niech ϱ' będzie jego odległością od punktu O, zaś γ kątem ostrym między normalną punktu M a osią x. Według założenia o krzywej C, istnieje stała dodatnia g, zależna jedynie od krzywej C taka, iż jest $\gamma < g\delta'$; niech δ' oznacza maximum liczby ρ' dla punktów łuku C_0 i niech będzie takie, że jest $g\delta' < 1$; wskutek tego jest $\gamma < 1$ i nadto:

$$\cos\gamma > 1 - \frac{1}{2}\gamma^2 > 1 - \frac{1}{2}g^2\rho'^2,$$

a stąd:

$$\frac{1}{\cos\gamma} = \sqrt{1+\left(\frac{dx'}{dy'}\right)^2} < \frac{1}{1-\frac{1}{2}g^2\rho'^2} = 1 + \frac{\frac{1}{2}g^2\rho'^2}{1-\frac{1}{2}g^2\rho'^2} < 1+g^2\rho'^2.$$

Będzie tedy:

$$\left(\frac{dx'}{dy'}\right)^2 < 2g^2\rho'^2 + g^4\rho'^4 < 3g^2\rho'^2,$$

czyli:

$$\left|\frac{dx'}{dy'}\right| < g\,\rho'\sqrt{3} \leqslant g\delta'\sqrt{3},$$

a że jest:

$$x' = \int_0^{y'} \frac{dx'}{dy'}\,dy',$$

więc:

$$|x| < g\delta'\,|y'|\sqrt{3} < |y'|\sqrt{3}.$$

Nadto jest:

$$\rho' = \sqrt{x'^2+y'^2} < 2\,|y'|,$$

$$\left|\frac{dx'}{dy'}\right| < 2g\,|y'|\sqrt{3},$$

a z ostatniej nierówności, stosując jeszcze raz wzór całkowy na zmienną x', otrzymujemy:

$$|x'| < \frac{2g\sqrt{3}.y'^2}{2} < 2gy'^2.$$

Ostatecznie mamy następujące, ważne dla dalszego ciągu, nierówności:

(11) $$\cos\gamma > \frac{1}{2},$$

(12) $$|x'| < 2gy'^2 \leqslant 2g\rho'^2,$$

(13) $$\frac{1}{\cos\gamma} < 1+g^2\rho'^2 < 1+4g^2y'^2.$$

Niech ρ_0 będzie dolną granicą zmiennej ρ wzdłuż łuku C_1; liczba ρ_0 będzie w każdym razie liczbą dodatnią. Połóżmy teraz:

$$u(x,y) = u_0\,u_1,$$

gdzie:

$$u_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{(C_0)} \sigma(x',y')f(\rho.\mu)ds, \qquad u_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{(C_1)} \sigma(x'y')f(\rho,\mu)ds.$$

Otóż do całki u_1, z powodu, że jest $\rho \geqslant \rho_0$, wolno stosować poprzednie rozumowanie, które nas doprowadzi do nierówności:

$$|u_1| < \frac{S.A}{2\pi\rho_0 a};$$

co się zaś tyczy funkcyi u_0, to mamy:

$$|u_0| < \frac{S}{\pi}\int_{C_0} dy' \int_0^\infty \frac{e^{-a\sqrt{\rho^2+t^2}}}{\sqrt{\rho^2+t^2}}\,dt < \frac{4S}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-a\sqrt{\rho^2+t^2}}}{\sqrt{\rho^2+t^2}}\,dy'dt,$$

albowiem jest:

$$\frac{ds}{dy'} = \frac{1}{\cos\gamma} < 2,$$

$$\int_{C_0} dy' \ldots < 2\int_0^\infty dy'.$$

Lecz jest:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-a\sqrt{\rho^2+t^2}}}{\sqrt{\rho^2+t^2}}\,dy'dt<\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-a\sqrt{y'^2+t^2}}}{\sqrt{y'^2+t^2}}\,dy'dt=\int_0^{2\pi}\int_0^\infty e^{-aR}dR\,d\varphi=\frac{2\pi}{a},$$

jeżeli się podstawi $y'=R\cos\varphi$, $t=R\sin\varphi$. Przeto:

$$(14)\qquad |u|<|u_0|+|u_1|<\frac{8S}{a}+\frac{SA}{2\pi\rho_1 a}=\frac{AS}{a},$$

gdzie, jak widać, stała A zależy jedynie od krzywej C i jest dodatnia; a że w § 3 wynika, że jest $a=\sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}$, więc nierówność (14) można zawsze napisać w postaci:

$$(15)\qquad |u|<\frac{AS}{\sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Stąd widzimy, że gdy punkt x,y dowolnie się zbliża po osi x do punktu O, moduł $|u|$ nie rośnie nieograniczenie, ponieważ zaś na mocy pierwszej równości (10) nieciągłość funkcyi $f(\rho,u)$ jest ta sama, co funkcyi $(-\log\rho)$, przeto na mocy klasycznej teoryi zwyczajnych potencyałów możemy powiedzieć, że funkcya $u(x,y)$ ma określony sens i w tym przypadku, gdy punkt x,y przyjmiemy na krzywej C. Wskutek tego funkcya u_0 dąży do zera wraz z łukiem C_0, jakiemkolwiek będzie położenie punktu x,y, przyczem zawsze spełnia funkcya u nierówności (14), (15).

Zbadajmy, czy funkcya $u(x,y)$ jest ciągła, gdy punkt (x,y) zdąża do punktu O.

Oznaczmy przez P punkt na osi x, różny od punktu O; dla obu punktów obliczmy potencyał $u(x,y)$, przyczem wartości jego oznaczmy przez $u(O)$ i $u(P)$ i rozłóżmy je odpowiednio do łuków C_0 i C_1:

$$u(O)=u_0(O)+u_1(O),$$
$$u(P)=u_0(P)+u_1(P).$$

Jak powiedzieliśmy, do każdej dodatniej liczby ε można obrać łuk C_0 tak mały (a różny od zera), iż jest:

$$|u_0(O)|<\frac{\varepsilon}{3},\qquad |u_0(P)|<\frac{\varepsilon}{3},$$

nadto dla każdej liczby ε, wyżej określonej, można obrać taką dodatnią liczbę δ, iż, gdy tylko jest $\overline{OP}\leqslant\delta$, także:

$$|u_1(O)-u_1(P)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Wskutek tego przy takim wyborze punktów O, P będzie:

$$|u(O)-u(P)|<\varepsilon,$$

z czego wynika, że potencyał $u(x,y)$ jest funkcyą ciągłą, a więc, używając zwykłych oznaczeń, mamy:

$$(u(x,y))_i=(u(x,y))_e=(u(x,y))_c,$$

przyczem granice swe osiąga jednostajnie wzdłuż krzywej C. Można bowiem tak obrać łuk C_0, aby, niezależnie od położenia punktów O i P wzdłuż krzywej C, było $|u_0(O)|<\frac{\varepsilon}{3}$, $|u_0(P)|<\frac{\varepsilon}{3}$. Ponieważ zaś funkcya $u_1(x,y)$ jest ciągła, przeto istnieje taka dodatnia liczba h, iż, gdy tylko długość OP nie przewyższa liczby h, jest $|u_1(O)-u_1(P)|<\frac{\varepsilon}{3}$, niezależnie od położenia punktu O na krzywej C. Stąd wynika, że moduł różnicy $u(O)-u(P)$ można uczynić dowolnie małym niezależnie od punktu O wzdłuż krzywej C, byleby odcinek OP nie przekraczał pewnej określonej długości—słowem—granica jest osiągana jednostajnie wzdłuż krzywej C, jak zapowiedzieliśmy.

Zbadajmy jeszcze, czy granica $(u(xy))_e$ lub $(u(x,y))_i$, co na jedno wychodzi, jest funkcyą ciągłą punktu krzywej C.

Obierzmy w tym celu drugi punkt O_1 na krzywej C i różny od niego punkt P_1, leżący na normalnej punktu O_1. Uważajmy moduły:

$$|u(O)-u(P)|,\quad |u(P)-u(P_1)|,\quad |u(P_1)-u(O_1)|.$$

Otóż do każdej dodatniej liczby ε można obrać taką dodatnią liczbę h, iż, gdy żaden z odcinków OP, PP_1, P_1O_1 co do długości nie przewyższa liczby h, każdy z powyższych modułów jest mniejszy od liczby $\frac{\varepsilon}{3}$; gdy więc odległość OO_1 nie przewyższa liczby $3h$, jest:

$$|u(O)-u(O_1)|<\varepsilon,$$

co wykazuje, iż granice $(u(xy))_e$, $(u(xy))_i$ są funkcyami ciągłemi wzdłuż krzywej C.

§ 7. Z kolei zbadamy pochodną normalną funkcyi $u(x,y)$, t. j. zbadamy $\frac{\partial u}{\partial x}$, gdy obierzemy to szczególne położenie osi spółrzędnych, które określiliśmy w § 6. Założywszy, że punkt x,y nie leży na krzywej C, a będąc dość blizkim krzywej C, znajduje się na normalnej punktu O, będącego na krzywej C, możemy, zachowując oznaczenia § 6, napisać:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2\pi}\int_{(C)}\sigma(x',y')\frac{df(\rho,\mu)}{d\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}ds=\frac{1}{2\pi}\int_{(C_0)}\sigma(x',y')\frac{df(\rho,\mu)}{d\rho}\frac{x-x'}{\rho}ds$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{(C_1)}\sigma(x',y')\frac{df(\rho,\mu)}{d\rho}\frac{x-x'}{\rho}ds.$$

Trzecia całka powyższego wzoru jest funkcyą ciągłą zmiennej x i przeto jej granica dla $x=0$, równa się wartości:

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{(C_1)}\sigma(x',y')\frac{df(\rho',\mu)}{d\rho'}\cdot\frac{x'}{\rho'}ds,$$

gdzie, jak wyżej przyjęto, ρ' oznacza odległość punktu O od punktów krzywej C. Pozostaje nam zbadanie istnienia granicy dla $x=0$ całki:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{(C_0)}\sigma(x',y')\frac{df(\rho,\mu)}{d\rho}\cdot\frac{x-x'}{\rho}ds=I_1-I_2\,,$$

gdzie oznaczamy:

$$I_1=\frac{1}{2\pi}\int_{(C_0)}\sigma(x',y')\frac{df(\rho,\mu)}{d\rho}\cdot\frac{x}{\rho}ds,$$

$$I_2=\frac{1}{2\pi}\int_{(C_0)}\sigma(x',y')\frac{df(\rho,\mu)}{d\rho}\cdot\frac{x'}{\rho}ds.$$

Na mocy nierówności (7) (str. 6) i (12) (str. 11) widzimy, że funkcya podcałkowa całki I_2 jest na łuku C_0 ograniczona i ma wartość skończoną i dla $\rho=0$, wskutek czego całka I_2 jest funkcyą ciągłą zmiennej x, przeto jej granica dla $x=0$ określi się równaniem:

$$\lim_{(x=0)} I_2=\frac{1}{2\pi}\int_{(C_0)}\sigma(x',y')\frac{df(\rho',\mu)}{d\rho'}\frac{x'}{\rho'}ds.$$

Na mocy równości (10) (str. 9) możemy całce I_1 nadać postać następującą:

$$I_1=-\frac{x}{2\pi}\int_{(C_0)}\frac{\sigma(x',y')\,ds}{\rho^2}-\frac{x}{2\pi}\int_{(C_0)}\sigma(x',y')F(\rho)ds-\frac{x}{2\pi}\int_{(C_0)}A_1\sigma(x',y')\log\rho\,ds.$$

Połóżmy dla prostoty:

$$K_1=\frac{x}{2\pi}\int_{(C_0)}\frac{\sigma(x',y')ds}{\rho^2}\,;\qquad K_2=\frac{x}{2\pi}\int_{(C_0)}\sigma(x',y')F(\rho)\,ds;$$

$$K_3=\frac{x}{2\pi}\int_{(C_0)}A_1\sigma(x',y')\log\rho\,ds.$$

Jak wiadomo, $F(\rho)$ oznacza pewien szereg całkowity zmiennej ρ, napewno zbieżny na łuku C_0, jest przeto:

$$\lim_{(x=0)} K_2=0.$$

Ponieważ podobnie A_1 oznacza pewien szereg całkowity, zbieżny wzdłuż łuku C_0, więc można znaleść górną granicę A_2 funkcyi $|A_1|$ na łuku C_0, a że, jak wiadomo z teoryi potencyałów logarytmowych, całka $\int_{(C_0)}|\log\rho|\,ds$ ma granicę skończoną dla $x=0$, więc jest:

$$\lim_{(x=0)} K_3=0.$$

Zostaje nam tedy do zbadania, czy i jaką granicę dla $x=0$ ma całka K_1. Jeżeli położymy $\sigma(x',y')=\sigma_0+\theta$, gdzie σ_0 oznacza wartość funkcyi $\sigma(x',y)$ w punkcie O, to na mocy ciągłości funkcyi $\sigma(x',y')$ możemy do dowolnie małej i dodatniej liczby ν obrać tak łuk C_0, by wzdłuż niego spełniona była nierówność $|\theta|<\nu$.

Obrawszy łuk C_0, by wszystkim warunkom czynił zadość, mamy $K_1=J_1+J_2$, gdzie położyliśmy:

$$J_1=\frac{x\sigma_0}{2\pi}\int_{(C_0)}\frac{ds}{\rho^2}\,;\quad J_2=\frac{x}{2\pi}\int_{(C_0)}\frac{\theta ds}{\rho^2}\,.$$

Oznaczmy przez Q rzut na oś y punktu M, który jest środkiem elementu łuku C_0 i oznaczmy przez λ odległość punktu $P(x,y=0)$ od punktu Q. Uważajmy całkę

$L = \frac{\sigma_0}{2\pi} \int\limits_{(C_0)} \frac{dy'}{\lambda^2}$. Do liczby dodatniej ν można zawsze obrać łuk C_0 tak, że różnica $\left| \frac{1}{x} J_1 - L \right|$ co do modułu jest mniejsza od ν; z nierówności bowiem (13) (str. 11) i ze znaczenia wielkości λ i ρ wynika, że można obrać tak łuk C_0, by wielkość $\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{\cos\gamma}$ była wzdłuż łuku C_0 dowolnie mało różną od liczby 1. Oznaczając granice dla spółrzędnej y' punktów łuku C_0 przez $(-\varepsilon)$ i $(+\eta)$, gdzie ε, η oznaczają liczby dodatnie, mamy:

$$J_1 = \frac{x\sigma_0}{2\pi} \int\limits_{-\varepsilon}^{+\eta} \frac{dy'}{\lambda^2} + xN,$$

gdzie jest, jak powiedzieliśmy:

$$|N| < \nu.$$

Ponieważ jest $\lambda^2 = x^2 + y'^2$, więc:

$$J_1 = \frac{\sigma_0}{2\pi} \left\{ \operatorname{arc\,tg} \frac{\eta}{x} + \operatorname{arc\,tg} \frac{\varepsilon}{x} \right\} + xN;$$

podobnie:

$$|J_2| < \frac{\nu}{2\pi} \left\{ \operatorname{arc\,tg} \left|\frac{\eta}{x}\right| + \operatorname{arc\,tg} \left|\frac{\varepsilon}{x}\right| \right\} + \nu |x|.$$

Z tego wynika, że jest w każdym razie $\lim\limits_{(x=0)} J_2 = 0$; nadto gdy $x > 0$, jest:

$$\lim_{(x=0)} J_1 = \frac{\sigma_0}{2}; \quad \lim K_1 = \frac{\sigma_0}{2},$$

gdy zaś $x < 0$, to:

$$\lim_{(x=0)} J_1 = -\frac{\sigma_0}{2}; \quad \lim_{(x=0)} K_1 = -\frac{\sigma_0}{2};$$

jest przeto:

$$\lim_{(x=0)} I_1 = \mp \frac{\sigma_0}{2},$$

zależnie od tego, czy zmienna x zdąża do zera stale przez wartości dodatnie, czy też stale przez wartości ujemne.

Używając więc zwykłych oznaczeń, mamy:

$$(16) \quad \begin{cases} \left(\frac{du}{dN}\right)_i = -\frac{\sigma_0}{2} - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(C)} \sigma(x', y') \frac{df(\rho, \mu)}{d\rho'} \cos\varphi \, ds, \\ \left(\frac{du}{dN}\right)_e = \frac{\sigma_0}{2} - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(C)} \sigma(x', y') \frac{df(\rho, \mu)}{d\rho'} \cos\varphi \, ds, \end{cases}$$

gdzie dla krótkości wprowadziliśmy kąt φ między normalną wewnętrzną w punkcie O krzywej C, dla którego obliczamy granice pochodnej normalnej, a kierunkiem od punktu O do elementu ds (czyli przy specyalnem położeniu osi spółrzędnych, jak poprzednio opisano, jest $\cos\varphi = \frac{x'}{\rho'}$).

Stąd otrzymujemy następujące wnioski:

1) z całego obecnego rachunku widać, że granice swe osiąga pochodna normalna jednostajnie wzdłuż krzywej C;

2) że jest:

$$(17) \quad \left(\frac{du}{dN}\right)_e - \left(\frac{du}{dN}\right)_i = \sigma_0;$$

3) istnieje pewna stała dodatnia B, zależna jedynie od krzywej C i taka, że jest:

$$(18) \quad \begin{cases} \left| \left(\frac{du}{dN}\right)_i + \frac{\sigma_0}{2} \right| < \frac{BmS}{a^2}, \\ \left| \left(\frac{du}{dN}\right)_e - \frac{\sigma_0}{2} \right| < \frac{BmS}{a^2}, \end{cases}$$

gdzie m oznacza, jak zawsze, moduł liczby μ, zaś S maximum modułu $|\sigma(x', y')|$ wzdłuż krzywej C. Oznaczmy bowiem przez O punkt krzywej C, do którego się odnoszą równości (16) i przez C_0 oznaczmy takie jego obustronne sąsiedztwo, że jest spełniona nierówność (11) i (12) (str. 11), stąd bezpośrednio wynika, że jest $|\cos\varphi| < 2g\rho'$ wzdłuż łuku C_0; przez C_1 oznaczmy, jak dotąd, łuk pozostały z krzywej C i połóżmy:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{(C)} \sigma(x', y') \frac{df(\rho', \mu)}{d\rho'} \cos\varphi \, ds = L_1 + L_2,$$

$$L_1 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(C_0)} \sigma(x', y') \frac{df(\rho', \mu)}{d\rho'} \cos\varphi \, ds,$$

$$L_2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(C_1)} \sigma(x', y') \frac{df(\rho', \mu)}{d\rho'} \cos\varphi \, ds.$$

Jeżeli przez ρ_0 oznaczymy różną od zera granicę dolną odległości ρ' wzdłuż łuku C_1, przez A długość krzywej C, to z uwagi na nierówność (7) (str. 6) wynika bezpośrednio:

$$|L_2| < \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} m e^{-a\rho_0} + \frac{e^{-a\rho_0}}{\rho_0}\right) SA ,$$

a ponieważ:

$$\frac{\pi}{2} m e^{-a\rho_0} < \frac{m}{a^2\rho_0^2} ; \quad \frac{e^{-a\rho_0}}{\rho_0} < \frac{1}{a\rho_0^2} < \frac{m}{a^2\rho_0^2} ,$$

bo $\frac{m}{a} > 1$, więc istnieje stała dodatnia B_1, zależna jedynie od krzywej C taka, że jest:

$$|L_2| < \frac{B_1 m S}{a^2} .$$

Z powodu nierówności (7) (str. 6) i nierówności na dostawę $|\cos\varphi|$, otrzymujemy nierówność:

$$|L_1| < \frac{Sg}{\pi}\int\limits_{(C_0)}\left(\frac{\pi}{2} m e^{-a\rho'} + \frac{e^{-a\rho'}}{\rho'}\right)\rho' ds.$$

Z uwagi, że $\rho' \geqslant |y'|$, że zachodzi nierówność (11) (str. 11) i następująca: $\rho' < 2|y'|$, uwidoczniona na str. 11, wynika:

$$|L_1| < \frac{4Sg}{\pi}\int\limits_{-\varepsilon}^{+\eta}\left(\frac{\pi}{2} m e^{-a|y'|}|y'| + e^{-a|y'|}\right) dy' ,$$

gdzie liczby $(-\varepsilon)$ i $(+\eta)$ oznaczają rzędne granic łuku C_0, i tem bardziej jest:

$$|L_1| < \frac{8Sg}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2} m e^{-ay'} y' + e^{-ay'}\right) dy' ,$$

czyli:

$$|L_1| < 4Sg \cdot \frac{m}{a^2} + \frac{8Sg}{\pi a} < 12\, Sg \cdot \frac{m}{a^2} .$$

Istnieje więc stała dodatnia B'', zależna jedynie od krzywej C i taka, że jest:

$$|L_1| < \frac{B'' m S}{a^2} ;$$

kładąc więc $B = B_1 + B_2$ udowodniliśmy nierówności (18) (str. 17).

§ 8. Zbadajmy zachowanie się potencyału $u(x,y)$ w nieskończoności. Niech najkrótsza odległość punktu x,y od punktów krzywej C będzie P, która to liczba niech już będzie różna od zera; wtedy, stosując nierówność (6) (str. 6) do funkcyi $f(\rho,\mu)$, otrzymujemy:

$$|u(x,y)| < \frac{SA}{\pi a P} \cdot e^{-\frac{aP}{2}} ,$$

gdzie A oznacza długość łuku krzywej C. Ze względu zaś na nierówność (7) (str. 6) na pochodną $\frac{df(\rho,\mu)}{d\rho}$, otrzymujemy dla pochodnych pierwszych funkcyi $u(x,y)$ nierówności:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| < \frac{SA}{2\pi}\left[\frac{\pi}{2} m e^{-aP} + \frac{e^{-aP}}{P}\right] ,$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| < \frac{SA}{2\pi}\left[\frac{\pi}{2} m e^{-aP} + \frac{e^{-aP}}{P}\right] .$$

Z powyższych nierówności wynika:

$$(19) \quad \begin{cases} \lim\limits_{(P=\infty)} \left[P^n \cdot u(xy)\right] = 0 , \\ \lim\limits_{(P=\infty)} \left[P^n \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right] = 0 , \\ \lim\limits_{(P=\infty)} \left[P^n \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\right] = 0 , \end{cases}$$

gdzie n przedstawia dowolną liczbę całkowitą.

§ 9. Zajmiemy się obecnie uogólnionemi potencyałami warstw podwójnych, określonemi wzorem (5) (str. 5).

Z własności funkcyj $\sigma(x',y')$ i $f(\rho,\mu)$ wynika, że funkcya $v(x,y)$ jest zupełnie określona, o ile dolna granica wielkości ρ jest odmienna od zera. Załóżmy więc, że punkt x,y, dla którego obliczamy wartość potencyału $v(x,y)$ leży w dowolnym punkcie O na krzywej C. Za oś x weźmy normalną wewnętrzną do krzywej w punkcie O, zaś styczną tego punktu za oś y; przez ρ' rozumiemy odległość punktów krzywej C od punktu O. Przez C_0 rozumieć będziemy takie obustronne sąsiedztwo punktu O na krzywej C, iż dla punktów łuku C_0 są spełnione nierówności na str. 11; przez C_1 rozumiemy pozostałą część krzywej C. Połóżmy więc:

$$-v(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C_0)}\sigma(x',y')\frac{df(\rho',\mu)}{d\rho'}\cos\vartheta' ds + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C_1)}\sigma(x',y')\frac{df(\rho',\mu)}{d\rho'}\cos\vartheta' ds ,$$

gdzie ϑ' oznacza kąt między kierunkiem od elementu ds do punktu O a normalną N wewnętrzną, należącą do elementu ds. Że druga całka strony prawej ma sens określony, to kwestyi nie stanowi; zbadajmy więc całkę pierwszą.

Oznaczmy przez M dowolny punkt x', y' łuku C_0, którego normalna wewnętrzna niech ma dostawy kierunkowe $\cos\gamma$ i $\sin\gamma$; przeto:

$$\cos\vartheta' = -\left(\frac{x'}{\rho'}\cos\gamma + \frac{y'}{\rho'}\sin\gamma\right).$$

Z nierówności (str. 10):

$$\cos\gamma > 1 - \frac{1}{2}g^2\rho'^2 > \frac{1}{2}$$

otrzymujemy:

$$(20) \qquad |\sin\gamma| < g\rho',$$

a dalej z nierówności tej i nierówności (12) (str. 11) i z okoliczności, że $|y'| < \rho'$, wnioskujemy, że istnieje stała dodatnia G, zależna jedynie od krzywej C taka, iż wzdłuż łuku C_0 jest:

$$(21) \qquad |\cos\vartheta'| < G\rho'.$$

Stąd, z nierówności (7) (str. 6), napisanej dla wielkości ρ', wynika, że funkcya $\frac{df(\rho',\mu)}{d\rho'}\cos\vartheta'$ jest co do modułu skończona wzdłuż łuku C_0, przeto funkcya $v(x,y)$ ma i w tym przypadku, gdy punkt x,y leży na krzywej C, znaczenie określone; określimy je symbolem:

$$v' = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C)}\sigma(x',y')\frac{df(\rho',\mu)}{d\rho'}\cos\vartheta'\,ds.$$

§ 10. Zbadajmy, czy istnieją granice w tym przypadku, gdy punkt x,y, dla którego obliczamy funkcyę $v(x,y)$, będąc stale albo w obszarze D, albo w obszarze D', zbliża się po normalnej do krzywej C aż do spodka normalnej, czyli używając zwykłych oznaczeń, zbadajmy, czy istnieją granice v_e i v_i. W tym celu połóżmy:

$$-v(x,y) = I_0 + I_1,$$

gdzie:

$$I_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C)}\sigma(x',y')\frac{df(\rho,\mu)}{d\rho}\cos\vartheta\,ds; \quad I_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C_1)}\sigma(x',y')\frac{df(\rho,\mu)}{d\rho}\cos\vartheta\,ds,$$

przyczem zakładamy, że punkt x,y jest tak blizkim krzywej C, nie leżąc na niej, że istnieje do niego najbliższy jeden punkt krzywej, punkt O, który przyjmujemy za początek układu spółrzędnych, omówionych już wyżej; nadto litery C_0, C_1 mają także już poprzednio określone znaczenie.

Zauważmy, że całka I_1 przedstawia funkcyę ciągłą punktu $(x, y=0)$, przeto istnieją granice dla $x=0$ tej funkcyi, gdy zmienna x jest stale dodatnia lub stale ujemna, i jest:

$$I_{1e} = I_{1i} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C_1)}\sigma(x',y')\frac{df(\rho',\mu)}{d\rho'}\cos\vartheta'\,ds.$$

Z drugiej strony, gdy przez x', y' oznaczymy spółrzędne punktu łuku C_0, przez $\cos\gamma$, $\sin\gamma$ dostawy kierunkowe normalnej wewnętrznej, wykreślonej do krzywej C w punkcie elementu ds, mamy:

$$\cos\vartheta = \frac{x-x'}{\rho}\cos\gamma - \frac{y'}{\rho}\sin\gamma$$

i odpowiednio:

$$I_0 = K_1 - K_2 - K_3,$$

gdzie położyliśmy:

$$K_1 = \frac{x}{2\pi}\int\limits_{(C_0)}\sigma(x',y')\frac{df(\rho,\mu)}{d\rho}\frac{\cos\gamma}{\rho}ds; \quad K_2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C_0)}\sigma(x',y')\frac{df(\rho,\mu)}{d\rho}\frac{x'\cos\gamma}{\rho}ds;$$

$$K_3 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C_0)}\sigma(x',y')\frac{df(\rho,\mu)}{d\rho}\frac{y'\sin\gamma}{\rho}ds.$$

Na mocy nierówności (7) (str. 6) istnieje przy danej liczbie μ stała dodatnia A, zależna od krzywej C i liczby μ, taka, iż jest $\left|\frac{df(\rho,\mu)}{d\rho}\right| < \frac{A}{\rho}$; stąd wynika:

$$|K_2| < \frac{AS}{2\pi}\int\limits_{(C_0)}\frac{|x'|}{\rho^2}ds < \frac{AS}{2\pi}\int\limits_{(C_0)}\frac{|x'|}{\rho'^2}\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2 ds,$$

gdzie przez ρ' oznaczyliśmy odległość punktu O od tego punktu łuku C_0 który od punktu $(x, y=0)$ jest odległy na ρ. Ponieważ zachodzi nierówność (12) (str. 11), a kwadrat stosunku $\frac{\rho'}{\rho}$ jest skończony przy dowolnem położeniu punktu x', y', na łuku C_0 i punktu $(x, y=0)$ na normalnej punktu, przeto funkcya podcałkowa całki K_2 jest skończona; całka K_2 jest więc funkcyą ciągłą zmiennej x; wskutek tego istnieją granice całki K_2 przy zbliżaniu się punktu $(x,y=0)$ do punktu O w sposób wyżej opisany; jest tedy:

$$K_{2e}=K_{2i}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C_0)}\sigma(x',y')\frac{df(\rho',\mu)}{d\rho'}\,\frac{x'\cos\gamma}{\rho'}\,ds.$$

Podobnie z nierówności (20) (str. 20) i faktu, że $|y'|<\rho$, otrzymujemy:

$$\left|\sigma(x',y')\,\frac{df(\rho,\mu)}{d\rho}\,\frac{y'\sin\gamma}{\rho}\right|<ASg\,.\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2,$$

a stąd, że, jak wyżej, jest:

$$K_{3e}=K_{3i}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C_0)}\sigma(x',y')\,\frac{df(\rho',\mu)}{d\rho'}\,\frac{y'\sin\gamma}{\rho'}\,ds.$$

Zostaje nam do zbadania całka K_1. Otóż na mocy drugiej z równości (10) (str. 9) otrzymujemy:

$$K_1=-\frac{x}{2\pi}\int\limits_{(C_0)}\frac{\sigma\cos\gamma}{\rho^2}\,ds-\frac{x}{2\pi}\int\limits_{(C_0)}\sigma\cos\gamma\,[F(\rho)+A_1\log\rho]\,ds.$$

Druga całka strony prawej dąży do zera wraz ze zmienną x. W pierwszej całce połóżmy $\sigma\cos\gamma=\sigma_0+\theta$, gdzie σ_0 oznacza wartość funkcyi $\sigma(x',y')$ w punkcie O; do każdej dowolnie małej, dodatniej liczby ν można obrać łuk C_0 na tyle mały, że wzdłuż tego łuku C_0 obok dawnych nierówności jest spełniona nierówność $|\theta|<\nu$. Możemy tedy dosłownie powtórzyć rozumowanie na str. 5, odnoszące się także do całek J_1 i J_2, i możemy powiedzieć, że:

$$\lim_{(x=0)}K_1=\mp\frac{\sigma_0}{2},$$

gdzie trzeba obrać znak górny lub dolny, zależnie od tego, czy liczba x dąży do zera przez wartości dodatnie czy ujemne; wskutek specyalnego wyboru układu spółrzędnych mamy:

$$K_{1i}=-\frac{\sigma_0}{2};\quad K_{1e}=+\frac{\sigma_0}{2}.$$

Ostatecznie dochodzimy do wniosku następującego: istnieją granice v_i, v_e i nadto jest:

$$(22)\qquad \begin{cases} v_i=\dfrac{\sigma_0}{2}-\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{(C)}\sigma(x',y')\,\dfrac{df(\rho',\mu)}{d\rho'}\cos\vartheta'\,ds,\\ v_e=-\dfrac{\sigma_0}{2}-\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{(C)}\sigma(x',y')\,\dfrac{df(\rho',\mu)}{d\rho'}\cos\vartheta'\,ds,\end{cases}$$

czyli jest:

$$(23)\qquad v_i=\frac{\sigma_0}{2}+v';\quad v_e=-\frac{\sigma_0}{2}+v',$$

a stąd:

$$(24)\qquad v'=\frac{v_i+v_e}{2},$$

$$(25)\qquad v_i-v_e=\sigma_0.$$

Nadto istnieje stała dodatnia C, zależna jedynie od krzywej i taka, że:

$$(26)\qquad \begin{cases}\left|v_i-\dfrac{\sigma_0}{2}\right|<\dfrac{CSm}{a^2},\\ \left|v_e+\dfrac{\sigma_0}{2}\right|<\dfrac{CSm}{a^2}.\end{cases}$$

Ponieważ funkcya L_1+L_2 na str. 17 różni się od funkcyi $(-v')$ tem, że w pierwszej pod całką figuruje czynnik $\cos\varphi$, kiedy w drugiej zamiast tego znajduje się czynnik $\cos\vartheta'$, ale na str. 17 czytamy, że $|\cos\varphi|<2g\rho'$, kiedy nierówność (21) (str. 20) jest formalnie podobna, przeto rachunki, obecnie potrzebne do uzasadnienia nierówności (26), będą podobne formalnie do rachunków str. 17, 18, dążących do znalezienia nierówności dla funkcyi L_1+L_2. Nadto zauważyć musimy, że z toku całego takiego rachunku byłoby widoczne, że granice swe osiąga funkcya $v(x,y)$ wzdłuż krzywej C jednostajnie. W różnicy np.: $v(x,y)-v_i$ wystąpi na mocy drugiej równości (10) (str. 9) najważniejszy wyraz:

$$\frac{x}{2\pi}\int\limits_{(C_0)}\frac{\sigma\cos\gamma}{\rho^2}\,ds,$$

który, powiększony o liczbę $\left(-\frac{\sigma_0}{2}\right)$, można uczynić dowolnie małym niezależnie od położenia punktu O na krzywej C.

§ 11. Zajmiemy się obecnie normalną pochodną i istnieniem jej granicy dla funkcyi $v(x,y)$. Załóżmy, jak w § 10, że punkt $P(x,y)$, dla którego obliczamy funkcyę $v(x,y)$, leży dość blizko punktu O na krzywej C, że leży qn na normalnej punktu O i że obraliśmy osi układu spółrzędnych, jak w § 10. Normalną pochodną funkcyi $v(x, y)$ oznaczymy przez $\frac{dv}{dN}$.

Wskutek drugiej równości (10) (str. 11) dość zbadać granicę, o ile istnieje, pochodnej normalnej funkcyi:

$$w=\frac{1}{2\pi}\int_{(C_0)}\sigma(x'',y')\,\frac{1}{\rho}\cos\vartheta\,ds+\frac{1}{2\pi}\int_{(C_0)}\sigma(x',y')\,\rho F(\rho)\cos\vartheta\,ds$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{(C_0)}\sigma A_1\rho\log\rho\cos\vartheta\,ds,$$

jeżeli rozdzielimy naszą krzywą C na części C_0 i C_1 metodą już przez nas używaną; a że jest:

$$\cos\vartheta=\frac{x-x'}{\rho}\cos\gamma-\frac{y'}{\rho}\sin\gamma,$$

jeżeli $\cos\gamma$, $\sin\gamma$ są dostawami normalnej do krzywej C w miejscu elementu ds, zaś (x', y') są spółrzędnemi punktów krzywej C, więc:

$$w=\frac{1}{2\pi}\int_{(C_0)}\frac{\sigma(x-x')\cos\gamma}{\rho^2}ds-\frac{1}{2\pi}\int_{(C_0)}\frac{\sigma y'}{\rho^2}\sin\gamma\,ds+\frac{1}{2\pi}\int_{(C_0)}\sigma F(\rho).(x-x')\cos\gamma\,ds$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{(C_0)}\sigma F(\rho)y'\sin\gamma\,ds+\frac{1}{2\pi}\int_{(C_0)}\sigma A_1(x-x')\cos\gamma\log\rho\,ds$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{(C_0)}\sigma A_1 y'\sin\gamma\log\varrho\,ds.$$

Nadto uważajmy funkcyę:

$$v_0=\frac{\sigma_0}{2\pi}\int_{(C)}\frac{\cos\vartheta}{\rho}ds=\frac{\sigma_0}{2\pi}\int_{(C_0)}\frac{\cos\vartheta}{\rho}ds+\frac{\sigma_0}{2\pi}\int_{(C_1)}\frac{\cos\vartheta}{\rho}ds,$$

gdzie σ_0 oznacza wartość funkcyi $\sigma(x', y')$ w punkcie O. Funkcya v_0 jest, jak wiadomo, zwykłym potencyałem warstwy podwójnej o gęstości stałej σ_0, rozpostartej wzdłuż krzywej C i ma przeto wartość stałą: dla punktów wewnątrz obszaru D równa się liczbie σ_0, zaś zewnątrz krzywej C równa jest zeru; wskutek tego istnieje normalna pochodna $\frac{dv_0}{dN}$ i jest równa zeru, podobnie równe zeru będą jej granice $\left(\frac{dv_0}{dN}\right)_i$, $\left(\frac{dv_0}{dN}\right)_e$. Oczywiście funkcya:

$$w_0=\frac{\sigma_0}{2\pi}\int_{(C_0)}\frac{\cos\vartheta}{\rho}ds=\frac{\sigma_0}{2\pi}\int_{(C_0)}\frac{x-x'}{\rho^2}\cos\gamma\,ds-\frac{\sigma_0}{2\pi}\int_{(C_0)}\frac{y'}{\rho^2}\sin\gamma\,ds$$

ma pochodną normalną $\frac{dw_0}{dN}$ i jej granice.

Połóżmy:

$$H=-(x'\cos\gamma+y'\sin\gamma);$$

jest to funkcya niezależna od zmiennej x, a wskutek nierówności (12) (str. 11) i (20) (str. 20) będzie:

(27) $$|H|<2gy'^2+g\rho'|y'|<4gy'^2,$$

bo według str. 11 jest także $\rho'<2|y'|$.

Wprowadzając funkcyę H, otrzymujemy:

$$w-w_0=\frac{x}{2\pi}\int_{(C_0)}\frac{(\sigma-\sigma_0)\cos\gamma}{\rho^2}ds+\frac{1}{2\pi}\int_{(C_0)}\frac{(\sigma-\sigma_0)H}{\rho^2}ds+\frac{x}{2\pi}\int_{(C_0)}\sigma F(\rho)\cos\gamma\,ds$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{(C_0)}\sigma F(\rho)H\,ds+\frac{x}{2\pi}\int_{(C_0)}\sigma A_1\cos\gamma\log\rho\,ds+\frac{1}{2\pi}\int_{(C_0)}\sigma A_1 H\log\rho\,ds.$$

Różniczkując względem zmiennej x, otrzymujemy:

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial(w-w_0)}{\partial x}&=\frac{1}{2\pi}\int_{(C_0)}\frac{(\sigma-\sigma_0)\cos\gamma}{\rho^2}ds-\frac{x}{\pi}\int_{(C_0)}\frac{(\sigma-\sigma_0)(x-x')\cos\gamma}{\rho^4}ds\\&-\frac{1}{\pi}\int_{(C_0)}\frac{(\sigma-\sigma_0)H(x-x')}{\rho^4}ds+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2\pi}\int_{(C_0)}\sigma F(\rho)\cos\gamma\,ds\right)\\&+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{(C_0)}\sigma F(\rho)H\,ds\right)+\frac{1}{2\pi}\int_{(C_0)}\sigma A_1\cos\gamma\log\rho\,ds\\&+\frac{x}{2\pi}\int_{(C_0)}\sigma\frac{dA_1}{d\rho}\frac{x-x'}{\rho}\cos\gamma\log\rho\,ds+\frac{x}{2\pi}\int_{(C_0)}\sigma A_1\cos\gamma.\frac{x-x'}{\rho^2}ds\\&+\frac{1}{2\pi}\int_{(C_0)}\sigma\frac{dA_1}{d\rho}\frac{x-x'}{\rho}H\log\rho\,ds+\frac{1}{2\pi}\int_{(C_0)}\sigma A_1 H.\frac{x-x'}{\rho^2}ds.\end{aligned}\right.\tag{28}$$

Utwórzmy iloczyn:

$$x.\frac{\partial(w-w_0)}{\partial x}$$

i zbadajmy jego granicę, gdy zmienna x dąży do zera.

