Ten równoważnik pracy może się zamieniać tylko na ciepło, ponieważ żadna inna forma energii wolnéj na jego miejsce nie występuje. Do ciepła, wywiązanego przez prąd, odpowiadającego w przewodnikach elektrolitycznych tarciu ionów przenoszonych, musi przybyć tu jeszcze ciepło, wywiązane przez dyfuzyą rozpuszczonych elektrycznie obojętnych składników, które posuwają się w kierunku przeciwnym do tego samego rodzaju ionów. Jeżeli nazwiemy oporem każdy proces, zamieniający część energii elektryczności płynącéj na ciepło, to byłoby to rzeczywiście działanie, które nazwać by można oporem przy przejściu (Übergangswiderstand). Gdy przejście z nasycenia $m+dm$ do m na długości ds dochodzi do skutku, natenczas iloraz wartości pracy wyżéj podanéj przez ds jest siłą, która usiłuje każdą cząstkę masy m poruszyć w kierunku ds. Ponieważ ta siła jest proporcyonalną do m, a z drugiéj strony poruszona masa jest odwrotnie proporcyonalną do m, więc w tych granicach gęstości rozpuszczonego gazu, w których tarcie dyfundującéj masy o wodę jest niezależne od jéj gęstości, a proporcyonalne do prędkości, prędkość prądu dyfuzyi będzie musiała być niezależną od wartości m, a proporcyonalną do $\partial m/\partial s$. Z tego wynika, według znanych, w teoryi przewodnictwa ciepła stosowanych zasad, że w obrębie takich granic, w których warunki wspomniane zachodzą, mamy:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -k^2\left[\frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial z^2}\right], \tag{5}$$

gdzie m oznacza jak przedtém ilość gazu rozpuszczonego, a k^2 stałą, zależną od natury gazu i cieczy. Równanie, którego przekształcenia znane są z teoryi przewodnictwa ciepła, pozwala wraz z poprzednio znalezioném równaniem podać, przynajmniéj dla pryzmatycznego kształtu przewodników elektrolitycznych, zupełną analityczną teoryą prądów polaryzacyjnych, któréj konsekwencye, jak się zdaje, zgadzają się z doświadczeniem we wszystkich szczegółach istotnych.

O „PRAWIE NAJWYŻSZÉM“ HOENE-WROŃSKIEGO W MATEMATYCE.

PRZEZ

S. DICKSTEINA.

Artykuł pierwszy.

1. W roku 1810 przedstawił Wroński Instytutowi francuskiemu rozprawę p. t. „Premier principe des méthodes algorithmiques comme base de la Technie mathématique“, zawierającą odkryty przez siebie jeszcze w roku 1804 wzór ogólny na rozwinięcie wszelkich funkcyj jednéj lub wielu zmiennych na szereg nieskończony, postępujący według innych funkcyj dowolnych téjże zmiennéj, a mianowicie (w przypadku jednéj zmiennéj) na szereg postaci

$$F(x) = A_0\,\Omega_0 + A_1\,\Omega_1 + A_2\,\Omega_2 + \ldots$$

w którym $F(x)$ jest funkcyą daną; $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$, owe funkcye dowolne, zwane tworzącemi (génératrices); $A_0, A_1, A_2 \ldots$ współczynniki od zmiennéj niezależne, a których oznaczenie stanowi właśnie zadanie główne w metodzie Wrońskiego.

W przytoczonéj rozprawie, która drukiem ogłoszoną nie została, podaje Wroński wzór ogólny na szukane współczynniki, a następnie ze swojego szeregu wyprowadza inne znane wówczas rozwinięcia specyalne (wzory Lagrange'a, Bürmana i t. d.) i wiele nowych.

Wzór swój nazywa Wroński „prawem algorytmicznem bezwzględném“, w późniejszych swych pracach nadaje mu miano „prawa najwyższego“ (loi suprême). Na sprawozdawców rozprawy Wrońskiego wybrała Akademia

Lagrange'a i Lacroix'a. Raport, jaki złożyli ci sprawozdawcy w dniu 15 października 1810 r., zawierał ustęp taki:

„Ce qui a frappé vos commissaires dans le mémoire de l'auteur c'est qu'il tire de sa formule toutes celles que l'on connait pour le développement des fonctions et qu'elles n'en sont que des cas très-particuliers".

Obok tego pochlebnego sądu zawierał raport i pewną niedokładność, pochodzącą z niewczytania się drugiego ze sprawozdawców w wywody Wrońskiego. Lacroix bowiem, zamiast zwrócić uwagę na najzupełniejszą dowolność funkcyj Ω, jak tego chciał Wroński, rozważa jedynie przypadek szczególny, w którym funkcye tworzące mają postać:

$$\Omega_0 = \varphi_0(x), \quad \Omega_1 = \varphi_0(x)\,\varphi_1(x), \quad \Omega_2 = \varphi_0(x)\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x) \;\ldots$$

gdzie $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \ldots$ są funkcyami zmiennéj x. Wskutek téj niedokładności w raporcie, Wroński uważał za właściwe wystąpić w pismach publicznych z odpowiedniém sprostowaniem. Wywiązała się stąd polemika, która niekorzystnie odbiła się na losie téj rozprawy Wrońskiego i wszystkich późniejszych pism jego. Członkowie bowiem Akademii i większość uczonych ignorowała ogłaszane przez Wrońskiego prace, mimo że autor w ciągu kilku niespełna lat wydał pięć wielkich dzieł, poświęconych najważniejszym zagadnieniom matematyki. Dzieła te, przed kilkudziesięciu laty wydane, do ostatnich prawie czasów pozostały nieznanemi, i krytyka naukowa nie wypowiedziała dotąd swego ostatniego słowa o odkryciach matematycznych naszego ziomka. W dziele ogłoszoném już w roku następnym (1811) p. t. „Introduction à la philosophie des mathématiques et technie d'algorithmie", zawierającém podstawy całego systemu wiedzy matematycznéj, poświęcił Wroński kilka końcowych kartek prawu najwyższemu, lecz tu nie daje jeszcze dowodu matematycznego, a stara się tylko a priori uzasadnić formę owego prawa, jako formę najogólniejszą, zawierającą w sobie wszelkie typy rozwinięć, a mianowicie:

1° typ szeregowy

$$F(x) = A_0 + A_1\,\varphi(x) + A_2\,\varphi(x)^{2/\xi} + A_3\,\varphi(x)^{3/\xi} + \ldots$$

tu:

$$\varphi(x)^{m/\xi} = \varphi(x)\varphi(x+\xi)\,\varphi(x+x2\xi)\;\ldots\;\varphi(x+m-1\xi)$$

2° typ ułamków ciągłych

$$F(x) = A_0 + \cfrac{\varphi(x)}{A_1 + \cfrac{\varphi(x+\xi)}{A_2 + \cfrac{\varphi(x+2\xi)}{A_3 + \ldots}}}$$

3° typ iloczynów nieskończonych

$$F(x) = f_0(x)\,f_1(x)\,f_2(x)\;\ldots$$

wreszcie

4° typ tak zwanych fakultetów w właściwém znaczeniu tego wyrazu

$$F(x) = \Psi(x)^{\varphi(x)/\xi}$$

Wszystkie te typy, jak to sprawdza Wroński, sprowadzić się dają do najogólniejszéj formy, którą przedstawia typ „prawa najwyższego".

Uzasadnieniu „prawa najwyższego" i wykładowi obszernych jego zastosowań poświęcone są dwa wielkie tomy dzieła p. t. „Philosophie de la Technie, algorithmique. I-re Section contenant la loi suprême et universelle des mathématiques", Paryż 1815 XII—286. „II-re Section contenant les lois des séries comme préparation à la réforme des mathématiques 4° stron 645, tamże 1816, 1817. Nadzwyczaj bogata treść obu tych dzieł, w których obok oryginalności autora uderza głęboka i rozległa wiedza jego, posłuży nam jeszcze niejednokrotnie za przedmiot do studyów. W studyum niniejszém pragnęlibyśmy, wedle rozumienia naszego, przyczynić się choć w części do wyjaśnienia niezupełnie rozstrzygniętego dotąd pytania, czy istotnie „prawo najwyższe", które Wroński uważał za oś rozwoju i za jedyną podstawę przyszłego postępu matematyki[1]), ma to znaczenie, jakie nadawał mu twórca; jaki jest związek tego prawa z analogicznemi pracami późniejszych matematyków; czy wreszcie nauka dzisiejsza, która postępuje odmiennemi torami, może jeszcze ciągnąć pożytek z zapomnianych, a przynajmniej mało znanych badań naszego uczonego. W artykule pierwszym zajmiemy się głównie rozpatrzeniem dowodu i niektórych zastosowań „prawa najwyższego"

2. Objaśnimy najprzód niektóre skrócenia przyjęte przez Wrońskiego, a wprowadzone z pewnemi zmianami do niniejszego artykułu.

a. Wartość funkcyi $F(x)$ przy pewnéj szczególnéj wartości zmiennéj x oznaczać będziemy za pomocą kropki w ten sposób

$$F(\dot{x}) \quad \text{lub wprost} \quad \dot{F},$$

jeżeli opuszczamy znak zmiennéj. Tak więc $F(\dot{x})$ lub $\dot{F}$ oznacza wartość funkcyi $F(x)$ dla wartości szczególnéj x np. dla $x=0$.

