

wolnie, a przytém od niepamiętnych czasów w jednym kierunku; inne, a mianowicie opisana perturbacja, daje większe peryodyczne oscylacje, ale odbywające się w stosunkowo krótkich okresach. Dla tych oscylacyj zatém, które mogą sprawić dłuższe i większe zalewy peryodyczne, pozostaje chyba tylko hipoteza A d h é m a r a. Należałoby zbadać, w jakich granicach nagromadzenie lodów na biegunach może sprawić podniesienie poziomu; tę kwestyą atoli odkładam do innej pracy.

W styczniu 1889 r.

O SPROWADZENIU PEWNYCH CAŁEK ABELOWYCH DO POSTACI NORMALNEJ.

PRZES

J. PTASZYCKIEGO.

W S T Ę P.

1. W pracy niniejszej będziemy zajmowali się sprowadzeniem do postaci normalnej całki

$$\int F(x, \sqrt[m]{R_0}) dx,$$

gdzie F oznacza funkcją wymierną ilości x i $\sqrt[m]{R_0}$, m — liczbę całkowitą dodatnią, R_0 — wielomian całkowity ze zmienną x .

Całka ta może być przedstawiona jako suma całek

$$\int \frac{P dx}{Q \sqrt[m]{R}},$$

gdzie P , Q , R oznaczają wielomiany całkowite ze zmienną x , dlatego to ograniczymy się tu na całce tej ostatniej formy. Założmy przytém, że wielomian R nie zawiera pierwiastków o wielokrotności wyższej nad m , oraz że pierwiastek $\sqrt[m]{R}$ nie może być sprowadzonym do pierwiastków stopnia niższego; założenia te są zawsze możliwe.

Sprowadzenie powyższej całki do postaci normalnej obecnie dobrze jest

znanem; znanem ono było jeszcze Abelowi¹⁾, jak przekonywamy się o tém z pracy po nim pozostałej, a ogłoszonej dopiero przed kilku laty.

2. Praca niniejsza ma na celu podanie nowego sposobu sprowadzenia powyższej całki do postaci normalnej. Przy użyciu wskazanego tu sposobu wystarczają działania arytmetyczne, wówczas gdy inne znane dotąd sposoby wymagały rozwiązania równań $Q=0$, $R=0$. Sposób ten wyłożony jest w § IV; udowodnienie zaś jego polega na sposobie Abela, który w § I przedstawię w formie najdogodniejszej dla celu naszego.

Oprócz tego, w pracy niniejszej, opierając się na własnościach całki, sprowadzonej do postaci normalnej, daję rozwiązanie zagadnienia:

„Znaleźć wszystkie wartości pierwiastka

$$\sqrt[m]{R},$$

przy których całka

$$\int F(x, \sqrt[m]{R}) dx,$$

dla wszystkich wartości funkcji F , która jest funkcją wymierną ilości x i $\sqrt[m]{R}$, — przedstawia się pod postacią skończoną, t. j. przy pomocy skończonej ilości funkcji algebraicznych i logarytmowych.“

Rozwiązanie tego zagadnienia jest podane w § V.

Uwaga. Sposób sprowadzenia, udowodniony w § IV, daje twierdzenie, z którego, w przypadku $m=2$, otrzymujemy twierdzenie Hermite'a; w przypadku zaś, kiedy całka omawiana może być przedstawioną pod postacią skończoną, otrzymujemy twierdzenie Czebyszewa³⁾, dowiedzione po raz pierwszy przez Piuma⁴⁾.

3. Własności całki, które posłużą nam do rozwiązania wyżej wskazanego zagadnienia, są w związku z pytaniem o przedstawieniu całki $\int \frac{Pdx}{Q\sqrt[m]{R}}$ pod postacią skończoną, t. j. (jak to wypływa z twierdzenia Abela o przedstawieniu całek pod postacią skończoną) podług wzoru:

$$\frac{X}{\sqrt[m]{R}} + \Sigma A \log [\varphi(\sqrt[m]{R}) \varphi^{\alpha}(\alpha \sqrt[m]{R}) \varphi^{\alpha^2}(\alpha^2 \sqrt[m]{R}) \dots \varphi^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1} \sqrt[m]{R})],$$

gdzie X , Y oznaczają wielomiany całkowite ze zmienną x , A — współczynnik

stały. α — pierwiastek pierwotny równania $x^m - 1 = 0$, $\varphi(\alpha^i \sqrt[m]{R})$ — funkcją wymierną ilości x i $\alpha^i \sqrt[m]{R}$.

Badaniem tego wzoru zajmujemy się w § II; doprowadza nas ono natychmiast w § III do żądanych własności całki, wyrażonych w twierdzeniach Abela i Czebyszewa. Zauważę, że twierdzenie IV, wskazane w art. 10, dowiedzionem jest u Czebyszewa tylko w przypadku, gdy liczba m jest pierwszą.

§ 1.

1. Niechaj będzie

$$R = (x-a_1)^{n_1} (x-a_2)^{n_2} \dots (x-a_k)^{n_k},$$

gdzie pierwiastki $a_1, a_2, \dots, a_k$ są różne od siebie.