Otóż na łuku C_0 jest:

$$|H| < 4gy'^2; \quad |x-x'| < \rho; \quad \frac{1}{\rho} < \frac{1}{|y'|},$$

nadto łuk C_0 może być już taki, iż jest wzdłuż niego:

$$|\sigma - \sigma_0| < \nu,$$

gdzie ν oznacza naprzód daną liczbę dodatnią, choćby dowolnie małą. Na mocy rozumowań str. 16 można wyznaczyć taką liczbę dodatnią d, iż, gdy tylko jest $|x| < d$, istnieje górna granica L dla modułu:

$$\left|\frac{x}{2\pi}\int_{(C_0)}\frac{ds}{\rho^3}\right|$$

i wobec tego jest:

$$\left|\frac{x}{2\pi}\int_{(C_0)}\frac{(\sigma-\sigma_0)\cos\gamma}{\rho^2}\,ds\right| < L\nu,$$

$$\left|\frac{x^2}{\pi}\int_{(C_0)}\frac{(\sigma-\sigma_0)(x-x')\cos\gamma}{\rho^4}\,ds\right| < \frac{\nu x^2}{\pi}\int_{(C_0)}\frac{dy'}{\rho^3}.$$

Jeżeli środek M elementu ds ma punkt Q jako rzut na osi y, jeżeli przez λ oznaczymy odległość punktu M od punktu $P(x, y=0)$ i jeżeli $(-\varepsilon)$ i $(+\eta)$ są rzędnemi punktów końcowych łuku C_0, to dla liczby ν można tak zmniejszyć łuk C_0, iż będzie:

$$\left|\int_{(C_0)}\frac{dy'}{\rho^3} - \int_{-\varepsilon}^{+\eta}\frac{dy'}{\lambda^3}\right| < \nu,$$

stąd jest:

$$\left|\int_{(C_0)}\frac{dy'}{\rho^3}\right| < \int_{-\varepsilon}^{+\eta}\frac{dy'}{\lambda^3} + \nu < 2\int_0^{\infty}\frac{dy'}{\lambda^3} + \nu = \frac{2}{x^2} + \nu;$$

ostatecznie istnieje stała dodatnia M taka, że:

$$\left|\frac{x^2}{\pi}\int_{(C_0)}\frac{(\sigma-\sigma_0)(x-x')\cos\gamma}{\rho^4}\,ds\right| < M.\nu.$$

Całkę następną:

$$\frac{x}{\pi}\int_{(C_0)}\frac{(\sigma-\sigma_0)H(x-x')}{\rho^4}\,ds$$

rozłożymy na dwie części:

$$\frac{x^2}{\pi}\int_{(C_0)}\frac{(\sigma-\sigma_0)H}{\rho^4}\,ds - \frac{x}{\pi}\int_{(C_0)}\frac{(\sigma-\sigma_0)Hx'}{\rho^4}\,ds.$$

Na mocy nierówności (12) (str. 11) i (27) (str. 25) otrzymujemy:

$$\left|\frac{x}{\pi}\int_{(C_0)}\frac{(\sigma-\sigma_0)Hx'}{\rho^4}\,ds\right| < \frac{8g^2|x|\nu}{\pi}\int_{(C_0)}\frac{y'^4}{\rho^4}\,ds < \frac{8g^2|x|\nu}{\pi}\int_{(C_0)}ds;$$

wyraz, badany wraz ze zmienną x dąży do zera. Podobnie otrzymamy:

$$\left|\frac{x^2}{\pi}\int_{(C_0)}\frac{\sigma-\sigma_0)Hx'}{\rho^4}\,ds\right| < \frac{4g\nu x^2}{\pi}\int_{(C_0)}\frac{y'^2}{\rho^4}\,ds < \frac{4g\nu x^2}{\pi}\int_{(C_0)}\frac{ds}{\rho^2},$$

a więc wyraz badany zdąża też do zera wraz ze zmienną x.

Dalsze wyrazy równości (28) (str. 25) będą najwidoczniej malały już to wraz z liczbą x, już to można je uczynić dowolnie małemi przez odpowiedni wybór łuku C_0.

Ostatecznie dochodzimy do wniosku następującego: jeżeli przez δ oznaczymy najkrótszą odległość punktu (x', y) od krzywej C, to w każdym razie:

$$(29) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{(\delta=0)}[\delta.D_{ni}(v)] = 0, \\ \lim\limits_{(\delta=0)}[\delta.D_{ne}(v)] = 0, \end{cases}$$

choćby nawet obustronne pochodne $D_{mi}(v)$, $D_{ne}(v)$ przy zbliżaniu się nieograniczonem punktu (x, y) do krzywej C granicy nie posiadały.

§ 12. Zapytajmy teraz: jakie założenie co do funkcyi $\sigma(x', y')$ wystarcza na to, by istniały granice pochodnych normalnych $D_{ni}(v)$, $D_{ne}(v)$ funkcyi $v(x,y)$, gdy punkt x,y zbliża się nieograniczenie do punktu dowolnego krzywej C.

Jeżeli przez x', y' oznaczymy spółrzędne punktów krzywej C, przez $\cos\gamma$ i $\sin\gamma$ dostawy kierunkowe normalnej wewnętrznej do tej krzywej, to otrzymamy:

$$\cos\vartheta = \frac{x-x'}{\rho}\cos\gamma + \frac{y-y'}{\rho}\sin\gamma,$$

a zawsze możemy obrać tak kierunek liczenia łuku s na krzywej C, że jest

$$\cos\gamma = -\frac{dy'}{ds}, \quad \sin\gamma = +\frac{dx'}{ds};$$

ponieważ jest:

$$\rho^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2,$$

więc:

$$\cos\vartheta = -\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{dy'}{ds} + \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{dx'}{ds}$$

oraz:

$$v(x,y) = \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial v_2}{\partial y},$$

gdzie oznaczyliśmy:

$$v_1 = \int\limits_{(C)} \sigma(x', y')\frac{dy'}{ds} f(\rho,\mu)\, ds\,; \quad v_2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C)} \sigma(x', y')\frac{dx'}{ds} f(\rho,\mu)\, ds\,.$$

Przeto funkcye v_1 i v_2 określają pewne potencyały uogólnione warstw pojedyńczych, rozpostartych wzdłuż krzywej C.

Załóżmy, że punkt x,y jest dość blizko krzywej na normalnej punktu O krzywej, że oś x kierujemy wzdłuż wewnętrznej lub zewnętrznej normalnej punktu O, a oś y wzdłuż stycznej, mającej kierunek zgodny z dodatnim kierunkiem liczenia łuku s na krzywej C i że układ jest t. zw. prawym układem. Normalną pochodną funkcyi $v(x,y)$ będzie więc pochodna:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y},$$

przeto:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C)} \sigma(x', y')\left[\frac{dy'}{ds}\frac{\partial^2 f(\rho,\mu)}{\partial x^2} - \frac{dx'}{ds}\frac{\partial^2 f(\rho,\mu)}{\partial x\partial y}\right] ds.$$

Z równania (8) (str. 6) otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2 f(\rho,\mu)}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 f(\rho,\mu)}{\partial y^2} - \xi f(\rho,\mu),$$

a stąd:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C)} \sigma(x', y')\left[\frac{\partial^2 f(\rho,\mu)}{\partial y^2}\frac{dy'}{ds} + \frac{\partial^2 f(\rho,\mu)}{\partial x\partial y}\frac{dx'}{ds}\right] ds$$
$$- \frac{\xi}{2\pi}\int\limits_{(C)} \sigma(x', y')\, f(\rho,\mu)\frac{dy'}{ds}\, ds\,.$$

Otóż jest:

$$\frac{\partial^2 f(\rho,\mu)}{\partial y^2}\frac{dy'}{ds} + \frac{\partial^2 f(\rho,\mu)}{\partial x\partial y}\frac{\partial x'}{ds} = \frac{d^2 f(\rho,\mu)}{d\rho^2}\frac{y - y'}{\rho}\left[\frac{x - x'}{\rho}\frac{dx'}{ds} + \frac{y - y'}{\rho}\frac{dy'}{ds}\right]$$
$$+ \frac{df(\rho,\mu)}{d\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y - y'}{\rho}\right)\frac{\partial x'}{ds} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y - y'}{\rho}\right)\frac{dy'}{ds}\right]$$

i, jak łatwo się przekonać, prawa strona tej równości jest równa wyrażeniu:

$$-\frac{d}{dy'}\left(\frac{\partial f(\rho,\mu)}{\partial y}\right)\frac{dy'}{ds},$$

mamy więc:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C)} \sigma(x', y')\frac{d}{dy'}\left(\frac{\partial f(\rho,\mu)}{\partial y}\right)\frac{dy'}{ds}\, ds - \frac{\xi}{2\pi}\int\limits_{(C)} \sigma(x', y')\, f(\rho,\mu)\frac{dy'}{ds}\, ds\,.$$

Druga całka strony prawej jest potencyałem warstwy pojedyńczej o gęstości $\sigma(x'', y')\dfrac{dy'}{ds}$, przeto ma granicę, gdy punkt $(x, y = 0)$, do którego się odnosi, zbliża się do początku spółrzędnych, i to niezależnie od tego, czy zmienna x dąży do zera, będąc stale dodatnią, czy stale ujemną. Całkę pierwszą prawej strony rozłóżmy na dwie całki odnośne do łuków C_0 i C_1, t. j., jak to niejednokrotnie czyniliśmy, uważajmy łuk C_0, jako obustronne sąsiedztwo punktu O i pozostały łuk C_1. Oczywiście dość zbadać całkę, odniesioną do łuku C_0, bo tamta część jest funkcyą ciągłą względem zmiennej x i posiada granicę, która nie zależy od tego, czy zmienna x dąży do zera stale przez wartości dodatnie, czy przez wartości ujemne. Uważajmy przeto całkę:

$$w = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C_0)} \sigma(x', y')\frac{d}{dy'}\left(\frac{\partial f(\rho,\mu)}{\partial y}\right)\frac{dy'}{ds}\, ds = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\varepsilon}^{+\eta} \sigma(x', y')\frac{d}{dy'}\left[\frac{\partial f(\rho,\mu)}{\partial y}\right] dy',$$

gdzie $(-\varepsilon)$, $(+\eta)$ oznaczają rzędne końców łuku C_0. Załóżmy teraz, że funkcya $\sigma(x', y')$ ma pochodną $\dfrac{d\sigma}{dy'}$, ciągłą i skończoną wzdłuż łuku C_0; przy takiem założeniu jest:

$$w = \left\{\frac{1}{2\pi}\sigma(x', y')\frac{\partial f(\rho,\mu)}{\partial y}\right\}_{-\varepsilon}^{+\eta} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\varepsilon}^{+\eta}\frac{d\sigma}{dy'}\frac{\partial f(\rho,\mu)}{\partial y}\, dy'$$
$$= \left\{\frac{1}{2\pi}\sigma(x', y')\frac{\partial f(\rho,\mu)}{\partial y}\right\}_{-\varepsilon}^{+\eta} - \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\varepsilon}^{+\eta}\frac{d\sigma}{dy'} f(\rho,\mu)\, dy'\right\}.$$

Ponieważ pierwszy wyraz ma granicę, niezależnie od tego, czy zmienna x dąży do zera, będąc stale dodatnią, czy stale ujemną, przeto dość zbadać styczną pochodną potencyału warstwy pojedyńczej, rozpostartej na odcinku; oznaczmy przez Q rzut punktu x', y', leżącego na krzywej C, na oś y

i przez λ odległość tego punktu Q od punktu $P(x,y=0)$; widać, że przez odpowiednie zmniejszenie łuku C_0 dość uważać całkę:

$$W = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{+\eta} \tau(y') f(\lambda,\mu)\, dy',$$

gdzie $\tau(y')$ jest daną funkcyą ciągłą i skończoną w przedziale $(-\varepsilon,+\eta)$. Stąd mamy:

$$\frac{\partial W}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{+\eta} \tau(y') \frac{df(\lambda,\mu)}{d\lambda} \frac{y'}{\lambda} dy'$$

$$= \frac{-1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{+\eta} \tau(y') \left\{ \frac{1}{\lambda} + \lambda [F(\lambda) + A_1 \log \lambda] \right\} \frac{y'}{\lambda} dy',$$

jeżeli uwzględnimy drugą z równości (10) (str. 9). Dość uważać tu „najgorszy" wyraz:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{+\eta} \tau(y') \frac{y'}{\lambda^2} dy',$$

a wskutek ciągłości funkcyi $\tau(y')$, jeżeli przez τ_0 oznaczymy wartość funkcyi $\tau(y')$ w punkcie O, dość znów uważać całkę:

$$\frac{\tau_0}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{+\eta} \frac{y'}{\lambda^2} dy',$$

gdzie dla prostoty pisma zostawiliśmy te same granice $(-\varepsilon,+\eta)$ całkowania. Otóż jest:

$$\int_{-\varepsilon}^{+\eta} \frac{y'dy'}{\lambda^2} = \frac{1}{2} \Big[\log (x^2+y'^2) \Big]_{-\varepsilon}^{+\eta} = \frac{1}{2} \log \frac{x^2+\eta^2}{x^2+\varepsilon^2},$$

więc funkcya W ma granice dla pochodnej stycznej, gdy x zdąża do zera, jużto przez wartości dodatnie, jużto przez wartości ujemne, i od tej okoliczności granice te są niezależne. Z tego wynika, że ciągłość pochodnej $\frac{d\sigma}{dy'}$ zapewnia istnienie granicy dla pochodnej normalnej funkcyi $v(x,y)$ i nadto przy zwykłych oznaczeniach jest:

(30) $$\left(\frac{dv}{dN}\right)_e = \left(\frac{dv}{dN}\right)_i$$

§ 13. Obecnie wyprowadzimy nierówności na pochodną normalną funkcyi $u(x,y)$.

Załóżmy, że punkt x,y jest tak położony, że istnieje dolna granica d, różna od zera dla zmiennej ϱ; oznaczmy dalej przez $\cos\gamma$ i $\sin\gamma$ dostawy normalnej wewnętrznej do krzywej C; przeto jest:

$$\frac{du}{dN} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\gamma + \frac{\partial u}{\partial y} \sin\gamma$$

$$\frac{du}{dN} = \frac{1}{2\pi} \int_{(C)} \sigma(x',y') \frac{df(\varrho,\mu)}{d\varrho} \left\{ \frac{x-x'}{\varrho} \cos\gamma + \frac{y-y'}{\varrho} \sin\gamma \right\} ds,$$

a stąd:

$$\left| \frac{du}{dN} \right| < \frac{S}{2\pi} \int_{(C)} \left| \frac{df(\varrho,\mu)}{d\varrho} \right| ds.$$

Z nierówności (7) (str. 6) i z naszego założenia o położeniu punktu x,y wynika, że jest:

$$\left| \frac{df}{d\varrho} \right| < \frac{\pi}{2} m e^{-ad} + \frac{e^{-ad}}{d} < \frac{\pi m}{a^2d^2} + \frac{1}{ad^2} < \frac{2\pi m}{a^2 d^2},$$

bo jest $\frac{m}{a} > 1$; przeto:

(31) $$\left| \frac{du}{dN} \right| < \frac{Sm}{a^2d^2} A,$$

gdzie A oznacza długość łuku krzywej C.

Załóżmy teraz, że punkt x,y jest dość blizko krzywej C tak, iż istnieje jeden punkt O na krzywej C najbliższy mu; normalną wewnętrzną tego punktu O obieramy jako oś x, styczną jako oś y; punkt $P(x,y)$ wobec tego leżeć będzie na osi x (rzędna $y=0$). Przy takim układzie jest normalna pochodna funkcyi $u(x,y)$ pochodną $\frac{\partial u}{\partial x}$, na którą otrzymujemy równość:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{(C)} \sigma(x'y') \frac{df(\varrho,\mu)}{d\varrho} \frac{x-x'}{\varrho} ds,$$

a przyjmując rozkład krzywej C na łuk C_0 i C_1, jak to już kilkakrotnie czyniliśmy, mamy:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{2\pi} \int_{(C_0)} \sigma(x',y') \frac{df(\rho,\mu)}{d\rho} \cdot \frac{ds}{\rho} - \frac{1}{2\pi} \int_{(C_0)} \sigma(x',y') \frac{df(\rho,\mu)}{d\rho} \frac{x'}{\rho} ds$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{(C_1)} \sigma(x',y') \frac{df(\rho,\mu)}{d\rho} \frac{x-x'}{\rho} ds.$$

Wzdłuż łuku C_1 istnieje dolna granica zmiennej ρ, różna od zera; oznaczając ją przez d, otrzymamy podobnie, jak nierówność (31), nierówność:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C_1)}\sigma(x',y')\,\frac{df(\rho,\mu)}{d\rho}\,\frac{x-x'}{\rho}\,ds\right| < \frac{Sm}{a^2d^2}\cdot A.$$

Wskutek nierówności (7) (str. 6) otrzymujemy:

$$\left|\frac{x}{2\pi}\int\limits_{(C_0)}\sigma(x',y')\,\frac{df}{d\rho}\,\frac{1}{\rho}\,ds\right| < \frac{|x|\,S}{2\pi}\int\limits_{(C_0)}\left\{\frac{\pi}{2}\,m\,\frac{e^{-a\rho}}{\rho}+\frac{e^{-a\rho}}{\rho^2}\right\}ds.$$

Ponieważ $ds = \dfrac{dy'}{\cos\gamma}$, a na dostawę $\cos\gamma$ istnieje wzdłuż łuku C_0 nierówność 11 (str. 11), jeżeli tylko łuk C_0 odpowiednio zmniejszymy, więc jest:

$$|x|\int\limits_{(C_0)}\frac{e^{-a\rho}}{\rho}\,ds < \int\limits_{(C_0)}e^{-a\rho}\,ds < 4\int\limits_0^\infty e^{-ay'}\,dy' = \frac{4}{a},$$

nadto jest:

$$|x|\int\limits_{(C_0)}\frac{e^{-a\rho}}{\rho^2}\,ds < |x|\,.\int\limits_{(C_0)}\frac{ds}{\rho^2},$$

ale już wiemy z rozumowań, zawartych na str. 16, że istnieje stała dodatnia D', jako granica górna iloczynu:

$$|x|\,.\int\limits_{(C_0)}\frac{ds}{\rho^2}\,.$$

A więc jest:

$$\left|\frac{x}{2\pi}\int\limits_{(C_0)}\sigma(x',y')\,\frac{df(\rho,\mu)}{d\rho}\,\frac{1}{\rho}\,ds\right| < \frac{S}{2\pi}\left(\frac{2\pi m}{a}+D'\right) < \frac{D''Sm}{a},$$

gdzie D'' jest pewna stała dodatnia, zależna od krzywej C jedynie.

Wskutek nierówności (12) (str. 11) otrzymujemy dalej:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C_0)}\sigma(x',y')\,\frac{df(\rho,\mu)}{d\rho}\,\frac{x'}{\rho}\,ds\right| < \frac{gS}{\pi}\int\limits_{(C_0)}\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2\left[\frac{\pi}{2}\,m\rho+1\right]e^{-a\rho}\,ds,$$

ale można znaleść stałą dodatnią E' taką, że jest $\left(\dfrac{\rho'}{\rho}\right)^2 < E'$, nadto mamy:

$$\int\limits_{(D_0)}e^{-a\rho}\,\rho\,ds < 8\int\limits_0^\infty e^{-ay'}\,y'dy' = \frac{8}{a^2},$$

$$\int\limits_{(C_0)}e^{-a\rho}\,\rho\,ds < 4\int\limits_0^\infty e^{-ay'}\,y'dy' = \frac{4}{a},$$

więc jest:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C_0)}\sigma(x',y')\,\frac{df(\rho,\mu)}{d\rho}\,\frac{x'}{\rho}\,ds\right| < \frac{SE'g}{\pi}\left(\frac{4\pi m}{a^2}+\frac{4}{a}\right) < \frac{4SE'gm}{a^2}\,.$$

Możemy przeto powiedzieć, że w każdym razie, czy punkt x,y leży dowolnie blisko krzywej C, czy nie, istnieją dwie stałe D i E, zależne jedynie od krzywej C i takie, że jest:

$$(32)\qquad \begin{cases}|D_{ni}(u)| < \left(\dfrac{Dm}{a^2}+\dfrac{Em}{a}\right)S,\\[2mm] |D_{ne}(u)| < \left(\dfrac{Dm}{a^2}+\dfrac{Em}{a}\right)S.\end{cases}$$

§ 14. Wyprowadzimy obecnie nierówność na funkcyę $v(x,y)$. Jeżeli założymy najpierw, że punkt x,y jest tak położony, iż dla niego istnieje dolna granica, różna od zera na zmienną ρ i granicę tę oznaczymy przez d, to rachunki, służące do wyprowadzenia szukanej nierówności, będą identyczne z rachunkami, które nas doprowadziły do nierówności (31); a więc mamy:

$$|v(x,y)| < \frac{Sm}{a^2d^2}\,A.$$

Jeżeli zaś punkt x,y leży dość blizko krzywej C, postępujemy z układem osi, jak w poprzednim paragrafie i zupełnie podobnie dzielimy krzywą C na łuki C_0 i C_1; wzdłuż łuku C_0 kładziemy:

$$\cos\vartheta = \frac{x\cos\gamma}{\rho} - \frac{x'\cos\gamma+y'\sin\gamma}{\rho},$$

jeżeli przez x', y' oznaczymy znów spółrzędne punktów łuku C_0. Wobec tego jest:

$$v(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(D_0)}\sigma(x',y')\,\frac{df(\rho,\mu)}{d\rho}\left\{\frac{x\cos\gamma}{\rho}-\frac{x'\cos\gamma+y'\sin\gamma}{\rho}\right\}ds$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(D_0)}\sigma(x',y')\,\frac{df(\rho,\mu)}{d\rho}\cos\vartheta\,ds.$$

Ale wyrażenie $x' \cos\gamma + y' \sin\gamma$ różni się od funkcyi H na str. 25 tylko znakiem i można łatwo okazać, że jest: $|H| < 3g\rho'^2$, jeżeli uwzględnimy nierówność (12) (str. 11) i (20) (str. 20). Stąd widzimy, że dalszy rachunek musiałby formalnie być podobny do drugiej części rachunku paragrafu poprzedzającego. Istnieją więc stałe dodatnie D', E', zależne jedynie od krzywej C i takie, że jest:

$$|v(x,y)| < \left(\frac{D'm}{a^2} + \frac{E'm}{a}\right) S. \tag{33}$$

§ 15. Co do zachowania się potencyału warstwy podwójnej w nieskończoności możemy z powodu nierówności (7) (str. 6) powtórzyć prawie dosłownie to, co powiedzieliśmy w § 8. Oznaczając więc dolną granicę liczby ρ, różną od zera, przez P i przyjmując, że punkt x,y oddala się do nieskończoności, otrzymujemy, że:

$$\lim_{(P=\infty)} [P^n . v(x,y)] = 0, \tag{34}$$

gdy n przedstawia jakąkolwiek liczbę całkowitą.

§ 16. Uważajmy nierówności (14), (18), (26), (32), (33); zachodzą w nich stałe dodatnie, zależne od krzywej C; ujednostajnimy je, wyrażając je przez inne stałe charakterystyczne dla krzywej C. (Zob. Zaremba. O rozw. zag. Fouriera).

Załóżmy w tym celu, że początek spółrzędnych leży wewnątrz obszaru D i wykonajmy na krzywej C przekształcenie podobne $x = kx'$, $y = ky'$; wskutek tego krzywa C przejdzie na nową krzywą C'. Stała jakakolwiek np. A (14) (str. 12) przejdzie w nową stałą A', zależną jedynie od krzywej C' i załóżmy, że istnieje taka liczba p, iż jest $A = A'.k^p$; jeżeli L oznacza największą odległość dwóch punktów krzywej C, zaś L' największą odległość dwóch punktów krzywej C' to, jak wiadomo, jest $L = kL'$ i przeto:

$$\frac{A}{A'} = \left(\frac{L}{L'}\right)^p,$$

skąd:

$$\frac{A}{L^p} = \frac{A'}{L'^p},$$

czyli te stosunki mają wartość stałą (oznaczmy ją przez c) dla wszystkich krzywych do siebie podobnych i wskutek tego jest: $A = c.L^p$.

Spróbujemy, czy wszystkie stałe, zależne od krzywej C, zachodzące w wymienionych nierównościach, są tego tu kształtu i zarazem znajdźmy wykładnik p.

Zwróćmy się najpierw do nierówności (14) (str. 12). Przez ξ,η oznaczmy spółrzędne krzywej C, zaś przez ξ',η' taki punkt krzywej C', iż jest $\xi = k\xi'$, $\eta = k\eta'$; uważajmy dalej na krzywej C' agens w punkcie ξ',η' o gęstości tej samej, którą ma agens rozpostarty na krzywej C w punkcie ξ,η i uważajmy potencyał tej warstwy pojedyńczej, rozpostartej wzdłuż krzywej C':

$$u' = \frac{1}{2\pi}\int_{C'} \sigma(\xi,\eta) f(\rho',\mu') ds',$$

gdzie przez ρ' oznaczyliśmy odległość punktów krzywej C' od punktu, do którego się odnosi potencyał u'; liczba μ' gra tę samą rolę, co dotąd liczba μ, nadto ds' oznacza element krzywej C'. Oznaczając przez a' liczbę, na którą przechodzi liczba a, gdy zamiast liczby μ uważamy liczbę μ', przez A' stałą dodatnią, zależną jedynie od krzywej C', mamy:

$$|u'| < \frac{A'S}{a'}.$$

Zapytajmy się, jak wyznaczyć liczbę μ', aby potencyał u' różnił się od potencyału u tylko o czynnik stały; wtedy bowiem będzie można znaleść związek między stałemi A i A'. Otóż jest $\rho = k\rho'$, jeżeli potencyały u i u' odnoszą się do punktów, odpowiadających sobie na mocy przekształcenia podobnego; ponieważ k obieramy jako liczbę rzeczywistą, więc, kładąc $t = t'k$ w funkcyach:

$$f(\rho,\mu) = \int_0^\infty \frac{e^{-\mu\sqrt{\rho^2+t^2}}}{\sqrt{\rho^2+t^2}} dt; \quad f(\rho',\mu') = \int_0^\infty \frac{e^{-\mu'\sqrt{\rho'^2+t'^2}}}{\sqrt{\rho'^2+t'^2}} dt'$$

i $\mu' = \mu k$, otrzymujemy równość $f(\rho,\mu) = f(\rho',\mu')$; a że jest w punktach, odpowiadających $ds = kds'$, więc jest $u' = \frac{u}{k}$. Z równości $\mu' = \mu k$ otrzymujemy, że $a' = k\sqrt{\rho_1} \sin\frac{\theta}{2}$ i nierówność:

$$\left|\frac{u}{k}\right| < \frac{A'S}{k\sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}},$$

a porównywając to z nierównością (14) (str. 12), widzimy, że wolno położyć $A = A'$ i $p = 0$. Wskutek tego liczba stała A jest jednakowa dla krzywych do siebie podobnych, i położymy $A = c$.

Zupełnie podobnie można dalsze stałe wyrachować tak, że otrzymujemy następujące nierówności:

$$(34)\qquad |u(x,y)| < \frac{cS}{\sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}},$$

$$(35)\qquad \begin{cases} \left|\left(\frac{du}{dN}\right)_i + \frac{\sigma_0}{2}\right| < \frac{cS}{L\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}, \\ \left|\left(\frac{du}{dN}\right)_e - \frac{\sigma_0}{2}\right| < \frac{cS}{L\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}, \end{cases}$$

$$(36)\qquad \left|\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{du}{dN}\right)_i + \left(\frac{du}{dN}\right)_e\right\}\right| < \frac{cS}{L\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}},$$

$$(37)\qquad \begin{cases} \left|v_i - \frac{\sigma_0}{2}\right| < \frac{cS}{L\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}, \\ \left|v_e + \frac{\sigma_0}{2}\right| < \frac{cS}{L\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}, \end{cases}$$

$$(38)\qquad \left|\frac{1}{2}(v_i + v_e)\right| < \frac{cS}{L\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}},$$

$$(39)\qquad \begin{cases} |D_{ni}(u)| < \left\{\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{L\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}\right\} cS, \\ |D_{ne}(u)| < \left\{\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{L\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}\right\} cS, \end{cases}$$

$$(40)\qquad |v| < \left\{\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{L\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}\right\} cS.$$

II. DALSZE ZAGADNIENIA POMOCNICZE.

§ 17. Uważajmy szereg:

$$(1)\qquad F(x,y,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(x,y)\,.\,\lambda^k,$$

gdzie wyrazy są funkcyami zmiennych x,y, pomnożonemi przez pewne potęgi liczby zespolonej λ. Promień zbieżności szeregu tego względem λ zależy oczywiście od przyjętych wartości na zmienne x,y.

Załóżmy, że szereg (1) jest taki, iż istnieje liczba dodatnia R największa taka, iż, gdy tylko zmienne x,y są zawarte w pewnym obszarze Δ i gdy jest $|\lambda| < R$, szereg (1) jest jednostajnie zbieżny względem zmiennych x,y obszaru Δ. Liczbę R nazywać będziemy promieniem jednostajnej zbieżności szeregu 1.

Z szeregami tego rodzaju bardzo często będziemy się spotykali. Podamy bez dowodu kilka znanych twierdzeń.

A) Załóżmy, że liczba dodatnia R jest promieniem jednostajnej zbieżności szeregu (1) wewnątrz obszaru Δ; niech punkt x_0,y_0 leży na ograniczeniu obszaru Δ i niech istnieją dla niego granice A_k funkcyi $F_k(x,y)$; szereg $\sum_{k=}^{\infty} A_k\lambda^k$ jest zbieżny dla $|\lambda| < R$ i nadto jest dla $|\lambda| < R$:

$$\lim_{\binom{x=x_0}{y=y_0}} F(x,y,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k\lambda^k.$$

B) Jeżeli R jest promieniem jednostajnej zbieżności szeregu (1) dla liczb x,y obszaru Δ, funkcye $F_k(x,y)$ są funkcyami ciągłemi w obszarze Δ, to szereg (1) przedstawia funkcyę ciągłą względem zmiennych x,y,λ w każdym punkcie x,y, który leży wewnątrz obszaru Δ i dla każdej wartości λ, która spełnia nierówność $|\lambda| < R$.

C) Jeżeli R jest promieniem jednostajnej zbieżności szeregu (1) dla punktów x,y obszaru Δ, każda z funkcyj $F_k(x,y)$ ma pierwsze pochodne ciągłe i skończone w tym obszarze, jeżeli dalej szereg:

$$(*)\qquad \sum_{k=0}^{\infty} DF_k(x,y)\lambda^k$$

jest jednostajnie zbieżny, o ile jest $|\lambda| < R_1$, gdzie R_1 jest liczbą dodatnią, a punkt (x,y) należy do obszaru Δ, przyczem $DF_k(x,y)$ przedstawia jednę z pochodnych pierwszych funkcyj $F_k(x,y)$, to szereg (1) ma jako pochodną pierwszą szereg (*) w dowolnym punkcie wewnątrz obszaru Δ i gdy liczba λ czyni równocześnie zadość nierównościom: $|\lambda| < R$, $|\lambda| < R_1$.

§ 18. Rozwiążmy zagadnienie, polegające na wyznaczeniu potencyału uogólnionego $u(x,y)$ warstwy pojedyńczej, rozpostartej wzdłuż krzywej C o liczbie charakterystycznej μ, zależnego od stałej liczby λ tak, by wzdłuż krzywej C zachodziła równość:

$$(2)\qquad \left(\frac{du}{dN}\right)_e-\left(\frac{du}{dN}\right)_i=\lambda\left\{\left(\frac{du}{dN}\right)_e+\left(\frac{du}{dN}\right)_i\right\}+2\tau\,,$$

gdzie τ oznacza daną funkcyę ciągłą punktu krzywej C. Zagadnienie to nazywa się zagadnieniem Robina.

Połóżmy:

$$(3)\qquad u=\sum_{k=0}^{\infty}u_k\,.\,\lambda^k,$$

gdzie funkcye u_k zależą jedynie od dwu zmiennych x, y, nadto niech będzie:

$$(4)\qquad \left(\frac{du}{dN}\right)_{e,i}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{du_k}{dN}\right)_{e,i}\lambda^k.$$

Wtedy z równości (2) otrzymujemy:

$$(5)\qquad \begin{cases}\left(\dfrac{du_0}{dN}\right)_e-\left(\dfrac{du_0}{dN}\right)_i=2\tau\,,\\[2mm] \left(\dfrac{du_k}{dN}\right)_e-\left(\dfrac{du_k}{dN}\right)_i=\left(\dfrac{du_{k-1}}{dN}\right)_e+\left(\dfrac{du_{k-1}}{dN}\right)_i\,.\end{cases}\qquad (k=1,2,3,..)$$

Przyjmując teraz naodwrót równości (5) jako definicyę potencyałów warstw pojedyńczych u_k o liczbie charakterystycznej μ, zbadajmy, czy wtędy szereg (3) będzie zbieżny, czy będzie potencyałem warstwy pojedyńczej o liczbie charakterystycznej μ i czy spełnia zagadnienie Robina.

Kładąc:

$$(6)\qquad u_k=\frac{1}{2\pi}\int_{(D)}\sigma_k f(\rho,\mu)ds\,,\qquad (k=0,1,2,...)$$

otrzymujemy na mocy równości (17) (str. 17) i z powyższej równości (5) związki:

$$(7)\qquad \sigma_0=2\tau;\quad \sigma_k=\left(\frac{du_{k-1}}{dN}\right)_e+\left(\frac{du_{k-1}}{dN}\right)_i\,,\qquad (k=1,2,3,...)$$

Metodą indukcyi zupełnej przekonać się łatwo, że równości (6) i (7) zupełnie określają funkcye $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2,...$

Oznaczmy dalej przez T górną granicę modułu funkcyi τ wzdłuż krzywej C. Z nierówności (36) (str. 36) otrzymujemy:

$$\left|\left(\frac{du_0}{dN}\right)_e+\left(\frac{du_0}{dN}\right)_i\right|<\frac{4cT}{L\sqrt{\rho_1}\sin^2\dfrac{\theta}{2}}\,,$$

czyli:

$$|\sigma_1|<\frac{4cT}{L\sqrt{\rho_1}\sin^2\dfrac{\theta}{2}}\,,$$

a stąd dalej:

$$\left|\left(\frac{du_1}{dN}\right)_e+\left(\frac{du_1}{dN}\right)_i\right|<\frac{8c^2T}{L^2\rho_1\sin\dfrac{\theta}{2}}\,,$$

a stąd przy pomocy metody indukcyi zupełnej otrzymujemy:

$$(8)\qquad \left|\left(\frac{du_k}{dN}\right)_e+\left(\frac{du_k}{dN}\right)_i\right|<\frac{2^{k+2}c^{k+1}T}{L^{k+1}\rho_1^{\frac{k+1}{2}}\sin^{2(k+1)}\dfrac{\theta}{2}}\,,\qquad (k=0,1,2,...)$$

a więc jest:

$$(9)\qquad |\sigma_0|<2T;\quad |\sigma_k|<\frac{2^{k+1}c^kT}{L^k\rho_1^{\frac{k}{2}}\sin^{2k}\dfrac{\theta}{2}}\,.\qquad (k=1,2,3,...)$$

Stąd i z nierówności (34) (str. 36) wynika, że jest:

$$(10)\qquad |u_k|<\frac{2^{k+1}c^{k+1}T}{L_k\rho_1^{\frac{k+1}{2}}\sin^{2(k+1)}\dfrac{\theta}{2}}\,.$$

Szereg (3) (str. 38) będzie więc jednostajnie zbieżny w obszarze D na pewno dla takich liczb λ, które spełniają nierówność:

$$\left|\frac{2c}{L\sqrt{\rho_1}\sin^2\dfrac{\theta}{2}}\,.\,\lambda\right|<1.$$

Załóżmy więc, że obraliśmy liczbę ξ tak, że jest:

$$(11)\qquad \frac{c}{L\sqrt{\rho_1}\sin^2\dfrac{\theta}{2}}<\frac{1}{2}\,,$$

to szereg (3) będzie miał promień R jednostajnej zbieżności w obszarze D większy od jedności, i wolno będzie położyć wartość $(+1)$ lub (-1) na liczbę λ.

Gdy jest więc $|\lambda| < R$, to szereg:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \lambda^k$$

będzie jednostajnie zbieżny wzdłuż krzywej C, i jeżeli przez σ oznaczymy funkcyę, która szereg ten określa, to funkcya u, przedstawiona przez szereg (3) (str. 38), określi się całką:

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{(D)} \sigma f(\rho,\mu)\, ds,$$

a więc jest uogólnionym potencyałem warstwy pojedyńczej o liczbie charakterystycznej μ.

Ze wzorów (39) (str. 36) i (9) (str. 39) wynika, że jest:

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} |D_{ni}(u_k)| &< \frac{2^{k+1}c^k T}{L^k \rho_1^{\frac{k}{2}} \sin^{2k}\frac{\theta}{2}} \cdot A\,, \\ |D_{ne}(u_k)| &< \frac{2^{k+1}c^k T}{L^k \rho_1^{\frac{k}{2}} \sin^{2k}\frac{\theta}{2}} \cdot A\,, \end{aligned}\right.$$

gdzie dla krótkości położyliśmy:

$$(13)\qquad A = c \cdot \left(\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{L\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}} \right).$$

Szeregi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} D_{ni}(u_k)\lambda^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} D_{ne}(u_k)\lambda^k$$

są napewne jednostajnie zbieżne wewnątrz obszaru D przy warunku (11) (str. 39). Na mocy twierdzenia C z § 17 (str. 37) istnieją w tych warunkach pochodne $D_{ni}(u)$, $D_{ne}(u)$, a że dla dowolnego punktu krzywej C istnieją określone granice: $\left(\frac{du_k}{dN}\right)_i$, $\left(\frac{du_k}{dN}\right)_e$, więc twierdzenie A § 17 (str. 37) uzasadnia równości (4) (str. 38); ze związków (5) (str. 38) wynika dalej, że funkcya $u(x,y)$ spełnia zagadnienie przy warunku (11) (str. 39). Otóż, jak zauważyliśmy, wolno położyć $\lambda = \pm 1$ w szeregu (3) (str. 38), przez co

otrzymamy dwie funkcye, które oznaczymy przez $u(+1)$ i $u(-1)$. Kładąc w równości (2) (str. 38) $\lambda = \pm 1$, otrzymamy:

$$\left(\frac{du\,(+1)}{dN}\right)_i = -\tau\,,$$

$$\left(\frac{du\,(-1)}{dN}\right)_e = \tau.$$

Dochodzimy więc do wniosku: jeżeli liczba ξ spełnia warunek (11) (str. 39), to istnieje funkcya, sprawdzająca wewnątrz obszaru D lub wewnątrz obszaru D' równanie $\Delta u + \xi u = 0$, a na krzywej C warunek: $\left(\frac{du}{dN}\right)_e = \tau$ lub $\left(\frac{du}{dN}\right)_i = \tau$, gdzie τ oznacza daną funkcyę ciągłą punktu krzywej C.

§ 19. W jednym z późniejszych rozdziałów wyznaczymy liczbę funkcyj, o których mowa przy końcu poprzedniego paragrafu, obecnie znajdźmy, ile jest potencyałów warstw pojedyńczych o liczbie charakterystycznej μ, spełniających wzdłuż krzywej C warunek:

$$(14)\qquad \left(\frac{du}{dN}\right)_i = \tau\,,$$

przyczem jest spełniony warunek (11) (str. 39). Oznaczmy przez σ gęstość potencyału, przez S dokładną górną granicę modułu funkcyi σ i wyszukamy nierówność między S i górną granicą T funkcyi $|\tau|$.

Na mocy nierówności (35) (str. 36) i (14) (str. 41) mamy:

$$\tau + \frac{1}{2}\sigma = \frac{cS}{L\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}} \cdot \vartheta,$$

gdzie jest:

$$|\vartheta| < 1.$$

Nadto istnieje punkt P na krzywej C, iż jest $\sigma_P = S \cdot \sigma'$, gdzie $|\sigma'| = 1$. Jeżeli ϑ_P oznacza wartość liczby ϑ w punkcie P, to:

$$\tau_P + \frac{1}{2} S\sigma' = \frac{cS}{L\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}} \cdot \vartheta_P.$$

Załóżmy, że obraliśmy liczbę ξ tak, iż spełnia związek:

$$(15)\qquad \frac{c}{L\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}} \leqslant \frac{1}{4}\,,$$

to będzie:

$$S\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\leqslant S.\left|\frac{1}{2}\sigma'-\frac{c\vartheta_P}{L\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}\right|=|\tau_P|\leqslant T,$$

a stąd:

(16) $$S\leqslant 4T,$$

(17) $$|\sigma|\leqslant 4T.$$

Załóżmy teraz, że istnieją dwa potencyały u, u' o liczbie charakterystycznej μ, o własności (14), przyczem liczba ξ spełnia nierówność (15); w takim razie jest:

$$\left(\frac{d(u-u')}{dN}\right)_i=0,$$

przeto dla tego zagadnienia wzdłuż krzywej C jest $\tau=0$, a więc $T=0$; jeżeli przez σ oznaczymy gęstość potencyału $(u-u')$, to na mocy nierówności (17) jest $\sigma=0$ czyli $u=u'$. Istnieje więc jeden tylko potencyał warstwy pojedyńczej u o liczbie charakterystycznej μ, który spełnia równość (14) przy warunku (15). Z nierówności (34) (str. 36), (39) (str. 36) i (16) (str. 42) otrzymujemy:

(18) $$|u|<\frac{4cT}{\sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}},$$

(19) $$|D_{ni}(u)|<4AT,$$

gdzie A jest określone równością (13) (str. 40).