b. Jeżeli $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_m \ldots$ są funkcyami zmiennéj x,

$$\Delta\Omega_1,\ \Delta\Omega_2 \;\ldots\; \Delta\Omega_m$$
$$\Delta^2\Omega_1,\ \Delta^2\Omega_2 \;\ldots\; \Delta^2\Omega_m \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

różnicami kolejnych rzędów tych funkcyj, to wyrażenie

$$\Sigma \pm \Delta\Omega_1\,\Delta^2\Omega_2 \;\ldots\; \Delta^{m-1}\Omega_{m-1}\,\Delta^m\Omega_m$$

równe wyznacznikowi

[1]) Odkrycie „prawa najwyższego" uważał Wroński za własność narodową Polski „La decouverte de cette loi suprême des mathématiques dévenait dès ce moment une propriété nationale de Pologne." (Réforme de la philosophie, Tom III str. XLIV, rok 1847).

$$\begin{vmatrix} \Delta\Omega_1, & \Delta\Omega_2 & \ldots & \Delta\Omega_{m-1}, & \Delta\Omega_m \\ \Delta^2\Omega_1, & \Delta^2\Omega_2, & \ldots & \Delta^2\Omega_{m-1}, & \Delta^2\Omega_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta^m\Omega_1, & \Delta^m\Omega_2 & \ldots & \Delta^m\Omega_{m-1}, & \Delta^m\Omega_m \end{vmatrix}$$

oznaczać będziemy przez

$$W(\Delta\Omega_1, \Delta\Omega_2 \ldots \Delta\Omega_m)$$

albo krócéj przez

$$W_m(\Omega_m),$$

jeżeli idzie o zaznaczenie, że wyznacznik zależy od funkcyi Ω_m i że jest m-go stopnia. Wroński powyższe wyrażenie nazywa funkcyą *schin* i oznacza je w ten sposób:

$$\mathfrak{W}(\Delta\Omega\ \Delta^2\Omega_2 \ldots \Delta^{m-1}\Omega_{m-1}\Delta^m\Omega_m)$$

Teoryi tych funkcyj, która w istocie rzeczy jest teoryą wyznaczników, poświęcona jest znaczna część kartek w wywodzie „prawa najwyższego". W funkcyi *schin* można różnice zastąpić przez różniczki, pochodne lub inne ogólniejsze jeszcze algorytmy. W przypadku pochodnych funkcye *schin* są wyrażeniami wyznacznikowemi, noszącemi obecnie nazwę wrońskianów. Teoryą wrońskianów wyłożyliśmy w artykule pomieszczonym w Tomie I „Prac matematyczno-fizyznych" (str. 5—25). Twierdzenia tam podane, a zwłaszcza wzór (17) (str. 16) przydatne są w uzasadnieniu „prawa najwyższego".

c. Ilorazy

$$\frac{W_m(F(x))}{W_m(\Omega_m)} = \frac{\Sigma \pm \Delta\Omega_1\ \Delta^2\Omega_2 \ldots \Delta^{m-1}\Omega_{m-1}\Delta^m F(x)}{\Sigma \pm \Delta\Omega_1\ \Delta^2\Omega_2 \ldots \Delta^{m-1}\Omega_{m-1}\Delta^m\Omega_m}.$$

$$\frac{W_m(\Omega_n)}{W_m(\Omega_m)} = \frac{\Sigma \pm \Delta\Omega_1\ \Delta^2\Omega_2 \ldots \Delta^{m-1}\Omega_{m-1}\Delta^m\Omega_n}{\Sigma \pm \Delta\Omega_1\ \Delta^2\Omega_2 \ldots \Delta^{m-1}\Omega_{m-1}\Delta^m\Omega_m}$$

będziemy oznaczali dla skrócenia odpowiednio przez Ξ_m i $\Phi(n)_m$.

Do tych funkcyj dochodzimy w sposób następujący:

Niechaj

$$\Omega_1, \Omega_2 \ldots \Omega_{m-1}, f$$

będzie szereg funkcyj, z których ostatnia f oznacza którąkolwiek z dwóch funkcyi Ω_m i $F(x)$. Utwórzmy szereg różnic i podzielmy każdą z różnic przez różnicę $\Delta\Omega_1$, otrzymujemy tedy szereg

$$1, \frac{\Delta\Omega_2}{\Delta\Omega_1}, \frac{\Delta\Omega_3}{\Delta\Omega_1} \ldots \frac{\Delta\Omega_{m-1}}{\Delta\Omega_1}, \frac{\Delta f}{\Delta\Omega_1}$$

który można przedstawić pod postacią

$$1, \quad \Phi(2)_1, \ \Phi(3)_1 \ldots \Phi(m-1)_1, \ \Phi(m)_1 \text{ lub } \Xi_1,$$

$\Phi(m)_1$ w przypadku gdy $f = \Omega_m$, Ξ_1 gdy $f = F(x)$. Z tym szeregiem postępujemy tak samo jak z szeregiem funkcyj danych, to jest tworzymy szereg różnic jego wyrazów i dzielimy każdy wyraz przez różnicę $\Delta\Phi(2)_1$, otrzymamy tedy szereg

$$0, 1, \frac{\Delta\Phi(3)_1}{\Delta\Phi(2)_1} \ldots \frac{\Delta\Phi(m-1)_1}{\Delta\Phi(2)_1}, \frac{\Delta\Phi(m)_1}{\Delta\Phi(2)_1} \text{ lub } \frac{\Delta\Xi_1}{\Delta\Phi(2)_1}$$

Według wzoru wyżéj wzmiankowanego będzie:

$$\frac{\Delta\Phi(3)_1}{\Delta\Phi(2)_1} = \frac{W_2(\Omega_3)}{W_2(\Omega_2)} = \frac{\Sigma \pm \Delta\Omega_1\Delta^2\Omega_3}{\Sigma \pm \Delta\Omega_1\Delta^2\Omega_2} = \Phi(3)_2$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{\Delta\Phi(m)_1}{\Delta\Phi(2)_1} = \frac{W_2(\Omega_m)}{W_2(\Omega_2)} = \frac{\Sigma \pm \Delta\Omega_1\Delta^2\Omega_m}{\Sigma \pm \Delta\Omega_1\Delta^2\Omega_2} = \Phi(m)_2$$

$$\frac{\Delta\Xi_1}{\Delta\Phi(2)_1} = \frac{W_2(Fx)}{W_2(\Omega_2)} = \frac{\Sigma \pm \Delta\Omega_1\Delta F(x)}{\Sigma \pm \Delta\Omega_1\Delta^2\Omega_2} = \Xi_2$$

Dalsze postępowanie w opisany sposób doprowadza do wzorów

$$\Phi(n)_3 = \frac{\Delta\Phi(n)_2}{\Delta\Phi(3)_2} \quad \ldots \quad \Phi(n)_m = \frac{\Delta\Phi(n)_{m-1}}{\Delta\Phi(m)_{m-1}}$$

$$\Xi_2 = \frac{\Delta\Xi_1}{\Delta\Phi(2)_1} \quad \ldots \quad \Xi_m = \frac{\Delta\Xi_{m-1}}{\Delta\Phi(m)_{m-1}},$$

służących do kolejnego obliczania funkcyj Ξ i Φ. Wzory te jednakowo stosują się w przypadku różnic jak i różniczek.

d. Wreszcie w dalszym ciągu potrzebne jeszcze są wielkości Ψ, określone przy pomocy następujących równości:

$$\Psi(m)_1 = -\Phi(m+1)_m$$
$$\Psi(m)_2 = -\Phi(m+2)_m - \Psi(m)_1\,\Phi(m+2)_{m+1}$$
$$\Psi(m)_3 = -\Phi(m+3)_m - \Psi(m)_1\,\Phi(m+3)_{m+1} - \Psi(m)_2\,\Phi(m+3)_{m+2}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

które zawierają się we wzorze ogólnym

$$\Psi(m)_n = -\Phi(m+n)_m - \Psi(m)_1\Phi(m+n)_{m+1} - \Psi(m)_2\Phi(m+n)_{m+2} \ldots - \Psi(m)_{n-1}\Phi(m+n)_{m+n-1}$$

3. Niechaj będzie

$$F(x) = A_0 + A_1\Omega_1 + A_2\Omega_2 + A_3\Omega_3 + \ldots \tag{1}$$

gdzie $\Omega_1, \Omega_2 \ldots$ oznaczają funkcye zmiennéj x zupełnie dowolne, $A_0, A_1 \ldots$ zaś współczynniki, które oznaczyć mamy. Podstawiając w równaniu (1) za x wartość szczególną np. $x=a$, otrzymujemy zeń

$$A_0 = F(\dot{x}) - A_1\dot{\Omega}_1 - A_2\dot{\Omega}_2 - A_3\dot{\Omega}_3 \ldots$$