To samo można powtórzyć, gdy chodzi o warunek:

(20) $$\left(\frac{du}{dN}\right)_e=\tau.$$

§ 20. Zajmijmy się obecnie zagadnieniem Neumanna, t. j. zagadnieniem następującem: wyszukajmy potencyał v warstwy podwójnej, rozpostartej wzdłuż krzywej C o liczbie charakterystycznej μ, który niech wzdłuż krzywej C czyni zadość warunkowi:

(21) $$v_i-v_e=\lambda(v_i+v_e)+2\tau,$$

gdzie λ jest daną liczbą zespoloną, zaś τ daną funkcyą ciągłą punktu krzywej C.

Postępując zupełnie podobnie, jak w § 18, wykazujemy istnienie potencyału v i nadto przy warunku (11) (str. 39) wolno położyć $\lambda=\pm 1$, czyli dochodzimy do wniosku: pod warunkiem (11) (str. 39) istnieją potencyały

warstw podwójnych, rozpostartych wzdłuż krzywej C o odpowiednio dobranej liczbie charakterystycznej μ, które wzdłuż krzywej C spełniają jednę z następujących równości:

(22) $$v_i=\tau$$

lub.

(23) $$v_e=\tau.$$

Zupełnie podobnie, jak w § 19, można wykazać, że gęstość σ potencyału v, który spełnia równość (22) lub (23), spełnia związek (16) i (17) (str. 42) pod warunkiem (15) (str. 41). Z tego wynika znów, że przy warunku (15) (str. 41) istnieje tylko jeden potencyał v warstwy podwójnej o liczbie charakterystycznej μ, który spełnia wzdłuż krzywej C związek (22) lub (23).

Nadto jest:

(24) $$|v|<4AT.$$

§ 21. Uważajmy teraz zagadnienie następujące: wyznaczmy taki potencyał warstwy pojedyńczej u, rozpostartej wzdłuż krzywej C o liczbie charakterystycznej μ, żeby wzdłuż krzywej C była spełniona równość:

(25) $$\left(\frac{du}{dN}\right)_i=\lambda h(u)_i+\tau,$$

gdzie h i τ oznaczają pewne dane funkcye ciągłe punktu krzywej C, zaś λ jest danym parametrem.

Połóżmy:

(26) $$u=\sum_{k=0}^{\infty}u_k\lambda^k,$$

gdzie u_k są potencyałami warstw pojedyńczych o liczbie charakterystycznej μ i niech nadto będzie:

(27) $$\left(\frac{du}{dN}\right)_i=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{du_k}{dN}\right)_i\lambda^k,$$

wtedy z równości (25) i (27) otrzymujemy warunki:

(28) $$\left(\frac{du_0}{dN}\right)_i=\tau;\qquad\left(\frac{du_k}{dN}\right)_i=hu_{k-1}\qquad(k=1,2,\ldots)$$

Jeżeli założymy, że liczba ξ spełnia nierówność (15) (str. 41), to równości (28) pozwolą nam wyznaczyć potencyały u_k i to w jeden sposób. Chodzi teraz o to, by wykazać, że szereg (26) jest zbieżny i spełnia obecne zagadnienie.

Ponieważ udowodniliśmy w § 6, że potencyał warstwy pojedyńczej jest funkcyą ciągłą w całej płaszczyźnie, a nadto w § 8, że w nieskończoności jest zerem, więc obierzmy koło o tak wielkim promieniu, by zewnątrz niego potencyał co do modułu był mniejszy od liczby 1. Na kole i wewnątrz niego jest on funkcyą ciągłą i ma moduł ograniczony; z tego wnioskujemy, że potencyał jest na całej płaszczyźnie co do modułu ograniczony; to samo odnosi się do potencyałów warstw podwójnych mutatis mutandis.

Istnieją więc liczby dodatnie M_k tak; iż jest stale $|u_k| < M_k$, przeto z nierówności (18) (str. 42) i z równości (28) (str. 43) otrzymujemy:

$$M_0 < \frac{4cT}{\sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}}\,; \quad M_k < \frac{4cHM_{k-1}}{\sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}}\,, \qquad (k=1,2,\ldots)$$

jeżeli T i H oznaczają górne granice modułów funkcyi τ, względnie h wzdłuż krzywej C. Jest więc:

$$M_k < \left(\frac{4c}{\sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}}\right)^{k+1} . H^k T. \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

Jeżeli więc obierzemy tak liczby λ, że:

$$\left|\frac{4cH}{\sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}}.\lambda\right| < 1,$$

to szereg (26) (str. 43) będzie jednostajnie zbieżny. Na mocy nierówności (19) (str. 42) będzie:

$$|D_{ni}(u_k)| < 4A\left(\frac{4cH}{\sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}}\right)^k T,$$

przez co wykaże się, jak w § 19, prawdziwość wzoru (27) (str. 43), a następnie, że przy warunkach poprzednio wymienionych spełnia funkcya u obecne zagadnienie. Jeżeli nadto założymy, że jest:

$$\frac{4cH}{\sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}} < 1, \tag{29}$$

to wolno będzie w równościach (25) i (26) (str. 43) położyć $\lambda=1$, czyli przy warunkach (11) (str. 39) i (29) na liczbę ξ istnieje potencyał warstwy pojedyńczej, spełniającej wzdłuż krzywej C równość:

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_i = h(u)_i + \tau. \tag{30}$$

Chodzi teraz o to, czy przez owe warunki potencyał u warstwy pojedyńczej jest jednoznacznie określony.

Oznaczmy więc przez σ gęstość takiego potencyału, przez M i S górne granice modułów funkcyi u i σ.

Na mocy nierówności (16) (str. 42) i równości (30) będzie:

$$S \leqslant 4\,(HM + T)\,,$$

a na mocy nierówności (18) (str. 42) i równości (30) będzie:

$$M < \frac{4c(HM+T)}{\sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Jeżeli zamiast nierówności (29) przyjmiemy ściślejszą nierówność:

$$\frac{4cH}{\sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}} \leqslant \frac{1}{2}\,, \tag{31}$$

będzie:

$$M < \frac{8cT}{\sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}}\,,$$

i w następstwie:

$$S \leqslant 8T\,, \tag{32}$$

a więc:

$$|u| < \frac{8cT}{\sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}}\,; \quad |\sigma| \leqslant 8T. \tag{33}$$

Z nierówności (33) łatwo teraz, jak w § 19, wywnioskować, że przy warunkach (15) (str. 41) i (31) na liczbę ξ istnieje jeden i tylko jeden potencyał warstwy pojedyńczej, spełniający równość (30) wzdłuż krzywej C.

Z równości (30) wynika wreszcie, że:

$$\left|\left(\frac{du}{dN}\right)_i\right| \leqslant HM + T \leqslant 2T, \tag{34}$$

a z nierówności (19) (str. 42) i analogicznej, którą łatwo podać, wynika, że jest:

(35) $$\begin{cases} |D_{ni}(u)| < 8AT, \\ |D_{ne}(u)| < 8AT; \end{cases}$$

gdzie A jest określone równością (13) (str. 40).

§ 22. Zwróćmy się obecnie do innych pomocniczych zagadnień. Niech funkcya $u(x,y)$, która może być zespolona, ma następujące własności:

(A)
1) wewnątrz krzywej C czyni zadość równaniu $\Delta u + \xi u = 0$, gdzie liczba ξ jest liczbą daną;
2) jest ciągłą wewnątrz obszaru D i ma granicę ciągłą u_i, jednostajnie osiąganą, gdy punkt x,y zbliża się nieograniczenie do krzywej C, będąc wewnątrz obszaru D;
3) ma granicę ciągłą, jednostajnie osiąganą, pochodnej normalnej $\left(\frac{du}{dN}\right)_i$ wzdłuż normalnej wewnętrznej do krzywej C.

Albo niech:

(B)
1) zewnątrz krzywej C czyni zadość równaniu $\Delta u + \xi u = 0$;
2) jest ciągłą wewnątrz obszaru D' i ma granicę ciągłą u_e, jednostajnie osiąganą, gdy punkt x,y, będąc wewnątrz obszaru D', zbliża się nieograniczenie do krzywej C;
3) ma granicę ciągłą, jednostajnie osiąganą, pochodnej normalnej $\left(\frac{du}{dN}\right)_e$;
4) tak funkcya $|u|$, jak i jej pochodne pierwsze $\left|\frac{du}{dx}\right|$, $\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|$ dążą do wartości skończonych, gdy punkt x,y dąży w jakikolwiek sposób do nieskończoności.

Pierwsze warunki nazywać będziemy warunkami A, drugie warunkami B.

Podamy kilka własności funkcyj, spełniających warunki A, względnie B.

Załóżmy, że dwie funkcye u, v czynią zadość warunkom A. Niech będzie $\xi = a + i\beta$, $u = u_1 + iu_2$, $v = v_1 + iv_2$, gdzie a, β, u_1, u_2, v_1, v_2 są wielkościami rzeczywistemi. Metodą podobną do klasycznej przez rozważanie funkcyi u_1, u_2, v_1, v_2 i odpowiednie kombinowanie wyrazów łatwo wykazać równość:

(36) $$\int_{(C)} \left\{ u_i \left(\frac{dv}{dN}\right)_i - v_i \left(\frac{du}{dN}\right)_i \right\} ds = 0.$$

Uważajmy teraz punkt x,y, położony wewnątrz obszaru D, i niech liczba ξ nie będzie liczbą rzeczywistą i dodatnią ani zerem, wtedy część rzeczywista a liczby $\mu = a + bi$ jest różna od zera, a więc na mocy definicyi do-

datnia, wobec czego wolno rozważać funkcyę $f(\rho,\mu)$, gdzie ρ oznacza odległość punktu x,y od punktu bieżącego. Zupełnie analogicznie, jak w klasycznej teoryi potencyałów, otrzyma się z równości (36) związek:

(37) $$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{(C)} \left\{ u_i \frac{df(\varrho,\mu)}{dN} - f(\varrho,\mu) \left(\frac{du}{dN}\right)_i \right\} ds,$$

a oznaczając przez ϑ kąt między kierunkiem normalnej wewnętrznej a odcinkiem ϱ, skierowanym od punktu x,y do punktu krzywej C, wzór ostatni możemy napisać w formie:

(38) $$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{(C)} \left\{ u_i \frac{df(\varrho,\mu)}{d\varrho} \cos\vartheta - f(\varrho,\mu) \left(\frac{du}{dN}\right)_i \right\} ds.$$

Jeżeli zaś punkt x,y leży wewnątrz krzywej C, a funkcya u czyni zadość warunkom B, to ze wzoru (38) metodą zupełnie podobną do metody klasycznej otrzymujemy:

(39) $$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{(C)} \left\{ f(\varrho,\mu) \left(\frac{du}{dN}\right)_e - u_e \frac{df(\varrho,\mu)}{d\varrho} \cos\vartheta \right\} ds.$$

§ 23. Na zakończenie obecnego rozdziału uważajmy na naszej płaszczyźnie obszar płaski A i w nim dwa punkty (x,y) i (x',y'), niech będzie ϱ ich odległością; niech $F(x',y')$ oznacza funkcyę tego obszaru i niech $d\tau$ oznacza element powierzchniowy w punkcie x',y'. Uważajmy funkcyę:

(40) $$\psi(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{(A)} F(x',y') f(\varrho,\mu) d\tau;$$

stanowi ona analogię do klasycznego potencyału objętościowego w przestrzeni trójwymiarowej. Posługując się metodami klasycznej teoryi, można wykazać, że jeżeli funkcya $F(x',y')$ jest taka, iż całka (40) i całka:

(41) $$\int_{(A)} |F(x',y')| d\tau,$$

mają znaczenie, to całka (40) jest funkcyą ciągłą zmiennych x,y obszaru A. Jeżeli nadto dołączymy założenie, że moduł funkcyi $F(x',y')$ ma górną granicę M w obszarze A, to funkcya $\psi(x,y)$ ma pochodne pierwsze w obszarze A, i jest:

$$
(42)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial x} &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(A)} F(x',y')\,\frac{\partial f(\varrho,\mu)}{\partial x}\,d\tau, \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(A)} F(x',y')\,\frac{\partial f(\varrho,\mu)}{\partial y}\,d\tau. \end{aligned}\right.
$$

Co się zaś tyczy drugich pochodnych, funkcya $\psi(x,y)$; oczywiście, jak łatwo wykazać, posiada w każdym punkcie zewnątrz obszaru A drugie pochodne bez względu na to, czy obszar A jest skończony, czy nieskończony i czynią one zewnątrz obszaru A zadość równości:

$$
(43)\qquad \Delta\psi + \xi\psi = 0.
$$

Jeżeli zaś punkt x,y leży wewnątrz obszaru A, to nie wystarczają dotychczasowe założenia funkcyi $F(x',y')$, ale dość przyjąć, że w punkcie (x,y) funkcya $F(x',y')$ ma pierwsze pochodne ciągłe i skończone, aby istniały drugie pochodne $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$, które w takim punkcie spełniają równanie:

$$
(44)\qquad \Delta\psi(x,y) + \xi\psi(x,y) + F(x,y) = 0,
$$

stanowiące analogię do równania Poissona w klasycznej teoryi potencyałów objętościowych przestrzeni trójwymiarowej.

§ 24. Wyprowadzimy teraz nierówności na funkcyę $\psi(x,y)$ i jej pochodne pierwsze przy założeniu, że istnieje górna granica M dla modułu funkcyi $F(x',y')$ bez względu na to, czy obszar A jest skończony czy nieskończony.

Otóż jest:

$$
|\psi(x,y)| < \frac{M}{2\pi}\int\limits_{(A)} |f(\varrho,\mu)|\,d\tau < \frac{M}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\varrho,\mu)|\,dx'dy';
$$

widać, że jest:

$$
\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\varrho,\mu)|\,dx'dy' \leqslant 2\pi\int\limits_0^\infty \varrho\,d\varrho\int\limits_0^\infty \frac{e^{-a\sqrt{\varrho^2+t^2}}}{\sqrt{\varrho^2+t^2}}\,dt < 2\pi\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-a\sqrt{\varrho^2+t^2}}\,d\varrho\,dt = \frac{4\pi^2}{a^2},
$$

przeto:

$$
(45)\qquad |\psi(x,y)| < \frac{2\pi M}{a^2} = \frac{2\pi M}{\varrho_1\sin^2\frac{\theta}{2}}.
$$

Z pierwszej równości (42) (str. 48) otrzymujemy:

$$
\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right| < \frac{M}{2\pi}\int\limits_{(A)}\left|\frac{df(\varrho,\mu)}{d\varrho}\right| d\tau < \frac{M}{2\pi}\left\{\frac{\pi}{2}\cdot m\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^\infty e^{-a\varrho}\varrho\,d\varrho\,d\varphi + \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^\infty e^{-a\varrho}\,d\varrho\,d\varphi\right\}
$$
$$
= M\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{m}{a^2} + \frac{1}{a}\right),
$$

a ponieważ $1 \leqslant \frac{m}{a}$, $\frac{\pi}{2} + 1 < \pi$, więc:

$$
(46)\qquad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right| < \frac{Mm\pi}{a^2} = \frac{M\pi}{\sqrt{\varrho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}
$$

i podobnie jest:

$$
(46\,\text{bis})\qquad \left|\frac{\partial\psi}{\partial y}\right| < \frac{Mm\pi}{a^2} = \frac{M\pi}{\sqrt{\varrho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}.
$$

III. O RÓWNANIU $\Delta u + \xi u = 0$.

§ 25. Niech funkcya $u(x,y)$ czyni zadość równaniu:

$$
(1)\qquad \Delta u + \xi u = 0
$$

wewnątrz obszaru D, gdzie ξ oznacza liczbę dowolną.

Możemy udowodnić następujące twierdzenie: o ile część rzeczywista $\alpha = \varrho_1\cos\theta$ liczby $\xi = \alpha + i\beta = \varrho_1(\cos\theta + i\sin\theta)$ nie jest liczbą dodatnią, to moduł funkcyi $u(x,y)$ nie może mieć w żadnym punkcie wewnątrz obszaru D maximum. Załóżmy bowiem, że funkcya $|u(x,y)|$ posiada maximum w punkcie $A(x_0y_0)$, leżącym wewnątrz obszaru D, i otoczmy go kołem Σ o promieniu R, różnym od zera, a na tyle małym, iż całe koło Σ pada wewnątrz obszaru D. Skierujmy normalną do koła na wewnątrz obszaru, który zamyka; ponieważ funkcya $u(x,y)$ spełnia warunki (A) (str. 46), przeto na mocy wzoru (38) (str. 47) jest:

$$
(2)\qquad u(x_0y_0) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\Sigma)} u\,\frac{df(R,\mu)}{dR}\,ds - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Sigma}\frac{du}{dN}\,f(R,\mu)\,ds.
$$

Obok tego uważajmy funkcyę:

$$
I(\varrho,\mu) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu^{2k}\varrho^{2k}}{(2^k.k!)^2},
$$

jak się łatwo można przekonać spełnia ona również warunki (A) (str. 46); tu ϱ oznacza odległość punktu $x_0 y_0$ od punktu bieżącego. Wolno więc do funkcyi $u(x,y)$, $I(\varrho,\mu)$ stosować wzór (36) (str. 46), który daje równość:

$$(3) \qquad 0 = -\frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma} u\frac{dI(R,\mu)}{dR}\,ds - \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma}\frac{du}{dN}\,I(R,\mu)\,ds.$$

Stąd i z równości (2) (str. 49) otrzymujemy:

$$(4) \qquad u(x_0 y_0) = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{df(R,\mu)}{dR} - \frac{f(R,\mu)}{I(R,\mu)}\cdot\frac{dI(R,\mu)}{dR}\right)\int_{\Sigma} u\,ds.$$

Spółczynnik liczbowy:

$$(5) \qquad A = \frac{df(R,\mu)}{dR} - \frac{f(R,\mu)}{I(R,\mu)}\cdot\frac{dI(R,\mu)}{dR}$$

jest wartością szczególną funkcyi:

$$F(\varrho,\mu) = \frac{I(\varrho,\mu)\,\dfrac{df(\varrho,\mu)}{d\varrho} - f(\varrho,\mu)\,\dfrac{dI(\varrho,\mu)}{d\varrho}}{I(\varrho,\mu)}$$

dla wartości $\varrho = R$.

Z równań różniczkowych na funkcye $f(\varrho,\mu)$ i $I(\varrho,\mu)$ otrzymujemy równanie:

$$\varrho\left\{I(\varrho,\mu)\,\frac{d^2f(\varrho,\mu)}{d\varrho^2} - f(\varrho,\mu)\,\frac{d^2I(\varrho,\mu)}{d\varrho^2}\right\} + I(\varrho,\mu)\,F(\varrho,\mu) = 0,$$

a stąd:

$$\rho.I(\rho,\mu).F(\rho,\mu) = \text{const.},$$

a biorąc granicę dla $\rho = 0$, otrzymujemy, że stała równa się liczbie -1, przeto jest:

$$F(\rho,\mu) = -\frac{1}{\rho I(\rho,\mu)},$$

a więc wzór (4) przyjmie postać:

$$(4\text{bis}) \qquad u(x_0 y_0) = \frac{1}{2\pi R.I(R,\mu)}\int_{\Sigma} u\,ds.$$

Gdyby funkcya $u(x,y)$ była taka, iż w otoczeniu dość blizkiem punktu x_0,y_0 jest stale:

$$|u(x_0,y_0)| \geqslant |u(x,y)|,$$

to stąd wynikałoby:

$$(6) \qquad |u(x_0,y_0)| \geqslant \frac{1}{2\pi R}\int_{\Sigma}|u|\,ds,$$

jeżelibyśmy tylko koło Σ odpowiednio obrali. Aby wykazać niemożliwość związku (6), zajmiemy się funkcyą $I(\rho,\mu)$.

Połóżmy:

$$I(\rho,\mu) = J_1(\rho,\mu) + iJ_2(\rho,\mu);$$

łatwo się przekonać, że jest:

$$J_1(R,\mu) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\rho_1)^k\cos k\theta.R^{2k}}{(2^k k!)^2},$$

$$J_2(R,\mu) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\rho_1)^k\sin k\theta.R^{2k}}{(2^k.k!)^2}.$$

Bardzo łatwe rozumowanie przekona nas, że można koło Σ obrać tak małe, by było:

$$J_1(R,\mu) > 1 - \frac{\rho_1^2 R^4}{64},$$

$$|J_2(R,\mu)| > \frac{\rho_1 R^2}{4} - \frac{\rho_1^3 R^6}{48^2},$$

a stąd:

$$|I(R,\mu)|^2 > 1,$$

przeto z równości (4bis) (str. 50) wynika, że dla koła Σ i każdego od niego mniejszego i spółśrodkowego jest:

$$|u(x_0,y_0)| < \frac{1}{2\pi R}\left|\int_{\Sigma} u\,ds\right| \leqslant \frac{1}{2\pi R}\int_{\Sigma}|u|\,ds,$$

wobec tego związek (6) jest absurdem. Udowodniliśmy tym sposobem twierdzenie, na początku postawione.

Podobne twierdzenie można, jak widać, okazać dla obszaru D'.

Stąd wynikają trzy wnioski:

O ile część rzeczywista parametru ξ nie jest dodatnia, to:

1) funkcya $u(x,y)$ jest identycznie równa zeru w całym obszarze D, jeżeli spełnia wewnątrz obszaru D równanie (1) (str. 49), a wzdłuż krzywej C jest stale $u_i = 0$.

2) funkcya $u(x,y)$ jest identycznie równa zeru w całym obszarze D', jeżeli spełnia wewnątrz obszaru D' równanie (1) (str. 49), staje się jednostajnie zerem, gdy punkt x,y dąży do nieskończoności, a nadto wzdłuż krzywej C jest stale $u_e = 0$.

3) zagadnienie Dirichleta tak zw. zewnętrzne jak i wewnętrzne ma co najwyżej po jednem rozwiązaniu.

§ 26. Okażmy teraz, że te trzy wnioski utrzymują się i wtedy, gdy nawet część rzeczywista liczby ξ jest dodatnią, byle wtedy część urojona liczby ξ zerem nie była. Wypada nadmienić, że przypadek $\xi=0$ stale usuwamy z rozważania, bo znany jest z teoryi klasycznej.

Ponieważ udowodnimy nasze twierdzenie za pomocą twierdzenia Greena, więc musimy wykazać istnienie granicy pochodnej normalnej $\left(\frac{du}{dN}\right)_i$ wzdłuż krzywej C, o ile nam chodzi o obszar D; gdy zaś nam chodzi o obszar D', to musimy wykazać istnienie granicy $\left(\frac{du}{dN}\right)_e$ wzdłuż krzywej C i takie zachowanie się funkcyi u i pochodnej $\frac{du}{dN}$ w nieskończoności, by twierdzenie Greena było stosowalne. Zajmiemy się najpierw obszarem D', a mianowicie udowodnimy twierdzenie: jeżeli funkcya $u(x,y)$ spełnia wewnątrz obszaru D' równanie (1) (str. 49) i jeżeli wzdłuż krzywej C jest stale $u_e=0$, a gdy punkt x,y w jakikolwiek sposób dąży do nieskończoności, funkcya $u(x,y)$ staje się zerem jednostajnie, to funkcya ta jest identycznie zerem w obszarze D', byleby parametr ξ nie redukował się do liczby rzeczywistej i dodatniej.

a) Aby módz coś powiedzieć o zachowaniu się funkcyi $u(x,y)$ i pochodnej $\frac{du}{dN}$ w nieskończoności, wykażemy, że funkcyę $u(x,y)$ będzie można w dostatecznej odległości od krzywej C uważać za uogólniony potencyał mas, położonych w skończoności, t. zn. chcemy użyć wzoru analogicznego do wzoru (39) (str. 47); aby go jednak módz użyć, trzeba się zapewnić, czy spełniony jest warunek 4-ty z warunków (B) (str. 46). Dlatego wykażemy, że b) jeżeli przez Σ oznaczymy koło, wewnątrz którego leży krzywa C, przez Ω' obszar zewnętrzny koła Σ, to funkcya $u(x,y)$ dla wszystkich punktów x,y obszaru Ω' ma pochodne pierwsze ograniczone, o ile punkt x,y ma odległość od koła Σ nie mniejszą od liczby d różnej od zera, a zresztą dowolnej. Nadto trzeba wykazać, że c) istnieje granica $\left(\frac{du}{dN}\right)_e$ wzdłuż krzywej C.

Udowodnimy najpierw tw. b). W tym celu połóżmy:

$$u=\psi+w,$$

niech ξ_0 będzie liczbą dodatnią taką, iż parametr $\xi=-\xi_0$ spełnia nierówność (15) (str. 41); niech ψ oznacza potencyał warstwy podwójnej, czyniącej zadość równaniu:

$$\Delta\psi-\xi_0\psi=0$$

wewnątrz obszaru Ω', a wzdłuż krzywej Σ równaniu:

$$\psi_e=u_\Sigma,$$

gdzie u_Σ przedstawia wartości, które funkcya $u(x,y)$ przyjmuje na kole Σ; wskutek tego wzdłuż koła Σ jest:

$$w_e=0$$

i nadto wewnątrz obszaru Ω' jest:

$$\Delta w-\xi_0 w+(\xi_0+\xi)u=0.$$

Aby zbudować taką funkcyę w, połóżmy:

$$w=\Phi-v,$$

gdzie wzdłuż koła Σ ma być:

$$\Phi_e=v_e$$

Załóżmy, że v oznacza potencyał warstwy podwójnej, spełniający wewnątrz obszaru Ω' równanie:

$$\Delta v-\xi_0 v=0,$$

(taki potencyał istnieje, jak wiemy, i tylko jeden), wobec tego wewnątrz obszaru Ω' będzie:

$$\Delta\Phi-\xi_0\Phi+(\xi+\xi_0)u=0. \tag{7}$$

Porównywając to równanie z równaniem (44) (str. 48), widzimy, że funkcyę Φ umiemy zbudować. Oznaczając przez μ_0 liczbę, w którą przechodzi liczba μ, gdy liczbę ξ zastąpimy liczbą $(-\xi_0)$, otrzymujemy na funkcyę Φ wzór:

$$\Phi=\frac{\xi+\xi_0}{2\pi}\int\limits_{(\Omega')}u(x',y')f(\rho,\mu_0)d\tau, \tag{8}$$

gdzie ρ oznacza odległość punktów x',y' i punktu x,y, do którego się odnosi wartość funkcyi Φ; ponieważ funkcya $u(x',y')$ jest ograniczona, więc (§ 23) funkcya Φ ma pochodne pierwsze w każdym punkcie obszaru Ω', ograniczone nierównościami (46), (46bis) (str. 49); ponieważ

$$u=\psi+\Phi-v,$$

więc funkcya u ma pochodne pierwsze ograniczone w punktach obszaru Ω', których odległość od punktów krzywej Σ nie wynosi mniej, niż pewna dowolna, ale dodatnia liczba d.

Wobec tego wolno zastosować wzór (39) (str. 47), t. j.:

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\Sigma)}\left\{f(\rho,\mu)\,\frac{du}{dN}-u\,\frac{df(\rho,\mu)}{d\rho}\,\cos\vartheta\right\}ds.$$

Z tego czytamy wprost, jakie jest zachowanie się funkcyi $u(x,y)$ i jej pochodnych pierwszych w nieskończoności. Ażeby udowodnić tw. c) (str. 52), połóżmy:

$$u=\Phi-v,$$

gdzie v niech będzie potencyałem warstwy pojedyńczej, który wewnątrz obszaru D' spełnia równanie:

$$\Delta v-\xi_0 v=0,$$

(liczba ξ_0 jest ta sama, co poprzednio); wobec tego funkcya Φ spełnia równanie (7) i dlatego przyjmiemy równość (8) (str. 53); ponieważ funkcya $u(x,y)$ jest ograniczona w całym obszarze D', więc funkcya $\Phi(x,y)$ ma pochodne pierwsze w całym obszarze D' i posiada granicę pochodnej $\left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_e$, która z powodu ciągłości równa się granicy $\left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_i$. Otóż jeszcze dotąd niezupełnie określony potencyał warstwy pojedyńczej v niech będzie taki, iż wzdłuż krzywej C spełnia równość:

$$\left(\frac{dv}{dN}\right)_i=\left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_i,$$

a funkcya taka v istnieje; przy pomocy twierdzenia G r e e n a, zastosowanego do części rzeczywistej i urojonej funkcyi v, Φ, łatwo wykazać, że w obszarze D jest $v=\Phi$, a więc $v_i=\Phi_i$, a że potencyał warstwy pojedyńczej jest ciągły, więc $v_e=\Phi_i$ czyli $u_e=0$; stąd wynika, że istnieje granica pochodnej $\left(\frac{du}{dN}\right)_e$.

Ostatecznie wolno nam do funkcyi $u(x,y)$ stosować twierdzenie G r e e n a. Połóżmy:

$$\xi=\alpha+i\beta\;(\beta\neq0),\quad u=u_1+iu_2,$$

mamy:

$$(u_1)_e=0,\quad (u_2)_e=0,\quad \Delta u_1+\alpha u_1-\beta u_2=0,\quad \Delta u_2+\alpha u_2+\beta u_1=0.$$

Stosując do funkcyj u_1, u_2 twierdzenie G r e e n a, otrzymujemy:

$$\int\limits_{(C)}\left\{(u_1)_e\left(\frac{du_2}{dN}\right)_e-(u_2)_e\left(\frac{du_1}{dN}\right)_e\right\}ds-\int\limits_{(D')}(u_1\Delta u_2-u_2\Delta u_1)\,d\tau=0,$$

a stąd po wyrachowaniu w całym obszarze D': $u_1=0$, $u_2=0$, jest tedy $u=0$.

Gdy $\beta=0$, połóżmy $\xi=-m^2$, gdzie m oznacza liczbę rzeczywistą, różną od zera. Z twierdzenia:

$$\int\limits_{(D')}\left\{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2\right\}d\tau-\int\limits_{(C)}(u_1)_e\left(\frac{du_1}{dN}\right)_e ds+\int\limits_{(D')}u_1\Delta u_1\,d\tau=0$$

wynika łatwo, że w całym obszarze D' jest $u_1=0$ i podobnie $u_2=0$.

Dotąd zajmowaliśmy się obszarem D'; nieco krótszym byłby wywód dla obszaru D, bo nie trzeba w tym przypadku uważać zachowania się funkcyi $u(x,y)$ w nieskończoności. Wobec tego powiadamy:

„O ile parametr ξ nie redukuje się do liczby rzeczywistej i dodatniej, to funkcya $u(x,y)$ musi być identycznie równa zeru, jeżeli wewnątrz obszaru D spełnia równanie $\Delta u+\xi u=0$, a wzdłuż krzywej C spełnia warunek $u_i=0$".

„O ile parametr ξ nie redukuje się do liczby rzeczywistej i dodatniej, to funkcya $u(x,y)$ musi być identycznie równa zeru, jeżeli wewnątrz obszaru D' spełnia równanie $\Delta u+\xi u=0$, a wzdłuż krzywej C spełnia warunek $u_e=0$, nadto, gdy punkt x,y oddala się w jakikolwiek sposób do nieskończoności, funkcya $u(x,y)$ dąży jednostajnie do zera".

§ 27. Przejdźmy do nowego zagadnienia: załóżmy, że funkcya $u(x,y)$ czyni zadość równaniu (1) (str. 49) wewnątrz obszaru D, a wzdłuż krzywej C warunkowi:

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_i=h(u)_i,\tag{9}$$

gdzie h oznacza funkcyę rzeczywistą i ciągłą punktu krzywej C.

Okażemy, że w pewnych warunkach dla parametru ξ funkcya $u(x,y)$ jest identycznie równa zeru. Kładąc $\xi=\alpha+i\beta$, $u=u_1+iu_2$, gdzie u_1, u_2 są już funkcyami rzeczywistemi, i stosując twierdzenie G r e e n a do funkcyi u_1, u_2, otrzymujemy przy $\beta\neq0$ tożsamość $u_1=u_2=0$ czyli $u=0$. Jeżeli zaś $\beta=0$, a parametr $\xi=-\xi_0$, gdzie ξ_0 jest liczbą dodatnią, otrzymujemy z twierdzenia G r e e n a:

$$\int\limits_{(D)}\left\{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2+\xi_0 u_1^2\right\}d\tau+\int\limits_{(C)}h u_1^2\,ds=0\tag{10}$$

i analogicznie dla funkcyi u_2.

Weźmiemy do pomocy pewne twierdzenie, podane przez p. Z a r e m b ę w pracy p. t. „O tak zwanych funkcyach zasadniczych w teoryi równań fizyki matematycznej" (Kraków, Nakładem Akademii Umiejętności, 1901, str. 8, wzór 23), które można wyprowadzić i dla dwu zmiennych. A mianowicie: niech F będzie dowolną funkcyą rzeczywistą dwu zmiennych x,y, określoną w obszarze D i taką, że całka:

$$\int\limits_{(D)}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\xi_0 F^2\right\}d\tau$$

ma znaczenie określone, to:

$$\frac{\int\limits_{(D)}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\xi_0 F^2\right\}d\tau}{\int\limits_{(C)} F^2 ds} > \frac{\sqrt{\xi_0}}{4c}, \tag{11}$$

gdzie tylko jest:

$$\frac{c}{L\sqrt{\xi_0}} \leqq \frac{1}{4},$$

czyli, gdy jest:

$$\xi_0 \geqq \frac{16c^2}{L^2},$$

gdzie c i L są stałe znane nam, zależne od krzywej C.

Z równości (10) (str. 55) otrzymujemy:

$$H \geqq \frac{\int\limits_{(D)}\left\{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2+\xi_0 u_1^2\right\}d\tau}{\int\limits_{(C)} u_1^2 ds}, \tag{12}$$

gdzie H oznacza górną granicę modułu funkcyi h wzdłuż krzywej C. Jeżeli obierzemy liczbę dodatnią ξ_0 tak, aby zachodziły równocześnie nierówności:

$$\xi_0 \geqq \frac{16c^2}{L^2}, \quad \xi_0 \geqq 16c^2H^2, \tag{13}$$

to nierówności (10) i (12) są ze sobą sprzeczne czyli jest $u_1=0$ i podobnie $u_2=0$. Gdy więc parametr ξ jest liczbą rzeczywistą i ujemną $\xi=-\xi_0$, gdzie ξ_0 jest liczbą dodatnią większą od większej z liczb $16c^2H^2$, $\frac{16c^2}{L^2}$, to funkcya $u(x,y)$ jest identycznie równa zeru.

Gdyby funkcya h nigdzie na krzywej C nie była ujemna, toby wprost z równości (10) (str. 54) wynikało, że jest $u_1=0$ i podobnie $u_2=0$ czyli $u=0$ w całym obszarze D.

§ 28. Jako ostatnie w tym rozdziale, uważajmy następujące zagadnienie: oznaczmy przez $u(x,y)$ funkcyę, spełniającą wewnątrz obszaru D równanie (1) (str. 49), a wzdłuż krzywej C warunek:

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_i = 0. \tag{14}$$

Kładąc $u=u_1+iu_2$, otrzymujemy $\left(\frac{du_1}{dN}\right)_i=0$, $\left(\frac{du_2}{dN}\right)_i=0$; na normalnej dowolnego punktu O na krzywej C bierzemy punkt M', ale tak blizki punktu O, iż pochodna normalna funkcyi u_1 w punkcie M' jest mniejsza od danej, dowolnie obranej liczby dodatniej ν; przez M oznaczmy dowolny punkt odcinka OM', przez u_1, u'_1, $\left(\frac{du_1}{dN}\right)_P$ wartości funkcyi u_1 w punkcie M, M' i pochodnej normalnej w pewnym punkcie pośrednim odcinka MM' o długości d; stosując twierdzenie o średniej wartości, mamy:

$$u'_1 = u_1 + d\,.\left(\frac{du_1}{dN}\right)_P,$$

z tego wnioskujemy, że funkcya u_1 zostaje ograniczona, gdy punkt M zbliża się do punktu O, a że jest funkcyą ciągłą wewnątrz obszaru D, przeto, jak wiadomo z Analizy, istnieje granica $(u_1)_i$ osiągana, jak łatwo udowodnić, jednostajnie, a więc granica ta jest funkcyą ciągłą wzdłuż krzywej. Podobne twierdzenia można udowodnić dla funkcyi u_2.

Kładąc $\xi=\alpha+i\beta$, stosujemy twierdzenia Greena, które przy $\beta\neq0$ daje $u_1=0$, $u_2=0$ czyli $u=0$. Jeżeli jest $\beta=0$, $\xi=-\xi_0$, gdzie ξ_0 jest liczbą dodatnią, to z twierdzenia Greena otrzymujemy:

$$\int\limits_{(D)}\left\{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2+\xi_0 u_1^2\right\}d\tau=0,$$

co daje $u_1=0$ przy $\xi_0\neq0$. Gdyby zaś było $\xi_0=0$, otrzymalibyśmy jedynie $u_1=$const., co stanowi klasyczny przypadek. Podobną własność można wykazać dla funkcyi $u_2=0$. Jeżeli więc parametr ξ nie redukuje się do liczby rzeczywistej i dodatniej, to funkcya $u(x,y)$, spełniająca wewnątrz obszaru D równanie (1) (str. 49), a wzdłuż krzywej C powyższy warunek (14), jest identycznie równa zeru.

Podobną metodą można udowodnić też, że, o ile parametr ξ nie redukuje się do liczby rzeczywistej i dodatniej, to funkcya $u(x,y)$ jest identycznie równa zeru, jeżeli wewnątrz obszaru D' spełnia równanie (1) (str. 49), wzdłuż krzywej C warunek:

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_e = 0,$$

a gdy punkt x,y oddala się w nieskończoność, to funkcya $u(x,y)$ ma dążyć do zera jednostajnie.

IV. O FUNKCYI GREENA I FUNKCYI W.

§ 29. Przez uogólnioną funkcyę Greena $G(x_0,y_0, x,y, \xi)$ czyli krótko przez funkcyę Greena $G(x_0,y_0, x,y, \xi)$ obszaru D, przyjmując punkt $P_0(x_0,y_0)$ tego obszaru za stały, zwany biegunem tej funkcyi, rozumiemy funkcyę punktu $P(x,y)$ obszaru D i parametru danego ξ o następujących własnościach:

1) uważana, jako funkcya zmiennych x,y wewnątrz obszaru D, wyjąwszy punkt P_0; spełnia równanie:

$$\Delta G + \xi G = 0\,, \tag{1}$$

2) suma:

$$G + \frac{\log \varrho}{2\pi}\,, \tag{2}$$

gdzie ϱ oznacza długość odcinka P_0P, jest już funkcyą ciągłą w punkcie P_0, a więc i w całym obszarze D.

3) gdy punkt x,y nieograniczenie się zbliża do krzywej C, to wzdłuż niej ma być:

$$h'\left(\frac{dG}{dN}\right)_i = h(G)_i\,, \tag{3}$$

gdzie jest $h'=0$ albo $h'=1$, zaś h oznacza funkcyę ciągłą i rzeczywistą, określoną wzdłuż krzywej C, która w przypadku $h'=0$ nigdzie na tej krzywej nie ma być zerem; nadto, jak zawsze, zakładamy, że granice są osiągane jednostajnie.