Różnicując obie strony równania (1) i dzieląc je następnie przez $\Delta\Omega_1$, mieć będziemy według przyjętego znakowania № 2,*c*:

$$\Xi_1 = A_1 + A_2\,\Phi(2)_1 + A_3\,\Phi(3)_1 + \ldots; \tag{2}$$

kładąc tu $x=a$, otrzymujemy

$$A_1 = \dot{\Xi}_1 - A_2\,\dot{\Phi}(2)_1 - A_3\,\dot{\Phi}(3)_1 - \ldots$$

Różnicując obie strony równania (2), dzieląc je następnie przez $\Delta\Phi(2)_1$ i uwzględniając przyjęte znakowanie, otrzymujemy

$$\Xi_2 = A_2 + A_3\,\Phi(3)_2 + A_4\,\Phi(4)_2 + \ldots$$

skąd, przy założeniu $x=a$ otrzymujemy

$$A_2 = \dot{\Xi}_2 - A_3\,\dot{\Phi}(3)_2 - A_4\,\dot{\Phi}(4)_2 - \ldots$$

Postępując w ten sam sposób daléj, dochodzimy do wzoru

$$A_m = \dot{\Xi}_m - A_{m-1}\,\dot{\Phi}(m+1)_m - A_{m-3}\,\dot{\Phi}(m+2)_m - \ldots \tag{3}$$

który, jak łatwo sprawdzić, stosuje się do każdéj wartości całkowitéj liczby m. Według niego będzie:

$$A_{m+1} = \dot{\Xi}_{m+1} - A_{m+2}\,\dot{\Phi}(m+2)_{m+1} - A_{m+3}\,\dot{\Phi}(m+2)_{m+1} - \ldots$$

Wstawiając tę wartość we wzór (3) i uwzględniając znakowanie № 2,*d*, otrzymujemy

$$\begin{aligned} A_m = {} & \dot{\Xi}_m + \dot{\Xi}_{m+1}\,\dot{\Psi}(m)_1 \\ & A_{m+2}\,[\dot{\Phi}(m+2)_m + \dot{\Psi}(m)_1\,\dot{\Phi}(m+2)_{m+1}] \\ & A_{m+3}\,[\dot{\Phi}(m+3)_m + \dot{\Psi}(m)_1\,\dot{\Phi}(m+3)_{m+1}] \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Podstawiamy tu w dalszym ciągu wartość A_{m+2} obliczoną według wzoru (3) i uwzględniamy drugie z równań № 2,*d*, dochodzimy tym sposobem do związku

$$\begin{aligned} A_m = {} & \dot{\Xi}_m + \dot{\Xi}_{m+1}\,\dot{\Psi}(m)_1 + \dot{\Xi}_{m+2}\,\dot{\Psi}(m)_2 \\ & - A_{m+3}\,[\dot{\Phi}(m+3)_m + \dot{\Psi}(m)_1\,\dot{\Phi}(m+3)_{m+1} + \dot{\Psi}(m)_2\,\dot{\Phi}(m+3)_{m+2}] \\ & - A_{m+4}\,[\dot{\Phi}(m+4)_m + \dot{\Psi}(m)_1\,\dot{\Phi}(m+4)_{m+1} + \dot{\Psi}(m)_2\,\dot{\Phi}(m+4)_{m+2}] \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

W tenże sposób postępujemy wciąż daléj i wyobraziwszy sobie nieskończoną ilość podstawień, dochodzimy do wzoru

$$A_m = \dot{\Xi}_m + \dot{\Xi}_{m-1}\,\dot{\Psi}(m)_1 + \dot{\Xi}_{m+2}\,\dot{\Psi}(m)_2 + \Xi_{m+3}\,\Psi(m)_3 + \ldots \tag{4}$$

według którego współczynnik A_m wyraża się za pomocą szeregu nieskończonego. Wyrazy tego szeregu są funkcyami, określonemi za pomocą wzorów № 2 *c.d* i wziętemi dla wartości szczególnéj zmiennéj x. Wzór (4) daje wartości dla każdego współczynnika i zarazem jest rozwiązaniem zagadnienia [1]); wyrażenie zatém prawa najwyższego będzie następujące:

$$\begin{aligned} = A_0 & + \left\{\dot{\Xi}_1 + \dot{\Xi}_2\,\dot{\Psi}(1)_1 + \dot{\Xi}_3\,\dot{\Psi}(1)_2 + \ldots\right\}\Omega_1 \\ & + \left\{\dot{\Xi}_2 + \dot{\Xi}_3\,\dot{\Psi}(2)_1 + \dot{\Xi}_4\,\dot{\Psi}(2)_2 + \ldots\right\}\Omega_2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \left\{\dot{\Xi}_m + \dot{\Xi}_{m+1}\,\dot{\Psi}(m)_1 + \dot{\Xi}_{m+2}\,\dot{\Psi}(m)_2 + \ldots\right\}\Omega_m \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Wywód powyższy przedstawić można nieco prościej. [2]) Napiszmy m równań powstających przez kolejne różnicowanie równania (1), a mianowicie:

$$\begin{aligned} \Delta\,Fx &= A_1\Delta\,\Omega_1 + A_2\Delta\,\Omega_2 + \ldots + A_m\,\Delta\,\Omega_m + A_{m+1}\,\Delta\,\Omega_{m+1} + \ldots \\ \Delta^2\,Fx &= A_1\Delta^2\Omega_1 + A_2\Delta^2\Omega_2 + \ldots + A_m\,\Delta^2\Omega_m + A_{m+1}\,\Delta^2\,\Omega_{m+1} + \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta_m Fx &= A_1\Delta^m\Omega_1 + A_2\Delta^m\Omega_2 + \ldots + A_m\Delta^m\,\Omega_m + A_{m+1}\,\Delta^m\,\Omega_{m+1} + \ldots \end{aligned}$$

i pomnóżmy te równania odpowiednio przez minory wyznacznika $\Sigma \pm \Delta\Omega_1\Delta^2\Omega \ldots \Delta^{m-1}\,\Omega_{m-1}\,\Delta^m\Omega_m$, odpowiadające elementom

$$\Delta\,\Omega_m,\ \Delta^2\Omega_m \ldots\ldots \Delta^m\,\Omega_m$$

i następnie równania te dodajmy. Na zasadzie znanéj własności wyznaczników i przy przyjętém przez nas znakowaniu № 2,*c*, otrzymamy w ten sposób

$$W_m\,(F(x)) = A_m\,W_m\,(\Omega_m) + A_{m+1}\,W_m\,(\Omega_{m+1}) + \ldots$$

skąd, przy podstawieniu $x=a$, dochodzimy do wzoru

---

[1]) Dowód powyższy Wrońskiego powtarza Montferrier, Encyclopédie mathématique, Tom III str. 358—576.

[2]) E. West. Exposé des méthodes générales en mathématique d'après Hoëne-Wronski, Paryż, 1886. stron 242.

$$A_m = \frac{W_m(\dot{F}(x))}{W_m(\dot{\Omega}_m)} - A_{m+1}\frac{W_m(\dot{\Omega}_{m+1})}{W_m(\dot{\Omega}_m)} - \ldots$$

identycznego z wzorem (3). [1])

4. Co się tyczy warunków stosowalności prawa najwyższego, to Wroński przedstawia je w sposób następujący:

Dla uprawnienia formy ogólnéj rozwinięcia uważa on z jednéj strony szereg wartości, jakie przyjmuje funkcya $F(x)$ i jéj kolejne pochodne dla szczególnéj wartości x np. $x=a$,

$$F(\dot{x}), \frac{dF(\dot{x})}{dx}, \frac{d^2F(\dot{x})}{dx^2}, \ldots$$

z drugiej zaś strony podobneż wartości funkcyj Ω, a mianowicie

$$\dot{\Omega}_1, \frac{d\dot{\Omega}_1}{dx}, \frac{d^2\dot{\Omega}_1}{dx^2} \ldots$$

$$\dot{\Omega}_2, \frac{d\dot{\Omega}_2}{dx}, \frac{d^2\Omega_2}{dx^2} \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots;$$

następnie ustanawia następujące związki pomiędzy powyższemi wielkościami:

$$\left.\begin{aligned} F(\dot{x}) &= A_0 + A_1\dot{\Omega}_1 + A_2\dot{\Omega}_2 + \ldots \\ \frac{dF(\dot{x})}{dx} &= A_2\frac{d\dot{\Omega}_1}{dx} + A_0\frac{d\dot{\Omega}_1}{dx} + \ldots \\ \frac{d^2Fx}{dx^2} &= A_1\frac{d^2\dot{\Omega}_1}{dx} + A_0\frac{d^2\dot{\Omega}_2}{dx^2} + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \ldots \end{aligned}\right\} (5)$$

Zakłada daléj, że do funkcyi $F(x)$ można zastosować rozwinięcie na szereg Taylora lub Maclaurina, a mianowicie

$$F(x) = F\dot{x} + \frac{(x-a)}{1}\frac{dF\dot{x}}{dx^2} + \frac{(x-a)^2}{1.2}\frac{d^2F\dot{x}}{dx^2} + \ldots$$

Podstawiając po drugiéj stronie wartości wyciągnięte z równań (5), otrzymuje

[1]) Podobny wywód znaleźć można w niedawno wydanym (1888 r.) 3-im tomie dzieła Laurenta p. t. Traité d'analyse, str. 352—356.

$$F(x) = A_0 + A_1\left\{\dot{\Omega} + \frac{x-a}{1}\frac{d\dot{\Omega}}{dx} + \frac{(x-a)^2}{1.2}\frac{d^2\dot{\Omega}}{dx} + \ldots\right\}$$
$$+ A_2\left\{\dot{\Omega} + \frac{x-a}{1}\frac{d\dot{\Omega}}{dx} + \frac{(x-a)^2}{1.2}\frac{d^2\dot{\Omega}^2}{dx^2} + \ldots\right\}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Zakładając w dalszym ciągu, że i do funkcyj Ω stosuje się rozwinięcie na szereg Taylora lub Maclaurina t. j. że

$$\dot{\Omega}_1 + \frac{x-a}{1}\frac{d\dot{\Omega}_1}{dx} + \frac{(x-a)^2}{1.2}\frac{d^3\dot{\Omega}_1}{dx^2} + \ldots = \Omega_1$$

$$\dot{\Omega}_2 + \frac{x-a}{1}\frac{d\dot{\Omega}_2}{dx} + \frac{(x-a)^2}{1.2}\frac{d^2\dot{\Omega}_2}{dx^2} + \ldots = \Omega_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

i wprowadzając te równości do poprzedniego równania, dochodzi do wzoru zasadniczego (1).

Wywód ten, zdaniem Wrońskiego, nietylko uprawnia formę (1), ale zarazem w równaniach (5) daje warunki, jakim mają być poddane funkcye Ω, aby rozwinięcie na szereg formy (1) było możliwém. Równania (5) uważa zresztą Wroński za jedną tylko z wielu różnych form, którą przybrać mogą ogólne warunki możliwości „prawa najwyższego". Równania te bowiem powstają przez kolejne różniczkowanie lub różnicowanie równania (1), lecz dwa te działania $df(x)$ i $\Delta f(x)$ nie stanowią najogólniejszéj formy zmienności; oprócz nich rozważa Wroński działania, wyrażające się w przejściu od wartości do wartości w szeregu:

$$f\dot{x} \quad f(\dot{x}+\xi), \quad f(\dot{x}+2\xi)$$

i działanie jeszcze ogólniejsze

$$\nabla F\dot{x} = k_0 \; F\dot{x} + k_1 \; F(\dot{x}+\xi) + k_2 \; F(\dot{x}+2\xi) + \ldots + k_\omega \; F(\dot{x}+\omega\xi)$$
$$\nabla^2 F\dot{x} = k_0 \nabla F\dot{x} + k_1 \nabla F(\dot{x}+\xi) + k_2 \nabla F(\dot{x}+2\xi) + \ldots + k_\omega \nabla F(\dot{x}+\omega\xi)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

gdzie $k_0, k_1 \ldots k_\omega$ są stałe dowolne. Przy takiém uważaniu uogólniają się odpowiednio równania (5), postać współczynników zaś nie ulega zmianie, tylko w wyrażeniach funkcyj *schin* różnice lub różniczki należy zastąpić przez ogólniejszy algorytm ∇. „Prawo najwyższe", przy takiém traktowaniu, przedstawia formalnie najwyższą ogólność, ale jednocześnie, jak to zobaczymy, potęgują się trudności, jeżeli idzie o ścisłe uzasadnienie jego stosowalności, to jest o oznaczenie granic, w których podobne rozwinięcie jest możliwém i przedstawia funkcyą daną.

Kwestya ta, którą dzisiejsza analiza rozstrzyga przedewszystkiém przy każdém stosowaniu szeregow nieskończonych, gra u Wrońskiego rolę podrzędną. Przy stosowaniu swego szeregu nie bada jego zbieżności, nie każe nawet zwracać uwagi na równania warunkowe (5), lecz wprost poleca zabrać się do wyznaczenia współczynników według wzoru (4). Dla Wrońskiego rozwinięcie jest niemożliwém tylko w dwóch przypadkach:

1° gdy na współczynniki otrzymujemy wartości nieskończone;

2° gdy na współczynniki otrzymujemy wartości sprzeczne (véritables absurdités, jak mówi Wroński).

Przypadek, w którym na współczynniki otrzymujemy wartości nieoznaczone nie prowadzi, według niego, do niemożliwości, lecz tylko do nieoznaczoności rozwinięcia.

W pierwszym z powyższych dwóch przypadków niemożliwość rozwinięcia jest, według wyrażenia Wrońskiego, tylko realną; rozwinięcie bowiem zachowuje swoje znaczenie w dziedzinie wielkości idealnych (nieskończonych) i da się, według metody Wrońskiego, po pewnych przekształceniach przenieść do dziedziny realnéj. Pokazuje on to na przykładzie, w którym

$$F(x) = \log x,\ \Omega_0 = 1,\ \Omega_1 = x,\ \Omega_2 = x,\ \ldots$$

w którym to, stosując wzór (4) dochodzi do rozwinięcia

$$\begin{aligned}\log x = \log a - 1 \\ &+ x\left\{\frac{1}{a} + \Psi(1)_1\,\infty_1 + \Psi(1)_2\,\infty_2 + \ldots\right\} \\ &+ x\left\{\infty_1 + \Psi(2)_1\,\infty_2 + \Psi(1)_2\,\infty_3 + \ldots\right\} \\ &+ x\left\{\infty_2 + \Psi(3)_1\,\infty_3 + \Psi(3)_2\,\infty_4 + \ldots\right\} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

gdzie a oznacza wartość szczególną zmiennéj x i gdzie symbole ∞_1, ∞_2, ∞_3.... oznaczają nieskończoność. Rozwinięcie to ma ważność idealną; by przejść od niego do rozwinięcia realnego, zastępuje Wroński ilości nieskończone ∞_1, ∞_2, ∞_3 . . . w wierszu drugim ilościami nieskończonemi

$$\infty_1 + m_1^{(1)},\ \infty_2 + m_2^{(1)},\ \infty_3 + m_3^{(1)}\ldots$$

w wierszu trzecim ilościami

$$\infty_1 + m_1^{(2)},\ \infty_2 + m_2^{(2)},\ \infty_3 + m_3^{(2)},\ \ldots$$

i t. d., gdzie wielkości m są skończonemi, a więc znikającemi w stosunku do nieskonczoności, i po łatwych przekształceniach dochodzi do związku

$$\begin{aligned}\log x = \log a - 1 \\ &+ x\left\{\frac{1}{a} + \Psi(1)_1 m_1^{(1)} + \Psi(1)_2\, m_2^{(1)} + \ldots\right\} \\ &+ x\left\{m_1^{(2)} + \Psi(2)_1 m_2^{(2)} + \Psi(2)_2 m_3^{(2)} + \ldots\right\} \\ &+ x\left\{m_2^{(3)} + \Psi(3)_1 m_3^{(3)} + \Psi(3)_2 m_4^{(1)} + \ldots\right\} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

w którym wszystkie wielkości są już skończone i gdzie ilości m winny być tak dobrane, aby strona druga dla każdéj wartości zmiennéj równała się pierwszéj.

Przypadek drugi ma miejsce, gdy dla jednego i tego samego współczynnikn A otrzymamy dwie lub więcéj wartości różnych przy zmianie szczególnéj wartości zmiennéj. Przypadek ten ilustruje Wroński na przykładzie, w którym idzie o rozwinięcie funkcyi danéj $F(x)$ według potęg kolejnych wielomianu

$$\Omega_1 = k_0 + k_1 x + \ldots + k_\omega x^\omega$$

gdy zatém

$$\Omega_2 = (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\omega x^\omega)^2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Omega_\rho = (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\omega x^\omega)^\rho$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Wartość pochodnéj

$$\frac{d^\omega \Omega_\rho}{dx^\omega}$$

dla wartości zmiennéj, równéj pierwiastkowi wielomianu

$$k_0 + k_1 x + \ldots + k_\omega x^\omega$$

będzie wtedy oczywiście zerem przy wartościach $\rho > \omega$; wskutek czego wielkości $\Phi(\dot\rho)_1, \Phi(\dot\rho)_2 \ldots$ (№ 2.c), jako też $\Psi(m)_1$ $\Psi(m)_2$, $\Psi(m)_3$ ... (№ 2,d) wszystkie będą zerami i wyrażenie współczynnika A_m we wzorze (4) sprowadzi się wprost do pierwszego wyrazu

$$A_m = \Xi_m = \frac{W[d\dot\Omega_0\ d\dot\Omega_1\ \ldots\ d\dot\Omega_{m-1}\ F(\dot x)]}{W[d\dot\Omega_0\ d\dot\Omega_1\ \ldots\ d\dot\Omega_{m-1}\ d\dot\Omega_m]}$$

Ponieważ wielomian $k_0 + k_1 x + \ldots + k_\omega x^\omega$ ma ω pierwiastków, zdarzyć się może zatém, iż powyższe wyrażenie dla różnych pierwiastków daje różne wartości współczynnika. Przypadek taki prowadzić może, zdaniem Wrońskiego, do zupełnéj niemożliwości rozwinięcia; naszém zdaniem, wyraża on raczéj, iż w różnych dziedzinach zmiennéj rozwinięcia funkcyi mogą być różne lub też

że rozwinięcia te odpowiadają różnym funkcyom lubo różnym gałęziom jednéj funkcyi.