Podamy teraz kilka twierdzeń bez dowodu, bo metoda dowodzenia jest taka sama, jak i w przypadku przestrzeni.

a) O ile parametr ξ nie jest liczbą rzeczywistą i dodatnią w przypadku $h'=0$ i o ile nie jest liczbą rzeczywistą i ujemną mniejszą od większej z liczb $\frac{16c^2}{L^2}$, $16c^2H^2$, zerem lub liczbą dodatnią w przypadku $h'=1$, nie istnieją dwie różne od siebie funkcye Greena.

b) Kładąc:

$$G(x_0,y_0, x,y, \xi) = \frac{1}{2\pi} f(\varrho,\mu) - u(x,y)\,,$$

widzimy, że, o ile parametr ξ spełnia nierówność (15) (str. 41), można wyznaczyć funkcyę $u(x,y)$, jako potencyał warstwy pojedyńczej o liczbie charakterystycznej μ, spełniający równość:

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_i = \frac{1}{2\pi} f(\varrho,\mu)$$

lub jako potencyał warstwy podwójnej o liczbie charakterystycznej μ, spełniający równość:

$$u_i = \frac{1}{2\pi} f(\varrho,\mu)$$

w przypadku $h'=0$. W przypadku $h'=1$ dość wyznaczyć funkcyę $u(x,y)$ jako potencyał warstwy pojedyńczej o liczbie charakterystycznej μ, spełniający związek:

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_i = h(u)_i + \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{df(\varrho,\mu)}{dN} - hf(\varrho,\mu)\right\}.$$

W tych określonych przypadkach funkcya Greena istnieje.

c) Ilekroć razy funkcya Greena istnieje w przypadku $h'=0$, to istnieje też granica pochodnej normalnej $\left(\frac{dG}{dN}\right)_i$ i jest funkcyą ciągłą.

d) Otoczywszy punkt $P_0(x_0,y_0)$ dość małem kołem Σ_0, a punkt $P_1(x_1,y_1)$, leżący też wewnątrz obszaru D, dość małem kołem Σ_1, do obszaru w ten sposób z obszaru D powstałego stosujemy kilkakrotnie twierdzenie Greena do części rzeczywistych i urojonych funkcyj $G(x_0,y_0, x,y, \xi)$ i $G(x_1,y_1, x,y, \xi)$ i ściągając koła Σ_0, Σ_1 do ich punktów środkowych, otrzymujemy klasyczne twierdzenie:

$$G(x_0,y_0, x_1,y_1, \xi) = G(x_1,y_1, x_0,y_0, \xi).$$

e) Niech funkcya $u(x,y)$ spełnia wewnątrz obszaru D równanie:

$$\Delta u + \xi u = 0,$$

a na krzywej C warunek:

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_i = h(u)_i + \tau\,,$$

gdzie τ i h są znane oznaczenia, i dlatego parametru ξ niech istnieje funkcya Greena, spełniająca wzdłuż krzywej C warunek:

$$\left(\frac{dG}{dN}\right)_i = h(G)_i.$$

Dla obszaru, powstałego z obszaru D przez wyłączenie dość małego koła Σ_0, zatoczonego na około punktu $P_0(x_0,y_0)$, będącego biegunem funkcyi Greena, stosujemy twierdzenie Greena do części rzeczywistych i urojonych funkcyi $u(x,y)$ i funkcyi Greena, przyczem wolno założyć, że funkcya τ jest również zespolona, i, ściągając koło Σ_0 do punktu x_0,y_0, otrzymujemy równość:

$$u(x,y) = -\int_{(C)} \tau(x',y')\, G_i(x,y,x',y',\xi)\, ds, \tag{4}$$

gdzie punkt x',y' jest punktem bieżącym krzywej C.

f) Jeżeli funkcya $u(x,y)$ spełnia wewnątrz obszaru D równanie:

$$\Delta u + \xi u = 0,$$

a na krzywej C warunek:

$$u_i = \tau,$$

gdzie τ jest daną funkcyą ciągłą punktu krzywej C i jeżeli dla parametru ξ istnieje funkcya Green a, spełniająca wzdłuż krzywej C warunek:

$$G_i = 0,$$

to, stosując twierdzenie Green a do części rzeczywistych i urojonych funkcyj $u(x,y)$, $G(x_0,y_0,x,y,\xi)$, τ w obszarze D', utworzonym z obszaru D przez wyłączenie punktu $P_0(x_0,y_0)$, leżącego wewnątrz, kołem Σ_0, dość małem, nadto obszar D' ma być ograniczony krzywą C', położoną wewnątrz obszaru D, a dość blizką krzywej C i o podobnych własnościach, co krzywa C, i, ściągając koło Σ do jego punktu środkowego, otrzymujemy:

$$\int_{(C')} \Big\{ u(x',y') D_{ni}[G(x_0,y_0,x',y',\xi)] - G(x_0,y_0,x',y',\xi) D_{ni}[u(x',y')] \Big\} ds = u(x_0,y_0). \tag{5}$$

Według twierdzenia c) (str. 59) całka $\int_{C'} u(x',y')\, D_{ni}[G(x_0,y_0,x',y',\xi)]\, ds$ dąży do całki $\int_C \tau(x',y') \left(\dfrac{dG(x_0,y_0,x',y',\xi)}{dN}\right)_i ds$, gdy krzywa C' zdąża do krzywej C.

Zajmiemy się drugą częścią całki (5).

Jeżeli krzywa C' jest dość blizka krzywej C, to punktem najbliższym punktu x',y', leżącego na krzywej C', będzie jeden punkt x''',y''', leżący na krzywej C, na którego normalnej leży punkt x',y'. Na odcinku (x',y', x''',y''') długości δ obierzmy punkt x'',y'', różny od punktów końcowych odcinka. Na mocy twierdzenia o średniej wartości mamy:

$$G(x_0,y_0,x',y',\xi) - G(x_0,y_0,x'',y'',\xi) = D_{ni}[G(x_0,y_0,x_M,y_M,\xi)] \cdot \delta_1,$$

gdzie x_M,y_M są to spółrzędne pewnego pośredniego punktu M, zaś δ_1 jest długością odcinka (x',y', x'',y''). Załóżmy teraz, że punkt x'',y'' zdąża do punktu x''',y''', wtedy funkcya $G(x_0,y_0,x'',y'',\xi)$ zdąża do zera, liczba δ_1 do liczby δ, przeto i pochodna $D_{ni}\, G[x_0,y_0,x_M,y_M,\xi]$ musi zdążać do określonej wartości

w ten sposób, iż punkt M zdąża do określonego punktu N; przeto jest wzdłuż krzywej C:

$$G(x_0,y_0,x',y',\xi) = D_{ni}[G(x_0,y_0,x_N,y_N,\xi)] \cdot \delta.$$

Można więc wyznaczyć liczbę dodatnią A taką, iż wzdłuż krzywej C' i to niezależnie od położenia punktu x',y', gdy tylko krzywa C' jest dość blizka krzywej C, jest także:

$$|G(x_0,y_0,x',y',\xi)| < A\delta,$$

więc:

$$|G(x_0,y_0,x',y',\xi) \,.\, D_{ni}[u(x',y')]| < A\,|\delta \,.\, D_{ni}(u(x',y'))|. \tag{6}$$

Otóż gdy parametr ξ czyni zadość nierówności (15) (str. 41), to wiemy, że funkcya $u(x,y)$ istnieje i daje się wyznaczyć pod formą potencyału warstwy podwójnej, rozpostartej wzdłuż krzywej C, ale wtedy na mocy wzoru (29) (str. 27) jest jednostajnie wzdłuż krzywej C:

$$\lim\, [\delta D_{ni}(u(x',y'))] = 0. \tag{7}$$

Wtedy z równości (5) (str. 60) wynika:

$$u(x,y) = \int_{(C)} \tau(x',y') \left(\frac{dG(x,y,x',y',\xi)}{dN}\right)_i ds. \tag{8}$$

Gdy parametr ξ wspomnianej nierówności nie spełnia, to, obierając liczbę dodatnią ξ_0 tak, aby parametr $\xi = -\xi_0$ spełniał tę nierówność, kładziemy:

$$u = v + F,$$

$$v_i = \tau, \quad \Delta v - \xi_0 v = 0,$$

przyczem v ma być potencyałem warstwy podwójnej, i z łatwością udowodnimy, że zachodzi związek (7).

§ 30. Oznaczmy przez $W(x,y)$ funkcyę spełniającą wewnątrz obszaru D równanie:

$$\Delta W + \xi W + F(x,y) = 0 \tag{9}$$

w punkcie x,y, gdzie funkcya $F(x,y)$ ma być funkcyą ciągłą, określoną w obszarze D, nadto wzdłuż krzywej C ma być:

$$h'\left(\frac{dW}{dN}\right)_i = h(W)_i, \tag{10}$$

gdzie oznaczenia h', h są stale te same, co dotąd.

Załóżmy, że ta funkcya $W(x,y)$ i odpowiednia funkcya G r e e n a istnieje; jeżeli położymy:

$$W = \Phi(x,y) - u(x,y)\,, \tag{11}$$

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{(D)} F(x',y') f(\varrho,\mu)\, d\tau\,, \tag{12}$$

gdzie ϱ oznacza odległość punktów (x,y) i (x',y'), to ostatecznie zakładamy, że istnieje funkcya $u(x,y)$, która spełnia wewnątrz obszaru D równanie:

$$\Delta u + \xi u = 0\,,$$

a wzdłuż krzywej C warunek:

$$h'\left(\frac{du}{dN}\right)_i = h(u)_i + \left(h'\frac{d\Phi}{dN} - h\Phi\right)\,, \tag{13}$$

nadto ma być funkcya $F(x,y)$ taka, iżby funkcya $\Phi(x,y)$ miała drugie pochodne ciągłe: $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$ wewnątrz obszaru D.

Postaramy się funkcyę $W(x,y)$ wyrazić przez funkcyę G r e e n a i funkcyę $F(x,y)$.

A) Niech będzie najpierw $h'=0$; wtedy z równości (13) otrzymujemy $u_i = \Phi$, a wobec tego oraz równości (12) i (8) (str. 61) jest:

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{C}\left(\frac{dG(x,y,x',y',\xi)}{dN}\right)_i \left(\int_{D} F(x'',y'') f(\varrho,\mu)\, d\tau\right) ds\,, \tag{14}$$

przyczem liczba ϱ mierzy długość odcinka, łączącego punkt x',y', położony na krzywej C, z dowolnym punktem x'',y'' obszaru D, a więc funkcya $f(\varrho,\mu)$ od obu punktów zależy.

Niżej wykażemy, że można porządek całkowania zmienić we wzorze (14), będzie przeto:

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{(D)} F(x'',y'')\, d\tau \int_{(C)} \left(\frac{dG(x,y,x',y',\xi)}{dN}\right)_i f(\varrho,\mu)\, ds. \tag{15}$$

Aby obliczyć całkę:

$$\int_{(C)}\left(\frac{dG(x,y,x',y',\xi)}{dN}\right)_i f(\varrho,\mu)\, ds;$$

otaczamy punkty x,y i x'',y'', leżące wewnątrz obszaru D, kołami Σ i Σ' o promieniach takich, by oba koła leżały wewnątrz obszaru D i zewnątrz siebie, nie przecinając się; do tego, w ten sposób uzyskanego obszaru,

stosujemy twierdzenie (36) (str. 46) do funkcyi $f(\varrho,\mu)$, $G(x,y,x',y',\xi)$ i ściągając koła Σ, Σ' do ich środków, otrzymujemy:

$$\int_{(C)}\left(\frac{dG(x,y,x',y',\xi)}{dN}\right)_i f(\varrho,\mu)\, ds = f(R,\mu) - 2\pi G(x,y,x'',y'',\xi),$$

gdzie R oznacza odległość punktów (x,y) i (x'',y''), co z uwagi na równości (11) i (12) (str. 62) daje zapowiedziany związek:

$$W(x,y) = \int_{(D)} F(x',y') G(x,y,x',y',\xi)\, d\tau. \tag{16}$$

Dla wykończenia tego wypadku winniśmy wykazać, że wolno było powyżej zmienić porządek całkowania w całce podwójnej, której elementy stają się nieograniczone.

W tym celu rozdziela się obszar D na dwie części Δ' i Δ'', gdzie Δ' będzie zbiorem tych punktów obszaru D, których odległość od krzywej C wynosi więcej, niż liczba dodatnia δ, dowolnie obrana, byleby tak, żeby punkt x,y leżał wewnątrz obszaru Δ'; przez Δ'' oznaczamy obszar, pozostały z obszaru D. Otóż w całce:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{(C)}\left(\frac{dG}{dN}\right)_i \int_{(\Delta')} F.f.d\tau$$

wolno zmienić porządek całkowania, kiedy całka analogiczna, odnosząca się do obszaru Δ'', dąży wraz z tym obszarem do zera, a stąd już łatwo wykazać resztę twierdzenia.

B) W przypadku $h'=1$ postępujemy zupełnie podobnie i otrzymujemy ten sam wzór końcowy (16), co w przypadku A).

§ 31. Z równania (16) skorzystamy obecnie, aby znaleść górną granicę modułu funkcyi $W(x,y)$ w całym obszarze D. Na mocy znanego twierdzenia S c h w a r z a otrzymujemy:

$$|W(x,y)|^2 \leq \int_{(D)} |F(x',y')|^2 d\tau \int_{(D)} |G(x,y,x',y',\xi)|^2 d\tau\,, \tag{17}$$

tak bowiem pierwsza, jak i druga całka prawej strony ma określone znaczenie. Znajdziemy górną granicę dla całki:

$$I(x,y) = \int_{(D)} |G(x,y,x',y',\xi)|^2\, d\tau\,, \tag{18}$$

znalazłszy na nią inne wyrażenie.

Kładziemy $\xi=\alpha+i\beta$, $G(x,y,x',y',\xi)=G_1+iG_2$; otóż funkcya:

$$G_2(x,y,x',y',\xi)$$

spełnia wewnątrz obszaru D, jako funkcya zmiennych x',y', poza punktem x,y równanie:

$$\Delta G_2+\xi G_2+\beta[G_1-iG_2]=0$$

czyli:

$$\Delta\varphi(x',y')+\xi\varphi(x',y')+G_1(x,y,x',y',\xi)-iG_2(x,y,x',y',\xi)=0\,,$$

jeżeli położymy:

$$G_2(x,y,x',y',\xi)=\beta\varphi(x',y').$$

Aby wykazać, że:

$$I(x,y)=\varphi(x,y)\,,$$

przyczem funkcya $\varphi(x,y)$ ma znaczenie, stosujemy twierdzenie G r e e n a do funkcyi G_1 i G_2 do obszaru D, z którego wyłączono punkty (x,y) i x',y', i przechodząc do granicy z kołami, które te punkty otaczają.

Znajdziemy nowe wyrażenie na funkcyę $\varphi(x',y')$.

Niech ξ będzie taką liczbą, iż część rzeczywista liczby μ jest różna od zera, a więc dodatnia; niech ϱ będzie odległością punktu x',y' od bieżącego punktu x'',y'' i, przyjmując te same konstrukcye geometryczne, co przed chwilą, stosujemy twierdzenie G r e e n a do funkcyi G_2 i do części rzeczywistej i urojonej funkcyi $f(\varrho,\mu)$; ostatecznie otrzymujemy:

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned}\varphi(x',y')&=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C)}\varphi_i(x'',y'')\frac{df(\varrho,\mu)}{dN}\,ds-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C)}\left(\frac{d\varphi(x'',y'')}{dN}\right)_i f(\varrho,\mu)\,ds\\&+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(D)}\{G_1(x,y,x'',y'',\xi)-iG_2(x,y,x'',y'',\xi)\}f(\varrho,\mu)d\tau.\end{aligned}\right.$$

W przypadku $h'=0$ jest pierwsza całka zerem, a trzecia,—nazwijmy ją $u(x',y')$.—spełnia nierówność:

$$(20)\qquad |u(x',y')|<\frac{1}{2a}\sqrt{I(x,y)}\,,$$

jeżeli uwzględnimy nierówności:

$$|f(\varrho,\mu)|^2<\int\limits_0^\infty e^{-2a\sqrt{\varrho^2+t^2}}\,dt\int\limits_0^\infty\frac{dt}{\varrho^2+t^2}<\int\limits_0^\infty e^{-a(\varrho+t)}\,dt\int\limits_0^\infty\frac{dt}{\varrho^2+t^2}=\frac{\pi}{2a\varrho}\,e^{-a\varrho}.$$

Druga całka w równości (19) jest potencyałem warstwy pojedyńczej—oznaczmy ją przez $v(x',y')$—istnieje więc granica $v_i(x'',y'')$, a że jest $v_i(x'',y'')=u_i(x'',y'')$, więc na mocy nierówności (20) będzie:

$$|u_i(x'',y'')|\leqslant\frac{1}{2a}\sqrt{I(x,y)}\,,$$

a stąd i nierówności (24) (str. 42):

$$|v|<\frac{2A}{a}\sqrt{I(x,y)}\,;$$

jeżeli funkcyę v zastąpimy odpowiednim potencyałem warstwy podwójnej i jeżeli parametr ξ spełnia nierówność (15) (str. 41).

Przeto jest:

$$I(x,y)<\frac{1}{2a}\sqrt{I(x,y)}+\frac{2A}{a}\sqrt{I(x,y)}\,,$$

a wobec tego:

$$(21)\qquad I(x,y)<\left(\frac{2c}{\sin\frac{\theta}{2}}+1\right)^2\frac{1}{\varrho_1\sin^2\frac{\theta}{2}}\,.$$

W przypadku $h'=1$ i gdy parametr ξ spełnia nierówności (15) (str. 41 i (31) (str. 45), otrzymamy sposobem, jak w przypadku przestrzeni, nierówność)

$$(22)\qquad I(x,y)<\left(\frac{4c}{\sin\frac{\theta}{2}}+2\right)^2\frac{1}{\varrho_1\sin^2\frac{\theta}{2}}\,.$$

Jeżeli więc oznaczymy:

$$(23)\qquad \mathfrak{E}=\int\limits_{(D)}|F(x',y')|^2\,d\tau\,,$$

to na mocy nierówności (17) (str. 63) i powyższej (22) otrzymamy:

$$(24)\qquad |W(x,y)|^2<\left(\frac{4c}{\sin\frac{\theta}{2}}+2\right)^2\cdot\frac{\mathfrak{E}}{\varrho_1\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

tak w przypadku $h'=0$, jak w przypadku $h'=1$ przy jakiemkolwiek położeniu punktu x,y wewnątrz obszaru D i jeżeli parametr ξ spełnia odpowiednie nierówności.

§ 32. Niech obecnie funkcya $F(x,y)$ będzie nieco ogólniejsza, a mianowicie: 1) niech będzie taką, że istnieje całka (23), 2) niech nadto w punktach obszaru D, których odległość od krzywej C nie przekracza pewnej liczby stałej i różnej od zera, niechaj funkcya $F(x,y)$ będzie ograniczona.

Wśród tych założeń funkcya $\Phi(x,y)$, określona równością (12) (str. 60), ma ciągłe pochodne pierwsze dla punktów obszaru D w okolicy krzywej C; przy zwykłych założeniach co do parametru ξ istnieje funkcya $u(x,y)$, określona równością (13) (str. 61) i istnieje, jak łatwo się przekonać, granica $\left(\frac{dW}{dN}\right)_i$.

Załóżmy dodatkowo, że funkcya $F(x,y)$ ma w obszarze D określoną górną granicę M dla swego modułu.

Wyprowadźmy teraz nierówności na funkcyę $W(x,y)$ i jej pochodne.

Zauważmy, że na podstawie nierówności (45), (46), (46bis) (str. 49) i związku (12) (str. 61) jest:

$$(25)\qquad \begin{cases} |\Phi(x,y)| < \dfrac{2\pi M}{\rho_1 \sin^2\frac{\theta}{2}}, \\[2ex] \left|\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right| < \dfrac{M\pi}{\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}, \\[2ex] \left|\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right| < \dfrac{M\pi}{\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}, \\[2ex] \left|\left(\dfrac{d\Phi}{dN}\right)_{i,e}\right| < \dfrac{2M\pi}{\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}. \end{cases}$$

§ 33. Postępując zupełnie podobnie, jak w przypadku trzech zmiennych, kładziemy najpierw $k'=0$. Jeżeli funkcyę $u(x,y)$ będziemy uważali za potencyał warstwy podwójnej o liczbie charakterystycznej μ, który wzdłuż krzywej C spełnia warunek $u_i=\Phi$, to dla jego gęstości σ mamy na mocy nierówności (16) (str. 42), (24) (str. 43) i (15) (str. 41):

$$(26)\qquad |\sigma| \leqslant \frac{8\pi M}{\rho_1 \sin^2\frac{\theta}{2}},$$

$$(27)\qquad |u(x,y)| < \left(\frac{c}{\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{4}\right)\frac{8\pi M}{\rho_1\sin^2\frac{\theta}{2}},$$

a stąd:

$$(28)\qquad |W(x,y)| < \left(\frac{4c}{\sin\frac{\theta}{2}} + 2\right)\frac{2\pi M}{\rho_1\sin^2\frac{\theta}{2}},$$

przy jakiemkolwiek położeniu punktu (x,y) wewnątrz obszaru D.

Jeżeli zaś funkcyę $u(x,y)$ uważać będziemy za potencyał warstwy pojedyńczej o liczbie charakterystycznej μ, który wzdłuż krzywej C spełnia warunek:

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_e = \frac{d\Phi}{dN},$$

to, stosując obecnie nierówności (19) (str. 42) i powyższą (25), otrzymujemy:

$$(29)\qquad |D_{ni}(u)| < \left(\frac{c}{\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{4}\right)\frac{8M\pi}{\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

$$(30)\qquad |D_{ni}(W)| < \left(\frac{4c}{\sin\frac{\theta}{2}} + 2\right)\frac{2\pi M}{\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}},$$

a oznaczając przez σ gęstość potencyału u, otrzymujemy na mocy nierówności (35) (str. 36):

$$\left|\left(\frac{du}{dN}\right)_e - \frac{\sigma}{2}\right| < \frac{cS}{L\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}} \leqslant \frac{S}{4},$$

jeżeli przez S oznaczymy znów górną granicę modułu funkcyi σ; stąd jest:

$$\left|\left(\frac{du}{dN}\right)_e\right| < \frac{3S}{4},$$

a że jest (nier. (16) (str. 42)):

$$|\sigma| \leqslant S \leqslant \frac{8M\pi}{\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}},$$

bo obecnie T jest górną granicą modułu $\left|\frac{d\Phi}{dN}\right|$, więc:

$$\left|\left(\frac{du}{dN}\right)_e\right| < \frac{6M\pi}{\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}},$$

co wobec równości (17) (str. 17) daje:

(31) $$\left|\left(\frac{du}{dN}\right)_i\right| < \frac{14M\pi}{\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}},$$

a stąd:

(32) $$\left|\left(\frac{dW}{dN}\right)_i\right| < \frac{16M\pi}{\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

§ 34. Połóżmy $h=1$; oznaczając przez H górną granicę modułu wartości, jakie funkcya h przyjmuje wzdłuż krzywej C, otrzymujemy z nierówności (25) (str. 66):

$$\left|\frac{d\Phi}{dN} - h\Phi\right| < \frac{2M\pi}{\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}\left(1+\frac{H}{\sqrt{\rho_1}}\right),$$

a że z nierówności (31) (str. 45) wynika:

$$\frac{H}{\sqrt{\rho_1}} \leqslant \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{8c} \leqslant \frac{1}{8c},$$

więc jest:

$$\left|\frac{d\Phi}{dN} - h\Phi\right| < \frac{4M\pi}{\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}},$$

bo wolno przyjąć, że jest $8c>1$; z pierwszej nierówności (35) (str. 46) otrzymuje się więc:

(33) $$|D_{ni}(u)| < \left(\frac{c}{\sin\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{4}\right)\frac{32M\pi}{\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}},$$

a stąd:

(34) $$|D_{ni}(W)| < \frac{2M\pi}{\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}\left(\frac{16c}{\sin\frac{\theta}{2}}+5\right).$$

Z powodu nierówności (34) (str. 45) i jednej z powyższych mamy:

(35) $$\left|\left(\frac{du}{dN}\right)_i\right| < \frac{8M\pi}{\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}; \quad \left|\left(\frac{dW}{dN}\right)_i\right| < \frac{10M\pi}{\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}},$$

a z nierówności (33) (str. 45) wynika, że jest:

(36) $$|u(x,y)| < \frac{32Mc\pi}{\rho_1\sin^3\frac{\theta}{2}} \leqslant \frac{8M\pi L}{\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}},$$

a stąd:

(37) $$|W(x,y)| < \frac{2M\pi}{\rho_1\sin^3\frac{\theta}{2}}(1+16c).$$

§ 35. Uważajmy teraz pierwsze pochodne funkcyi W wewnątrz obszaru D. Wystarcza zająć się przypadkiem $h'=0$; wtedy funkcyę $u(x,y)$ wolno uważać za potencyał warstwy pojedyńczej o gęstości σ, która czyni zadość nierówności na str. 67:

$$|\sigma| \leqslant B.M,$$

gdzie liczba dodatnia B od funkcyi $F(x,y)$ nie zależy. Dla funkcyi $\Phi(x,y)$ istnieje napewne określona granica $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_i$; a że jest:

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{(C)} \sigma f(\varrho,\mu)\,ds,$$

więc:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\pi}\int_{(C)} \sigma\frac{df(\varrho,\mu)}{d\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial x}\,ds.$$

Ale moduł pochodnej $\frac{df(\varrho,\mu)}{d\varrho}$ spełnia nierówność (7) (str. 6), więc, gdy przez δ oznaczymy najkrótszą odległość punktu (x,y) od punktów krzywej C, będzie:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| < \frac{BM}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}me^{-a\delta}+\frac{e^{-a\delta}}{\delta}\right)\int_{(C)} ds;$$

istnieje więc funkcya dodatnia $\tilde\omega(\delta)$, zależna od długości δ, która rośnie nieograniczenie wraz z liczbą $\left(\frac{1}{\delta}\right)$ taka, iż jest:

(38) $$\left|\frac{\partial W}{\partial x}\right| < \tilde\omega(\delta).M; \quad \left|\frac{\partial W}{\partial y}\right| < \tilde\omega(\delta).M.$$

Dla drugiej z pochodnych pierwszych otrzymamy bowiem to samo. Zupełnie analogiczne nierówności otrzymamy na pochodne pierwsze funkcyi W w przypadku $h'=1$.

§ 36. Wyprowadzimy jeszcze pewne nierówności dlatego, że, jak w przypadku przestrzeni, będą nieodzowne.

A) W przypadku $h'=0$, kładziemy znów:

$$W(x,y)=\Phi(x,y)-u(x,y)\,,$$

gdzię funkcya $u(x,y)$ ma być potencyałem warstwy pojedyńczej o liczbie charakterystycznej μ, który wzdłuż krzywej C spełnia równość:

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_e=\frac{d\Phi}{dN}.$$

Kładąc:

$$u(x,y)=u_0(x,y)+v(x,y)\,,$$

mamy:

$$W(x,y)=\Phi(x,y)-u_0(x,y)-v(x,y)\,, \tag{39}$$

przyczem będzie:

$$\left(\frac{dv}{dN}\right)_e=\frac{d\Phi}{dN}-\left(\frac{du_0}{dN}\right)_e. \tag{40}$$

Niech $u_0(x,y)$ będzie takim potencyałem warstwy pojedyńczej, iż jest wzdłuż krzywej C:

$$\left(\frac{du_0}{dN}\right)_e-\left(\frac{du_0}{dN}\right)_i=2\frac{d\Phi}{dN}\,,$$

przeto funkcya $v(x,y)$ będzie potencyałem warstwy pojedyńczej, który wzdłuż krzywej C spełnia związek (40) i da się wyznaczyć; jeżeli przez σ_0 oznaczymy gęstość potencyału $u_0(x,y)$, to jest:

$$\sigma_0=2\frac{d\Phi}{dN}\,,$$

a wtedy równanie (40) daje:

$$\left(\frac{dv}{dN}\right)_e=\frac{\sigma_0}{2}-\left(\frac{du_0}{dN}\right)_e,$$

a stąd i z nierówności (35) (str. 36) i czwartej nierówności (25) (str. 66) otrzymujemy:

$$\left|\left(\frac{dv}{dN}\right)_e\right|<\frac{c\max|\sigma_0|}{L\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}<\frac{4M\pi c}{\sqrt{\rho_1}\sin^4\frac{\theta}{2}}.$$

Na mocy nierówności (18) (str. 42) jest:

$$|v(x,y)|<\frac{16M\pi c^2}{L\rho_1^{\frac{3}{2}}\sin^5\frac{\theta}{2}}. \tag{41}$$

B) Przejdźmy do przypadku $h'=1$. Załóżmy, że zdefiniowaliśmy funkcyę $F(x,y)$ także dla obszaru D', ale bacząc, by zachowane były następujące warunki:

1) wewnątrz obszaru D' funkcya $F(x,y)$ ma być ciągła i jej moduł nie ma być większy od górnej granicy M modułu tejże funkcyi w obszarze D, czyli wszędzie ma być $|F(x,y)|\leqq M$;

2) jeżeli w pewnym punkcie krzywej C istnieje granica $(F(x,y))_e$, to ma istnieć także granica $(F(x,y))_i$ i ma być:

$$(F(x,y))_i=(F(x,y))_e.$$

Utwórzmy całkę analogiczną do całki $\Phi(x,y)$, a mianowicie:

$$\psi(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{(N)}F(x',y')f(\varrho,\mu)d\tau\,, \tag{42}$$

przyczem wskaźnik N wskazuje, że całkowanie rozpostarto na całą nieograniczoną płaszczyznę; ϱ oznacza odległość punktu x,y od punktu bieżącego płaszczyzny (x',y').

Połóżmy:

$$W(x,y)=\psi(x,y)-u(x,y)\,, \tag{43}$$

przyczem ma być $u(x,y)$ potencyałem warstwy pojedyńczej o liczbie charakterystycznej μ, który wzdłuż krzywej C spełnia warunek:

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_i=h(u)_i+\frac{d\psi}{dN}-h\psi.$$

Jeżeli położymy:

$$u=v-v_0\,,$$

to jest:

$$W(x,y)=\psi(x,y)-v(x,y)+v_0(x,y)\,,$$

przyczem $v_0(x,y)$ ma być potencyałem warstwy pojedyńczej o gęstości:

$$\sigma_0=2\frac{d\psi}{dN}\,,$$

będzie:

$$\left(\frac{dv}{dN}\right)_i=h(v)_i-h(v_0)_i+\left(\frac{dv_0}{dN}\right)_i+\left(\frac{d\psi}{dN}\right)_i-h\psi.$$

Znajdziemy stąd górną granicę funkcyi $v(x,y)$. Najpierw jest.

$$|\psi(x,y)|<\frac{2\pi M}{\rho_1\sin^2\frac{\theta}{2}}\,;\quad \left|\left(\frac{d\psi}{dN}\right)_i\right|<\frac{2M\pi}{\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}\,,$$

więc jest:

$$|\sigma_0| < \frac{4M\pi}{\sqrt{\rho_1}\,\sin^2\frac{\theta}{2}},$$

a wskutek nierówności (34) (str. 36) jest:

(44) $$|v_0(x,y)| < \frac{4Mc\pi}{\varrho_1 \sin^3\frac{\theta}{2}};$$

przy pomocy pierwszej z nierówności (36) (str. 36) jest:

$$\left|\left(\frac{dv_0}{dN}\right)_i + \left(\frac{d\psi}{dN}\right)_i\right| = \left|\left(\frac{dv_0}{dN}\right)_i + \frac{\sigma_0}{2}\right| < \frac{4Mc\pi}{L\varrho_1\sin^4\frac{\theta}{2}}.$$

Kładąc:

$$\left(\frac{dv}{dN}\right)_i = h(v)_i + \tau,$$

otrzymujemy:

$$\tau = -h(v_0)_i + \left(\frac{dv_0}{dN}\right)_i + \left(\frac{d\psi}{dN}\right)_i - h\psi$$

i jeżeli przez H oznaczymy górną granicę modułu funkcyi $h(x,y)$ wzdłuż krzywej C, to jest:

$$|\tau| < \frac{4Mc\pi H}{\varrho_1\sin^3\frac{\theta}{2}} + \frac{4Mc\pi}{L\varrho_1\sin^4\frac{\theta}{2}} + \frac{2\pi MH}{\varrho_1\sin^2\frac{\theta}{2}} < \frac{2\pi M}{\varrho_1\sin^4\frac{\theta}{2}}\left(2cH + \frac{2c}{L} + H\right),$$

przeto na podstawie nierówności (33) (str. 45) jest:

(45) $$|v(x,y)| < \frac{16M\pi c}{\varrho_1^{\frac{3}{2}}\sin^5\frac{\theta}{2}}\left(H + 2cH + \frac{2c}{L}\right),$$

przy jakiemkolwiek położeniu punktu x,y wewnątrz obszaru D.

V. ISTNIENIE FUNKCYJ HARMONICZNYCH.

§ 37. Ażeby wykazać istnienie funkcyj harmonicznych, uważajmy funkcye $u(x,y)$ o własnościach następujących:

1) funkcya $u(x,y)$ ma mieć pochodne ciągłe $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ wewnątrz obszaru D;

2) wewnątrz obszaru D ma spełniać równanie:

(1) $$\Delta u + \xi u + F(x,y) = 0$$

w punkcie x,y, przyczem ξ oznacza, jak zwykle, parametr dany, od spółrzędnych x,y niezależny, zaś funkcya $F(x,y)$ daną funkcyą ciągłą;

3) na ograniczeniu C ma być:

$$h'\left(\frac{du}{dN}\right)_i = h(u)_i,$$

gdzie h', h są znanemi oznaczeniami.

Zagadnienie to zupełnie podobnie się traktuje, jak w przypadku przestrzeni, dlatego je krótko opiszę.

Nietrudno widzieć, że w pewnych warunkach dla parametru ξ funkcya $u(x,y)$ jest jednoznacznie określona powyższemi własnościami. Różnica dwóch rozwiązań spełniałaby wewnątrz obszaru D równanie $\Delta\varphi + \xi\varphi = 0$, a wzdłuż krzywej C warunek: $h'\left(\frac{d\varphi}{dN}\right)_i = h\varphi$; na mocy więc III-go rozdziału możemy powiedzieć, że w przypadku $h'=0$ jest stale $\varphi=0$ w całym obszarze D, o ile parametr nie redukuje się do liczby rzeczywistej i dodatniej; w przypadku $h'=1$ istnieje znów liczba nieujemna ϱ_0 taka, iż, gdy tylko parametr ξ nie redukuje się do liczby rzeczywistej i nie mniejszej od liczby $(-\varrho_0)$ (str. 56), to jest w całym obszarze D znowu $\varphi=0$.

W powyższych warunkach dla ξ istnieje więc co najwyżej jedno rozwiązanie zagadnienia obecnie rozważanego.

Wykażemy, że istotnie istnieje to jedyne rozwiązanie przy powyższych warunkach dla parametru ξ.

Załóżmy najpierw, że liczba dodatnia ξ_0 jest taka, że parametr $\xi = -\xi_0$ spełnia nierówność (15) (str. 41) w przypadku $h'=0$ i nierówności (15) (str. 41) i (31) (str. 45). Kładąc $u(x,y) = \Phi(x,y) - w(x,y)$, gdzie:

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{(D)} F(x',y') f(\varrho.\mu_0)\,d\tau,$$

zaś ϱ jest odległością punktów (x,y) i (x',y') obszaru D, μ_0 znów liczba, w którą przechodzi liczba μ z § 3 (str. 4), gdy za ξ podstawimy liczbę $(-\xi_0)$, czytelnik łatwo się przekona, że istnieje napewno funkcya $w(x,y)$—słowem: dla rozważanego parametru $(-\xi_0)$ istnieje rozwiązanie $u(x,y)$ obecnego zagadnienia i na mocy poprzedniego rozdziału jest:

(2) $$u(x,y) = \int_{(D)} F(x',y')\, G(x,y,x',y',-\xi_0)\,d\tau.$$

§ 38. Połóżmy teraz:

(3) $$\xi = \eta - \xi_0\,,$$

(4) $$u = \Sigma u_k \eta^k\,,$$

to z równania (1) (str. 73) wynika:

(5) $$\begin{cases} \Delta u_0 - \xi_0 u_0 + F(x,y) = 0\,, & \\ \Delta u_k - \xi_0 u_k + u_{k-1}(x,y) = 0\,, & (k=1,2,3,\ldots) \end{cases}$$

nadto wzdłuż krzywej C ma być:

(6) $$h'\left(\frac{du_k}{dN}\right)_i = h(u_k)_i\,. \qquad (k=0,1,2,3,\ldots)$$

Wobec tego funkcye $u_k(x,y)$ będą istniały i będzie:

(7) $$\begin{cases} u_0(x,y) = \int\limits_{(D)} F(x',y')G(x,y,x',y',-\xi_0)d\tau\,, & \\ u_k(x,y) = \int\limits_{(D)} u_{k-1}(x',y')G(x,y,x',y',-\xi_0)d\tau\,. & (k=1,2,3,\ldots) \end{cases}$$

Przyjąwszy takie określenie funkcyi $u_k(x,y)$, chcemy zbadać, czy szereg (4) będzie zbieżny w obszarze D i czy rozwiązuje zagadnienie rozważane.

Kładąc:

(8) $$I_{2k} = \int\limits_{(D)} u^2_k d\tau; \quad I_{-2} = \int\limits_{(D)} F^2(x',y')d\tau, \qquad (k=0,1,2,3,\ldots)$$

załóżmy, że funkcya $F(x,y)$ jest rzeczywistą w obszarze D, a że funkcya G r e e n a $G(x,y,x',y',-\xi_0)$ będzie też rzeczywistą, więc i funkcya $u_k(x,y)$ będą rzeczywiste. Na mocy nierówności (24) (str. 65) otrzymamy tak dla $h'=0$, jak dla $h'=1$ nierówności:

(9) $$u^2_k(x,y) < (4c+2)^2 \cdot \frac{I_{2k-2}}{\xi_0}\,, \qquad (k=0,1,2,3,\ldots)$$

a całkując tę nierówność po całym obszarze D, otrzymamy:

(10) $$I_{2k} < (4c+2)^2 \cdot \frac{I_{2k-2}}{\xi_0} \cdot T\,,$$

oznaczając przez T pole obszaru D. Stąd wynika, że:

(11) $$I_{2k} < (4c+2)^{2(k+1)} \frac{I_{-2}}{\xi_0^{k+1}} \cdot T^{k+1}\,,$$

przeto, o ile:

$$|\eta| < \frac{\sqrt{\xi_0}}{(4c+2)\sqrt{T}}\,,$$

szereg (4) jest jednostajnie zbieżny; jeżeli więc przez R oznaczymy promień jednostajnej zbieżności szeregu (4), będzie:

(12) $$R \geqslant \frac{\sqrt{\xi_0}}{(4c+2)\sqrt{T}}\,.$$

Szereg ten przy $|\eta|<R$ określa pewną funkcyę $u(x,y)$, o której okażemy, że spełnia zagadnienie. Na mocy równości (7) otrzymamy bowiem:

(13) $$u(x,y) = \int\limits_{(D)} F(x',y')G(x,y,x',y',-\xi_0)d\tau + \sum_1^\infty \eta^k \int\limits_{(D)} u_{k-1}(x',y')G(x,y,x',y'-\xi_0)d\tau.$$

Uważajmy teraz szereg:

(14) $$F(x',y') + \sum_1^\infty \eta^k u_{k-1}(x',y') = F(x',y') + \eta u(x',y')\,,$$

jeżeli jest $|\eta| \leqslant R_1 < R$, przyczem liczba R_1 jest zresztą dowolna, to szereg (14) będzie bezwzględnie i jednostajnie zbieżny i istnieje górna granica modułu jego wartości w całym obszarze D. Jeżeli więc punkt (x,y), leżący wewnątrz obszaru D, otoczymy kołem o promieniu r takiem, że całe leży wewnątrz obszaru D i przez Δ oznaczymy obszar, powstały z obszaru D przez wyłączenie wnętrza owego koła, to, jak bardzo łatwo wykazać, różnica:

$$\int\limits_{(D)} [F(x',y')+\eta u(x',y')]G(x,y,x',y',-\xi^0)d\tau - \int\limits_{\Delta} [F(x',y')+\eta u(x',y')]G(x,y,x',y',-\xi_0)d\tau$$

będzie dążyła do zera wraz z promieniem r, a że w obszarze Δ można powyższy szereg wyraz za wyrazem całkować, więc na mocy równości (13) otrzymujemy:

(15) $$u(x,y) = \int\limits_{(D)} \{F(x',y') + \eta u(x',y')\} G(x,y,x',y'-\xi_0)\,d\tau.$$

Zbadajmy teraz pochodne tej funkcyi.

W § 35 (str. 69) wykazaliśmy, że istnieje funkcya dodatnia $\tilde\omega(\delta)$, zależna od najkrótszej odległości δ punktu (x,y) od krzywej C, rosnąca, wogóle, nieograniczenie wraz z liczbą $\frac{1}{\delta}$ i taka, że jest:

$$\left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right| < \bar{\omega}(\delta).M; \quad \left|\frac{\partial u_k}{\partial x}\right| < \bar{\omega}(\delta).\max|u_{k-1}|,$$
$$(k=1,2,3,\dots)$$

gdzie M oznacza górną granicę modułu funkcyi $F(x,y)$ w obszarze D; przeto szereg $\sum_0^\infty \frac{\partial u_k}{\partial x}.\eta^k$ jest bezwzględnie i jednostajnie zbieżny w obszarze D, jeżeli jest $|\eta|<R$ i przedstawia (§ 17) pochodną $\frac{\partial u}{\partial x}$; podobnie istnieje pochodna $\frac{\partial u}{\partial y}$. Jeżeli teraz założymy o funkcyi $F(x,y)$, że jest taka, iż funkcya $\int_{(D)} F(x',y')f(\varrho,\mu)d\tau$ ma drugie pochodne wewnątrz obszaru D (ϱ oznacza długość odcinka, łączącego punkty x,y i x',y'), to na mocy równości (15) i tej okoliczności, że istnieją wewnątrz obszaru D ciągłe pierwsze pochodne funkcyi $u(x,y)$, funkcya $u(x,y)$ będzie miała drugie pochodne wewnątrz obszaru D, spełniające równanie:

$$\Delta u - \xi_0 u + [F(x,y) + \eta u] = 0\,,$$

czyli:

$$\Delta u + \xi u + F(x,y) = 0.$$

Na mocy nierówności (30) (str. 67) i (34) (str. 68) istnieje stała dodatnia B, zależna jedynie od krzywej C i parametru ξ_0 taka, iż jest:

$$|D_{ni}(u_0)| < BM\,; \quad |D_{ni}(u_k)| < B.\max|u_{k-1}|.$$
$$(k=1,2,3,\dots)$$

Jeżeli jest więc $|\eta|<R$, to szereg $\sum_{k=0}^\infty D_{ni}(u_k)\eta^k$ jest jednostajnie i bezwzględnie zbieżny, przedstawia więc (§ 17) funkcyę $D_{ni}(u)$ i będzie szereg:

$$\sum_{k=0}^\infty \left(\frac{du_k}{dN}\right)_i \eta^k$$

zbieżny, ponieważ istnieją granice $\left(\frac{du_k}{dN}\right)_i$, i będzie przedstawiał granicę $\left(\frac{du}{dN}\right)_i$; łatwo wykazać, że jest spełniony warunek:

$$h'\left(\frac{du}{dN}\right)_i = h(u)_i\,.$$

O ile jest $|\eta|<R$ czyli $|\xi+\xi_0|<R$, funkcya $u(x,y)$, określona szeregiem (4) (str. 74) i równaniami (5) (str. 74) rozwiązuje zagadnienie[1]).