5. Przedstawiony w № 3 wywód „prawa najwyższego“, jest, jak łatwo widzieć, czysto formalnym; polega bowiem na przekształceniu wzoru, który ma być do wiedzionym, i przytém na nieskończoném powtórzeniu tego przekształcenia, co a priori usprawiedliwioném nie jest. Prócz tego wyraża on wartość współczynników pod formą szeregów nieskończonych, co do zbieżności których nie mamy z góry żadnéj pewności. Dopiero gdy stosowanie powyższych działań jest uzasadnione, a zbieżność szeregów wyrażających współczynnik zapewniona, jesteśmy w posiadaniu warunków koniecznych dla dalszego badania, czy i w jakich granicach rozwinięcie wyraża funkcyą daną. Wywód Wrońskiego nie jest zatem matematycznie scisłym i jakkolwiek prowadzi do szukanéj formy współczynników, wniczém nie przesądza stosowalności, „prawa najwyższego“. Z równań znowu (5) widzimy, że metoda Wrońskiego sprowadza się do rozwiąnięcia układu nieskończonéj liczby równań, albo, co na jedno wychodzi, do metody współczynników nieoznaczonych. Ta ostatnia metoda, która w nauce okazała się wielce dogodném narzędziem pod względem formalnym (ona to doprowadziła do odkrycia takich form rozwinięć jak szeregi Taylora, Maclaurina, Fouriera i t. d.) nie może jednak uchodzić za metodę ścisłą, wymaga bowiem z jednéj strony skrupulatnego stwierdzenia każdego kroku przy działaniach z szeregami nieskończonemi, z drugiéj zaś zbadania warunków, przy których funkcya badana i szereg nieskończony mogą być rzeczywiście równoważnemi. Wiadomo naprzykład, że zbadanie warunków rozwijalności funkcyj na szeregi trygonometryczne, których formę odkrył Fourier przy pomocy metody analogicznéj do metody powyższéj Wrońskiego[1]), wymagało wytężonych usiłowań takich matematyków jak: Lejeune-Dirichlet, Lipschitz Riemann, Heine, G. Cantor, Dubois-Reymond, Dini i inni, tak że dziś zaledwie może być uważane za dostatecznie załatwione; o ileż przeto trudniejszém musi być pytanie o stosowalności „prawa najwyższego“, w którém funkcye Ω mają być najogólniejsze, zupełnie dowolne funkcye zmiennéj. Pytanie podobne, rzec można, nie da się wcale rozwiązać w całéj ogólności nawet dzisiejszemi środkami analizy.

Przyjmując rozwijalność na szereg Taylora funkcyj F i Ω, i to w sąsiedztwie jednéj i téj saméj wartości zmiennéj, Wroński ograniczył wprawdzie w pewien sposób zupełną dowolność uważanych funkcyj, lecz i przy tém ograniczeniu, wywód przedstawiony na początku № 4 nie ma cechy matematycznéj ścisłości. Z jednéj bowiem strony przejście od pierwszego z równań (5) do następnych przez różniczkowanie (lub różnicowanie), a z drugiéj sumowanie nieskończonéj liczby szeregów nieskończonych nie jest z góry usprawiedliwioném i nie da się załatwić na drodze czysto formalnéj.

[1]) Théorie de la chaleur. Section VI.

Tak więc teorya ogólna rozwinięcia funkcyj na szereg nieskończony, postępujący według funkcyj zupełnie dowolnych, nie może być uważana za rozstrzygniętą w sposób wskazany przez Wrońskiego. Jedynie skuteczném okazało się dotąd w traktowaniu podobnych kwestyj podejmowanie badań dla oddzielnych klas funkcyj, jakiemi są funkcye kuliste, trygonometryczne i t. p. Zdawałoby się wprawdzie, że ogólna postać współczynników dana przez wzór (4) mogłaby być stosowaną do rozmaitych klas funkcyj, ale jak to zauważył niedawno zmarły P. Dubois-Reymond[1]), forma ta jest zbyt zawiłą, aby w tym celu dogodnie użyć się dała.

Matematyk belgijski Ch. Lagrange, który od lat kilku zajmuje się studyami nad Wrońskim, zamierzył w artykule p. t. „Forme générale du reste dans l'expression d'une fonction au moyen d'autres fonctions“ ogłoszonym w Sprawozdaniach Akademii paryskiéj (9 czerwca 1884) rozstrzygnąć pytanie postawione przez Wrońskiego przez uważanie „prawa najwyższego“ za uogólnienie twierdzenia Taylora. Treść jego tozprawy da się przedstawić w ten sposób: Niechaj $F(x)$ będzie funkcya dana, $\Omega_0(x), \Omega_1(x) \ldots \Omega_n(x), \Omega_{n+1}(x)$ funkcye zmiennéj x, ciągłe w przedziale od $x=a$ do $x=a+h$, z których ostatnia $\Omega_{n+1}(x)$ wraz z swemi pochodnemi od pierwszéj do n-ej włącznie staje się zerem dla $x=a$. Niechaj będzie

$$F(x) = A_0 + A_1\Omega_1 + A_2\Omega_2 + \ldots + A_n\Omega_n + R,$$

gdzie R oznacza wyraz dopełniający czyli resztę. Utwórzmy funkcyą

$$V(x) = F(x) - A_0\,\Omega_0(x) - A_1\Omega_1(x) - \ldots - A_n\Omega_n(x) - A_{n+1}\Omega_{n+1}(x)$$

i wyznaczmy $n+2$ współczynników $A_0, A_1 \ldots A_n, A_{n+1}$ téj funkcyi przy pomocy $n+2$ warunków

$$V(a) = 0,\quad V'(a) = 0 \ \ldots\ V^{(n)}(a) = 0$$
$$V(a+h) = 0.$$

Na zasadzie znanéj własności funkcyj ciągłych, z równań $V(a)=0$ i $V(a+h)=0$ wynika że $V'(a+\theta_1 h)=0$, $\theta_1<1$; z równań $V'(a+\theta_1 h)=0$ i $V'(a)=0$ wynika, ka, że

[1]) „Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Darstellungsformeln“. Monachium 1878 str. 1. P. Dubois Reymond znał „prawo najwyższe“ z ustnéj relacyi Richelota i z artykułów A. Transona o szeregach Wrońskiego, pomieszczonych w Nouv. Annales des Math. II Série Tome XIII, 1874: (przekład tych artykułów podał Pamiętnik Towarzystwa Nauk ścisłych w Paryżu, tom VIII), jakkolwiek mógł on wcześniej poznać wzory Wrońskiego z dzieła swego ziomka Schweinsa p. t. „Theorie der Differenzen und Differentiale, Heidelberg 1825, w którém znajdują się najważniejsze wzory, odkryte przez Wrońskiego. Schweins należał do szkoły, tak nazwanéj kombinatoryjnéj, dziś już prawie zapomnianéj, i to jest powodem, dla którego dzieło jego jest mało znaném. Zresztą wywody Schweinsa mają przeważnie wartość formalną.

$$V''(a+\theta_2 h)=0,\ \theta_2<1.$$

Z równania ostatniego i z warunku $V''(a)=0$ mamy znów

$$V'''(a+\theta_3 h)=0,\quad \theta_3<1;$$

w ogóle zatém będzie

$$V^{(\nu)}(a+\theta_\nu h)=0,\ \theta_\nu<1$$
$$\nu=1,2,3\ldots n+1.$$

Układ równań

$$V(x)=0,\ V'(a)=0\ \ldots\ V^{(n)}(a)=0,\ V^{(\nu)}(a+\theta_\nu h)=0$$

daje się oczywiście przedstawić w ten sposób:

$$F(a)=A_0\Omega_0(a)+A_1\Omega_1(a)+\ldots+A_n\Omega_n(a)$$
$$F'(a)=A_0\Omega'_0(a)+A_1\Omega'_1(a)+\ldots+A_n\Omega'_n(a)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F^{(n)}(a)=A_0\Omega_0^{(n)}(a)+A_1\Omega_1^{(n)}(a)+\ldots+A_n\Omega_n^{(n)}(a)$$
$$F^{\nu}(a+\theta_\nu h)=A_0\Omega_0^{(\nu)}(a+\theta_\nu h)+A_1\Omega_1^{(\nu)}(a+\theta_\nu h)+\ldots A_n\Omega_n^{(\nu)}(a+\theta_\nu h)+A_{n+1}\Omega_{n+1}^{(\nu)}(a+\theta_\nu h)$$

Z równań tych otrzymujemy:

$$A_m=\frac{\left|\Sigma\pm\Omega_0\,\Omega'_1\ldots\Omega_{m-1}^{(m-1)}F_1^{(m)}\Omega_{m+1)}^{(m+1)}\ldots\Omega_n^{(n)}\right|_{x=a}}{\left|\Sigma\pm\Omega_0\,\Omega'_1\ldots\Omega_{m-1}^{(m-1)}\Omega_m^{(m)}\,\Omega_{m+1}^{(m+1)}\ldots\Omega_n^{(n)}\right|_{x=a}}$$
$$m=0,1,2\ldots n.$$

$$A_{n+1}=\frac{\left|\Sigma\pm\Omega_0\,\Omega'_1\ldots\Omega_n^{(n)}F^{(\nu)}(a+\theta_\nu h)\right|_{x=a}}{\left|\Sigma\pm\Omega_0\,\Omega'_1\ldots\Omega_n^{n}\right|_{x=a}\ \Omega_{n+1}^{(\nu)}(a+\theta_\nu h)}$$

Tym sposobem[1]) otrzymujemy współczynniki rozwinięcia i następujące wyrażenie reszty:

$$R=\frac{\left|\Sigma\pm\Omega_0\,\Omega'_1\ldots\Omega_n^{n}F^{(\nu)}(a+\theta_\nu h)\right|_{x=a}}{\left|\Sigma\pm\Omega_0\,\Omega'_1\ldots\Omega_n^{n}\right|_{x=a}\ \Omega_{n+1}^{(\nu)}(a+\theta_\nu h)}\,\Omega_{n+1}x$$
$$\Omega_0=1,\ \nu=0,1,2\ldots n.$$

Reszta może mieć zatém $n+1$ postaci,

W przypadku szeregu nieskończonego, współczynniki A_m będą miały postać ilorazu wyznaczników stopnia nieskończenie wielkiego; ta forma zatem nie może być dogodną w rachunku, przytém różni się od formy Wrońskiego. Z tego względu w następnéj rozprawie p. t.: „Démonstration élémentaire de la loi suprême de Wronski (Mémoires de l'Académie de Belgique, Tome XLVII, rok 1884) Ch. Lagrange nadaje współczynnikowi A_m postać:

$$A_m=\Xi_m+\Psi(m)_1\,\Xi_{m+1}+\ldots\Psi(m)_\nu\,\Xi_{m+\nu}+\ldots,\ \Psi(m)_{n-m}\,\Xi_n \qquad (4')$$

która dla $n=\infty$ przechodzi we wzór (4) Wrońskiego. Metoda, jakiéj przytém używa, nie różni się w zasadzie od metody Wrońskiego. W końcu dochodzi Ch. Lagrange do następującego wniosku: „wyrażenie współczynnika (4) t. j. wyrażenie nieskończone

$$A_m=\Xi_m+\Psi(m)_1\,\Xi_{m+1}+\ldots\Psi(m)_\nu\,\Xi_{m+\nu}+\ldots \qquad (4'')$$

wtedy tylko czyni zadość szeregowi nieskończonemu

$$F(x)=A_0\Omega_0+A_1\Omega_1+\ldots$$

jeżeli 1° reszta R szeregu

$$F(x)=A_0\Omega_0+A_1\Omega_1+\ldots A_n\Omega_n+R$$

dąży do zera, gdy n rośnie nieograniczenie; 2° jeżeli szereg (4″) jest zbieżny, albowiem wywód powyższy wymaga, aby współczynnik A_m był skończony i oznaczony 3° jeżeli wyrażenie (4′) współczynnika A_m oznaczymy przez A_{mn}, aby było.

$$\lim_{n=\infty}\ \Sigma(A_m-A_{mn})\,\Omega_m(x)=0 \qquad ^{1)}$$

Warunki te, jak to już wyżéj zauważyliśmy, są istotnie koniecznemi; sądzimy wszelako, że stosowanie ich do rozmaitych przypadków jest połączoném z wielkiemi trudnościami. [2])

6. Podamy kilka przykładów zastosowania „prawa najwyższego" w celu otrzymania rozmaitych rozwinięć, przyczém, jak na teraz, ograniczymy się na saméj formie szeregów, nie tykając pytania o ich zbieżności i granicach ich stosowalności.

---

[1]) Przy warunku, aby wrońskian $W[\Omega_0,\Omega_1,\Omega_2\ldots\Omega_n]_{x=a}$ nie był zerem. Porównaj artykuł „O wrońskianach" Prace matematyczno-fizyczne I, str. 24—25.

[1]) Warunku 3-go niema w rozprawie drukowanéj; autor dopisał go w egzemplarzu rozprawy, łaskawie mi nadesłanym.

[2]) Mansion, który w „Résumé du cours d'analyse infinitesimal, Paryż 1887 podał dowód Ch. Lagrange'a powiada o „prawie najwyższém":„La loi suprême de Wronski est une généralisation stérilé jusqu'à présént du théorème de Taylor" (str.120)".Winienem dodać, że Ch. Lagrange zastosował swoją metodę i do uzasadnienia „prawa najwyższego" dla funkcyi zależnéj od wielu zmiennych (Développement des fonctions d'un nombre quelconque de variables indépendantes etc. w „Mémoires couronnés de l'Académie de Belgique, tome XVLIII, 1885). Do téj rozprawy powrócimy w dalszym ciągu niniejszego studyum.

a) Rozwinięcie funkcyj według fakultetów innéj funkcyi.

Niechaj będzie

$$\Omega_n = (\varphi(x))^{n/\xi} = \varphi(x)\varphi(x+\xi)\varphi(x+2\xi)\ldots\varphi(x+\overline{n-1}\xi)$$

Jeżeli $\Delta\varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(x-\xi)$ jest różnicą funkcyi $\varphi(x)$, to wyrażenie różnicy m-go rzędu funkcyi $(\varphi(x))^{n/\xi}$ będzie. jak to nietrudno sprawdzić, następujące:

$$\Delta^m(\varphi(x))^{n/\xi} = \varphi(x)^{n/\xi} - \frac{m}{1}[\varphi(x-\xi)]^{n/\xi} + m\frac{(m-1)}{1.2}[\varphi(x-2\xi)]^{n/\xi} - \ldots$$
$$+ (-1)^m[\varphi(x-m\xi)]^{n/\xi}$$

Jeżeli zmiennéj x nadamy wartość przy któréj $\varphi(x) = 0$, to wszystkie rożnice, których rząd jest mniejszy od wykładnika fakultetu, będą oczywiście zerami, tj.

$$\Delta^m(\varphi(x))^{n/\xi} = 0, \quad m < n.$$

Napiszmy szereg

$$F(x) = A_0 + A_1(\varphi(x))^{1/\xi} + A_2(\varphi(x))^{2/\xi} + A_3(\varphi(x))^{3/\xi} + \ldots$$

Na zasadzie powyższéj uwagi wzory № 2.*c.d* doprowadzają do związków

$$\Psi(n)_1 = 0, \ \Psi(n)_2 = 0 \ldots$$
$$\Psi(m)_1 = 0, \ \Phi(m)_2 = 0 \ldots ;$$

tym sposobem wyrażenie ogólne (4) współczynnika A_m sprowadza się do pierwszego wyrazu Ξ_m i będzie

$$A_m = \frac{W[\Delta\varphi(x)\Delta(\varphi(x))^{2/\xi}\Delta(\varphi(x))^{3/\xi}\ldots\Delta(\varphi(x))^{m-1/\xi}\Delta F]}{W[\Delta\varphi(x)\Delta(\varphi(x))^{2/\xi}\Delta(\varphi(x))^{3/\xi}\ldots\Delta(\varphi(x))^{m-1/\xi}\Delta(\varphi(x)^{m/\xi}]}$$

gdzie wszystkie wielkości po stronie drugiéj należy rozumieć, jako wzięte dla wartości x przy któréj $\varphi(x) = 0$.

b) Rozwinięcie funkcyj według potęg innéj funkcyi.

Zakładając w poprzednich wzorach $\xi = 0$, dochodzimy do rozwinięcia postaci następującéj

$$F(x) = A_0 + A_1\varphi(x) + A_2\varphi(x)^2 + \ldots ;$$

możemy jednak współczynniki tego rozwinięcia otrzymać bezpośrednio. W przypadku obecnym jest

$$\Omega_1 = \varphi(x), \ \Omega_2 = \varphi(x)^2, \ldots,$$

Wzory № 2*c*, gdy w nich różnice zastąpimy przez różniczki, dają:

$$\Phi(2)_1 = 2.\varphi(x), \ \Phi(3)_1 = 3.\varphi(x)^2, \ldots \Phi(m)_1 = m\varphi(x)^{m-1}$$

$$\Phi(3)_2 = \frac{2.3}{1.2}\varphi(x), \ \Phi(4)_2 = \frac{3.4}{1.2}\varphi(x)^2 \ldots \Phi(m)_2 = \frac{m(m-1)}{1.2}\varphi(x)^{m-2}$$

$$\Phi(4)_3 = \frac{2.3.4}{1.2.3}\varphi(x), \ \Phi(5)_3 = \frac{3.4.5}{1.2.3}\varphi(x)^2 \ldots \Phi(m)_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\varphi(x)^{m-3}$$

i w ogóle

$$\Phi(m)_n = \frac{m^{n/-1}}{1^{n/1}}\varphi(x)^{m-n}$$

Na zasadzie wzorów № 2,*d* otrzymamy

$$\Psi(m)_1 = -\frac{m+1}{1}\varphi(x)$$

$$\Psi(m)_2 = +\frac{(m+1)(m+2)}{1.2}\varphi(x)^2$$

$$\Psi(m)_3 = -\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3}\varphi(x)^3$$

. . . . . .