§ 39. Uważajmy szereg $u(x,y)$, rozważany w poprzednim paragrafie, zbieżny jednostajnie w pewnem kole o promieniu R, za element funkcyjny; swoje analityczne przeprowadzenie (co do ξ) definiuje pewną funkcyę, której osobliwości teraz zbadamy.

Postępujemy metodą Poincarego, której myśl zasadnicza jest następująca: wykazujemy, że liczba R jest równa granicy pewnego nieskończonego ciągu liczb, a że liczba R między innemi zależy od funkcyi $F(x,y)$, więc wykażemy, że przez odpowiedni wybór funkcyi $F(x,y)$ można liczbę R uczynić dowolnie wielką; potem okażemy, że funkcya $u(x,y)$ da się wymiernie i całkowicie wyrazić przez pewną funkcyę $u'(x,y)$, której promień jednostajnej zbieżności R' można uczynić, jak się powiedziało, dowolnie wielkim i wyrazić wymiernie przrz parametr ξ; funkcya $u(x,y)$ będzie więc miała w obrębie koła R' jedynie bieguny, których stopień wielokrotności i residua wyznaczymy.

W tym celu uważajmy całki:

$$(16) \qquad I_{m,n} = \int_{(D)} \left\{ \frac{\partial u_m}{dx}\,\frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial u_m}{\partial y}\,\frac{\partial u_n}{\partial y} + \xi_0 u_m u_n \right\} d\tau + \int_{(C)} h u_m u_n ds\,,$$

gdzie u_m, u_n oznaczają funkcye z poprzedniego rozdziału.

---

[1]) Obok szeregu $u(x,y)=\sum_0^\infty u_k\eta^k$, który zwać będziemy szeregiem u, uważajmy dwa szeregi I i δ, określone równościami $I=\sum_0^\infty \eta^k \sqrt{I_{2k}}$, $\delta=\sum_{k=0}^\infty \delta_k.\eta^k$, gdzie I_{2k} określone są równaniami (8) (str. 74), zaś δ_k oznaczają maxima modułów $|u_k(x,y)|$ w obszarze D, (a tamaximum istnieje); oznaczmy przez R', względnie R''. promienie jednostajnej zbieżności szeregów I, względnie δ. Wskutek nierówności (10) (str. 74) jest $R' \geqslant \frac{\sqrt{\xi_0}}{(4c+2)\sqrt{T}}$. Ponieważ $|u_k|<\delta_k$, więc, gdy jest $|\eta|<R''$, to jest szereg jest zbieżny u, czyli $R\geqslant R''$. Z jednostajnej zbieżności szeregu u wynika znów, że, gdy tylko jest $0<r_1<R$, to jest $\lim_{k=0} (v_k.r_1{}^k)=0$ i to jednostajnie w całym obszarze D, a więc istnieje stała dodatnia A, niezależna od zmiennych (x,y) taka, iż jest $|u_k|<\frac{A}{r_1{}^k}$, a więc jest też $\delta_k<\frac{A}{r_1{}^k}$, przeto szereg δ jest jednostajnie zbieżny dla $|\eta|<r_1$; ponieważ liczba r_1 jest dowolna, byle dodatnia i mniejsza od liczby R, więc jest $R''\geqslant R$. Musi być tedy $R=R''$. Wykażemy, że jest $R'=R''$. Z nierówności (9) (str. 74) wynika, że jest $\delta_k<\frac{4c+2}{\sqrt{\xi_0}}\sqrt{I_{2k-2}}$, przeto jest $R''\geqslant R'$, a z nierówności $\sqrt{I_{2k}}=\sqrt{\int_{(D)} u^2{}_k ds}\leqslant\delta_k\sqrt{T}$ wynika, że jest też $R'\geqslant R''$, a więc jest $R'=R''$. Szeregi u, δ, I mają przeto jednakowe promienie jednostajnej zbieżności.

Na mocy twierdzenia Greena jest w przypadku $h'=0$, jak w przypadku $h'=1$:

$$I_{m,n}=\int\limits_{(D)} u_m u_{n-1} d\tau = \int\limits_{(D)} u_{m-1} u_n \, d\tau ,$$

stąd łatwo wykazać, że:

$$I_{m,n}=I_{m-1,n+1}=I_{m-2,n+2}= \ldots = I_{m+1,n-1}=I_{m+2,n-2}= \ldots$$

czyli całki $I_{m,n}$ mają tę samą wartość przy różnych wartościach liczb m,n, byleby suma skaźników $m+n$ zachowała tę samą wartość, więc wolno położyć:

$$I_{m,n}=I_{m+n-1} .$$

Całka I_{2k} mają wartość dodatnią; kładąc $m=k$, $n=k$, otrzymujemy:

$$I_{2k-1}=\int\limits_{(D)}\left\{\left(\frac{\partial u_k}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_k}{\partial y}\right)^2+\xi_0 u_k^2\right\} ds+\int h u_k^2 ds.$$

Na mocy już raz cytowanego twierdzenia p. Zaremby (str. 56), gdy U oznacza dowolną funkcyę rzeczywistą, byle całka:

$$\int\limits_{(D)}\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\xi_0 U^2\right\} d\tau$$

miała znaczenie, to jest:

$$\int\limits_{(D)}\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\xi_0 U^2\right\} d\tau - H\int\limits_{(C)} U^2 ds>0 ,$$

jeżeli tylko liczba ξ_0 będzie także taka, iż jest:

$$\xi_0>16c^2H^2,$$

przeto jest:

$$I_{2k-1}>0.$$

Podstawiając $lu_m+\lambda u_n$ zamiast u_k w całce I_{2k-1}, otrzymamy formę kwadratową co do liczb l,λ nieujemną, więc jej wyróżnik nie może być dodatni, a więc jest:

$$I^2_{m+n-1}\leqslant I_{2m-1} . I_{2n-1} ,$$

a kładąc $m=n-1=k$, otrzymujemy:

(17) $$I^2_{2k}\leqslant I_{2k-1} . I_{2k+1} ,$$

nadto z równości:

$$I_{2k-1}=\int\limits_{(D)} u_k u_{k-1} d\tau$$

otrzymujemy:

(18) $$I^2_{2k-1}\leqslant I_{2k} . I_{2k-2} ,$$

czyli dla każdego całkowitego i nieujemnego p jest:

(19) $$I^2_p\leqslant I_{p-1} . I_{p+1} ,$$

nadto z nierówności (17) wypływa:

(20) $$\frac{I_{2k-1}}{I_{2k-2}}\leqslant\sqrt{\frac{I_{2k}}{I_{2k-2}}}\leqslant\frac{I_{2k}}{I_{2k-1}} .$$

Uważajmy teraz następujący ciąg liczb:

(21) $$\frac{I_{-1}}{I_0},\ \frac{I_0}{I_1},\ \frac{I_1}{I_2},\ \frac{I_2}{I_3},\ \ldots ;$$

na mocy nierówności (19) liczby te tworzą ciąg nigdy nierosnący, a że są stale dodatnie, więc mają granicę (nieujemną), którą oznaczymy przez R' i będzie:

(22) $$\frac{I_p}{I_{p+1}}\geqslant R'. \qquad (p=-1,0,1,2,\ldots)$$

W przypisku na str. 77 wykazaliśmy, że liczba R jest także promieniem zbieżności szeregu:

(23) $$I=\sum_{k=0}^{\infty}\eta^k\sqrt{I_{2k}};$$

okażemy, że jest $R=R'$ tym sposobem, iż udowodnimy zbieżność dla $|\eta|<R'$, a rozbieżność dla $|\eta|>R'$.

Oznaczmy bowiem przez R_1 taką liczbę dodatnią, by, będąc bliską dowolnie liczby R', była od niej mniejsza i niech będzie $|\eta|\leqslant R_1$: na mocy nierówności (20) i (22) jest:

$$\left|\eta\sqrt{\frac{I_{2k}}{I_{2k-2}}}\right|\leqslant R_1 . \frac{I_{2k}}{I_{2k-1}}<\frac{R_1}{R'}<1.$$

Niech teraz liczba R_2, będąc choćby dowolnie bliską liczby R', jest od niej większa i niech będzie $|\eta|>R_2$; będzie istniała taka liczba naturalna k', iż dla wszystkich liczb k, nie mniejszych od liczby k', jest:

$$R_2>\frac{I_{2k-2}}{I_{2k-1}} ,$$

przeto jest dla $k \geqslant k'$:

$$\left| \eta \cdot \sqrt{\frac{I_{2k}}{I_{2k-2}}} \right| > R_2 \cdot \frac{I_{2k-1}}{I_{2k-2}} > 1 \,,$$

stąd więc wynika, jak zapowiedzieliśmy, $R = R'$.

Wykażemy z kolei, że można zawsze tak obrać funkcyę $F(x,y)$, iż ciąg (21), dla niej utworzony, będzie miał granicę tak wielką, jak chcemy.

Oznaczmy przez $a_1, a_2, \ldots, a_p$ p stałych rzeczywistych, przez $F_1, F_2, \ldots, F_p$, p funkcyj obszaru D o tych samych własnościach ciągłości, co dotychczasowa funkcya $F(x,y)$, i połóżmy:

$$F'(x,y) = \sum_{k=1}^{p} a_k F_k(x,y). \tag{24}$$

Oznaczmy przez $u'_0, u'_1, \ldots, u'_k \ldots$ funkcye, w które przechodzą funkcye $u_0, u_1 \ldots u_k \ldots$, gdy za funkcyę $F(x,y)$ podstawimy funkcyę $F'(x,y)$; nietrudno się przekonać, że funkcye $u'_0, u'_1 \ldots u'_k \ldots$ wyrażają się liniowo i jednorodnie przez liczby $a_1, a_2, \ldots, a_p$ tak, iż jest:

$$u'_k = \sum_{j=1}^{p} a_j v_{jk} \,,$$

gdzie v_{jk} są odpowiedniemi funkcyami. Oznaczmy przez I'_k całkę, w którą przechodzi całka I_k, gdy zamiast funkcyi $F(x,y)$ użyjemy funkcyi $F'(x,y)$, i uważajmy ciąg liczb:

$$\frac{I'_{-1}}{I'_0} \,; \quad \frac{I'_0}{I'_1} \,; \quad \frac{I'_1}{I'_2} \,; \ldots \tag{25}$$

granicę tego ciągu oznaczmy przez R', będzie ona, jak już wiemy, promieniem jednostajnej zbieżności szeregu:

$$u' = \sum_{k=0}^{\infty} u'_k \eta^k. \tag{26}$$

Okażemy, że można liczbę R' uczynić dowolnie wielką.

Wiadomo z twierdzenia P o i n c a r é g o, że byle liczba p była większa od pewnej liczby p_0 dodatniej i zależnej od krzywej C, to można wyznaczyć liczby $a_1, a_2, \ldots, a_p$ z układu co najwyżej $p-1$ równań liniowych i jednorodnych, by, niezależnie od funkcyi $v_{1k}, v_{2k}, \ldots, v_{pk}$, zachodziła nierówność:

$$\int\limits_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial u'_k}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'_k}{\partial y}\right)^2 \right\} d\tau \geqslant 2Ep \int\limits_{(D)} u'^2_k d\tau \,, \tag{27}$$

przyczem E oznacza stałą dodatnią, zależną jedynie od krzywej C.

Na mocy wzoru (11) (str. 56) mamy:

$$\int\limits_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial u'_k}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'_k}{\partial y}\right)^2 + \xi_0 u'^2_k \right\} d\tau > \frac{\sqrt{\xi_0}}{4c} \int\limits_{(C)} u'^2_k ds \,, \tag{28}$$

jeżeli więc założymy, że jest $\sqrt{\xi_0} > 8cH$, gdzie H oznacza górną granicę modułu funkcyi h, to będzie także:

$$\int\limits_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial u'_k}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'_k}{\partial y}\right)^2 + \xi_0 u'^2_k \right\} d\tau + 2 \int\limits_{(C)} h u'^2_k ds > 0. \tag{29}$$

Jeżeli do tego dodamy powyższą nierówność (27) i podzielimy przez 2, to otrzymamy:

$$\int\limits_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial u'_k}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'_k}{\partial y}\right)^2 + \frac{\xi_0}{2} u'^2_k \right\} d\tau + \int\limits_{(C)} h u'^2_k ds > Ep \int\limits_{(D)} u'^2_k d\tau \,,$$

a więc tem bardziej:

$$\int\limits_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial u'_k}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'_k}{\partial y}\right)^2 + \xi_0 u'^2_k \right\} d\tau + \int\limits_{(C)} h u'^2_k ds > Ep \int\limits_{(D)} u'^2_k d\tau \,,$$

czyli:

$$\frac{I'_{2k-1}}{I'_{2k}} > Ep,$$

a stąd:

$$R' > Ep. \tag{30}$$

Szereg (26) jest więc jednostajnie i bezwzględnie zbieżny w kole o promieniu R' większym od liczby Ep, która się zwiększa proporcyonalnie do liczby p.

Jeszcze dodać należy, że w przypadku $h' = 0$ wprost z nierówności (27) wnioskujemy, że jest:

$$\int\limits_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial u'_k}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'_k}{\partial y}\right)^2 + \xi_0 u'^2_k \right\} d\tau > 2Ep \int\limits_{(D)} u'^2_k d\tau \,,$$

a stąd wynika nierówność:

$$R' > 2Ep. \tag{31}$$

Postaramy się funkcyę $u(x,y)$ wyrazić przez $u'(x,y)$ i w tym celu tak wyznaczymy funkcye $F_1, F_2, \dots, F_p$, aby było:

$$F'(x,y) = a_1 F(x,y) + \sum_{j=1}^{p-1} a_{j+1} u_{j-1}; \tag{32}$$

jeżeli odpowiednio obierzemy stałe $a_1, a_2, \dots, a_p$, to zachodzić będzie nierówność (31) lub (32). Jak łatwo wykazać, będzie:

$$u'_k = a_1 u_k + \sum_{j=1}^{p-1} a_{j+1} u_{k+j}, \qquad (k=0,1,2,\dots)$$

wobec czego będzie:

$$u' = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_1 u_k + \sum_{j=1}^{p-1} a_{j+1} u_{k+j} \right) . \eta^k,$$

co z powodu zbieżności bezwzględnej, gdy $|\eta| < R$, można napisać w formie:

$$u' = a_1 u + a_2 w_1 + \dots + a_p w_{p-1}, \tag{33}$$

gdzie kładziemy:

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_{k+j} \eta^k = w_j. \qquad (j=1,2,\dots,p-1) \tag{34}$$

Szeregi w_j mają promień R jednostajnej zbieżności.

Z równości (34) otrzymujemy:

$$w_j - \eta w_{j+1} = u_j; \quad u - \eta w_1 = u_0. \qquad (j=1,2,\dots,p-2) \tag{35}$$

Równania (33) i (35) uważajmy za układ p równań o niewiadomych $u, w_1, w_2, \dots, w_{p-1}$. Wyznacznikiem ich będzie wyrażenie:

$$R(\eta) = \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3, \dots, & a_{p-1}, & a_p \\ 1, & -\eta, & 0, \dots, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & -\eta, \dots, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, \dots, & 0, & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0, & 0, & 0, \dots, & 1, & -\eta \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \{ a_p + a_{p-1}\eta + \dots + a_1 \eta^{p-1} \},$$

a więc nie jest identycznie zerem, i przeto będzie:

$$u = \frac{\begin{vmatrix} u', & a_2, \dots, & a_{p-1}, & a_p \\ u_0', & -\eta, \dots, & 0, & 0 \\ u_1', & 1, \dots, & 0, & 0 \\ . & . & . & . \\ u_{p-2}, & 0, \dots, & 1, & -\eta \end{vmatrix}}{R(\eta)} = \frac{\Phi(x,y,\eta)}{R(\eta)}.$$

gdzie funkcya $\Phi(x,y,\eta)$ wyraża się liniowo i jednorodnie przez funkcye $u', u_0, u_1, \dots, u_{p-2}$, przeto ma znaczenie określone dla $|\eta| < R'$, i dla tych liczb η ma określoną granicę $\left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_i$.

Oznaczmy przez Σ koło, wykreślone z punktu $(-\xi_0)$, jako środka, o promieniu R'. Przeto funkcya $u(x,y)$ może mieć tylko te liczby, jako bieguny w kole Σ, które są pierwiastkami równania $R(\eta) = 0$ i których obszary geometryczne będą leżały wewnątrz koła Σ. Okażemy, że te bieguny są pojedyńcze.

Załóżmy w tym celu, że wyrażenie $\frac{\Phi(x,y,\eta)}{R(\eta)}$ jest już nieskracalne co do liczby η; otóż funkcya $\Phi(x,y,\eta)$, jak łatwo się przekonać, spełnia wewnątrz obszaru D równanie:

$$\Delta\Phi + (\eta - \xi_0)\Phi + F(x,y) R(\eta) = 0,$$

a wzdłuż krzywej C warunek:

$$h' \left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_i = h\Phi$$

pod warunkiem $|\eta| < R'$.

Jeżeliby liczba η_1 była biegunem co najmniej dwukrotnym funkcyi $u(x,y)$, byłoby $R(\eta_1) = 0$, $R'(\eta_1) = \left(\frac{dR(\eta)}{d\eta}\right)_{\eta=\eta_1} = 0$. Oznaczmy dalej:

$$\Phi_1 = \Phi(x,y,\eta_1); \quad \Phi' = \frac{d\Phi(x,y,\eta)}{d\eta}; \quad \Phi'_1 = \left(\frac{d\Phi(x,y,\eta)}{d\eta}\right)_{\eta=\eta_1}.$$

Stosując twierdzenie Greena do funkcyi Φ_1, Φ'_1, otrzymujemy: $\Phi_1 \equiv 0$ w całym obszarze D, a więc funkcya $\Phi(x,y,\eta)$ jest podzielna przez dwumian $\eta - \eta_1$ wbrew założeniu.

A że promień R' koła Σ można uczynić dowolnie wielkim przez odpowiedni dobór liczby p, więc funkcya u może mieć w skończoności jedynie bieguny pojedyńcze.

Oznaczywszy przez $\mathfrak{U}(x,y)$ residuum funkcyi $u(x,y)$ odnośnie do bieguna, mamy:

$$u = \frac{\mathfrak{U}}{\eta - \eta_1} + V(x,y,\eta),$$

gdzie funkcya $V(x,y,\eta)$ będzie holomorficzna w punkcie η_1. Z własności funkcyi $u(x,y)$ wynika, że wewnątrz obszaru D jest:

$$\Delta \mathfrak{U} + (\eta-\eta_1)\Delta V + (\eta-\xi_0)\{\mathfrak{U} + (\eta-\eta_1)V\} + (\eta-\eta_1)F(x,y) = 0\,,$$

a wzdłuż krzywej C jest:

$$h'\left\{\frac{d\mathfrak{U}}{dN} + (\eta-\eta_1)\frac{dV}{dN}\right\}_i = h\{\mathfrak{U} + (\eta-\eta_1)V\}_i\,.$$

Kładąc $\eta=\eta_1$, co wolno, otrzymujemy, że residuum $\mathfrak{U}(x,y)$ spełnia równanie:

$$\Delta\mathfrak{U} + (\eta_1-\xi_0)\mathfrak{U} = 0 \quad \text{wewnątrz obszaru } D\,,$$

$$h'\left(\frac{d\mathfrak{U}}{dN}\right)_i = h(\mathfrak{U})_i \quad \text{wzdłuż krzywej } C.$$

Na mocy III-go rozdziału wynika:

1) bieguny funkcyi u muszą być rzeczywiste;

2) w przypadku $h'=0$ są one położone na dodatniej pół-osi rzeczywistej parametru ξ; w przypadku $h'=1$ bieguny są położone na dodatniej i ujemnej pół-osi rzeczywistej parametru, ale bezwzględna wartość ujemnych biegunów nie może być większa od większej z liczb $\frac{16c^2}{L^2}$, $64c^2H^2$.

Gdyby residuum było funkcyą nierzeczywistą, to położylibyśmy $\mathfrak{U}=\mathfrak{U}_1+i\mathfrak{U}_2$, gdzie $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ oznaczają funkcye rzeczywiste zmiennych x,y i oczywiście każda z nich spełniałaby te same warunki, co funkcya $\mathfrak{U}$.

Zbadajmy dodatkowo, czy funkcya $u(x,y)$ musi mieć co najmniej jeden biegun, położony w skończoności. Gdyby bowiem tak nie było, musiałby promień zbieżności funkcyi $u(x,y)$ być nieskończenie wielkim, a że ciąg (21) (str. 79) jest nigdy nierosnącym, więc pierwszy jego wyraz musiałby mieć mianownik równy zeru $I_0=0$, czyli w całym obszarze D byłoby $u_0=0$, a że jest $u_0(x,y) = \int\limits_{(D)} F(x',y')G(x,y,x',y',-\xi_0)d\tau$, więc musiałaby być funkcya $F(x',y')$ bardzo specyalnej natury.

§ 40. Studyum funkcyi $u(x,y)$, jej biegunów i residuów zapewniło nas o istnieniu pewnej kategoryi funkcyj rzeczywistych; wyobraźmy sobie ich zbiór i wybierzmy te z nich, które są liniowo od siebie niezależne. Możemy więc powiedzieć:

Do krzywej C, wielkości $h'=0,1$ i funkcyi h, ciągłej wzdłuż krzywej C istnieje ciąg nieograniczony funkcyj rzeczywistych, liniowo od siebie niezależnych: U_1, U_2, U_3, ... zwanych funkcyami harmonicznemi, o następujących własnościach:

1) wewnątrz obszaru D, ograniczonego krzywą C, czynią one zadość równaniom $U_k+\xi_k U_k=0$ ($k=1,2,3,...$), gdzie liczby ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... są rzeczywiste, dla przypadku $h'=0$ dodatnie, dla przypadku $h'=1$ dodatnie i ujemne, byle nie mniejsze od mniejszej z liczb $-\frac{16c^2}{L^2}$, $-64c^2H^2$; nadto jest $\xi_k\leqq\xi_{k+1}$;

2) wzdłuż krzywej C funkcye U_k spełniają równanie $h'\left(\frac{dU_k}{dN}\right)_i = h(U_k)_i$.

Milcząco zawiera powyższe twierdzenie pewien fakt, który musimy jeszcze uzasadnić.

Wyobraźmy sobie zbiór liniowo od siebie niezależnych funkcyj rzeczywistych—okażemy, że jest odliczalny, że więc można go uszykować w ciąg, jakeśmy to uczynili:

W każdym razie ze wspomnianego zbioru możemy wyjąć pewien ciąg funkcyj harmonicznych: U_1, U_2, U_3, ... ; należących do liczb ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... gdzie jest $\xi_k\leqq\xi_{k+1}$.

Kładąc:

$$U_k = \Phi - v, \quad \Phi = \frac{\xi_k+\xi_0}{2\pi}\int\limits_{(D)} u_k f(\varrho,\mu_0)d\tau, \quad \Delta V - \xi_0 v = 0$$

i rozumując, jak na str. 59 i 60, wykazać łatwo istnienie granicy $\left(\frac{dU_k}{dN}\right)_i$.

Uważajmy dwie różne funkcye harmoniczne U_k, U_j i stosujmy do nich twierdzenie G r e e n a, z którego otrzymujemy:

$$(\xi_k-\xi_j)\int\limits_{(D)} U_k U_j d\tau = 0\,,$$

jeżeli jest $k\neq j$, to z tego nie wynika, że jest także:

$$\int\limits_{(D)} U_k U_j d\tau = 0\,, \tag{36}$$

co zachodzi na pewne, gdy jest $\xi_k\neq\xi_j$; ale można się zawsze tak urządzić, aby z nierówności $k\neq j$ wynikała równość (36). Załóżmy bowiem, że jest $\xi_1=\xi_2=....=\xi_n\neq\xi_{n+1}$, i połóżmy:

$$\begin{aligned}
U'_1 &= a_{11}U_1\,,\\
U'_2 &= a_{21}U_1 + a_{22}U_2\,,\\
U'_3 &= a_{31}U_1 + a_{32}U_2 + a_{33}U_3\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
U'_n &= a_{n1}U_1 + a_{n2}U_2 + \ldots + a_{nn}U_n,
\end{aligned}$$

gdzie stałe $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ jak łatwo wykazać, można tak wyznaczyć, iż będzie:

$$\int_{(D)} U'^2_k d\tau = 1\,; \quad \int_{(D)} U'_k U'_j \, d\tau = 0 \qquad \begin{pmatrix} k \neq j \\ k = 1,2,\ldots,n \\ j = 1,2,\ldots,n \end{pmatrix}$$

nadto jest wewnątrz obszaru D:

$$\Delta U'_k + \xi_1 U'_k = 0\,,$$

a wzdłuż krzywej C:

$$h'\left(\frac{dU'_k}{dN}\right)_i = h\,(U_k)_i\,,$$

nadto funkcye U'_k będą od siebie liniowo niezależne.

Można więc zawsze przypuścić, że funkcye $U_1, U_2 \ldots, U_n \ldots$ są tak wybrane, iż jest:

(37) $$\int_{(D)} U^2_k d\tau = 1\,; \quad \int_{(D)} U_k U_j \, d\tau = 0. \qquad \begin{pmatrix} k \neq j \\ k = 1,2,3,\ldots \\ j = 1,2,3,\ldots \end{pmatrix}$$

Połóżmy:

$$V = \sum_1^p a_k U_k\,; \quad \Phi = \sum_1^p a_k \xi_k U_k$$

i widoczne, że jest wewnątrz obszaru D:

$$\Delta V + \Phi = 0\,,$$

wzdłuż krzywej C:

$$h'\left(\frac{dV}{dN}\right)_i = h\,(V)_i\,,$$

gdzie $a_1, a_2, a_3, \ldots$ oznaczają p stałych dotąd dowolnych.

Jest:

$$\int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 - v\Phi \right\} d\tau + \int_{(C)} h V^2_i \, ds = 0.$$

Na mocy twierdzenia Poincarégo można stałe $a_1, a_2, \ldots, a_p$ tak wyznaczyć, byle ich liczba p nie była mniejsza od pewnej skończonej liczby p_0, iżby było:

$$\int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \xi_0 V^2 \right\} d\tau + \int_{(C)} h(V^2)_i \, ds > Ep \int_{D} V^2 d\tau,$$

przyczem E oznacza stałą dodatnią, zależną jedynie od krzywej C; przeto jest:

$$\int_{(D)} V\Phi d\tau > (Ep - \xi_0) \int_{(D)} V^2 d\tau,$$

przyczem niech będzie: $Ep - \xi_0 > 0$; stąd kolejno będzie:

$$\int_{(D)} V^2 d\tau \int_{(D)} V\Phi d\tau \geqslant \left(\int_{(D)} V\Phi d\tau \right)^2 > (Ep - \xi_0)^2 \left(\int_{D} V^2 \, d\tau \right)^2,$$

$$\int_{(D)} \Phi^2 d\tau > (Ep - \xi_0)^2 \int_{(D)} V^2 d\tau,$$

a że jest:

$$\int_{(D)} \Phi^2 d\tau = \sum_1^p a^2_i \xi^2_i \leqslant \xi^2_p \sum_{i=1}^p a^2_i\,, \quad \int_{(D)} V^2 \, d\tau = \sum_{i=1}^p a^2_i\,,$$

więc istnieje stała dodatnia E', która zależy od krzywej C tak, iż jest:

(38) $$\xi_p > E'p\,,$$

gdy bowiem liczba p jest większa od pewnej granicy p_1, liczby ξ_p nie mogą być ujemne.

Stąd wynika, że funkcye harmoniczne tworzą zbiór funkcyi odliczalny.

§ 41. Dokończymy studyum funkcyi $u(x,y)$.

Przeprowadzając ją analitycznie, jako funkcyę parametru ξ, otrzymamy funkcyę, spełniającą poza biegunami wewnątrz obszaru D równanie:

$$\Delta u + \xi u + F(x,y) = 0\,,$$

a wzdłuż krzywej C warunek $h'\left(\frac{du}{dN}\right)_i = h(u)_i$. A więc jeżeli liczba ξ' nie jest żadną z liczb ciągu:

(39) $$\xi_1\,, \xi_2\,, \xi_3\,, \ldots, \xi_p\,, \ldots,$$

istnieje funkcya u, która spełnia równania:

$$\Delta u + \xi' u + F(x,y) = 0\,, \quad h'\left(\frac{du}{dN}\right)_i = h(u)_i\,,$$

pierwsze wewnątrz obszaru D, drugie wzdłuż krzywej C. Istnieje tylko jedno rozwiązanie powyższego zagadnienia; różnica v dwóch rozwiązań spełniałaby warunki:

$$\Delta v + \xi' v = 0\,; \quad h'\left(\frac{dv}{dN}\right)_i = h(v)_i\,,$$

pierwszy wewnątrz obszaru D, drugi wzdłuż krzywej C, ale dla liczb ξ' różnych od liczb ciągu (39), nie istnieją funkcye harmoniczne.

Wyprowadzimy stąd ważne wnioski.

Załóżmy, że funkcya $v(x,y)$ spełnia równania:

$$\Delta v + \xi v = 0\,, \quad h'\left(\frac{dv}{dN}\right)_i = h(v)_i + \tau\,,$$

pierwsze wewnątrz obszaru D, drugie wzdłuż krzywej C, przyczem τ oznacza daną funkcyę. Zbadajmy, czy taka funkcya istnieje. Niech liczba ξ_0, będąc nawet zespoloną, spełnia nierówności (15) (str. 41) i (31) (str. 45); istnieje tedy jedna, jedyna funkcya v_0, która czyni zadość warunkom:

$$\Delta v_0 + \xi_0 v_0 = 0\,; \quad h'\left(\frac{dv_0}{dN}\right)_i = h(v_0)_i + \tau\,,$$

pierwszemu wewnątrz obszaru D, drugiemu wzdłuż krzywej C; jeżeli położymy:

$$v = v_0 + (\xi - \xi_0) v'\,,$$

to wewnątrz obszaru D ma funkcya v' spełniać równanie:

$$\Delta v' + \xi v' + v_0 = 0\,,$$

a wzdłuż krzywej C ma być:

$$h'\left(\frac{dv'}{dN}\right)_i = h(v)_i.$$

Ponieważ funkcya v_0 może przyjąć na siebie rolę funkcyi $F(x,y)$, więc, o ile ξ nie należy do ciągu (39), istnieje funkcya v' i tylko jedna, a przeto istnieje funkcya v i tylko jedna.

Wobec tego istnieje jedna, jedyna funkcya G r e e n a, o ile parametr ξ nie należy do ciągu (39).

Zbadajmy, czy istnieje funkcya G r e e n a dla jakiejkolwiek z liczb (np. liczby ξ_k) ciągu (39). Otoczmy biegun x,y funkcyi G r e e n a, o której zakładamy chwilowo, że istnieje, i stosujmy twierdzenie G r e e n a do funkcyj $G(x,y,x',y',\xi_k)$ i $U_k(x,y)$; jeżeli przez Σ oznaczymy koło, wyłączające z obszaru D biegun x,y, to mamy:

$$\int\limits_{(C)}\left(U_k\frac{dG}{dN} - G\frac{dU_k}{dN}\right)_i ds + \int\limits_{(\Sigma)}\left(U_k\frac{dG}{dN} - G\frac{dU_k}{dN}\right) ds = 0\,,$$

pierwsza całka jest zerem, druga ma granicę $[-U_k(x,y)]$, gdy koło Σ ściąga się do swego punktu środkowego; otrzymalibyśmy więc:

$$-U_k(x,y) = 0\,,$$

a że punkt x,y jest dowolnym punktem, byle wewnątrz obszaru D położonym, więc jest stale $U_k = 0$ wbrew założeniu. Dla punktów ciągu (39) funkcye G r e e n a istnieć więc nie mogą.

VI. ROZWINIĘCIA NA SZEREGI FUNKCYJ HARMONICZNYCH.

§ 42. Podamy dwa twierdzenia, które p. Z a r e m b a nazywa twierdzeniem S t e k ł o w a, w swej przezemnie w przedmowie cytowanej pracy, i których dowód w przypadku płaszczyzny jest zupełnie ten sam, co dla przestrzeni.

I) Jeżeli funkcya dowolna i rzeczywista $F(x,y)$ jest taka, że całka:

(1) $$\mathfrak{L} = \int\limits_{(D)} (F(x,y))^2 d\tau$$

ma znaczenie określone, to szereg jest $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A^2_k$ zbieżny i jest:

(2) $$\sum_{k=1}^{\infty} A^2_k \leqq \mathfrak{L}\,,$$

gdzie jest:

(3) $$A_k = \int\limits_{(D)} F(x',y')\, U_k(x',y') d\tau. \qquad (k=1,2,3,\ldots)$$

II) Jeżeli powyższa funkcya $F(x,y)$ posiada jeszcze pochodne pierwsze $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ ciągłe, prócz może w jednym punkcie x_0,y_0, położonym wewnątrz obszaru D, gdzie mogą nawet nie istnieć pochodne, ale w okolicy tego punktu mają być ograniczone, a nadto w przypadku $h'=0$ spełnia wzdłuż krzywej C równość:

(4) $$(F(x,y))_i = 0\,,$$

będzie:

(5) $$\int\limits_{(D)} (F(x,y))^2 d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} A^2_k\,,$$

przyczem liczby A_k są określone wzorami (3).

§ 43. Uważajmy punkt x,y, leżący wewnątrz obszaru D; otoczmy go kołem Σ takiem, aby leżało wewnątrz obszaru D. Załóżmy, że dla parametru ξ istnieje funkcya Greena i połóżmy $G(x,y,x',y',\xi)=G_1+iG_2$ i do funkcyj G_1, G_2, U_k stosujmy twierdzenie Greena. Założywszy, że koło Σ ściąga się do swego środka (x,y), otrzymamy:

$$U_k(x,y)=(\xi_k-\xi)\int\limits_{(D)} U_k(x',y')\,G(x,y,x',y',\xi)\,d\tau. \tag{6}$$

Niech teraz liczba m_0 będzie dodatnia i większa od każdej z liczb $\frac{16c^2}{L^2}$, $64c^2H^2$, gdzie H oznacza górną granicę modułu funkcyi h; niech dalej m oznacza również liczbę rzeczywistą i dodatnią i niech będzie $m>m_0$; stąd wynika, że funkcya $G(x,y,x',y',-m)$ istnieje, a ponieważ, jak łatwo wykazać, całka:

$$\int\limits_{(D)} \{G(x,y,x',y',-m)\}^2\,d\tau\ ^{1)}$$

ma sens, przeto, stosując pierwsze z t. zw. twierdzeń Steklowa (str. 89), otrzymujemy nierówność:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^2_k \leqslant \int\limits_{(D)} \{G(x,y,x',x',-m)\}^2\,d\tau,$$

gdzie jest:

$$A_k=\int\limits_{(D)} U_k(x',y')\,G(x,y,x',y',-m)\,d\tau=\frac{U_k(x,y)}{m+\xi_k},$$

a to na mocy wzoru (6). Przeto jest:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{U^2_k(x,y)}{(m+\xi_k)^2}\leqslant I(x,y),$$

gdzie $I(x,y)$ jest wielkością, zbadaną w rozdziale czwartym; ponieważ obecnie liczba $\xi=-m$ spełnia nierówności (15) (str. 41) i (31) (str. 45), więc według nierówności (22) (str. 65) jest:

$$I(x,y)<\frac{(4c+2)^2}{m}.$$

[1]) Funkcya $G(x,y,x',y',-m)$ jest rzeczywista.

Zauważmy dalej, że nawet w przypadku $h'=1$ istnieje taka liczba dodatnia N, iż, gdy jest $n\geqslant N$, każda liczba ξ_n jest już dodatnia i większa od liczby m_0; wobec tego wolno przyjąć $m=\xi_n$, byle było $n\geqslant N$; a nadto dla liczby $(-\xi_n)$ będzie wtedy istniała funkcya Greena; jest więc:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{U^2_k(x,y)}{(\xi_n+\xi_k)^2}<\frac{(4c+2)^2}{\xi_n},$$

a więc tembardziej jest:

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{U^2_k(x,y)}{(\xi_n+\xi_k)^2}<\frac{(4c+2)^2}{\xi_n},$$

a że dla $k\geqslant n\geqslant N$ jest każda z liczb ξ_k dodatnia i jest $\xi_k\geqslant\xi_n$, więc tembardziej jest:

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{U^2_k(x,y)}{\xi^2_k}<\frac{(4c+2)^2}{\xi_n}; \qquad (n\geqslant N) \tag{7}$$

jeżeli punkt x,y, znajdujący się wewnątrz obszaru D, dąży nieograniczenie do dowolnego punktu krzywej C, to liczniki ułamków lewej strony będą miały granicę $(U^2_k(x,y))_l$ i co najwyżej znak nierówności musiałby być zastąpiony przez znak równości.

§ 44. Uważajmy dwie funkcye Greena: $G(x_0,y_0,x,y,\xi)$, $G(x_0,y_0,x,y,\xi')$ obszaru D o spólnym biegunie x_0,y_0, leżącym wewnątrz obszaru D i o parametrach ξ,ξ' i utwórzmy funkcyę:

$$\psi(x_0,y_0,x,y,\xi,\xi')=\frac{G(x_0,y_0,x,y,\xi)-G(x_0,y_0,x,y,\xi')}{\xi-\xi'},$$

Metodą zupełnie analogiczną do tej, której użył p. Zaremba, wykaże się, że jest:

$$\int\limits_{(D)}|\psi(x_0,y_0,x',y',\xi,\xi')|^2\,d\tau=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{U^2_k(x_0,y_0)}{|(\xi-\xi_k)(\xi'-\xi_k)|^2}, \tag{8}$$

przyczem strona prawa jest szeregiem zbieżnym, o ile liczby ξ,ξ' nie są równe żadnej z liczb ξ_k, co jest samo przez się zrozumiałe. Obok tego uważajmy szereg:

$$K(x_0,y_0,x',y',\xi,\xi')=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{U_k(x',y')\,U_k(x_0,y_0)}{(\xi-\xi_k)(\xi'-\xi_k)}. \tag{9}$$

Łatwo udowodnić, że jest bezwzględnie i jednostajnie zbieżny, jakiekolwiek położenie mają punkty $(x_0\, y_0)$, (x',y') w obszarze D, o ile tylko parametry ξ, ξ' są różne od liczb $\xi_k (k=1,2,3,\ldots)$.

Otóż jest:

$$\left|\frac{U_k(x',y')U_k(x_0,y_0)}{(\xi-\xi_k)(\xi'-\xi_k)}\right| < \frac{1}{2}\left\{\frac{U^2{}_k(x',y')}{|\xi-\xi_k|^2} + \frac{U^2{}_k(x_0,y_0)}{|\xi'-\xi_k|^2}\right\},$$

więc dość zbadać szereg np.:

$$\sum_1^\infty \frac{U^2{}_k(x,y)}{|\xi-\xi_k|^2}.$$

Można taką stałą dodatnią N' obrać, by dla $k \geqslant N'$ było:

$$\left|\frac{\xi}{\xi_k}\right| < \frac{1}{A},$$

gdzie A jest liczbą rzeczywistą, dodatnią i dowolną, byle było $A>1$, wobec czego jest:

$$\frac{\xi^2{}_k}{|\xi-\xi_k|^2} < \frac{A^2}{(A-1)^2}.$$

Oznaczając przez n' liczbę większą od większej z liczb N i N', otrzymujemy na mocy nierówności (7) (str. 91):

$$\sum_{n'}^\infty \frac{U^2{}_k(x,y)}{|\xi-\xi_k|^2} = \sum_{n'}^\infty \frac{U^2{}_k(x,y)}{\xi^2{}_k} \cdot \frac{\xi^2{}_k}{|\xi-\xi_k|^2} < \left(\frac{A}{A-1}\right)^2 \cdot \frac{(4c+2)}{\xi_{n'}},$$

stąd z łatwością wyniknie, że badany szereg jest jednostajnie i bezwględnie zbieżny w obszarze D.