Wyrażenie Ξ_m przedstawi się pod postacią

$$\Xi_m = \frac{W[d\varphi x \cdot d\varphi(x)^2 \ldots d\varphi(x)^{m-1} dF(x)]}{W[d\varphi(x)d\varphi(x)^2 \ldots d\varphi(x)^{m-1} d\varphi(x)^m]}$$

Jeżeli dla x przyjmiemy wartość taką, która jest pierwiastkiem równania $\varphi(x) = 0$, wtedy oczywiście współczynnik A_m sprowadza się do pierwszego wyrazu Ξ_m, otrzymamy tedy

$$A_m = \frac{W[d\varphi x \, d\varphi(x^2 \ldots d\varphi(x)^{m-1} dFx]}{W[d\varphi x \, d\varphi(x)^2 \ldots d\psi(x)^{m-1} d\varphi(x)]},$$

gdzie po stronie drugiéj należy zamiast x podstawić wartość a, czyniącą zadość równaniu $\varphi(x) = 0$. Wyrażenie to współczynnika daje się przekształcić na zasadzie uwagi, że

$$W[d\varphi(x).d(\varphi x)^2 \ldots d\varphi(x)^{m-1} d\varphi(x)^m]$$
$$= 1!\,2!\ldots(m-1)!m![d\varphi(x)]^{\frac{m(m+1)}{2}}\ ^{1)}$$

---

[1]) Dowód tego wzoru opiera się na twierdzeniu I-ém o wrońskianach (Prace matematyczno-fizyczne, Tom I, str. 7.)

otrzymamy tedy

$$A_m = \frac{W[d\varphi x\, d\varphi(x)^2 \,.\,.\, d\varphi(x)^{m-1}\, dF(x)]}{1!\,2!\,.\,.\,.\,(m-1)!m![d(\varphi x)]^{\frac{m(m+1)}{2}}}$$

Szukane przeto rozwinięcie będzie miało postać następującą:

$$Fx = F(a) + \frac{F'(a)}{\varphi'(a)}\varphi(x) + \frac{1}{1!2!(\varphi'(a^3))}\begin{vmatrix}\varphi' a & F'a\\ \varphi''a & F''a\end{vmatrix}\varphi(x)^2 + \ldots$$

Jeżeli a oznacza jakąkolwiek wartość szczególną zmiennéj x, niekoniecznie taką, dla któréj $\varphi(x)=0$, wtedy funkcye Ψ przybierają wartości

$$\dot{\Psi}(m)_1 = -\frac{m+1}{1}\varphi(a)$$

$$\dot{\Psi}(m)_2 = -\frac{(m+1)(m+2)}{1.2}\varphi(a)^2$$

$$\dot{\Psi}(m)_3 = -\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3}\varphi(a)^3$$

. . . . . .

$$\dot{\Psi}(m)_n = (-1)^n\frac{(m+1)^{n/1}}{1.2.3\ldots n}\varphi(a)^n$$

w ogóle różne od zera, a wyrażenie współczynnika A_m będzie następujące:

$$A_m = \Xi_m - \frac{m+1}{1!}\Xi_{m+1}\varphi(a) + \frac{(m+1)^{2/1}}{2!}\Xi_{m+2}\varphi(a)^2 + \ldots$$

skąd możemy kolejno obliczyć współczynniki szukanego rozwinięcia. Dla $m=0$ mamy

$$A_0 = \Xi_0 - \Xi_1\varphi(a) + \Xi_2\varphi(a)^2 - \Xi_3\varphi(a)^3 + \ldots,$$

Ponieważ A_0 jest widocznie wartością, jaką przybiera funkcya $F(x)$ dla wartości x, czyniących zadość równaniu $\varphi(x)=0$, otrzymujemy zatém na wyrażenie funkcyi $F(x)$ pierwiastka x równania $\varphi(x)=0$ wzór następujący:

$$F(x) = F(a) - \varphi(a)\frac{F'(a)}{\varphi'(a)} + \varphi(a)^2.\frac{1}{1!2!}\begin{vmatrix}\psi' a & F'a\\ \varphi''a & F''a\end{vmatrix}\frac{1}{[\varphi'(a)]^3} - \ldots$$

Wzór ten ma zastosowanie w rozmaitych pytaniach analizy. Jeżeli funkcya $F(x)$ równa się wprost zmiennéj x, otrzymujemy wzór

$$x = a - \varphi(a).\frac{1}{\varphi'(a)} - \varphi(a)^2.\frac{1}{1!2!}\varphi''(a).\frac{1}{[\varphi'(a)]^3} - \ldots$$

mogący znaleźć zastosowanie w rozwiązywaniu równań.

c. Szeregi Bürmana i Lagrange'a.

Szereg Bürmana służy do rozwinięcia funkcyi na szereg, postępujący według potęg innéj funkcyi. Jeżeli $F(x)$ i $\varphi(x)$ są te funkcye, to będzie:

$$F(x) = A_0 + A_1\varphi(x) + A_2\varphi(x)^2 + A_3\varphi(x)^3 + \ldots$$

gdzie

$$A_0 = F(a)$$

$$A_m = \frac{1}{m!}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left\{\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^m F'(x)\right\}_{x=a}$$

Wzór ten jest przekształceniem wzoru Wrońskiego

$$A_m = {}_m = \frac{W[d\varphi(x)\, d\varphi(x)^2 \,.\,.\,.\, d(\varphi(x))^{m-1}\, dFx]}{1!\,2!\ldots(m-1)!m![d\varphi(x)]^{\frac{m(m+1)}{2}}}$$

W saméj rzeczy, na zasadzie wzorów podanych w № 2 c na kolejne obliczanie funkcyj Ξ, wyrażenie po stronie drugiéj daje się z łatwością sprowadzić do postaci

$$\frac{1}{m!}\frac{d}{d\varphi(x)}\left(\frac{d}{d\varphi(x)}\left(\frac{d}{d\varphi(x)}\right)\ldots\left(\frac{d}{d\varphi(x)}\left(\frac{dF(x)}{d\varphi(x)}\ldots\right)\right)\right)$$

Pozostaje tylko uskutecznić zamianę zmiennych t. j. wprowadzić różniczkowanie względem x, zamiast różniczkowania względem $\varphi(x)$ na zasadzie uwagi, że

$$\frac{dF(x)}{d\varphi(x)} = \frac{dF(x)}{dx}.\frac{1}{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)}\ldots \qquad (\alpha)$$

Ponieważ $\varphi(x)$ staje się zerem dla $x=a$, załóżmy przeto, że

$$\varphi(x)=(x-a)\psi(x)$$

gdzie funkcya $\psi(x)$ nie staje się zerem dla $x=a$ (zakładamy, że a jest pierwiastkiem jednokrotnym funkcyi $\varphi(x)$); będzie tedy

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=a}=\psi(a).$$

a więc

$$\left(\frac{dF(x)}{d\varphi(x)}\right)_{x=a}=\frac{F'(a)}{\psi(a)}=\left[\frac{x-a}{\varphi(x)}F'(x)\right]_{x=a}$$

Przez różniczkowanie równości (α) otrzymujemy

$$\frac{d}{d\varphi(x)}\frac{dFx}{d\varphi x}=\frac{d}{dx}\left[\frac{dFx}{dx}\frac{1}{\varphi'(x)}\right]\cdot\frac{1}{\varphi'(x)}=\frac{d^2F}{dx^2}\frac{1}{[\varphi'(x)]^2}-\frac{\varphi''(x)}{[\varphi'(x)]^3}\frac{dF}{dx},$$

skąd

$$\left(\frac{d}{d\varphi}\frac{dF}{d\varphi(x)}\right)_{x=a}=\frac{d}{da}\left[F'(a).\frac{1}{\psi(a)^2}\right]=\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^2F'(x)\right]_{x=a}$$

Kolejne różniczkowanie doprowadza do wzoru ogólnego

$$\left(\frac{d}{d\varphi}\frac{d}{d\varphi}\cdots\frac{d}{d\varphi}\frac{dF}{d\varphi(x)}\right)_{x=a}=\frac{d^{m-1}}{da^{m-1}}\left[F'(a)\frac{1}{[\psi(a)]^m}\right]=\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left[\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^mF'(x)\right]_{x=a}$$

co bezpośrednio stwierdza, że wzór Bürmana jest przekształceniem wzoru Wrońskiego[1])

[1]) W rozprawie p. t, „Dowód twierdzenia H. Wrońskiego (Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie Tom XIV, rok 1888). Dr. Żurakowski wyprowadza odwrotnie szereg Wrońskiego z szeregu Bürmanna. Szereg Wrońskiego znany był dr. Ż. z artykułu Cayley'a: „On Wronski's theorem" pomieszczonego w czasopiśmie Quarterly Journal of pure and applied mathematics (Nr. 47. rok 1873.) Artykuł Cayley'a, podał w polskim przekładzie Pam. Tow. Nauk ścisłych w Paryżu, Tom IV, rok 1874, oraz A. Sągajłło w części drugiéj swojéj „Algebry" (Paryż, 1874).

Wzór Lagrange'a ma na celu rozwinięcie na szereg nieskończony funkcyi $F(x)$ pierwiastka x równania

$$x=a+u\theta(x)$$

Wzór ten ma postać

$$F(x)=F(a)+\frac{u}{1}\theta(a)F'(a)+\frac{u^2}{1.2}\frac{d}{da}[\theta(a)^2F'(a)]$$

$$+\ldots+\frac{u_n}{1.2\ldots n}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}[\theta(a)^nF'(a)]+\ldots.$$

i otrzymuje się bezpośrednio z poprzedzającego, czyniąc

$$\varphi(x)=u=\frac{x-a}{\theta(x)}$$

d. Zagadnienie powszechne (Problème universel) Wrońskiego.

Jeżeli $f, f_1, f_2\ldots$ są funkcyami zmiennéj x, która może być funkcyą innych zmiennych niezależnych $u, v, w\ldots$; jeżeli x_1, x_2, x_3 są funkcyami dowolnemi tychże zmiennych,—tedy wszelki związek między wielkościami x i u, v, $w\ldots$, daje się, według Wrońskiego, sprowadzić do postaci następującéj

$$0=f(x)+x_1f_1(x)+x_2f_2(x)+\ldots$$

którą nazywa powszechną. „Zagadnienie powszechne" polega na znalezieniu wielkości niewiadoméj x lub jéj funkcyi jakiéjkolwiek $F(x)$ przy pomocy danych wielkości $x_1, x_2, x_3\ldots$ Zagadnienie to, istotnie wielkiéj ogólności, daje się rozwiązać przy pomocy „prawa najwyższego"[1]).

Niechaj będzie najprzód równanie

$$0=(x-a)+y_1\psi_1(x)+y_2\psi_2(x)+\ldots \qquad (m$$

gdzie $\psi_1, \psi_2\ldots$ są funkcyami zmiennéj x; $y_1, y_2\ldots$ wielkościami nieoznaczonemi. Połóżmy

$$\Psi(x)=y_1\psi_1(x)+y_2\psi_2(x)+\ldots$$

[1]) Hoene-Wroński, Réforme de la philosophie, Tom II str. CIX r. 1847.

i rozważmy równanie

$$0 = (x-a) + \xi\,\Psi(x) \qquad (n)$$

gdzie ξ jest wielkością nieoznaczoną. Równanie (m) jest szczególnym przypadkiem równania (n) dla $\xi=1$. Z równania (n) otrzymujemy

$$\xi = -\frac{x-a}{\Psi(x)}$$

Czyniąc

$$\varphi(x) = -\frac{x-a}{\Psi(x)}$$

i stosując do funkcyi dowolnéj $F(x)$ zmiennéj x rozwinięcie według potęg funkcyi $\varphi(x)$, otrzymamy

$$F(x) = A_0 + A_1\varphi(x) + A_2\varphi(x)^2 + \ldots$$

gdzie współczynniki obliczają się przy pomocy wzoru

$$A_m = (-1)^m \frac{1}{1.2.3\ldots m}\frac{d^{m-1}}{da^{m-1}}\left[\Psi(a)^m \frac{d\,Fa}{da}\right]$$

Rozwinięciem szukaném będzie więc

$$F(x) = F(a) - \frac{\xi}{1}\left[\Psi(a)DF(a)\right] + \frac{\xi^2}{1.2}D\left[\Psi(a)^2DF(a)\right]$$
$$\frac{\xi^3}{1.2.3}D^2\left[\Psi(a)^3DF(a)\right] + \ldots \qquad (p)$$

Pochodne dla skrócenia oznaczyliśmy tu przy pomocy głoski D. W wyrażeniu po stronie drugiéj $\Psi(a)^m$, jako potęga wielomianu, daje się sprowadzić do postaci

$$m!\sum\frac{(y_1\psi_1(a))^{m_1}.(y_2\psi_2(a))^{m_2}.(y_3\psi_3(a))^{m_3}\ldots}{m_1!\,m_2!\,m_3!},$$

gdzie pod znakiem sumy znajdują się wyrazy, odpowiadające wszystkim całkowitym i dodatnim wartościom wykładników $m_1, m_2, m_3 \ldots$, czyniącym zadość równaniu warunkowemu

$$m = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots$$

Uskuteczniwszy to podstawienie w wyrażeniu każdego ze współczynników szeregu (p) i czyniąc $\xi=1$, dochodzimy, po należytém uporządkowaniu wyrazów, do wzoru następującego:

$$\begin{aligned}
F(x) = F(a) &- \frac{y_1}{1}\big(\psi_1(a)DF(a)\big) + \frac{y_1^2}{1.2}D\big((\psi_1(a)^2)DF(a)\big) - \frac{y_1^3}{1.2.3}D^2\big((\psi_1(a))^3DF(a)\big) + \ldots\\
&- \frac{y_2}{1}\big(\psi_2(a)DF(a)\big) + \frac{y_2^2}{1.2}D\big((\psi_2(a)^2)DF(a)\big) - \frac{y_2^3}{1.2.3}D^2\big((\psi_2(a))^2DF(a)\big) + \ldots\\
&- \frac{y_3}{1}\big(\psi_3(a)DF(a)\big) + \frac{y_3^2}{1.2}D\big((\psi_3(a))^2DF(a)\big) - \frac{y_3^3}{1.2.3}D^2\big((\psi_3(a)^3DF(a)\big) + \ldots\\
&- \ldots\ldots + \frac{y_1y_2}{1.1}D\big(\psi_1(a)\psi_2(a)DF(a)\big) - \frac{y_1^2y_2}{1.2.1}D^2\big(\psi_1(a)\psi_2(a)^2DF(a)\big) + \ldots\\
&+ \frac{y_1y_3}{1.1}D\big(\psi_1(a)\psi_3(a)DF(a)\big) - \frac{y_1y_2^2}{1.1.2}D^2\big(\psi_1(a)\psi_2(a)^2DF(a)\big) + \ldots\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Wyrazem ogólnym tego rozwinięcia będzie

$$(-1)^\mu\frac{y_1^{\mu_1}\,y_2^{\mu_2}\,y_3^{\mu_3}\ldots}{\mu_1!\,\mu_2!\,\mu_3!\ldots\ldots}D^{\mu-1}\big(\psi_1(a)^{\mu_1}\,\psi_2(a)^{\mu_2}\,\psi_3(a)^{\mu_3}\ldots DF(a)\big)$$
$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \ldots,$$

Niniejsze rozwiązanie zagadnienia m) prowadzi bezpośrednio do rozwiązania „zagadnienia powszechnego". Ponieważ zagadnienie to stanowi u Wrońskiego drugie „wielkie prawo" matematyki i znajduje najobszerniejsze zastosowanie w kwestyach analizy, poświęcony mu oddzielny artykuł.

Wskazaliśmy niektóre zastosowania „prawa najwyższego", nie wspomnieliśmy wszakże dotąd o najważniejszém, a mianowicie o metodzie badania funkcyj, którą Wroński nazwał „najwyższą" (méthode suprême). Myśl zasadnicza téj metody jest następująca: W rozwinięciach funkcyj na szeregi nieskończone aż do czasów Wrońskiego szło przedewszystkiém o obliczanie

wartości funkcyj przy pomocy funkcyj tworzących; lecz „prawo najwyższe“ oprócz téj kwestyi, pozwala podjąć zadanie daleko donioślejsze: funkcya $F(x)$ nie jest daną, lecz ma być znalezioną na podstawie warunków danego zagadnienia. Odpowiednio do tych warunków, dobierają się funkcye tworzące Ω i za pomocą nich, na podstawie „prawa najwyższego“, *buduje się* funkcya szukana. Metoda taka służy już nietylko do oznaczenia wartości ale i do *określenia natury* badanéj funkcyi. Pomysł i wykonanie téj metody godnemi są poznania i dla tego zajmiemy się nią w dalszym ciągu niniejszego studyum.

WŁASNOŚCI SZCZEGOLNYCH TRÓJEK PUNKTÓW TRÓJKĄTA.

PRZEZ

S. KĘPINSKIEGO.

W ostatnich czasach wiele prac poświęcono roztrząsaniu własności punktów trójkąta, na które przedtém nie zwracano uwagi. Pierwszą z całéj téj grupy własności szczególnych punktów trójkąta zaznaczył w „Éléments d'analyse géométrique et d'analyse algébrique“, 1809, Szymon Lhulier, tyle zasłużony autor podręczników matematycznych dla naszych szkół, ogłoszonych przez Komisyą Edukacyjną. W téj pracy Lhulier zastanawia się nad takim punktem trójkąta i czworościanu, którego suma kwadratów odległości odpowiednio od boków trójkąta lub od ścian czworościanu ma wartość najmniejszą. On również zauważył, że prosta, łącząca ten punkt trójkąta z wierzchołkiem trójkąta, dzieli bok przeciwległy na odcinki, proporcyonalne względem kwadratów boków przyległych. W r. 1852 Catalan dowiódł (w dziele: Théorèmes et Problèmes de géométrie élémentaire, par H. Ch. de la Frémoire), że ów punkt trójkąta danego jest środkiem ciężkości trójkąta, którego wierzchołki są spodkami prostopadłych, spuszczonych zeń na boki trójkąta danego, jakoteż, że odległości owego punktu od jego boków są względem tych boków proporcyonalne. Wcześniej już zauważył Grebe (Archiv von Grunert, t. IX, 1847), że gdy na bokach trójkąta, czy to wewnętrznie, czy téż zewnętrznie wystawimy kwadraty, to środek podobieństwa trójkątów danego i utworzonego przez boki kwadratów, równoległe do boków trójkąta danego, jest takim punktem, iż jego odległości od boków są względem nich proporcyonalne. Mathieu, Schlömilch i inni zauważyli inne własności, które, jak się późniéj okazało, są związane z owym punktem szczególnym. Zaś w r. 1873, na kon-