Kładąc:

$$\varphi(x',y') = \psi(x_0,y_0, x',y', \xi,\xi') - K(x_0,y_0, x',y', \xi,\xi'),$$
$$\psi = \psi_1 + i\psi_2 ; \quad K = K_1 + iK_2,$$

łatwo wykazać, że jest:

$$\int\limits_{(D)} |\varphi|^2 d\tau = 0,$$

czyli jest w całym obszarze D: $\varphi \equiv 0$.

Przeto jest:

(10) $$G(x_0,y_0, x,y, \xi) = G(x_0,y_0, x,y, \xi') + (\xi-\xi') \sum_{k=1}^\infty \frac{U_k(x,y)\, U_k(x_0,y_0)}{(\xi-\xi_k)\,(\xi'-\xi_k)},$$

co nam tłómaczy, dlaczego funkcya G r e e n a nie istnieje dla żadnej z liczb ξ_k $(k=1,2,\ldots)$.

§ 45. Możemy teraz wyrachować nierówność dla całki:

$$I(x,y) = \int\limits_{(D)} |G(x,y, x',y', \xi)|^2 \, d\tau,$$

którą dotąd obliczyliśmy w przypadku, gdy parametr ξ czynił zadość pewnym nierównościom.

Kładąc:

$$\xi = \alpha + i\beta, \quad \xi' = \alpha - i\beta,$$
$$G(x_0,y_0, x,y, \xi) = G_1 + iG_2,$$

łatwo wykazać, że jest:

$$G(x_0,y_0, x,y, \xi') = G_1 - iG_2,$$

wobec czego ze wzoru (10) otrzymujemy:

$$G_2(x_0,y_0, x,y, \xi) = \beta \sum_{k=1}^\infty \frac{U_k(x,y)\, U_k(x_0,y_0)}{(\alpha-\xi_k)^2+\beta^2},$$

a stąd na mocy równości (str. 64):

$$I(x,y) = \frac{G_2(x,y, x,y, \xi)}{\beta}$$

wynika, że:

(11) $$I(x,y) = \sum_1^\infty \frac{U^2{}_k(x,y)}{(\alpha-\xi_k)^2+\beta^2},$$

przyczem strona prawa jest szeregiem jednostajnie zbieżnym w obszarze D, jakto można wykazać sposobem już przez nas użytym.

Załóżmy teraz, że obok funkcyi G r e e n a $G(x_0,y_0,x,y, \xi)$ mamy drugą funkcyę G r e e n a $G(x_0,y_0, x,y, \xi')$ o tym samym biegunie x_0,y_0, co poprzednia i dla tego samego obszaru D, nadto parametr:

$$\xi' = \varrho'_1 (\cos\theta' + i \sin\theta')$$

jest tak dobrany, że czyni zadość warunkom:

$$\frac{c}{L\sqrt{\varrho'_1}\, \sin^2\frac{\theta'}{2}} \leqslant \frac{1}{4}, \quad \frac{cH}{\sqrt{\varrho'_1}\, \sin\frac{\theta'}{2}} \leqslant \frac{1}{8},$$

pierwszemu z nich w przypadku $h'=0$, obydwom w przypadku $h'=1$. Niech nadto będzie:

$$\xi=\varrho_1(\cos\theta+i\sin\theta)\,,$$

i niech będzie parametr ξ' tak dobrany, iż jest:

$$\varrho_1\cos\theta=\varrho'_1\cos\theta'.$$

Otóż na mocy nierówności (22) (str. 65) jest:

$$(12)\qquad \int\limits_{(D)}|G(x,y,x',y',\xi')|^2 d\tau<\left(\frac{4c}{\sin\frac{\theta'}{2}}+2\right)^2\frac{1}{\varrho'_1\sin^2\frac{\theta'}{2}}$$

Kładąc $\xi'=\alpha'+i\beta'$, otrzymujemy z równości (11):

$$\int\limits_{(D)}|G(x,y,x',y',\xi')|^2 d\tau=\sum_1^\infty\frac{U^2_k(x,y)}{(\alpha'-\xi_k)^2+\beta'^2}\,,$$

przeto jest:

$$\frac{\int\limits_{(D)}|G(\xi)|^2 d\tau}{\int\limits_{(D)}|G(\xi')|^2 d\tau}=\frac{\sum\limits_1^\infty\frac{U^2_k(x,y)}{(\alpha-\xi_k)^2+\beta^2}}{\sum\limits_1^\infty\frac{U^2_k(x,y)}{(\alpha'-\xi_k)^2+\beta'^2}}.$$

Aby znaleść górną granicę prawej strony, połóżmy:

$$\frac{U^2_k(x,y)}{(\alpha-\xi_k)^2+\beta^2}=A_k\,;\quad\frac{U^2_k(x,y)}{(\alpha'-\xi_k)^2+\beta'^2}=B_k\,.$$

jeżeli przez C_k oznaczymy wartość stosunku $\frac{A_k}{B_k}$, to jest:

$$\frac{\sum\limits_1^\infty A_k}{\sum\limits_1^\infty B_k}=\frac{\sum\limits_1^\infty B_k C_k}{\sum\limits_1^\infty B_k}\leqslant\max(C_k),$$

jeżeli tylko takie maximum stosunków C_k istnieje.

Jeżeli przez X, X' i M_k oznaczymy obrazy geometryczne liczb ξ,ξ' ξ_k na płaszczyźnie zmiennej zespolonej ξ, będzie:

$$C_k=\frac{\overline{X'M_k}^2}{\overline{XM_k}^2}.$$

Ponieważ można założyć, że liczby β,β' są tego samego znaku, więc linia X,X' będzie prostopadłą do osi rzeczywistych. Jeżeli odległości punktów X,X' od najbliższego punktu M_k wynoszą l, względnie l', to będzie, jak łatwo wykazać:

$$\max(C_k)=\frac{l'^2}{l^2}\,,$$

przeto na mocy nierówności (12) jest:

$$(13)\qquad \int\limits_{(D)}|G(x,y,x',y'\,\xi)|^2 d\tau<\left(\frac{4c}{\sin\frac{\theta'}{2}}+2\right)^2\frac{1}{\varrho'_1\sin^2\frac{\theta'}{2}}\cdot\frac{l'^2}{l^2}\,,$$

o co nam chodziło.

§ 46. Uważajmy teraz całkę:

$$(14)\qquad W(x,y,\xi)=\int\limits_{(D)}F(x',y')\,G(x,y,x',y',\xi)\,d\tau\,,$$

przyczem o funkcyi $F(x',y')$ założymy, że może być nawet zespoloną, byle tylko całka:

$$(15)\qquad \mathfrak{E}=\int\limits_{(D)}|F(x',y')|^2 d\tau$$

miała znaczenie. Z równości (10) (str. 93) otrzymujemy przez całkowanie:

$$(16)\qquad W(x,y,\xi)-W(x,y,\xi')=(\xi-\xi')\sum_{k=1}^\infty\frac{A_k U_k(x,y)}{(\xi-\xi_k)(\xi'-\xi_k)}\,,$$

gdzie położyliśmy:

$$(16\text{ bis})\qquad A_k=\int\limits_{(D)}F(x',y')\,U_k(x',y')\,d\tau\,,\qquad (k=1,2,3,\ldots)$$

przyczem nadmienić wypada, że całki te mają znaczenie określone.

Przechodząc z parametrem ξ' do nieskończoności tak, aby jego argument θ', będąc od liczb 0 i 2π różnym, był stały, możemy założyć, że jest już takim, iż zachodzi nierówność (24) (str. 65):

$$|W(x,y,\xi')|^2 < \left(\frac{4c}{\sin\frac{\theta'}{2}} + 2\right)^2 \frac{\varrho}{\varrho'_1 \sin\frac{\theta'}{2}},$$

przyczem ϱ'_1 oznacza moduł parametru ξ'; wobec tego jest:

$$\lim_{\xi'=\infty} W(x,y,\xi') = 0,$$

gdy moduł, jak powiedzieliśmy, rośnie nieograniczenie, co zachodzi dla dowolnego punktu (x,y) obszaru D.

Jeszcze trzeba wykazać, że granica prawej strony w równości (16) dla $\xi'=\infty$ jest równa szeregowi granic poszczególnych wyrazów szeregu. W tym celu wykażemy, że do każdej dodatniej liczby ν można znaleść taką liczbę N, iż jest:

(17) $$\left|\sum_{k=n}^{\infty} \frac{A_k U_k(x,y)(\xi-\xi')}{(\xi-\xi_k)(\xi'-\xi_k)}\right| < \nu,$$

gdy jest $n \geqslant N$, $|\xi'| \geqslant X'$, gdzie X' jest dość liczba dodatnia wielka; jak widać dość wykazać, że szereg:

(18) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k U_k(x,y)}{\xi-\xi_k}$$

jest jednostajnie zbieżny w obszarze D.

Położmy:

$$F(x,y) = F_1(x,y) + iF_2(x,y), \quad A'_k = \int_{(D)} F_1(x',y') U_k(x'y') d\tau,$$

$$B'_k = \int_{(D)} F_2(x',y') U_k(x'y') d\tau,$$

według pierwszego z twierdzeń S t e k ł o w a (str. 89) są szeregi liczebne $\sum_1^\infty A'^2_k$, $\sum_1^\infty B'^2_k$ zbieżne. Nadto jest $A_k = A'_k + iB'_k$.

Uważajmy teraz sumę:

$$R_{n,p} = \sum_n^{n+p} \left|\frac{A_k U_k(x,y)}{\xi-\xi_k}\right| < \sum_n^{n+p} \frac{\sqrt{A'^2_k + B'^2_k}\,.\,|U_k(x,y)|}{|\xi-\xi_k|},$$

a na mocy nierówności S c h w a r z a będzie:

$$R^2_{n,p} \leqslant \sum_n^{n+p} (A'^2_k + B'^2_k) \sum_n^{n+p} \frac{U^2_k(x,y)}{|\xi-\xi_k|^2},$$

a stąd widoczne twierdzenie o szeregu (18). A że przy naszych założeniach jest stosunek:

$$\frac{\xi-\xi'}{\xi'-\xi_k}$$

co do modułu skończony, więc stąd z łatwością wynika nierówność (17); przeto jest w granicy dla $\xi'=\infty$:

(19) $$W(x,y,\xi) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k U_k(x,y)}{\xi-\xi_k},$$

przyczem szereg prawej strony jest jednostajnie i bezwzględnie zbieżny w całym obszarze D; przeto:

$$\int_{(D)} W(x',y',\xi) U_k(x',y') d\tau = -\frac{A_k}{\xi-\xi_k},$$

a wskutek tego jest:

$$W(x,y,\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x,y) \int_{(D)} W(x',y',\xi) U_k(x',y') d\tau.$$

Zmieniając nieco oznaczenia, wypowiemy w następujący sposób ten niezmiernie ważny rezultat:

Jeżeli do danej funkcyi $W(x,y)$, określonej w obszarze D, można znaleść taką funkcyę $F(x',y')$, by dla pewnej szczególnej wartości ξ zachodziło równanie całkowe:

(13) $$W(x,y) = \int_{(D)} F(x',y') G(x,y,x',y',\xi) d\tau,$$

gdzie $G(x,y,x',y',\xi)$ oznacza uogólnioną funkcyę G r e e n a, przyczem całka:

(14) $$\int_{(D)} |F(x',y')|^2 d\tau$$

ma znaczenie określone, to można funkcyę $W(x,y)$ rozwinąć na następujący szereg funkcyj harmonicznych:

(15) $$W(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k U_k(x,y),$$

gdzie:

(16) $$A_k=\int_{(D)} W(x',y')\,U_k(x',y')\,d\tau. \qquad (k=1,2,3,\ldots)$$

Nadto szereg ten jest jednostajnie i bezwzględnie zbieżny w całym obszarze D.

Szczególnym przypadkiem tego kapitalnego twierdzenia jest łatwe do wykazania twierdzenie: jeżeli funkcya $W(x,y)$ ma wewnątrz obszaru D ciągłe drugie pochodne i nadto na krzywej C jest:

$$h'\left(\frac{dW}{dN}\right)_i=h(W)_i,$$

to istnieje funkcya $F(x,y)$ o nałożonym wyżej warunku, i wobec tego można funkcye $W(x,y)$ w opisany sposób rozwinąć na szereg funkcyj harmonicznych.

§ 47. Przyjmijmy teraz, że funkcya $F(x,y)$ jest daną i rzeczywistą w obszarze D. Okażemy, że dość, by całka:

(17) $$\mathfrak{L}=\int_{(D)} F^2(x',y')\,d\tau$$

miała znaczenie określone, aby zachodziła równość:

(18) $$\int_{(D)} F^2(x',y')\,d\tau=\sum_{k=1}^{\infty} A^2{}_k,$$

gdzie:

$$A_k=\int_{(D)} F(x',y')\,U_k(x',y')\,d\tau. \qquad (k=1,2,3,\ldots)$$

Niech ξ_0 będzie liczba dodatnia tak, iż liczba $(-\xi_0)$ jest mniejszą od każdej z liczb ξ_k $(k=1,2,\ldots)$. Przy pomocy danej funkcyi $F(x,y)$ utwórzmy funkcyę:

$$W(x,y,-\xi_0)=\int_{(D)} F(x',y')\,G(x,y,x',y'-\xi_0)\,d\tau;$$

według poprzedniego paragrafu jest:

$$W(x,y,-\xi_0)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k U_k(x,y)}{\xi_0+\xi_k},$$

gdzie szereg po prawej stronie jest jednostajnie i bezwzględnie zbieżny w obszarze D i jest funkcyą rzeczywistą. Stąd jest:

$$\int_{(D)} W^2(x',y',-\xi_0)\,d\tau=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k^2}{(\xi_0+\xi_k)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k^2}{(\xi_0+\xi_k)^2}+R_{n+1},$$

gdzie:

$$R_{n+1}<\frac{1}{(\xi_0+\xi_{n+1})^2}\sum_{n+1}^{\infty} A_k^2.$$

Na mocy pierwszego twierdzenia S t e k ł o w a jest szereg $\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2$ zbieżny, a więc do każdej dodatniej liczby ε można znaleść taką liczbę N, iż będzie:

$$\sum_{n+1}^{\infty} A_k^2<\varepsilon,$$

gdy jest $n\geqslant N$. Jest tedy:

$$R_{n+1}<\frac{\varepsilon}{(\xi_0+\xi_{n+1})^2}. \qquad (n>N)$$

Przeto:

(19) $$\lim_{\xi=\infty}\left[\xi_0^2\int_{(D)} W^2(x',y',-\xi_0)\,d\tau\right]=\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2,$$

Aby więc wykazać równość (18), musimy udowodnić, że całka po lewej stronie dąży do granicy $\mathfrak{L}$, czyli że całka:

$$\int_{(D)}[\xi_0^2 W(x',y',-\xi_0)-F^2(x',y')]\,d\tau$$

dąży do zera wraz z liczbą $\frac{1}{\xi_0}$.

Wobec znanych własności całek wystarczyłoby wykazać:

1) że można różnicę $\xi_0 W(x,y,-\xi_0)-F(x,y)$ uczynić dowolnie małą w pewnym obszarze D_0, który, będąc częścią obszaru D, dowolnie mało się

różni od obszaru D, czyli dokładniej: jeżeli tylko punkt x,y należy do obszaru D_0, który się różni od obszaru D o mniej, niż dana, choćby dowolnie mała, dodatnia liczba ε, to istnieje liczba dodatnia X, niezależna ani od liczby ε ani od punktu x,y taka, że dla liczb $\xi_0 \geqslant X$ jest:

$$|\xi_0 W(x,y,-\xi_0) - F(x,y)| < \eta\,,$$

gdzie równość $\lim \varepsilon = 0$ pociąga za sobą jednostajnie równość $\lim \eta = 0$.

2) Trzeba wykazać, że suma $\xi_0 W(x,y,-\xi_0) + F(x,y)$ ma górną granicę, niezależną od położenia punktu x,y w obszarze D i dla liczb $\xi_0 \geqslant X$.

Najprzód uprościmy sobie rozumowanie, zakładając, że funkcya $F(x,y)$ ma w obszarze D górną granicę M. Ponieważ założyliśmy, że całka $\mathfrak{L}$ ma znaczenie określone, przeto obszar, w którym oscylacya funkcyi $F(x,y)$ przekracza liczbę dodatnią ε, musi wraz z liczbą ε zdążać do zera; przy danej liczbie ε wyłączmy z obszaru D ten obszar, w którym oscylacya funkcyi $F(x,y)$ przekracza liczbę ε; pozostanie obszar Δ, i uważajmy z niego te punkty, których odległość od punktów krzywej C ma za dolną granicę daną liczbę dodatnią d, dostatecznie małą; zbiór takich punktów obszaru Δ stanowić będzie obszar Δ'. Z tego obszaru Δ' daje się wydzielić skończony obszar D_0 o dalszych własnościach następujących: 1) różnica między obszarem D i D_0 jest mniejsza od liczby dowolnej i dodatniej η, jeżeli tylko odpowiednio dobierzemy liczby ε i d; nadto liczba η ma granicę zero wraz z granicami równemi zeru dla liczb ε i d; 2) istnieje liczba stała i dodatnia δ, różna od zera a mniejsza od liczby d tak, iż wewnątrz koła o promieniu δ, którego środkiem jest dowolny punkt obszaru D, jest oscylacya funkcyi $F(x,y)$ mniejsza od liczby ε.

Kładąc:

$$G(x,y,x',y',-\xi_0) = \frac{f(\varrho,\mu_0)}{2\pi} - u(x',y')\,,$$

gdzie ϱ oznacza odległość punktów (x,y) i x',y'), zaś μ_0 jest liczbą, w którą przechodzi liczba μ z § 3, gdy za liczbę ξ podstawiamy liczbę $(-\xi_0)$, otrzymujemy:

$$W(x,y),-\xi_0) = K - K'\,,$$

gdzie położyliśmy:

$$K = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(D)} F(x',y') f(\varrho,\mu_0)\,d\tau\,,$$

$$K' = \int\limits_{(D)} F(x',y')\,u(x',y')\,d\tau.$$

Uważajmy teraz funkcyę u', czyniącą zadość równaniu $\Delta u' + \xi u' = 0$ wewnątrz obszaru D, zaś wzdłuż krzywej C warunkowi:

albo:

$$(u')_i = \frac{f(\varrho,\mu)}{2\pi}\,,$$

albo:

$$\left(\frac{d'u}{dN}\right)_i = h(u')_i + \tau\,,$$

gdzie ϱ oznacza odległość bieżącego punktu x',y' krzywej C od stałego punktu x,y, wewnątrz obszaru D leżącego; nadto jest:

$$\tau = \left(\frac{d}{dN}\left(\frac{f(\varrho,\mu)}{2\pi}\right)\right)_i - h\,\frac{f(\varrho,\mu)}{2\pi}$$

Załóżmy, że parametr $\xi = \varrho_1(\cos\theta + i\sin\theta)$ spełnia nierówność (15) (str. 41), przeto dla pierwszego przypadku istnieje taki potencyał warstwy pojedyńczej, iż wzdłuż krzywej C jest:

$$\left(\frac{du'}{dN}\right)_e = \frac{1}{2\pi}\,\frac{d}{dN}\left(\frac{f(\varrho,\mu)}{2\pi}\right),$$

przeto na mocy nierówności (18) (str. 41) jest:

$$|u'| < \frac{4c}{\sqrt{\varrho_1}\,\sin\dfrac{\theta}{2}}\max\left|\frac{1}{2\pi}\,\frac{d}{dN}\left(\frac{f(\varrho,\mu)}{2\pi}\right)\right|$$

w całym obszarze D, przyczem zakładamy, że punkt stały (x,y) leży wewnątrz obszaru D. Gdy więc założymy, że punkt x,y ma dowolne położenie wewnątrz obszaru D, byle jego odległość od punktów krzywej C nie była mniejsza od liczby d, to na mocy nierówności (7) (str. 6) jest:

$$\left|\frac{df(\varrho,\mu)}{dN}\right| < \frac{\pi}{2}\,m e^{-ad} + \frac{e^{-ad}}{d}\,,$$

gdzie jest $a = \sqrt{\varrho_1}\,\sin\dfrac{\theta}{2}$, $m = \sqrt{\varrho_1}$. Ponieważ liczba $\sin\dfrac{\theta}{2}$ ani zerem być nie może, ani liczbą ujemną, więc iloczyn:

$$|\xi^p u'| = \varrho_1{}^p\,|u'|$$

dąży oczywiście do zera wraz z liczbą $\dfrac{1}{\varrho_1}$ jednostajnie w całym obszarze D, ale tem powolniej, im mniejszy jest kąt θ. Jeżeli się ograniczymy do wartości kąta θ, spełniających nierówności $\dfrac{\pi}{2} < \theta \leqslant \dfrac{3\pi}{2}$, albo $\dfrac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{7\pi}{4}$, to możemy zapewnić sobie jednostajne osiąganie granicy względem parametru ξ

o nałożonych warunkach. Zupełnie analogiczny rezultat otrzymamy w drugim przypadku.

Otóż widać, że wolno położyć $\xi = -\xi_0$, jeżeli tylko liczba ξ_0 będzie dostatecznie wielka i dla tej szczególnej wartości parametru ξ funkcya u' przechodzi na funkcyę $u(x',y')$; a więc moduł iloczynu $\xi_0 u$ dąży wraz z liczbą $\frac{1}{\xi_0}$ do zera jednostajnie w całym obszarze D, gdy punkt x,y zostaje w obszarze D_0. Do każdej dodatniej liczby δ' można więc znaleść liczbę dodatnią X taką, iż, gdy w równościach (15) (str. 41) i (31) (str. 45) położymy $\varrho_1 = \overline{X}$ $\theta = \pi$, spełnia nierówności, i gdy jest $\xi_0 \geqq \overline{X}$, to jest w całym obszarze D:

$$|\xi_0 u| < \delta',$$

byleby punkt (x,y) pozostawał w obszarze D_0. Stąd jest:

$$|\xi_0 K'| < M\delta' T, \qquad (\xi_0 > \overline{X}),$$

gdzie T oznacza pole obszaru D. Oznaczmy:

$$\eta' = F(x,y) - F(x',y').$$

Skoro punkt x,y leży w obszarze D_0, to istnieje koło o promieniu δ, o środku x,y takie, iż dla dowolnych punktów x',y' wewnątrz tego koła lub na niem jest:

$$|\eta'| < \delta',$$

jeżeli tylko jest $\delta' \geqq \varepsilon$.

Wnętrze tego koła oznaczmy przez D'', część pozostałą obszaru D przez D'''; połóżmy:

$$K = J + J',$$

gdzie:

$$J = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(D'')} F(x',y') f(\varrho,\mu_0)\, d\tau\,; \quad J' = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(D''')} F(x',y') f(\varrho,\mu_0)\, d\tau.$$

Dla punktów obszaru L''' jest $\varrho \geqq \delta$ i nadto, jak zwykle, niech będzie $\mu_0 = a + bi$, to według nierówności (6) (str. 6) jest:

$$|J'| < \frac{2e^{-\frac{a\delta}{2}}}{a\delta} \,.\, MT,$$

nadto jest:

$$\int\limits_{(D'')} f(\varrho,\mu_0) d\tau = \left(\frac{1}{\mu_0^2} - \frac{1}{\mu_0} \int\limits_0^\infty e^{-\mu_0\sqrt{\delta^2+t^2}}\, dt\right) 2\pi.$$

Kładąc:

$$J = J_0 - J_0'\,; \quad J_0 = \frac{1}{2\pi} F(x,y) \int\limits_{(D'')} f(\varrho,\mu_0) d\tau\,; \quad J_0' = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(D'')} \eta' f(\varrho,\mu_0) d\tau,$$

mamy:

$$J_0 = F(x,y) \left\{\frac{1}{\mu_0^2} - \frac{1}{\mu_0} \int\limits_0^\infty e^{-\mu_0\sqrt{\delta^2+t^2}}\, dt\right\},$$

a że jest tu $\mu_0 = \sqrt{\xi_0}$, więc:

$$|\xi_0 J_0 - F(x,y)| = \left|\frac{F(x,y)}{\mu_0} \int\limits_0^\infty e^{-\mu_0\sqrt{\delta^2+t^2}}\, dt\right| .\, \xi_0 < .\, 2Me^{-\frac{\delta\sqrt{\xi_0}}{2}}.$$

Przez odpowiedni dobór liczby ξ_0 możemy uczynić, by było:

$$|\xi_0 J_0 - F(x,y)| < M \,.\, \delta';$$

podobnie będzie:

$$|\xi_0 J_0'| < \delta' \left(1 + 2e^{-\frac{\delta\sqrt{\xi_0}}{2}}\right) < 3\delta',$$

a więc jest:

$$|\xi_0 J - F(x,y)| < (M+3)\delta'.$$

Nadto jest:

$$|\xi_0 J'| < \frac{2\sqrt{\xi_0}}{\delta} e^{-\frac{\sqrt{\xi_0}\delta}{2}} MT,$$

jeżeli więc obierzemy dostatecznie wielką liczbę ξ_0, będzie:

$$|\xi_0 J'| < M\delta'.$$

Ostatecznie będzie:

$$|\xi_0 W(x,y,-\xi_0) - F(x,y)| < M\delta' T + (2M+3)\delta',$$

a, że wolno przyjąć, iż jest $\delta' = \varepsilon$, więc, kładąc $MT + 2M + 3 = A$, otrzymujemy:

$$|\xi_0 W(x,y,-\xi_0) - F(x,y)| < A\varepsilon,$$

i

$$|\xi_0 W(x,y,-\xi_0) + F(x,y)| < A\varepsilon + 2M,$$

przeto:

$$|\xi_0^2 W^2(x,y,-\xi_0) - F^2(x,y)| < A\varepsilon(A\varepsilon + 2M),$$

a stąd:

$$\xi_0^2 \int\limits_{(D)} \{W^2(x',y',-\xi_0) - F^2(x',y')\} d\tau < A\varepsilon\,(A\varepsilon + 2M)\,T.$$

Na mocy nierówności (28) (str. 67) i (37) (str. 69), kładąc w nich $\varrho_1=\xi_5$, $\theta=\pi$, wnioskujemy, że istnieje stała dodatnia B, zależna jedynie od krzywej C i taka, że jest w całym obszarze D:

$$|W(x',y',-\xi_0)|<\frac{BM}{\xi_0},$$

a stąd:

$$\xi_0^2\int\limits_{(D)}W^2(x',y',-\xi_0)\,d\tau-\xi_0^2\int\limits_{(D_0)}W^2(x',y',-\xi_0)d\tau<B^2M^2\eta,$$

więc jest:

$$\left|\xi_0^2\int\limits_{(D)}W^2(x',y',-\xi_0)d\tau-\int\limits_{(D)}F^2(x',y')\,d\tau\right|\leqslant\xi_0^2\int\limits_{(D)}W^2(x',y',-\xi_0^2)d\tau$$
$$-\xi_0^2\int\limits_{(D_0)}W^2(x',y',-\xi_0)d\tau+\left|\xi_0^2\int\limits_{(D_0)}W^2(x',y',-\xi_0)d\tau-\int\limits_{(D_0)}F^2(x',y')\,d\tau\right|$$
$$+\left|\int\limits_{(D_0)}F^2(x',y')\,d\tau-\int\limits_{(D)}F^2(x',y')\,d\tau\right|<B^2M^2\eta+A\varepsilon(A\varepsilon+2M)T+M^2\eta,$$

a że jest $\lim\eta=0$, gdy jest $\lim\varepsilon=0$, więc:

$$\lim_{\xi_0=\infty}\left(\xi_0^2\int\limits_{(D)}W^2(x',y',-\xi_0)\,d\tau\right)=\int\limits_{(D)}F^2(x',y')d\tau,$$

a stąd i z równości (19) (str. 98) wynika równość (18) (str. 99), o której dowód nam chodziło.

Odrzucając obecne ograniczenie, że funkcya $F(x,y)$ jest ograniczona w obszarze, dowodzimy tym sposobem, jak dla przestrzeni, że równość (18) (str. 98) i w tym przypadku jest prawdziwa, byle funkcya $F(x,y)$ była rzeczywista i byle całka $\mathfrak{L}$ (17) (str. 98) miała sens określony.

VII. UPROSZCZONE ZAGADNIENIE FOURIERA.

§ 48. Rozwiążmy najpierw pewne zagadnienie analogiczne do zagadnienia uproszczonego, którego warunki są następujące:

Niech funkcya $F(x,y)$ jest rzeczywistą i daną funkcyą obszaru D taką, iż całka $\mathfrak{L}=\int\limits_{(D)}F^2(x',y')d\tau$ ma znaczenie określone. Zbudować funkcyę

$V(x,y,t)$, określoną dla każdej dodatniej wartości zmiennej t i dla każdego punktu x,y w całym obszarze D, i niech ona, jak i jej pochodna cząstkowa $\frac{\partial V}{\partial t}$ będą dla każdej wartości dodatniej zmiennej t i dla każdego położenia punktu x,y obszaru D funkcyami ciągłemi trzech zmiennych x, y, t; 2) dla każdej dodatniej wartości zmiennej t i dla każdego punktu x,y wewnątrz obszaru D mają istnieć pochodne $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, ciągłe względem zmiennych (x,y,t), przyczem ma być:

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\Delta V; \tag{1}$$

3) dla każdej dodatniej wartości zmiennej t ma istnieć jednostajnie osiągana wzdłuż krzywej C granica $\left(\frac{dV}{dN}\right)_i$ i ma być:

$$h'\left(\frac{\partial V}{\partial N}\right)_i=h(V)_i, \tag{2}$$

gdzie znaczenie symbolów h', h jest to samo, jak dotąd; 4) całka:

$$\int\limits_{(D)}[F(x',y')-V(x',y',t)]^2d\tau \tag{3}$$

ma dążyć do zera, gdy zmienna t dąży do zera przez wartości dodatnie.

Udowodnimy, że dla tego zagadnienia analogicznego istnieje jedno i tylko jedno rozwiązanie.

Wskutek warunku (2) obecnego zagadnienia i szczególnego przypadku twierdzenia z § 46 (str. 97) mamy:

$$V(x,y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t)U_k(x,y), \tag{4}$$

przyczem jest:

$$\varphi_k(t)=\int\limits_{(D)}V(x',y',t)\,U_k(x',y')\,d\tau,$$

i na mocy równania (1) będzie:

$$\frac{d\varphi_k}{dt}=\int\limits_{(D)}\Delta V(x',y',t)\,U_k(x',y')\,d\tau.$$

Stosując twierdzenie G r e e n a do funkcyi $V(x,y,t)$ i $U_k(x,y)$—cowolno—otrzymujemy:

$$\int_{(D)} U_k(x',y')\,\Delta V(x',y',t)d\tau = \int_{(D)} V(x',y',t)\Delta U_k(x',y')d\tau\,,$$

przeto jest:

$$\frac{d\varphi_k}{dt} = \int_{(D)} V(x',y',t)\,\Delta U_k(x',y')d\tau = -\xi_k \int_{(D)} V(x',y',t)\,U_k(x',y')d\tau = -\xi_k\varphi_k.$$

Funkcye φ_k spełniają więc równania:

$$\frac{d\varphi_k}{dt} + \xi_k\varphi_k = 0, \qquad (k=1,2,3,\dots)$$

wobec tego jest: $\varphi_k = A_k e^{-\xi_k t}$, gdzie:

$$A_k = \lim_{t=\infty}(\varphi_k(t))\,,$$

którą to granicę wyznaczymy. W tym celu napiszmy:

$$\varphi_k(t) = \int_{(D)} V(x',y',t)\,U_k(x',y')d\tau = \int_{(D)} F(x',y')\,U_k(x',y')d\tau$$
$$+\int_{(D)}[V(x',y',t)-F(x',y')]\,U_k(x',y')d\tau;$$

stąd:

$$\left[\varphi_k(t) - \int_{(D)} F(x',y')U_k(x',y')\,d\tau\right]^2 \leqslant \int_{(D)}\Big[V(x',y',t)-F(x',y')\Big]^2 d\tau,$$

bo jest:

$$\int_{(D)} U_k^2(x',y') = 1.$$

Na mocy warunku (4) obecnego zagadnienia jest:

$$A_k = \lim_{t=0}(\varphi_k(t)) = \int_{(D)} F(x',y')\,U_k(x',y')\,d\tau. \tag{5}$$

A więc zagadnienie analogiczne może mieć co najwyżej jedno rozwiązanie następujące:

$$V(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k U_k(x,y)e^{-\xi_k t}\,, \tag{6}$$

przyczem liczby A_k określa wzór (5).

Wykażemy, że funkcya ta czyni zadość warunkom zagadnienia analogicznego.

Aby udowodnić, że prawa strona równości (6) jest funkcyą ciągłą, dość, z powodu ciągłości każdego wyrazu szeregu, wykazać, że jest to szereg jednostajnie zbieżny względem zmiennych x,y,t. Otóż mamy:

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty} A_k U_k(x,y)e^{-\xi_k t}\right)^2 \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} A_k^2 . \sum_{k=n}^{\infty} U_k^2(x,y)e^{-2\xi_k t};$$

pierwszy czynnik strony prawej jest liczebny i skończony na mocy pierwszego twierdzenia S t e k ł o w a; nadto wiemy, że istnieje liczba skończona N taka, że każda z liczb ξ_k, gdy jest $k \geqslant N$, jest dodatnia; przeto przy każdej dodatniej wartości zmiennej t jest:

$$e^{-2\xi_k t} < \frac{1}{2\xi_k^2 t^2}\,. \qquad (k \geqslant N)$$

Gdy liczbę N odpowiednio dobierzemy, to stąd i z nierówności (7) (str. 91) mamy:

$$\sum_{k=n}^{\infty} U_k^2(x,y)e^{-2\xi_k t} < \frac{1}{2t^2}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{U_k^2}{\xi_k^2} < \frac{(4c+2)^2}{2\xi_n t^2}\,, \qquad (n \geqslant N)$$

a więc, o ile jest:

$$T_1 \geqslant t \geqslant T > 0\,,$$

gdzie T i T_1 są zresztą liczbami dowolnemi, szereg badany jest jednostajnie zbieżny względem zmiennych x,y,t w całym obszarze D. Szereg badany jest więc funkcyą ciągłą zmiennych x,y,t przy dodatniej wartości zmiennej t i w obszarze D. Rozumując tak, jak dotąd, wykażemy istnienie pochodnej rzędu p-go: $\frac{\partial^p V}{\partial t^p}$ $(p=1,2,\dots)$ i jej ciągłość względem zmiennych (x,y,t), gdy zmienna t jest dodatnią, a punkt x,y należy do obszaru D. Ażeby wykazać, że funkcya $V(x,y,t)$ czyni zadość równaniu (1), nie możemy wprost różniczkować szeregu (6) względem zmiennych x,y, bo, nie mając żadnych nierówności na pochodne funkcyj harmonicznych, nie moglibyśmy udowodnić zbieżności odpowiednich szeregów. Musimy przeto użyć wybiegu, którego użył p. Zaremba w przypadku przestrzeni; przekonywamy się, że funkcya $V(x,y,t)$ spełnia 2-gi z warunków zagadnienia.

Chodzi nam teraz o trzeci warunek zagadnienia.

Z równości (6) (str. 90) otrzymujemy:

$$U_k(x,y) = (\xi_0 + \xi_k) \int_{(D)} U_k(x',y')\, G(x,y,x',y',-\xi_0)\, d\tau ,$$

gdzie ξ_0 jest odpowiednia liczba dodatnia; funkcya harmoniczna ma więc postać funkcyi, znanej pod nazwą W, przeto na mocy nierówności str. 67 i 68 mamy:

$$|D_{ni}(U_k)| < \frac{2\pi(16c+5)}{\sqrt{\xi_0}} \max |U_k| ,$$

$$\left| \left(\frac{dU_k}{dN} \right)_i \right| < \frac{16\pi}{\sqrt{\xi_0}} \max |U_k| ,$$

a że jest:

$$|U_k(x,y)| < \frac{4c+2}{\sqrt{\xi_0}} \sqrt{\int_{(D)} (\xi_0+\xi_k)^2 U_k^2(x',y')\, d\tau} = \frac{(4c+2)(\xi_0+\xi_k)}{\sqrt{\xi_0}} ;$$

(zakładamy, że jest liczba ξ_k dodatnią, co napewno zachodzi dla $n \geqq N$), więc mamy:

$$|D_{ni}(U_k)| < 2\pi(16c+5)(4c+2) \cdot \frac{\xi_0+\xi_k}{\xi_0} ,$$

$$\left| \left(\frac{dU_k}{dN} \right)_i \right| < \frac{16\pi(4c+2)(\xi_0+\xi_k)}{\xi_0} .$$

Wyciągamy stąd następujące wnioski:

a) szereg:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k D_{ni}(U_k) e^{-\xi_k t}$$

jest przy dodatniej wartości na zmienną t jednostajnie i bezwzględnie zbieżny, jest bowiem, gdy $k \geqq N$, także:

$$e^{-\xi_k t} < \frac{3!}{\xi_k^3 t^3} ,$$

a że jest:

$$\xi_k > Ek ,$$

więc wniosek nasz jest usprawiedliwiony;

b) istnieje tedy przy dodatniej wartości na zmienną t pochodna $D_{ni}(V)$ i jest:

$$D_{ni}(V) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k D_{ni}(U_k) e^{-\xi_k t} ,$$

a wtedy znów jest:

$$\left(\frac{dV}{dN} \right)_i = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(\frac{dU_k}{dN} \right)_i e^{-\xi_k t} ,$$

stąd łatwo otrzymujemy, że spełniony jest trzeci warunek zagadnienia.

Ażeby wykazać, że funkcya $V(x,y,t)$ spełnia i warunek czwarty, utwórzmy równość:

$$\int_{(D)} [F(x',y') - V(x',y',t)]^2 d\tau = \int_{(D)} F^2(x',y')\, d\tau - 2 \int_{(D)} F(x',y')\, V(x',y',t)\, d\tau$$
$$+ \int_{(D)} V^2(x',y',t)\, d\tau$$

i wobec tego jest:

$$\int_{(D)} [F(x',y') - V(x',y',t)]^2 d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 (1 - e^{-\xi_k t})^2 = \sum_{k=1}^{N} A_k^2 (1 - e^{-\xi_k t})^2$$
$$+ \sum_{k=N+1}^{\infty} A_k^2 (1 - e^{-\xi_k t})^2 .$$

Możemy założyć, że liczbę N tak obraliśmy, iż liczby ξ_k dla $k > N$ są dodatnie, przeto dla $k > N$ jest:

$$0 < 1 - e^{-\xi_k t} < 1$$

przy dodatniej wartości na zmienną t; nadto liczba N niech będzie zarazem tak obrana, iż przy danej dodatniej liczbie ε jest:

$$\sum_{N+1}^{\infty} A_k^2 < \frac{\varepsilon}{2} ,$$

co być może, bo szereg $\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2$ jest zbieżny. Sumę $\sum_{k=1}^{N} A_k^2 (1 - e^{-\xi_k t})^2$, jako złożoną z N wyrazów, można uczynić mniejszą od liczby $\frac{\varepsilon}{2}$, jeżeli tylko zmienną t uczynimy dostatecznie małą,—innemi słowy, warunek czwarty jest spełniony.

§ 49. Wykażemy teraz, że rozwiązanie zagadnienia analogicznego będzie można uważać za rozwiązanie uproszczonego zagadnienia Fouriera, jeżeli nałożymy na funkcyę $F(x,y)$ warunek ciągłości wewnątrz obszaru D. Poprzednio przekształcimy rozwiązanie zagadnienia analogicznego. Jeżeli mianowicie znów przez $W(x,y,\xi)$ rozumieć będziemy funkcyę:

$$W(x,y,\xi)=\int_{(D)} F(x',y')G(x,y,x',y',\xi)\,d\tau\,,$$

to można funkcyę tę rozwinąć na szereg:

$$W(x,y,\xi)=-\sum \frac{A_k U_k(x,y)}{\xi-\xi_k}\,,$$

gdzie jest tak dla funkcyi $W(x,y,\xi)$, jak i dla funkcyi $V(x,y,t)$, określonej szeregiem (6) (str. 107), jest:

$$A_k=\int_{(D)} F(x',y')\,U_k(x',y')\,d\tau.$$

Na mocy twierdzeń o residuach będzie można funkcyę $V(x,y,t)$ uważać za granicę pewnej całki konturowej na płaszczyźnie zmiennej zespolonej ξ, byle kontur, po którym całkujemy, w ten sposób rósł nieograniczenie, iżby przyjmował kolejno położenia tak dobranych konturów $C_1, C_2 \dots C_m, \dots$ ażeby do każdej liczby ξ_k można było znaleść liczbę całkowitą n, by wewnątrz każdego konturu C_m o skaźniku $m \geqslant n$ leżał obraz liczby ξ_k; nadto obraz żadnej z liczb ξ_k nie ma leżeć na żadnym z konturów C_m.

Kontury C_m na płaszczyźnie zmiennej zespolonej $\xi=\alpha+i\beta$ można tak określić: niech liczba rzeczywista i dodatnia ξ_0 będzie tak wielka, iż spełnia nierówności (15) (str. 41) i (31) (str. 45); wobec tego jest:

$$-\xi_0<\xi_k \quad (k=1,2,\dots)\,;$$

niech liczby:

(7) $$k_1,\ k_2,\ k_3,\ \dots,\ k_m,\ \dots$$

będą liczbami całkowitemi i rosnącemi, ale takiemi, że już jest:

$$\xi_{k_s+1}+\xi_{k_s}>2\xi_0\,;$$

zresztą na razie liczb ciągu (7) nie określamy dokładniej; uważajmy nadto liczby l_m, R_m dodatnie i takie, że będzie:

(8) $$l_m=\frac{1}{2}\left(\xi_{k_m}+\xi_{k_m+1}\right),$$

(9) $$\xi_0 \leqslant R_m < l_m\,.$$

Z początku spółrzędnych Ω na płaszczyźnie zmiennej zespolonej ξ kreślimy półkole o promieniu R_m, przecinające oś urojonych β w punktach A (po stronie dodatniej) i A' (po stronie ujemnej) i ujemną oś rzeczywistych α w punkcie A''; niech B będzie dowolnym punktem na dodatniej osi β, ale takim, że jest $\Omega B<\Omega A$; uważajmy dalej odcinki BB_1, B_1B_1', $B_1'B'$, łączące odpowiednio punkty B_1, B_1', B', określone przez spółrzędne:

$$(l_m,\overline{\Omega B}):\quad (l_m,\overline{B\Omega})\,;\quad (0,\overline{B\Omega})\,;$$

otóż konturem C_m nazwiemy kontur $AA''A'B'B_1'B_1BA$.

Będzie więc:

(10) $$V(x,y,t)=\lim_{m=\infty}\left[\frac{-1}{2\pi i}\int_{C_m} W(x,y,\xi)\,e^{-t\xi}\,d\xi\right].$$

Zbadajmy tę część całki konturowej, która odnosi się do linii łamanej $B'B_1'B_1B$. Na mocy nierówności (24) (str. 65) jest:

(11) $$|W(x,y,\xi)|<\left(\frac{4c}{\sin\frac{\theta}{2}}+2\right)\frac{\sqrt{\mathfrak{F}}}{\sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}}\,;$$

jeżeli parametr ξ spełnia nierówności (15) (str. 41) i (31) (str. 45); a gdy parametr ξ rzeczonych nierówności nie spełnia, to będzie na mocy nierówności (13) (str. 95):

(12) $$|W(x,y,\xi)|<\left(\frac{4c}{\sin\frac{\theta'}{2}}+2\right)\frac{\sqrt{\mathfrak{F}}}{\sqrt{\rho_1'}\sin\frac{\theta'}{2}}\cdot\frac{l'}{l}\,,$$

jakkolwiek ma położenie punkt (x,y) wewnątrz obszaru D. Jeżeli punkt X jest obrazem geometrycznym liczby ξ, punkt M_k obrazem najbliżej położonego z obrazów liczb ξ_k punktowi X, zaś punkt X' jest obrazem pomocniczej liczby $\xi'=\varrho_1'(\cos\theta'+i\sin\theta')$ tak dobranej, że prosta XX' jest równoległa do osi urojonych β, liczba ξ' spełnia nierówności (15) (str. 41) i (31) (str. 45) i jest nadto $\sin\theta\,.\sin\theta'\geqslant 0$.

Jeżeli położymy $\xi=\varrho_1(\cos\theta+i\sin\theta)=\alpha+i\beta$, będzie:

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\beta}{2\varrho_1\cos\frac{\theta}{2}}\,;\quad e^{-t\xi}=e^{-t\alpha}\,,$$

a stąd:

$$\left|\int_{BB_1} W(x,y,\xi)e^{-t\xi}d\xi\right| < \int_0^{l_m}\left(\frac{16c\varrho_1}{\beta}+4\right)\frac{\sqrt{\mathfrak{L}\varrho_1}}{\beta}\,e^{-ta}da\,;$$

otóż jest:

$$\varrho_1\sqrt{\varrho_1}=\sqrt[4]{(a^2+\beta^2)^3}<(\sqrt{a}+\sqrt{\beta})^3\,,$$

bo jest $a>0$, $\beta>0$. Ponieważ całki:

$$\int_0^{\infty} a^k e^{-ta}da$$

mają znaczenie dla $k=0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2}$ i gdy liczba t jest dodatnia, więc, oznaczając przez $\mathfrak{A}$ największą z nich, otrzymujemy:

$$\left|\int_{BB_1} W(x,y,\xi)e^{-t\xi}d\xi\right| < 16c\sqrt{\mathfrak{L}}\,.\,\mathfrak{A}\left(\frac{1}{\beta^2}+\frac{3}{\beta^{\frac{3}{2}}}+\frac{3}{\beta}+\frac{1}{\beta^{\frac{1}{2}}}\right)+4\sqrt{\mathfrak{L}}\,.\,\mathfrak{A}\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta^{\frac{1}{2}}}\right);$$

podobną nierówność otrzymamy na moduł całki:

$$\int_{B'B_1'} W(x,y,\xi)e^{-t\xi}d\xi\,;$$

stąd widać, że obie wspomniane całki dążą do zera, gdy liczba m rośnie nieograniczenie, t j. gdy liczba β rośnie nieograniczenie.

Aby zbadać granicę całki $\int_{B_1'B_1} W(x,y,\xi)e^{-t\xi}d\xi$, wystarcza zbadać granicę całki:

$$\int_{B''B_1} W(x,y,\xi)e^{-t\xi}d\xi\,,$$

z powodu nierówności (12) (str. 111), jeżeli przez B'' oznaczymy punkt przecięcia osi rzeczywistych a i prostej B_1B_1'.

Można przypuścić, że kontur C_m ma tak wysoki wskaźnik, iż za punkt X', o którym była mowa, można przyjąć punkt B_1, który niech więc będzie obrazem liczby:

$$\xi'=a'+i\beta'=\varrho_1'(\cos\theta'+i\sin\theta')\,,$$

jeżeli obrazami liczb ξ i ξ_{k_m} są punktu X, względnie M_{k_m}, to oczywiście jest:

$$l'=B_1M_{k_m};\quad l=XM_{k_m};\quad \overline{\Omega B''}=a=a'.$$

Z powodu nierówności (12) (str. 111) musimy jeszcze znaleść górną granicę dla liczby $\frac{1}{l}$; ponieważ jest $l\geqslant\frac{1}{2}(\xi_{k_m+1}-\xi_{k_m})$, więc dość znaleść dolną granicę dla różnic $\xi_{k_m+1}-\xi_{k_m}$. Otóż wiemy, że istnieje dodatnia i całkowita liczba N taka, iż jest $\xi_k<Ek$, gdy jest $k\geqslant N$, przyczem stała dodatnia E zależna jest jedynie od krzywej C. Istnieje tedy stała i dodatnia liczba C taka, że nierówność:

$$\xi_{k+1}-\xi_k<CE \tag{13}$$

jest spełniona dla nieskończenie wielu liczb k. Załóżmy bowiem, że takiej stałej C nie ma, że jakbyśmy obrali stałą dodatnią C, to zawsze istnieje liczba całkowita i dodatnia k taka, iż jest:

$$\xi_{k+p+1}-\xi_{k+p}\leqslant CE \tag{14}$$

dla wszystkich dodatnich i całkowitych wartości na liczbę p. Otóż to być nie może, bo wtedy ciąg $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi, \ldots$ miałby granicę, kiedy istnienie granicy jest niezgodne z nierównością $\xi_k>Ek$ $(k\geqslant N)$; tem samem udowodniliśmy to, cośmy powiedzieli o nierówności (13). Zresztą można to wykazać metodą bezpośrednią. Niech liczba j całkowita i dodatnia jest najmniejszą liczbą taką, że:

$$Ek<\xi_k<Ej\,,$$

przyczem zakładamy, że jest $k\geqslant N$; niech n będzie liczbą całkowitą i dodatnią i dowolną, byleby było $n+1>j$; z nierówności ostatniej i następującej

$$\xi_{n+1}>E.(n+1)$$

wynika, że jest:

$$\xi_{n+1}-\xi_k>E.(n+1-j)>0\,.$$

Przyjąwszy w nierówności (14), że jest $C<1$, otrzymujemy:

$$\xi_{k+1}-\xi_k\leqslant CE,\ \xi_{k+2}-\xi_{k+1}\leqslant CE,\ \ldots,\ \xi_{n+1}-\xi_n\leqslant CE\,,$$

a stąd:

$$\xi_{n+1}-\xi_k\leqslant CE.(n+1-k)\,;$$

jest tedy:

$$E(n+1-j)<CE(n+1-k)\,,$$

a to daje:

$$n+1<\frac{j-kC}{1-C}\,,$$

co jest niemożliwe, bo lewa strona może być dowolnie wielka, kiedy strona prawa ma wartość stałą. Wykazaliśmy więc bezpośrednio nasze twierdzenie.

Najmniejszą z liczb k, dla których jest spełniona nierówność (13) i dla której jest zarazem $\xi_{k+1}-\xi_k>2\xi_0$, oznaczmy przez k_1, a dalsze właśnie przez $k_2, k_3, \ldots, k_m, \ldots$, które w ten sposób określamy.

Jest przeto $\frac{1}{l}\leqslant\frac{2}{CE}$. Z równości $\varrho_1'\sin\theta'=\beta'$ otrzymujemy:

$$\sin\frac{\theta'}{2}=\frac{\beta'}{2\varrho_1'\cos\frac{\theta'}{2}};$$

na mocy nierówności (12) (str. 111) mamy:

$$(15)\quad |W(x,y,\xi)|<\left(\frac{8c\varrho_1'\cos\frac{\theta'}{2}}{\beta'}+2\right)\frac{2\sqrt{\mathfrak{L}\varrho_1'}\cos\frac{\theta'}{2}}{\beta'}\cdot\frac{2\sqrt{(\alpha'-\xi_{k_m})^2+\beta'^2}}{CE};$$

ponieważ jest $\alpha'>\xi_{k_m}$, więc:

$$\sqrt{(\alpha'-\xi_{k_m})^2+\beta'^2}<\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}\leqslant\alpha'+\beta',$$

jest bowiem $\beta'>0$. Prawą stronę nierówności (15) możemy więc zastąpić przez wyrażenie:

$$\frac{4\sqrt{\mathfrak{L}}}{CE}\left(\frac{8c\varrho_1'}{\beta'}+2\right)\frac{\sqrt{\varrho_1'}(\alpha'+\beta')}{\beta'};$$

jest tedy:

$$\left|\int\limits_{B''B_1}W(x,y,\xi)\,e^{-t\xi}d\xi\right|<\frac{4\sqrt{\mathfrak{L}}}{CE}\left(\frac{8c\varrho_1'}{\beta'}+2\right)\frac{\sqrt{\varrho_1'}(\alpha'+\beta')}{\beta'}e^{-t\alpha}\int\limits_0^{\beta'}d\beta;$$

z powodu, że jest $\alpha=\alpha'$, prawa strona nierówności przyjmie postać:

$$\frac{4\sqrt{\mathfrak{L}}}{CE}\left(\frac{8c\sqrt{\alpha^2+\beta'^2}}{\beta'}+2\right)\sqrt[4]{\alpha^2+\beta'^2}\,(\alpha+\beta')e^{-t\alpha}.$$

Otóż w zgodzie ze związkami (8) i (9) (str. 111) wolno przyjąć np.:

$$\frac{\alpha}{2}<\beta'\leqslant\alpha,$$

powyższe przeto wyrażenie ma granicę równą zeru, gdy liczba α rośnie nieograniczenie. Wobec tego też całka:

$$\int\limits_{B_1'B_1}W(x,y,\xi)e^{-t\xi}d\xi$$

ma granicę równą zeru, gdy liczba m rośnie nieograniczenie.

Wskutek tego jest:

$$(16)\quad V(x,y,t)=\lim\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(B'A'A''AB)}W(x,y,\xi)e^{-t\xi}d\xi\right].$$

Okażemy, że będzie można pominąć te całkowania, które się odnoszą do odcinków prostych, t. j. do dróg AB i $A'B'$; ponieważ jednak wzdłuż tych dróg jest stale $\alpha=0$ i nie możnaby korzystać z funkcyi wykładniczej, na odcinkach BB_1, $B'B_1'$ trzeba więc uważać punkt C, względnie C' dowolnie, i ponieważ na polu trójkąta ABC, względnie $A'B'C'$ nie ma żadnych biegunów funkcyi $W(x,y,\xi)$, więc:

$$\int\limits_{(ACB)}W(x,y,\xi)e^{-t\xi}d\xi+\int\limits_{(BA)}W(x,y,\xi)e^{-t\xi}d\xi=0,$$

$$\int\limits_{(A'C'B')}W(x,y,\xi)\,e^{-t\xi}d\xi+\int\limits_{(B'A')}W(x,y,\xi)e^{-t\xi}d\xi=0.$$

Dość zająć się pierwszą równością. Gdy liczba R_m jest dość wielka, to funkcya $W(x,y,\xi)$ spełnia wzdłuż drogi ACB nierówność (12) (str. 111), i wykaże się znowu, że granica pierwszego wyrazu lewej strony pierwszej równości jest zerem, gdy liczba R_m rośnie nieograniczenie przy dodatniej wartości na zmienną t. Dlatego wolno napisać:

$$(17)\quad V(x,y,t)=\lim_{m=\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(A'A''A)}W(x,y,\xi)\,e^{-t\xi}d\xi\right\},$$

gdzie więc przy całkowaniu wolno ograniczyć się do półkola $A'A''A$, którego promień R_m rośnie nieograniczenie wraz ze wskaźnikiem m.

§ 50. Zbadajmy obecnie, o ile trzeba wyspecyalizować funkcyę $F(x,y)$ z zachowaniem założenia o istnieniu całki $\mathfrak{L}=\int\limits_{(D)}F^2(x',y')d\tau$, aby rozwiązanie zagadnienia analogicznego rozwiązywało uproszczone zagadnienie Fouriera. Zwróciwszy się do piątego warunku tego zagadnienia (§ 1, str. 4), twierdzimy, że funkcya $F(x',y')$ musi być ciągłą wewnątrz obszaru D, jeżeli nią ma być funkcya $V(x,y,t)$. Jeżeli punkty x,y, x',y' są odległe od krzywej C, to jest:

$$|V(x,y,t)-F(x,y)|<\varepsilon,$$

$$|V(x',y',t)-F(x',y')|<\varepsilon,$$

gdy jest $0<t<\eta$; jeżeli punkty x,y, x',y' są dość blizkie, to według pierwszego warunku z § 1 jest:

$$|V(x,y,t)-V(x',y',t)|<\varepsilon,$$

wynika więc stąd, że jest:

$$|F(x,y) - F(x',y')| < 3\varepsilon,$$

co nas zapewnia o ciągłości funkcyi $F(x,y)$ wewnątrz obszaru D.

Łatwo wykażemy (odwracając uwagę na razie od szczegółu co do pochodnej $\frac{\partial V}{\partial t}$ na samej krzywej C), że rozwiązanie uproszczonego zagadnienia jest zarazem rozwiązaniem zagadnienia, sformułowanego w § 48. Rozłóżmy bowiem obszar D na dwie części Δ_0 i Δ_1; część Δ_0 niech będzie ogółem punktów obszaru D, których odległość od punktów krzywej C nie jest mniejsza od liczby δ, wspomnianej w § 1, część Δ_1 zaś niech oznacza resztę obszaru D. Według drugiego warunku z § 1 istnieje stała dodatnia A taka, iż gdy jest $0 < t \leqq T$, to jest: $|V(x,y,t)| < A$, jakiekolwiek ma położenie punkt (x,y) w obszarze D; nadto, gdy jest $0 < t < \eta$, to w obszarze Δ_0 jest:

$$|V(x,y,t) - F(x,y)| < \varepsilon,$$

a więc:

$$\int\limits_{(D)} [V(x',y',t) - F(x',y')]^2 d\tau < \varepsilon^2 \int\limits_{(\Delta_0)} d\tau + A^2 \int\limits_{(\Delta_1)} d\tau + 2A\sqrt{\mathfrak{L}_1 \cdot \int\limits_{(\Delta_1)} d\tau} + \mathfrak{L}_1,$$

gdzie położyliśmy:

$$\mathfrak{L}_1 = \int\limits_{(\Delta_1)} F^2(x',y') d\tau;$$

widać, że strona prawa nierówności dąży wraz ze zmienną t do zera.

Wynika stąd, że rozwiązaniem uproszczonego zagadnienia Fouriera będzie rozwiązanie zagadnienia § 48. Jeszcze zostaje do usprawiedliwienia szczegół następujący: widzieliśmy, że, gdy tylko założymy, że istnieje całka $\mathfrak{L}$, to musi istnieć pochodna ciągła $\frac{\partial V}{\partial t}$ wewnątrz obszaru D i na krzywej C, i tem bardziej to będzie, gdy założymy obok istnienia całki $\mathfrak{L}$, że funkcya $F(x,y)$ jest ciągła wewnątrz obszaru D.

Te uwagi musieliśmy dodać, aby wyjaśnić rozumowanie obecnego rozdziału.

§ 51. Wykażemy teraz, że rozwiązanie zagadnienia z § 48 rozwiązuje rzeczywiście uproszczone zagadnienie Fouriera, jeżeli założymy, że funkcya rzeczywista $F(x,y)$ jest wewnątrz obszaru D ciągła, a nadto całka $\mathfrak{L}$ ma znaczenie określone.

W równości (17) (str. 115) położymy:

$$W(x,y,\xi) = \int\limits_{(D)} F(x',y') G(x,y,x',y',\xi)\, d\tau \tag{18}$$

i otoczmy punkt x,y kołem Σ o promieniu r takim, iżby leżało wewnątrz obszaru D, i przez Δ_0 oznaczmy obszar, ograniczony przez koło Σ, przez Δ_1 obszar, pozostały z obszaru D.

Ponieważ całki:

$$\int\limits_{(A'A''A)} e^{-t\xi} d\xi \int\limits_{(\Delta_0)} F(x',y') G(x,y,x',y',\xi)\, d\tau, \quad \int\limits_{\Delta_0} F(x',y') d\tau \int\limits_{(A'A''A)} G(x,y,x',y',\xi) e^{-t\xi} d\xi$$

można uczynić dowolnie małemi przez zmniejszanie promienia r, więc wolno w całce:

$$\int\limits_{(A'A''A)} e^{-t\xi} d\xi \int\limits_{(D)} F(x',y')\, G(x,y,x',y',\xi)\, d\tau$$

zmienić porządek całkowania, a więc, jak łatwo widać:

$$V(x,y,t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(D)} F(x',y') \left\{ \lim_{m=\infty} \int\limits_{(A'A''A)} G(x,y,x',y',\xi) e^{-t\xi} d\xi \right\} d\tau. \tag{19}$$

Przy pomocy tego wzoru zbadamy granicę $\lim\limits_{t=0} V(x,y,t)$, gdy punkt x,y leży wewnątrz obszaru D. Widzieliśmy, że jest:

$$G(x,y,x',y',\xi) = \frac{f(\varrho,\mu)}{2\pi} - u(x',y'),$$

gdzie ϱ oznacza odległość punktów (x,y) i (x',y'). Zbadajmy więc granice:

$$A = \lim_{m=\infty} \int\limits_{(A'A''A)} f(\varrho,\mu) e^{-t\xi} d\xi,$$

$$B = \lim_{m=\infty} \int\limits_{(A'A''A)} u(x',y') e^{-t\xi} d\xi,$$

o ile istnieją, i będzie:

$$V(x,y,t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(D)} F(x',y') \left(\frac{A}{2\pi} - B\right) d\tau.$$

§ 52. Łatwo obliczyć granicę wielkości B, gdy zmienna t dąży do zera. Już raz zauważyliśmy, co następuje: jeżeli przez D_δ oznaczymy zbiór punktów obszaru D, których odległość od punktów krzywej C nie wynosi mniej, niż dodatnia liczba δ, dość mała, zresztą dowolna, jeżeli dalej punkt

x,y, będący biegunem funkcyi G r e e n a, leży w obszarze D_δ, parametr ξ spełnia nierówności (15) (str. 41) i (31) (str. 45), a argument θ tego parametru czyni zadość nierówności $\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{3\pi}{2}$, to iloczyn $|\xi^p.u|$ (str. 101) co do modułu zdąża jednostajnie do zera, gdy parametr zdąża do nieskończoności, jakąkolwiek całkowitą i dodatnią liczbę oznacza p. Jednostajność osiągania granicy dotyczy każdego punktu (x',y') obszaru i argumentów θ. Do każdej, dowolnie małej, dodatniej liczby ε można znaleść taką liczbę X, iż, gdy jest $|\xi|>X$, to, niezależnie od argumemntu θ, byleby było $\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{3\pi}{2}$, jest:

$$|u| < \frac{\varepsilon}{|\xi^p|}.$$

Jeżeli przypuścimy, że promień R_m półkola $A'A''A$ jest większy od liczby X, to mamy:

$$\left| \int\limits_{(A'A''A)} u\, e^{-t\xi} d\xi \right| < \varepsilon \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{-tR_m \cos\theta} . R_m^{1-p}\, d\theta < \varepsilon\pi e R_m^{1-p},$$

a że wolno przyjąć, że liczba t jest dość mała, będąc dodatnią, więc też wolno położyć $R_m = \frac{1}{t}$ i $p>1$, przeto jest:

$$\lim_{t=0} B = 0,$$

i osiąganie tej granicy jest jednostajne dla każdego punktu x',y' obszaru D, kiedy punkt x,y leży dowolnie w obszarze D_δ.

§ 53 Zbadajmy granicę A. Uważajmy więc całkę:

$$\int\limits_{(A'A''A)} e^{-t\xi} d\xi \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\mu\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}}}{\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}}\, d\lambda;$$

o ile jest $\varrho \neq 0$, to wolno zmienić porządek całkowania; jeżeli bowiem l i ϱ_0 przedstawiają dwie liczby dodatnie, to gdy $\varrho \geqslant \varrho_0 > 0$, jest także:

$$\left| \int\limits_l^\infty \frac{e^{-\mu\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}}}{\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}}\, d\lambda \right| < \int\limits_l^\infty \frac{e^{-\lambda\sqrt{R_m}\sin\frac{\theta}{2}}}{\varrho_0}\, d\lambda = \frac{e^{-l\sqrt{R_m}\sin\frac{\theta}{2}}}{\varrho_0\sqrt{R_m}\sin\frac{\theta}{2}},$$

$$\left| \int\limits_{A'A''A} e^{-t\xi} \int\limits_l^\infty \frac{e^{-\mu\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}}}{\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}}\, d\lambda \right| < \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{e^{-l\sqrt{R_m}\sin\frac{\theta}{2}}}{\varrho_0 \sin\frac{\theta}{2}} \sqrt{R_m}\, e^{-tR_m\cos\theta} d\theta.$$

Prawa strona ostatniej nierówności dąży do zera wraz z liczbą $\frac{1}{l}$, jest więc

$$A = \int\limits_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}} \int\limits_{(A'A''A)} e^{-t\xi-\mu\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}} d\xi.$$

Kładąc:

$$\xi = \frac{\eta^2}{t}, \quad \overline{m} = \frac{r}{2\sqrt{t}}; \quad \sqrt{\varrho^2+\lambda^2} = r,$$

i umawiając się, że liczba η ma mieć część urojoną nieujemną, będziemy mieli: $\mu\sqrt{t} = -\eta i$, $-t\xi - \mu\sqrt{\varrho^2+\lambda^2} = -\eta^2 + 2\overline{m}\eta i$; półkolu $A'A''A$ na płaszczyźnie zmiennej zespolonej ξ odpowiada łuk koła o promieniu $\sqrt{R_m t}$, przecinający dodatnią oś urojonych na płaszczyźnie zmiennej η. Znajdźmy krańce tego łuku; ponieważ punkty A i A' są obrazami geometrycznemi liczb $+R_m i$, $-R_m i$, więc kładąc $\eta = \tau + \sigma i$ $(\sigma \geqslant 0)$ otrzymujemy:

$$\tau = \mp\sqrt{\frac{2tR_m}{2}}, \quad \sigma = +\sqrt{\frac{2tR_m}{2}};$$

kładąc dalej $p = \sqrt{\frac{2tR_m}{2}}$, mamy jako krańce łuku: $-p+ip$, $+p+ip$, tak iż będzie:

$$\int\limits_{(A'A''A)} e^{-t\xi-\mu\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}} d\xi = \frac{2}{t} \int\limits_{-p+ip}^{p+ip} e^{-\eta^2+2\overline{m}i\eta} d\eta.$$

Kładąc $z = \eta - \overline{m}i$, możemy obrać tak małą wartość na zmienną t, iż liczba $\overline{m}$ będzie tak wielka, że liczbom ξ_k będą odpowiadały liczby z_k, leżące już w trzecim i czwartym kwadracie płaszczyzny zmiennej zespolonej z. Będzie:

$$\int\limits_{(A'A''A)} e^{-t\xi-\mu\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}} d\xi = \frac{2}{t}\, e^{-\overline{m}^2} \int\limits_{-p+i(p-\overline{m})}^{p+i(p-\overline{m})} e^{-z^2}(z+\overline{m}i)\, dz.$$

Oznaczmy przez H_1, H_2, K_1, K_2 obrazy geometryczne liczb:

$$p+i(p-\overline{m}); \quad -p+i(p-\overline{m}); \quad p; \quad -p.$$

Ponieważ można przyjąć, że jest $p-\overline{m}>0$, więc w czworoboku $H_1H_2K_2K_1$ nie leży żadna z liczb z_k, i wolno zamiast łuku użyć drogi łamanej $H_2K_2K_1H_1$, jako drogi całkowania. Kładąc $p-\overline{m}=l$, $z=-p+iv$ na drodze H_2K_2 $z=p+iv$ na drodze H_1K_1, przyczem zmienna v zmienia się od liczby l do liczby 0 lub odwrotnie, mamy:

$$\int_l^0 e^{-(iv-p)^2}(iv-p)i\,dv+\int_l^0 e^{-(iv+p)^2}(iv+p)i\,dv=e^{-2p\overline{m}+\overline{m}^2}\sin\left[2p(p-\overline{m})\right],$$

co maleje do zera nieograniczenie wraz z liczbą $\frac{1}{p}$. Nadto jest:

$$-\int_l^0 e^{-(iv-p)^2}\overline{m}\,dv-\int_0^l e^{-(iv+p)^2}\overline{m}\,dv=2\overline{m}\int_0^l e^{v^2-p^2}\sin(vp)\,dv,$$

a że jest:

$$\left|\int_0^l e^{v^2-p^2}\sin(pv)\,dv\right|<e^{\overline{m}^2-2p\overline{m}}(p-\overline{m}),$$

więc strona prawa dąży do zera wraz z liczbą $\frac{1}{p}$; wskutek tego odpadają w granicy całki, odnoszące się do dróg H_2K_2 i K_1H_1, dość przeto zbadać całkę:

$$\frac{2}{t}\,e^{-\overline{m}^2}\int_{-p}^{+p} e^{-z^2}(z+\overline{m}i)\,dz,$$

gdy liczba rośnie nieograniczenie, przyczem drogą całkowania, jak się rzekło, jest oś rzeczywista na płaszczyźnie zmiennej zespolonej z.

Ponieważ całka $\int_{-p}^{+p} e^{-z^2}z\,dz$ jest zerem, więc pozostanie całka:

(20) $$\frac{2}{t}\,e^{-\overline{m}^2}\,\overline{m}i\int_{-p}^{+p} e^{-z^2}\,dz,$$

czyli, przy dawnych oznaczeniach:

$$\frac{i\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}}{\sqrt{t^3}}\cdot e^{-\frac{\varrho^2+\lambda^2}{4t}}\int_{-p}^{+p} e^{-z^2}\,dz.$$

Ponieważ całka $\int_{-p}^{+p} e^{-z^2}dz$ dąży do granicy $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz=\sqrt{\pi}$, zwanej całką Laplace'a, przeto wyrażenie (20) dąży do granicy:

$$\frac{i\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}\sqrt{\pi}}{\sqrt{t^3}}\,e^{-\frac{\varrho^2+\lambda^2}{4t}},$$

gdy jest $\varrho\geqslant\varrho_0>0$ i gdy wartość zmiennej t jest dodatnia.

Jest więc:

(21) $$A=\frac{i\sqrt{\pi}}{\sqrt{t^3}}\int^{\infty} e^{-\frac{\varrho^2+\lambda^2}{4t}}\,d\lambda=\frac{i\pi}{t}\,e^{-\frac{\varrho^2}{4t}}.$$

O ile tedy punkt x,y pozostaje w obszarze D_δ, różnicę:

(22) $$V(x,y,t)-\frac{1}{4\pi t}\int_{(D)} F(x',y')e^{-\frac{\varrho^2}{4t}}\,d\tau$$

można co do modułu uczynić dowolnie małą, gdy się obierze liczbę dodatnią t dość małą i gdy punkt x,y ma dowolne położenie w obszarze D_δ.

Szukajmy granicy drugiego wyrazu różnicy (22), gdy liczba t dąży do zera przez wartości dodatnie.

Punkt x,y obszaru D_δ otoczmy kołem Σ o promieniu R takim, że koło Σ leży wewnątrz obszaru D; obszar, ograniczony przez to koło, oznaczmy przez D_0, zaś pozostałą część obszaru D oznaczmy przez D_1; jest więc:

$$\frac{1}{4\pi t}\int_{(D)} F(x',y')e^{-\frac{\varrho^2}{4t}}\,d\tau=J_0+J_1,$$

gdzie kładziemy:

$$J_0=\frac{1}{4\pi t}\int_{(D_0)} F(x',y')e^{-\frac{\varrho}{4t}}\,d\tau;\quad J_1=\frac{1}{4\pi t}\int_{(D_1)} F(x',y')e^{-\frac{\varrho^2}{4t}}\,d\tau.$$

Ponieważ dla punktów x',y' obszaru D_1 jest $\varrho\geqslant R$, więc jest:

$$|J_1|<\frac{1}{4\pi t}\sqrt{\int_{(D_1)} F^2(x',y')\,d\tau\int_{(D_1)} e^{-\frac{\varrho^2}{4t}}\,d\tau}<\frac{\sqrt{\mathfrak{L}}}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\sqrt{t}}{R^2},$$

gdzie jest $\mathfrak{L}=\int_{(D)} F^2(x',y')\,d\tau$. Stąd widać, że całka J_1 dąży wraz z liczbą t do zera jednostajnie dla punktów obszaru D_δ.

Przejdźmy teraz do całki J_0; otóż jest:

$$J_0 = \frac{1}{4\pi t} \int_0^R e^{-\frac{\varrho^2}{4t}} \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} F(x',y')d\varphi \,;$$

ponieważ funkcya $F(x',y')$ jest ciągła wewnątrz obszaru D, przeto:

$$\lim_{\varrho=0} \int_0^{2\pi} F(x',y')d\varphi = 2\pi F(x,y) \,,$$

połóżmy więc:

$$\int_0^{2\pi} F(x',y')d\varphi = 2\pi F(x,y) + \eta \,.$$

Do każdej dowolnie małej, dodatniej liczby ε można obrać tak promień R, iż dla $\varrho \leqslant R$ jest $|\eta| < \varepsilon$, jakiekolwiek jest położenie punktu x,y w obszarze D_δ; można bowiem wykazać łatwo, że całka $\int_0^{2\pi} F(x',y')d\varphi$ jest funkcyą ciągłą względem promienia koła, do którego się odnosi i względem środka tego koła, o ile promień jest dość mały, a środek leży w obszarze D_δ; jest więc:

$$J_0 = F(x,y) + \gamma \,,$$

gdzie:

$$\gamma = e^{-\frac{R^2}{4t}} + \frac{1}{4\pi t} \int_0^R \eta e^{-\frac{\varrho^2}{4t}} \varrho d\varrho \,.$$

Nadto jest:

$$|\gamma| < e^{-\frac{R^2}{4t}} + \frac{\varepsilon}{2\pi} \,,$$

stąd widać, że wielkość γ dąży do zera wraz z liczbą t jednostajnie dla wszystkich punktów x,y obszaru D_δ. Dla nich więc można uczynić różnicę:

$$V(x,y,t) - F(x,y)$$

co do bezwzględnej wartości dowolnie małą wraz z liczbą t. Tem samem wykazaliśmy, że warunek (5) z § 1 jest spełniony.

§ 54. Znajdziemy górną granicę funkcyi $V(x,y,t)$ w całym obszarze D, gdy jest $0 < t \leqslant T$, gdzie liczba T jest zresztą dowolna; wykażemy, że górną granicę funkcyi $V(x,y,t)$ można wybrać niezależnie od położenia punktu x,y w obszarze D, a zależnie, wogóle mówiąc, od liczby T.

Wskutek rezultatu poprzedniego paragrafu jest widoczne, że górna granica funkcyi $V(x,y,t)$ w obszarze D_δ zależeć będzie od górnej granicy modułu funkcyi $F(x,y)$ w obszarze D; jeżeliby funkcya $F(x,y)$ przy zbliżeniu się punktu x,y do jednego choćby punktu krzywej C rosła nieograniczenie co do modułu, to nie będzie istniała górna granica modułu funkcyi $V(x,y,t)$. Dlatego odrazu zakładamy, że funkcya $F(x,y)$, będąc ciągłą wewnątrz obszaru D, jest ograniczona w całym obszarze D.

Górną granicę modułu funkcyi $F(x,y)$ oznaczymy, jak dotąd, literą M, i wyjdziemy z równości:

$$V(x,y,t) = \lim_{R=\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{(A'A''A)} W(x,y,\xi) e^{-t\xi} d\xi \right) ,$$

przyczem R oznacza promień półkola $A'A''A$, poprzednio określonego.

Połóżmy najpierw $h'=0$ i według str. 70:

$$W(x,y,\xi) = \Phi(x,y,\xi) - u_0 - v \,,$$

gdy tylko parametr ξ (co wolno przyjąć) spełnia warunek (15) (str. 41); i jest:

$$\Phi(x,y,\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{(D)} F(x',y') f(\varrho,\mu) d\tau \,,$$

przyczem ϱ oznacza odległość punktów x,y i x',y'; u_0 jest potencyałem warstwy pojedyńczej, rozpostartej wzdłuż krzywej C o gęstości $\sigma_0 = 2\frac{d\Phi}{dN}$; v jest pewnym potencyałem warstwy pojedyńczej, który spełnia nierówność (41) (str. 70), jakiekolwiek jest położenie punktu x,y w obszarze D. Jest więc:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{A'A''A} v e^{-t\xi} d\xi \right| < \frac{32 M c^2}{L\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{e^{-t\varrho_1 \cos\theta}}{\varrho_1^{\frac{1}{2}} \sin^5 \frac{\theta}{2}} d\theta < \frac{32 M c^2 e \sqrt{t}}{L \sin^5 \frac{\pi}{4}} ,$$

jeżeli założymy, że promień R jest dość wielki i rośnie do nieskończoności w ten sposób, że jest $Rt=1$, przyczem t dąży do zera; nierówność, wyprowadzona obecnie, jest ważna dla dowolnego punktu x,y obszaru D.

Zbadajmy całki:

$$J_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{A'A''A} \Phi(x,y,\xi) e^{-t\xi} d\xi \,; \quad J_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{(A'A''A)} u_0 e^{-t\xi} d\xi ,$$

gdy promień R półkola $A'A''A$ rośnie nieograniczenie.

Łatwo wykazać, że wolno w całce J_1 zmienić porządek całkowania tak, iż jest:

$$J_1 = \frac{1}{4\pi^2 i} \int\limits_{(D)} F(x',y') \int\limits_{(A'A''A)} f(\varrho,\mu) e^{-t\xi} d\xi ;$$

otóż na mocy poprzedniego paragrafu będzie:

$$\lim_{R=\infty} J_1 = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{(D)} F(x',y') e^{-\frac{\varrho^2}{4t}} d\tau,$$

i

$$\left|\lim_{R=\infty} J_1\right| < \frac{M}{4\pi t} \int\limits_{(D)} e^{-\frac{\varrho^2}{4t}} d\tau < \frac{M}{4\pi t} \int\limits_{(N)} e^{-\frac{\varrho^2}{4t}} d\tau ,$$

gdzie litera N wskazuje na to, że rozciągnęliśmy całkowanie na całą nieograniczoną płaszczyznę, na której leży obszar D. Jest więc:

$$\left|\lim_{(R=\infty)} J_1\right| < M ,$$

jakiekolwiek ma położenie punkt x,y w obszarze D i gdy wartość liczby t jest dodatnia.

Jeżeli x'',y'' są spółrzędnemi dowolnego punktu krzywej C, ϱ' jest odległością punktów (x',y') i (x'',y''), γ kątem między normalną wewnętrzną w punkcie x'',y'' a odcinkiem ϱ', skierowanym od punktu (x'',y'') do punktu (x',y'), to:

$$J_2 = \frac{-1}{4\pi^3 i} \int\limits_{(A'A''A)} e^{-t\xi} d\xi \int\limits_{(C)} f(\varrho,\mu) ds \int\limits_{(D)} F(x',y') \frac{df(\varrho',\mu)}{d\varrho'} \cos\gamma \, d\tau .$$

Przez uważanie obszaru D_δ z ostatniego paragrafu i otoczenie punktu x,y dość małem kołem można wykazać, że wolno tu zmienić porządek całkowania, przeto jest:

$$J_2 = \frac{-1}{4\pi^3 i} \int\limits_{(C)} ds \int\limits_{(D)} F(x',y') \cos\gamma \, d\tau \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}} \frac{d}{d\varrho'} \left[\int_0^\infty \frac{d\lambda'}{\sqrt{\varrho'^2+\lambda'^2}} \int\limits_{(A'A''A)} e^{-\mu(\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}+\sqrt{\varrho'^2+\lambda'^2})-t\xi} d\xi \right].$$

Według ostatniego paragrafu jest

$$\frac{(\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}+\sqrt{\varrho'^2+\lambda'^2}) i \sqrt{\pi}}{t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}+\sqrt{\varrho'^2+\lambda'^2})^2}{4t}}$$

granicą całki:

$$\int\limits_{(A'A''A)} e^{-\mu(\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}+\sqrt{\varrho'^2+\lambda'^2})-t\xi} d\xi ,$$

gdy promień R półkola $A'A''A$ dąży do nieskończoności.

Znajdźmy teraz górną granicę całki:

$$U = \int\limits_{(D)} F(x',y') \cos\gamma \frac{dK}{d\varrho'} d\tau ,$$

gdzie oznaczyliśmy:

$$K = \frac{\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}+\sqrt{\varrho'^2+\lambda'^2}}{\sqrt{\varrho'^2+\lambda'^2}} . e^{-\frac{(\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}+\sqrt{\varrho'^2+\lambda'^2})^2}{4t}} ;$$

przeto jest:

$$|U| < -2\pi M \int_0^\infty \frac{dK}{d\varrho'} \varrho' d\varrho' = 2\pi M \int_0^\infty K d\varrho' ,$$

a stąd:

$$\left|\int_0^\infty U d\lambda'\right| < \sqrt{\varrho^2+\lambda^2} \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{(\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}+\sqrt{\varrho'^2+\lambda'^2})^2}{4t}}}{\sqrt{\varrho'^2+\lambda'^2}} d\varrho' d\lambda' + \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{(\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}+\sqrt{\varrho'^2+\lambda'^2})^2}{4t}} d\varrho' d\lambda'.$$

Oczywiście strona prawa mniejsza będzie od wyrażenia:

$$e^{-\frac{\varrho^2+\lambda^2}{4t}} \left\{ \sqrt{\varrho^2+\lambda^2} \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\varrho'^2+\lambda'^2}{4t}}}{\sqrt{\varrho'^2+\lambda'^2}} d\varrho' d\lambda' + \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{\varrho'^2+\lambda'^2}{4t}} d\varrho' d\lambda' \right\},$$

czyli mniejsza od:

$$\left\{ 2\pi^{\frac{3}{2}} t^{\frac{1}{2}} \sqrt{\varrho^2+\lambda^2} + 4\pi t \right\} . e^{-\frac{\varrho^2+\lambda^2}{4t}} ,$$

a więc:

$$\left|\lim_{R=\infty} J_2\right| < \frac{M}{t} \int\limits_{(C)} e^{-\frac{\varrho^2}{4t}} ds \int_0^\infty e^{-\frac{\lambda^2}{4t}} d\lambda + \frac{2M}{\pi^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}} \int\limits_{(C)} e^{-\frac{\varrho^2}{4t}} ds \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}}{\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}} d\lambda.$$

Aby podać górną granicę prawej strony, rozróżnimy dwa przypadki zależnie od tego, czy punkt x,y leży tak, iż istnieje dolna granica δ, różna od zera, dla zmiennej ϱ, czy też tak nie jest.

a) Niech będzie $\varrho \geqq \delta > 0$, to:

$$\left|\lim_{R=\infty} J_2\right| < \frac{MA\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} . e^{-\frac{\delta^2}{4t}} + \frac{2MA}{\delta} e^{-\frac{\delta^2}{4t}} ,$$

przyczem A oznacza długość łuku krzywej C. Stąd jest:

$$\left|\lim_{(R=\infty)} J_2\right| < \left(\frac{4M\sqrt{\pi t}}{\delta^2} + \frac{8Mt}{\delta^3}\right)A;$$

jeżeli $0<t\leqq T$, to można znaleść górną granicę wyrażenia $\left|\lim_{(R=\infty)} J_2\right|$, zależną od liczby T i od liczby δ.

b) Jeżeli dla liczby ϱ nie można podać dolnej granicy, różnej od zera przez to, że punkt x,y leży dość blizko krzywej C lub na niej, to wzdłuż najkrótszej odległości punktu x,y od krzywej C, względnie wzdłuż normalnej wewnętrznej kładziemy dodatnią oś x, a za oś y bierzemy styczną spodka osi x na krzywej C; krzywą C dzielimy na części C_0 i C_1, z których druga nie zawiera początku O naszego układu osi, istnieje przeto stała dodatnia d, iż jest $\varrho\geqq d$ wzdłuż łuku C_1; częścią C_0 jest łuk pozostały. Będzie więc według przypadku a):

$$\int_{C_1} e^{-\frac{\varrho^2}{4t}}\,ds + \int_{C_1} e^{-\frac{\varrho^2}{4t}}\,ds \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}}{\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}}\,d\lambda < \left(\frac{4M\sqrt{\pi t}}{d^2} + \frac{8Mt}{d^3}\right)A.$$

Ponieważ dalej wolno przyjąć, że łuk C_0 już spełnia trzeci z warunków dla krzywej C (str. 2) i że, skoro jest $ds = \frac{dy''}{\cos\vartheta}$, gdzie ϑ oznacza kąt między osią x wzdłuż normalnej, skierowanej na wewnątrz obszaru D, a normalną wewnętrzną do krzywej C, narysowaną w miejscu elementu ds, to będzie:

$$\left|\frac{1}{\cos\vartheta}\right| < 2$$

i jeżeli $(-\varepsilon, +\eta)$ są rzędnemi końców łuku C_0, to jest:

$$\int_{(C_0)} e^{-\frac{\varrho^2}{4t}}\,ds + \int_{(C_0)} e^{-\frac{\varrho^2}{4t}}\,ds \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}}{\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}}\,d\lambda < 4\sqrt{\pi t} + 8\pi\sqrt{\pi t},$$

a więc jest:

$$\left|\lim_{R=\infty} J_2\right| < \left(\frac{4M\sqrt{\pi t}}{d^2} + \frac{8Mt}{d^3}\right)A + 4\pi M + 16M.$$

Łącząc obydwa przypadki, widzimy, że górna granica modułu wyrażenia $\lim_{R=\infty} J_2$ nie zależy od położenia punktu x,y w obszarze D, tylko co najwyżej (w najgorszym razie) od stałej T.

Wobec tego istnieje stała dodatnia $C(T)$ zależna jedynie od liczby T taka, że jest:

$$|V(x,y,t)| < C(T)\mathcal{M},$$

jakiekolwiek jest położenie punktu x,y w obszarze D.

Jeżeli jest $h'=0$ lub $h'=1$, a funkcya stale nieujemną, to żadna z liczb ξ_k nie jest też ujemną i dla szeregu:

$$V = \sum_{1}^{\infty} A_k U_k e^{-\xi_k t},$$

bezwzględnie i jednostajnie zbieżnego, można podać górną granicę jego modułu niezależną napewno od liczby T.

Jeżeli jest $h'=1$, to w równości:

$$V(x,y,t) = \lim_{(R=\infty)} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{(A'A''A)} W(x,y,\xi) e^{-t\xi}\,d\xi\right]$$

kładziemy:

$$W(x,y,\xi) = \psi - v + v_0,$$

stosownie do rozumowania § 36 B) (str. 71 i 72). Łatwo wykazać, że rachunk dla obecnego przypadku będą te same formalnie, jak dla przypadku $h'=0$, i przeto rezultat musi być ten sam.

Wykazaliśmy więc w zupełności, że funkcya $V(x,y,t)$, określona szeregiem (6) (str. 107), czyni zadość warunkom uproszczonego zagadnienia F o u r i e r a.

§ 55. Załóżmy, że funkcya $F(x,y)$ jest ciągła w całym obszarze D. Zapytajmy, czy funkcya $V(x,y,t)$ zdąża do funkcyi $F(x,y)$, gdy zmienna t i będąc dodatnią, zmierza do zera, a punkt x,y ma dowolne położenie w obszarze D.

Niech będzie $h'=1$ i połóżmy:

$$V(x,y,t) = U_1 + U_2 + E,$$

gdzie jest:

$$U_1 = \frac{1}{4\pi t} \int_{(N)} F(x',y') e^{-\frac{\varrho^2}{4t}}\,d\tau,$$

$$U_2 = \frac{1}{4\pi^{\frac{5}{2}} t^{\frac{3}{2}}} \int_{(C)} ds \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}} \int_0^{\infty} d\lambda' \int_{(N)} F(x',y') \cos\gamma\, d\tau \frac{dK}{d\varrho'},$$

gdzie K ma to samo znaczenie, co na str. 125, zaś ϱ oznacza odległość dowolnego punktu x'',y'' na krzywej C od punktu x,y, ϱ' odległość punktu x'',y'' od punktu x',y', leżącego w obszarze D lub D'; nadto wielkość E zdąża do zera wraz z liczbą t i jednostajnie dla wszystkich punktów x,y obszaru D; litera N oznacza, że całkowanie ma być rozpostarte na całą nieograniczoną płaszczyznę.

Jakiekolwiek jest położenie punktu x,y w całym obszarze D, można położyć:

$$F(x',y')=F(x,y)+\eta\,,$$

przez co jest:

$$U_1=F(x,y)+\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{(N)}\eta e^{-\frac{\varrho^2}{4t}}\,d\tau.$$

Okażemy, że drugi wyraz prawej strony można uczynić dowolnie małym, gdy zmienna t dąży do zera przy jakiemkolwiek położeniu punktu x,y w obszarze D; trzeba w tym celu punkt (x,y) otoczyć kołem Σ o promieniu R dość małym; do każdej dodatniej liczby ε można znaleść taką dodatnią liczbę d, iż jest $|\eta|<\varepsilon$, gdy $R\leqq d$; ponieważ poza kołem Σ jest $|\eta|<2M$, więc jest:

$$\left|\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{(N)}\eta e^{-\frac{\varrho^2}{4t}}\,d\tau\right|<\varepsilon+2Me^{-\frac{R^2}{4t}},$$

ponieważ wielkość ε jest dowolna, więc wolno przyjąć $\varepsilon=t$. Tem samem stwierdziliśmy, cośmy zapowiadali.

W całce U_2 kąt γ jest kątem, zawartym pomiędzy normalną wewnętrzną punktu (x'',y'') a odcinkiem, skierowanym od punktu x'',y'' do punktu x',y'; z punktu x'',y'', jako środka, wyrysujmy koło Σ_1 o promieniu R'; niech ε_1 będzie liczbą dowolnie małą i dodatnią; otóż można zawsze obrać liczbę R', tak, iż na kole Σ_1 wewnątrz niego będzie:

$$|F(x',y')-F(x'',y'')|<\varepsilon_1.$$

Kładąc:

$$F(x',y')=F(x'',y'')+\eta\,,$$

uważajmy całkę:

$$L(R')=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\Sigma_1)}F(x',y')\cos\gamma\,d\varphi,$$

która się równa:

$$L(R')=\frac{F(x'',y'')}{2\pi}\int\limits_{(\Sigma_1)}\cos\gamma\,d\varphi+\frac{1}{2\pi}\int\eta\cos\gamma\,d\varphi.$$

Pierwsza całka strony prawej jest zerem, druga znów dąży do zera wraz z liczbą R'; jest więc $\lim\limits_{(R'=0)}L(R')=0$. Łatwo udowodnić, że funkcya $L(R')$ jest ciągłą względem promienia R' i względem środka koła Σ; wskutek tego do każdej liczby dodatniej ε_1 istnieje liczba dodatnia l taka, że, niezależnie od położenia środka P koła Σ_1 na krzywej C, jest:

$$|L(R')|<\varepsilon_1\,,$$

gdy tylko jest $0<R'<l$; nadto niezależnie od wielkości promienia R' jest:

$$|L(R')|<M.$$

Otóż jest:

$$\int\limits_{(N)}F(x',y')\cos\gamma\frac{dK}{d\varrho'}\,d\tau=2\pi\int\limits_0^l L(\varrho')\varrho'\frac{dK}{d\varrho'}\,d\varrho'+2\pi\int\limits_l^\infty L(\varrho')\varrho'\frac{dK}{d\varrho'}\,d\varrho',$$

a że:

$$\left|\int\limits_0\frac{dK}{d\varrho'}\varrho'd\varrho'\right|<\int\limits_0 Kd\varrho',$$

jeżeli, jak zaznaczyliśmy, dolną granicą jest liczba zero, i także:

$$\int\limits_0^l Kd\varrho'<\int\limits_0^\infty Kd\varrho',$$

więc:

$$|U_2|<\frac{\varepsilon_1}{2\pi^{\frac{3}{2}}t^{\frac{3}{2}}}\int\limits_{(C)}ds\int\limits_0^\infty\frac{d\lambda}{\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}}\int\limits_0^\infty d\lambda'\int\limits_0^\infty Kd\varrho'$$

$$+\frac{M}{\pi^{\frac{3}{2}}t^{\frac{3}{2}}}\int\limits_{(C)}ds\int\limits_0^\infty\frac{d\lambda}{\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}}\int\limits_0^\infty d\lambda'\left[(K\varrho')_{\varrho'=l}+\int\limits_l^\infty Kd\varrho'\right].$$

Stąd na mocy rozumowań analogicznych do tych, które podaliśmy na str. 125 i 126 pod a) i b) można powiedzieć, że istnieje dodatnia stała A taka, że, niezależnie od położenia punktu x,y w obszarze D, jest pierwszy wyraz prawej strony ostatniej nierówności, mniejszy od iloczynu:

$$A\varepsilon_1\,,$$

przyczem stała A od liczby t nie zależy; drugi wyraz rozpadnie się na dwa wyrażenia:

$$I_1=\frac{M}{\pi^{\frac{3}{2}}t^{\frac{3}{2}}}\int\limits_{(C)}ds\int\limits_0^\infty\frac{d\lambda}{\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}}\int\limits_0^\infty d\lambda'\,.\,l\,.\,(K)_{\varrho'=l}\,,$$

$$I_2=\frac{M}{\pi^{\frac{3}{2}}t^{\frac{3}{2}}}\int\limits_{(C)}ds\int\limits_0^\infty\frac{d\lambda}{\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}}\int\limits_0^\infty d\lambda'\int\limits_l^\infty Kd\varrho'$$

i będzie:

$$I_1<\frac{Me^{-\frac{l^2}{4t}}}{\pi^{\frac{3}{2}}t^{\frac{3}{2}}}\int\limits_{(C)}e^{-\frac{\varrho^2}{4t}}ds\left\{\pi t+l\sqrt{\pi t}\int\limits_0^\infty\frac{e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}}{\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}}\,d\lambda\right\},$$

ale przy każdem położeniu punktu x,y w obszarze D istnieje, jak łatwo się przekonać, stała dodatnia d, zależna jedynie od krzywej C taka, iż jest:

$$\int\limits_{(C)} e^{-\frac{\varrho^2}{4t}}\,ds < d(t+\sqrt{t}),$$

$$\int\limits_{C} e^{-\frac{\varrho^2}{4t}}\,ds \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}}{\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}}\,d\lambda < d\sqrt{t},$$

a więc będzie:

$$I_1 < \frac{Me^{-\frac{l^2}{4t}}.\,d}{\pi^{\frac{3}{2}}\,t^{\frac{3}{2}}}\left\{\pi t(t+\sqrt{t})+lt\sqrt{\pi}\right\};$$

podobnie będzie:

$$I_2 < \frac{M}{\pi^{\frac{3}{2}}\,t^{\frac{3}{2}}}\,.\,J(l)\left\{\frac{\pi t}{l}\int\limits_{(C)} ds\,.\,e^{-\frac{\varrho^2}{4t}} + \sqrt{\pi t}\int\limits_{(C)} ds e^{-\frac{\varrho^2}{4t}}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}}{\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}}\,d\lambda\right\},$$

gdzie oznaczyliśmy:

$$J(l) = \int\limits_l^\infty e^{-\frac{\varrho'^2}{4t}}\,d\varrho'.$$

Otóż jest:

$$J(0) = \sqrt{\pi t}\,;\quad J(l) = 2\sqrt{t}\int\limits_{\frac{l}{2\sqrt{t}}}^\infty e^{-x^2}\,dx,$$

$$I_2 < \frac{Md}{\pi^{\frac{3}{2}}\,t^{\frac{3}{2}}}\,.\,J(l)\left\{\frac{\pi t}{l}(t+\sqrt{t})+t\sqrt{\pi}\right\}.$$

Ale wolno nam przyjąć najpierw liczbę l (jeżeli jest dość małą) i do tego wyznaczyć liczbę ε_1, przez co liczba ε_1 stanie się funkcyą liczby l, zmierzającą do zera wraz z liczbą ε_1 (tak możemy się bowiem zawsze urządzić). Otóż obierzmy $l=\sqrt{t}$, przeto stosunek:

$$\frac{J(l)}{l}$$

będzie skończony, choćby liczba l dążyła do zera; funkcyę $J(l)$ można tedy uważać za wielkość rzędu $\sqrt{t}$ względem zmiennej t; stąd wynika, że wielkości I_1 i I_2 zdążają do zera wraz z liczbą t, i to niezależnie od położenia punktu x,y w obszarze D; to samo da się powiedzieć o funkcyi U_2. Ostatecznie przekonaliśmy się, że różnica:

$$V(x,y,t) - F(x,y)$$

dąży do zera jednostajnie w całym obszarze D wraz z liczbą t, a nie tylko w pewnej części obszaru D.

§ 56. W przypadku $h'=0$ jest funkcya $V(x,y,t)$ stale zerem wzdłuż krzywej C, jeżeli jest $t>0$, przeto w punkcie x,y na krzywej C jest:

$$\lim_{t=0} V(x,y,t) = 0.$$

Gdyby więc funkcya $F(x,y)$ była nawet ciągła w całym obszarze D, to funkcya $V(x,y,t)$ dla punktu krzywej C nie dążyłaby do wartości $F(x,y)$, gdy zmienna t dąży do zera, a funkcya $F(x,y)$ nie była zerem wzdłuż krzywej C. Gdy jednakowoż będzie w bardzo szczególnym przypadku funkcya $F(x,y)$ zerem wzdłuż krzywej C, wtedy, zachowując własność zasadniczą jej ciągłości, położymy zewnątrz krzywej C:

$$F(x,y) = 0$$

i wskutek tego całe rozumowanie poprzedniego paragrafu pozostanie prawdziwe i obecnie. Rezultat będzie więc następujący: różnica $V(x,y,t)-F(x,y)$ dążyć będzie do zera jednostajnie wraz z liczbą t w całym obszarze D.

VIII. OGÓLNE ZAGADNIENIE FOURIERA.

§ 57. Jak wiadomo z pierwszego rozdziału, szukamy funkcyi $V(x,y,t)$, która, obok innych warunków, spełnia równanie:

$$(1)\qquad \Delta V = \frac{\partial V}{\partial t}$$

wewnątrz obszaru D, a równanie:

$$(2)\qquad h'\left(\frac{dV}{dN}\right)_i = h(V)_i + \varphi$$

wzdłuż krzywej C, przyczem funkcya φ jest ciągła względem zmiennych x,y,t.

Połóżmy:

$$(3)\qquad V = u + v,$$

gdzie u niech oznacza funkcyę, spełniającą równanie:

$$(4)\qquad \Delta u + \xi u = 0$$

wewnątrz obszaru D i warunek:

$$h'\left(\frac{du}{dN}\right)_i = h(u)_i + \varphi \tag{5}$$

wzdłuż krzywej C.

Jeżeli parametr ξ obierzemy odpowiednio, to taka funkcya u istnieje napewno i będzie ją można obrać jako pewien potencyał warstwy pojedyńczej. Ażeby funkcya V spełniała równanie, dość założyć, że funkcya φ ma pochodną ciągłą względem zmiennej t wzdłuż krzywej C.

Łatwo wykazać, że wtedy istnieje pochodna $\frac{\partial u}{\partial t}$ wewnątrz obszaru D.

Dla przypadku $h'=0$ otrzymujemy, że jest $u_i=\tau$, gdzie $\tau = -\frac{\varphi}{h}$, przyczem funkcya h zależy jedynie od punktu krzywej C, względem niego jest ciągła i nigdzie wzdłuż krzywej C nie staje się zerem; funkcya τ ma więc pochodną ciągłą względem zmiennej t, przyczem moduł $\left|\frac{\partial \tau}{\partial t}\right|$ ma górną granicę, którą oznaczymy przez T_1, o ile się ograniczymy do przedziału $0 < t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, gdzie liczby t_1, t_2 są dowolnie wybrane. Funkcyę można obrać, jako potencyał warstwy podwójnej.

Stosownie do rozumowań § 20, kładziemy:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k\,; \quad u_0 = \frac{-1}{2\pi}\int_{(C)} \tau \frac{df(\varrho,\mu)}{d\varrho}\cos\vartheta\, ds; \quad u_k = \frac{1}{2\pi}\int_{(C)} u_{k-1\,e}\frac{df(\varrho,\mu)}{d\varrho}\cos\vartheta\, ds,$$

$$(k=1, 2, 3, \ldots)$$

przyczem ϑ jest kątem, zawartym między normalną wewnętrzną do krzywej C, narysowaną w miejscu elementu ds, a odcinkiem ϱ, łączącym punkt x,y z dowolnym punktem x',y' krzywej C i skierowanym od punktu x',y' do punktu x,y. Jest więc:

$$\frac{\partial (u_0)_e}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{1}{2\pi}\int_{(C)} \frac{\partial \tau}{\partial t}\frac{df(\varrho',\mu)}{d\varrho'}\cos\vartheta\, ds\,,$$

gdzie ϱ' oznacza wielkość, w którą przechodzi odległość ϱ, gdy punkt x,y leży na krzywej C. Na mocy nierówności (38) (str. 36) i (15) (str. 44) otrzymujemy:

$$\left|\frac{\partial (u_0)_e}{\partial t}\right| < \frac{T_1}{2} + \frac{cT_1}{L\sqrt{\varrho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}} \leqslant \frac{3T_1}{4}$$

i podobnie będzie:

$$\left|\frac{\partial (u_k)_e}{\partial t}\right| < \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} . T_1\,,$$

a stąd na mocy nierówności (40) (str. 36) jest:

$$\left|\frac{\partial u_0}{\partial t}\right| < AT_1\,; \quad \left|\frac{\partial u_k}{\partial t}\right| < A\,.\left(\frac{3}{4}\right)^k . T_1\,,$$

gdzie oznaczyliśmy:

$$A = \frac{c}{\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{c}{L\sqrt{\varrho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}\,.$$

Wobec tego szereg:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial u_k}{\partial t}$$

jest bezwzględnie i jednostajnie zbieżny wewnątrz obszaru D i gdy jest $0 < t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ szereg ten przedstawia pochodną $\frac{\partial u}{\partial t}$. To samo można wykazać i w przypadku $h'=1$.

Istnieje więc pochodna $\frac{\partial v}{\partial t}$, i na funkcyę v otrzymujemy następujące warunki:

wewnątrz obszaru D ma być: $\Delta v = \frac{\partial v}{\partial t} + \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \xi u\right)$,

wzdłuż krzywej C ma być: $h'\left(\frac{dv}{dN}\right)_i = h(v)_i$.

Zajmiemy się tedy zagadnieniem następującem: utworzyć funkcyę $W(x,y,t)$, 1), którąby dla każdej dodatniej wartości na zmienną t była ciągła w całym obszarze D względem zmiennych x,y,t i wewnątrz niego spełniała równanie:

$$\Delta W = \frac{\partial W}{\partial t} + A(x,y,t)\,, \tag{6}$$

przyczem $A(x,y,t)$ przedstawia daną funkcyę ciągłą; 2) dla każdej dodatniej wartości na zmienną t ma być spełniony wzdłuż krzywej C warunek:

$$h'\left(\frac{dW}{dN}\right)_i = h(W)_i\,; \tag{7}$$

3) kiedy zmienna t dąży do zera, to funkcya W zdąża jednostajnie do funkcyi ciągłej zmiennych x,y w całym obszarze D, zresztą dowolnie obranej.

Załóżmy, że rozwiązaliśmy powyższe zagadnienie, przyczem warunek (3) daje nam wielką swobodę, kładziemy nadto:

$$(8) \qquad A(x,y,t) = \frac{\partial u}{\partial t} + \xi u \,,$$

to różnica $v - W$ będzie rozwiązaniem W_1 odpowiednio sformułowanego uproszczonego zagadnienia F o u r i e r a, a więc będzie:

$$v = W + W_1.$$

§ 58. Utworzymy najpierw funkcyę W przy pewnem bardzo szczególnem założeniu co do funkcyi $A(x,y,t)$ i następnie zobaczymy, czy funkcya, do której utworzenia zostaniemy doprowadzeni, jest rozwiązaniem dopiero co wysłowionego zagadnienia i w tym przypadku, gdy tych bardzo szczególnych założeń o funkcyi $A(x,y,t)$ nie zrobimy.

Otóż założymy, że funkcya $A(x,y,t)$ da się rozwinąć na szereg funkcyj harmonicznych, jednostajnie zbieżny w całym obszarze D, t. j. że jest:

$$(9) \qquad A(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t) U_k(x,y) \,,$$

gdzie jest:

$$(10) \qquad C_k(t) = \int_{(D)} A(x',y',t)\, U_k(x',y') d\tau.$$

Załóżmy dalej, że:

$$(11) \qquad W = \sum_{k=1}^{\infty} W_k \,,$$

gdzie funkcye W_k wewnątrz obszaru D spełniają równanie:

$$(12) \qquad \Delta W_k = \frac{\partial W_k}{\partial t} + C_k(t) U_k \,, \qquad (k=1,2,3,\ldots)$$

a na krzywej C warunek:

$$(13) \qquad h' \left(\frac{d W_k}{dN}\right)_i = h(W_k)_i. \qquad (k=1,2,3,\ldots)$$

Połóżmy:

$$(14) \qquad W_k = f_k(t) U_k(x,y) \,,$$

to warunek (13) jest spełniony, a na funkcyę $f_k(t)$ otrzymamy warunek:

$$\frac{df_k(t)}{dt} + \xi_k f_k(t) + C_k(t) = 0,$$

a stąd, odrzucając stałą dowolną, otrzymujemy:

$$f_k(t) = -\int_0^t C_k(\eta) e^{\xi_k(\eta - t)} d\eta \,,$$

przeto:

$$(15) \qquad W = -\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t U_k(x,y) e^{\xi_k(\eta-t)}\, d\eta \int_{(D)} A(x',y'\eta) U_k(x',y') d\tau.$$

Chodzi nam o to, by szeregowi temu nadać taką postać, iżby w każdym razie był zbieżny przy nieujemnej wartości na zmienną t. Szereg:

$$\sum_1^{\infty} C_k(t) U_k(x,y) \,,$$

ogólnie mówiąc, mógłby być rozbieżnym, a już szereg $\sum_1^{\infty} \frac{C_k(t) U_k(x,y)}{\xi_k}$ jest jednostajnie zbieżny w obszarze D, o ile tylko całka:

$$\int_{(D)} A^2(x',y',t) d\tau$$

ma znaczenie, bo jest:

$$\left(\sum_n^{\infty} \frac{C_k(t) U_k(x,y)}{\xi_k}\right)^2 < \sum_n^{\infty} C_k^2(t) \sum_n^{\infty} \frac{U_k^2(x,y)}{\xi_k^2} \,,$$

możemy bowiem zawsze założyć, że funkcya $A(x,y,t)$ jest rzeczywistą; wykonamy przeto całkowanie częściowe tak długo, aż otrzymamy szeregi w każdym razie jednostajnie zbieżne w obszarze D, które będzie można różniczkować względem zmiennej t.

Niech ξ_0 będzie liczbą dodatnią, dość wielką i taką, że dla liczby $(-\xi_0)$ istnieje funkcya G r e e n a $G(x,y,x',y',-\xi_0)$; kładąc:

$$e^{\xi_k(\eta-t)} = e^{(\xi_k+\xi_0)(\eta-t)} \cdot e^{-\xi_0(\eta-t)} \,,$$

otrzymujemy przy założeniu, że funkcya $A(x,y,t)$ ma pochodną ciągłą $\frac{\partial A}{\partial t}$ dla nieujemnych wartości na zmienną t i w całym obszarze D:

$$\int_0^t e^{\xi_k(\eta-t)} A(x',y',\eta) d\eta = \frac{A(x',y',t)}{\xi_k+\xi_0} - \frac{e^{-\xi_k t}}{\xi_k+\xi_0}$$

$$-\int_0^t \frac{e^{(\xi_k+\xi_0)(\eta-t)}}{\xi_k+\xi_0} \cdot \frac{\partial [A(x',y',\eta) e^{-\xi_0(\eta-t)}]}{d\eta}\, d\eta \,,$$

przeto jest:

$$W(x,y,t)=-\sum_1^\infty \frac{U_k(x,y)}{\xi_k+\xi_0}\int\limits_{(D)} A(x',y',t)\,U_k(x',y')\,d\tau+\sum_1^\infty \frac{e^{-\xi_k t}}{\xi_k+\xi_0}\,U_k(x,y)\int\limits_{(D)} A(x',y',0)\,U_k(x',y')\,d\tau$$

$$+\sum_1^\infty U_k(x,y)\int\limits_{(D)}\int_0^t \frac{e^{(\xi_k+\xi_0)(\eta-t)}}{\xi_k+\xi_0}\cdot\frac{\partial[A(x',y',\eta)e^{-\xi_0(\eta-t)}]}{\partial\eta}.U_k(x',y')\,d\tau d y\eta.$$

Drugi szereg strony prawej powyższej równości odrzucimy, ma to bowiem wpływ na funkcyę, określoną w trzecim warunku obecnego zagadnienia (str. 133), a szeregi pozostałe będą i nadal zbieżne; ponieważ chodzi nam o pochodną $\frac{\partial W}{\partial t}$, więc w ostatnim szeregu musimy jeszcze raz wykonać całkowanie częściowe; zakładamy więc w tym celu, że funkcya $A(x,y,t)$ ma drugą ciągłą pochodną $\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$ dla nieujemnych wartości zmiennej t i w całym obszarze D. Odrzucając znowu wyrazy, które wynikną dla $t=0$ przy całkowaniu częściowem, otrzymamy:

$$W(x,y,t)=-\sum_1^\infty \frac{U_k(x,y)}{\xi_k+\xi_0}\int\limits_{(D)} A(x',y',t)\,U_k(x',y')\,d\tau$$

$$+\sum_1^\infty \frac{U_k(x,y)}{(\xi_k+\xi_0)^2}\int\limits_{(D)}\left\{\frac{\partial A(x',y',t)}{\partial t}-\xi_0 A(x',y',t)\right\}U_k(x',y')\,d\tau$$

$$-\sum_1^\infty U_k(x,y)\int\limits_{(D)}\int_0^t \frac{e^{(\xi_k+\xi_0)(\eta-t)}}{(\xi_k+\xi_0)^2}\cdot\frac{\partial^2[A(x',y',\eta)e^{-\xi_0(\eta-t)}]}{\partial\eta^2}\,U_k(x',y')\,d\tau d\eta.$$

Pierwszy szereg prawej strony określa funkcyę, którą oznaczymy przez:

$$\Phi_1(x,y,t)=\sum_1^\infty \frac{U_k(x,y)}{\xi_k+\xi_0}\int\limits_{(D)} A(x',y',t)\,U_k(x',y')\,d\tau; \tag{16}$$

funkcya ta (zob. równości (16bis) str. 95 i (19) str. 97) daje się przedstawić jako całka:

$$\Phi_1(x,y,t)=\int\limits_{(D)} A(x',y',t)\,G(x,y,x',y',-\xi_0)\,d\tau. \tag{17}$$

Drugi szereg wolno rozdzielić na dwa szeregi:

$$\left\{\begin{aligned}\Phi_2&=\sum_1^\infty \frac{U_k(x,y)}{(\xi_k+\xi_0)^2}\int\limits_{(D)}\frac{\partial A(x',y',t)}{\partial t}\,U_k(x',y')\,d\tau,\\ \Phi_3&=\xi_0\sum_1^\infty \frac{U_k(x,y)}{(\xi_k+\xi_0)^2}\int\limits_{(D)} A(x',y',t)\,U_k(x',y')\,d\tau.\end{aligned}\right. \tag{18}$$

Funkcya Φ_2, jak się łatwo przekonać, spełnia wewnątrz obszaru D równanie:

$$\Delta\Phi_2-\xi_0\Phi_2+\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}=0,$$

zaś na krzywej C jest:

$$h'\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial N}\right)_i=h(\Phi_2)_i,$$

więc:

$$\Phi_2=\int\limits_{(D)}\frac{\partial\Phi_1(x',y',t)}{\partial t}\,G(x,y,x',y',-\xi_0)\,d\tau, \tag{19}$$

i podobnie jest:

$$\Phi_3=\xi_0\int\limits_{(D)}\Phi_1(x',y',t)\,G(x,y,x',y',-\xi_0)\,d\tau. \tag{20}$$

Ostatni szereg prawej strony poprzedniej równości napiszmy pod postacią:

$$\int_0^t d\eta\left(\sum_1^\infty U_k(x,y)\,\frac{e^{\xi_k(\eta-t)}}{(\xi_k+\xi_0)^2}\int\limits_{(D)}\left\{\frac{\partial^2 A(x',y',\eta)}{\partial\eta^2}-2\xi_0\frac{\partial A(x',y',\eta)}{\partial\eta}+\xi_0^2 A(x',y',\eta)\right\}d\tau\right). \tag{21}$$

Połóżmy wobec tego:

$$\Phi_4(x,y,\eta,\lambda)=\sum_1^\infty A_k U_k\,.\,e^{-\xi_k\lambda}, \tag{22}$$

gdzie liczba λ jest dodatnia; nadto jest:

$$\left\{\begin{aligned}A_k&=\int\limits_{(D)} F(x',y',\eta)\,U_k(x',y')\,d\tau,\\ F(x',y',\eta)&=\frac{\partial^2 A(x',y',\eta)}{\partial\eta^2}-2\xi_0\frac{\partial A(x',y',\eta)}{\partial\eta}+\xi_0^2 A(x',y',\eta).\end{aligned}\right. \tag{23}$$

Funkcyę $\Phi_4(x,y,\eta,\lambda)$ zbadaliśmy w poprzednim rozdziale i utwórzmy całkę:

$$\Phi_5(x,y,\eta,\lambda)=\int\limits_{(D)}\Phi_4(x',y',\eta,\lambda)\,G(x,y,x',y',-\xi_0)\,d\tau, \tag{24}$$

przyczem niech będzie:

$$\Phi_4(x',y',\eta,0) = F(x,y,\eta). \tag{25}$$

Z poprzedzającego rozdziału wiadomo nam, że, o ile punkt x,y leży wewnątrz obszaru D, to jest:

$$\lim_{\lambda=0} \Phi_4(x,y,\eta,\lambda) = F(x,y,\eta)$$

Wskutek równości (25) czynimy funkcyę $\Phi_4(x,y,\eta,\lambda)$ ciągłą względem liczby λ, gdy punkt x,y leży wewnątrz obszaru D i liczba η nie ma wartości ujemnej; jeżeli zaś punkt x,y leży na krzywej C, to w przypadku $h'=0$ jest:

$$\lim_{\lambda=0} \Phi_4(x,y,\eta,\lambda) = 0\,;$$

jeżeli więc funkcya $F(x,y,\eta)$ nie jest zerem na krzywej C, to funkcya $\Phi_4(x,y,\eta,\lambda)$ nie będzie ciągłą względem zmiennej λ. Całka $\Phi_5(x,y,\eta,\lambda)$ jest więc określoną i w przypadku $\lambda=0$.

Na mocy równości (6) (str. 90) dla $\xi=-\xi_0$ z jednostajnej zbieżności szeregu (21) jest widoczne, że jest.

$$\Phi_5(x,y,\eta,\lambda) = \sum_1^\infty \frac{A_k U_k}{\xi_k+\xi_0}\, e^{-\xi_k\lambda}. \tag{26}$$

Kładąc:

$$\Phi_6(x,y,\eta,\lambda) = \int_{(D)} \Phi_5(x',y',\eta,\lambda) G(x,y,x',y',-\xi_0) d\tau, \tag{27}$$

otrzymujemy:

$$\Phi_6(x,y,\eta,\lambda) = \sum_1^\infty \frac{A_k U_k(x,y)}{(\xi_k+\xi_0)^2} \cdot e^{-\xi_k\lambda}.$$

Szereg (21) będzie więc równy całce:

$$\int_0^t \Phi_6(x,y,\eta,t-\eta) d\eta\,,$$

w której wolno, jak łatwo stwierdzić, zmienić porządek całkowania, więc jest:

$$\int_{(D)} G(x,y,x',y',-\xi_0)\, d\tau \int_0^t \Phi_5(x',y',\eta,t-\eta) d\eta.$$

Możemy więc położyć:

$$W(x,y,t) = \int_{(D)} K(x',y',t) G(x,y,x',y',-\xi_0) d\tau, \tag{28}$$

gdzie jest.

$$K(x,y,t) = -A(x,y,t) + \frac{\partial \Phi_1(x,y,t)}{\partial t} - \xi_0 \Phi_1(x,y,t) - \int_0^t \Phi_5(x,y,\eta,t-\eta) d\eta. \tag{29}$$

Teraz a posteriori wykażemy, że funkcya $W(x,y,t)$, określona równościami (28) i (29), spełnia warunki obecnego zadania. Załóżmy, że pierwsze pochodne $\frac{\partial A}{\partial x}$, $\frac{\partial A}{\partial y}$ wewnątrz obszaru D istnieją i że są ciągłe dla każdej nieujemnej wartości na zmienną t; zważmy, że funkcya $\Phi_4(x,y,\eta,\lambda)$ jest jako rozwiązanie pewnego uproszczonego zagadnienia F o u r i e r a, ograniczoną w całym obszarze D, bo funkcya $F(x',y',\eta)$ jest ograniczona; istnieją więc przy nieujemnej wartości na zmienną t pochodne pierwsze funkcyi Φ_1 i Φ_5, a więc na mocy równości (29) istnieją wewnątrz obszaru D pochodne $\frac{\partial K}{\partial x}$, $\frac{\partial K}{\partial y}$, nadto funkcya $K(x,y,t)$ będzie ciągłą funkcyą zmiennych x,y,t w całym obszarze D i dla nieujemnych wartości na zmienną t. Stąd na mocy równości (28) (str. 139) wynika, że funkcya $W(x,y,t)$ jest ciągłą w całym obszarze D i dla nieujemnych wartości na zmienną t i ma wewnątrz obszaru pochodne drugie takie, że jest:

$$\Delta W(x,y,t) - \xi_0 W(x,y,t) + A(x,y,t) = 0\,, \tag{30}$$

a na krzywej C spełnia równanie:

$$h'\left(\frac{dW}{dN}\right)_i = h(W)_i.$$

Na mocy naszych oznaczeń jest:

$$W(x,y,t) = -\Phi_1(x,y,t) + \frac{\partial \Phi_2(x,y,t)}{\partial t} - \xi_0 \Phi_2(x,y,t) - \int_0^t \Phi_6(x,y,\eta,t-\eta) d\eta. \tag{31}$$

Wskutek naszych dotychczasowych założeń o funkcyi $A(x,y,t)$, funkcye Φ_1, Φ_2, $\frac{\partial \Phi_2}{\partial t}$ mają pochodne względem zmiennej t; wystarczy więc zbadać ostatni wyraz prawej strony równości (31), by przekonać się o tem, czy funkcya $W(x,y,t)$ ma pochodną $\frac{\partial W}{\partial t}$. Ponieważ w wyrażeniu:

$$\frac{\partial \Phi_6(x,y,\eta,\lambda)}{\partial\lambda} = -\sum_1^\infty \xi_k \frac{A_k U_k(x,y)}{(\xi_k+\xi_0)^2} \cdot e^{-\xi_k\lambda}$$

prawa strona jest szeregiem jednostajnie zbieżnym w całym obszarze D, a liczba λ nie ma być ujemną, nadto, ponieważ to samo można powiedzieć o funkcyi $\Phi_6(x,y,\eta,\lambda)$, więc będzie:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t \Phi_6(x,y,\eta,t-\eta)\,d\eta\right) = \int_0^t \frac{\partial \Phi_6(x,y,\eta,t-\eta)}{\partial t}\,d\eta + \Phi_6(x,y,t,0).$$

Ale jest:

$$\Phi_6(x,y,t,0) = \int_{(D)} \Phi_5(x',y',t,0)\,G(x,y,x',y',-\xi_0)\,d\tau,$$

$$\Phi_5(x,y,t,0) = \int_{(D)} \Phi_4(x',y',t,0)\,G(x,y,x',y',-\xi_0)\,d\tau,$$

$$\Phi_4(x,y,t,0) = \frac{\partial^2 A(x,y,t)}{\partial t^2} - 2\xi_0\frac{\partial A(x,y,t)}{\partial t} + \xi_0^2 A(x,y,t),$$

będzie tedy:

$$\Phi_6(x,y,t,0) = \frac{\partial^2 \Phi_2(x,y,t)}{\partial t^2} - 2\xi_0\frac{\partial \Phi_2(x,y,t)}{\partial t} + \xi_0^2\Phi_2(x,y,t),$$

przeto:

$$\frac{\partial W(x,y,t)}{\partial t} = \xi_0 W(x,y,t) + \xi_0\Phi_1(x,y,t) - \frac{\partial \Phi_1(x,y,t)}{\partial t}$$
$$-\int_0^t \left[\frac{\partial \Phi_6(x,y,\eta,t-\eta)}{\partial t} - \xi_0\Phi_6(x,y,\eta,t-\eta)\right] d\eta,$$

czyli:

$$\frac{\partial W(x,y,t)}{\partial t} = W(x,y,t) + \xi_0\Phi_1(x,y,t) - \frac{\partial \Phi_1(x,y,t)}{\partial t} + \int_0^t \Phi_5(x,y,\eta,t-\eta)\,d\eta,$$

a stąd i z równości (29) i (30) otrzymujemy, że jest:

$$\Delta W(x,y,t) = \frac{\partial W(x,y,t)}{\partial t} + A(x,y,t)$$

wewnątrz obszaru D.

Z powodu ciągłości funkcyi $W(x,y,t)$ warunek trzeci obecnego zagadnienia jest łatwy do spełnienia.

§ 59. Ażeby tę analizę módz stosować do naszego przypadku, którym zajmowaliśmy się w § 57. kładziemy równość (8) (str. 134) W ciągu

rozumowania poprzedzającego paragrafu musieliśmy na funkcyę $A(x,y,t)$ nałożyć następujące warunki:

a) funkcya $A(x,y,t)$, jak i jej pochodne $\frac{\partial A}{\partial t}, \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$ muszą być ciągłe względem zmiennych x,y,t w całym obszarze D przy każdej nieujemnej wartości na zmienną t;

b) funkcya $A(x,y,t)$ ma mieć pochodne ciągłe $\frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial y}$ wewnątrz obszaru D przy każdej nieujemnej wartości na zmienną t.

Łatwo się przekonać, że dla spełnienia warunku a) trzeba założyć, że funkcya $\varphi(x,y,t)$ z § 57 i jej pochodne $\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \frac{\partial^3\varphi}{\partial t^3}$ są ciągłe względem nieujemnej zmiennej t i punktu krzywej C; warunek b) będzie napewne spełniony, bo funkcyę u można uważać jako potencyał warstwy pojedyńczej, względnie podwójnej, rozpostartej wzdłuż krzywej C.

W ten sposób rozwiązaliśmy również ogólne zagadnienie Fouriera.

W Krakowie we wrześniu 1908 r.