Różniczkując wyrażenie

$$x^\mu (x-a_1)^{1-\frac{n_1}{m}} (x-a_2)^{1-\frac{n_2}{m}} \dots (x-a_k)^{1-\frac{n_k}{m}},$$

otrzymujemy równość

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{x^\mu (x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_k)}{\sqrt[m]{R}} \right] = [C_0 x^{\mu+\lambda-1} + C_1 x^{\mu+\lambda-2} + \dots + C_\lambda x^{\mu-1}] \frac{1}{\sqrt[m]{R}}$$

w której $C_0, \dots, C_\lambda$ są współczynnikami stałymi, przyczem

$$C_0 = \mu + \lambda - \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_k}{m}.$$

Spostrzegamy, iż dla $\mu \geq 0$; będzie $C_0 > 0$, ponieważ $n_i < m$; stąd wynika, iż otrzymana równość daje możność przedstawienia całki

$$\int \frac{x^\mu dx}{\sqrt[m]{R}} \quad (\mu \text{ liczba całkowita} > \lambda - 2)$$

za pomocą wzoru

$$\int \frac{x^\mu dx}{\sqrt[m]{R}} = \frac{K(x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_k)}{\sqrt[m]{R}} + \sum_{i=0}^{i=\lambda-2} A_i \int \frac{x^i dx}{\sqrt[m]{R}},$$

gdzie K oznacza wielomian całkowity, A_i — współczynnik stały.

2. Różniczkując wyrażenie

$$(x-b)^{-\mu} (x-a_1)^{1-\frac{n_1}{m}} (x-a_2)^{1-\frac{n_2}{m}} \dots (x-a_k)^{1-\frac{n_k}{m}},$$

¹⁾ Oeuvres complètes, 2 éd., t. II, str. 210—213.

²⁾ Bulletin des Sciences mathématiques, 1883.

³⁾ Journal Liouville'a t. XVIII.

⁴⁾ Annali di matematica, 1861.

otrzymujemy równość

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{(x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_\lambda)}{(x-b)^\mu \sqrt[m]{R}} \right] = \left[\frac{C_0}{(x-b)^{\mu+1}} + \frac{C_1}{(x-b)^\mu} + \dots + C_\lambda (x-b)^{\lambda-1-\mu} \right] \frac{1}{\sqrt[m]{R}}$$

gdzie $C_0, \dots, C_\lambda$ oznaczają współczynniki stałe, przyчем

$$C_0 = -\mu (b-a_1)(b-a_2) \dots (b-a_\lambda).$$

Spostrzegamy, iż dla wartości μ nie równych zeru będzie C_0 różnym od zera, jeżeli b nie jest pierwiastkiem wielomianu R ; jeżeli zaś $b=a_1$, wtedy będzie $C_0=0$ i C_1 różne od zera, ponieważ

$$C_1 = \left(1 - \mu - \frac{n_1}{m}\right) (a_1-a_2)(a_1-a_3) \dots (a_1-a_\lambda);$$

wynika stąd, iż otrzymana równość daje możność przedstawienia całki

$$\int \frac{dx}{(x-b)^\mu \sqrt[m]{R}} \quad (x-b \text{ nie dzieli wielomianu } R, \mu \text{ liczba całkowita } > 1)$$

za pomocą wzoru

$$\int \frac{dx}{(x-b)^\mu \sqrt[m]{R}} = \frac{K(x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_\lambda)}{(x-b)^{\mu-1} \sqrt[m]{R}} + B \int \frac{dx}{(x-b) \sqrt[m]{R}} + \sum_{i=0}^{i=\lambda-2} A_i \int \frac{x^i dx}{\sqrt[m]{R}},$$

i całki

$$\int \frac{dx}{(x-b)^\mu \sqrt[m]{R}} \quad (x-a_1 \text{ dzieli wielomian } R, \mu \text{ liczba całkowita } \geq 1)$$

za pomocą wzoru

$$\int \frac{dx}{(x-a_1)^\mu \sqrt[m]{R}} = \frac{K(x-a_2)(x-a_3) \dots (x-a_\lambda)}{(x-a_1)^{\mu-1} \sqrt[m]{R}} + \sum_{i=0}^{i=\lambda-2} A_i \int \frac{x^i dx}{\sqrt[m]{R}},$$

gdzie K oznacza wielomian całkowity ze zmienną x ; B, A_i — współczynniki stały.

3. Weźmy teraz pod uwagę całkę

$$\int \frac{P dx}{Q \sqrt[m]{R}},$$

w której P, Q są wielomianami całkowitemi.

Korzystając z trzech wzorów, dowiedzionych w §§ 1 i 2, całkę tę możemy wyrazić przez całki

$$\int \frac{dx}{\sqrt[m]{R}}, \int \frac{x dx}{\sqrt[m]{R}}, \dots, \int \frac{x^{\lambda-2} dx}{\sqrt[m]{R}}$$

oraz przez całki postaci

$$\int \frac{dx}{(x-b) \sqrt[m]{R}} \quad (x-b \text{ nie dzieli wielomianu } R);$$

inaczej mówiąc, całkę daną możemy sprowadzić do całki

$$\int \frac{P_1 dx}{Q_1 \sqrt[m]{R}}$$

w której P_1, Q_1 są wielomianami całkowitemi takimi, iż stopień ułamka $\frac{P_1}{Q_1}$ nie przewyższa $\lambda-2$, wszystkie zaś pierwiastki wielomianu Q_1 są pojedynczemi i nie sprowadzającemi do zera wielomianu R .

Będzie to całka, sprowadzona do postaci normalnej.

§ .

4. W celu wyprowadzenia niektórych własności całki, sprowadzonej do postaci normalnej, zajmijmy się uprzednio w tym § zbadaniem wzoru

$$\frac{X}{Y \sqrt[m]{R}} + \Sigma A \log W, \text{ gdzie } W = \varphi(\sqrt[m]{R}) \cdot \varphi^2(\alpha \sqrt[m]{R}) \cdot \varphi^3(\alpha^2 \sqrt[m]{R}) \dots \varphi^{m-1}(\alpha^{m-1} \sqrt[m]{R}),$$

blżej określonego we wstępie.

5. Pochodna wyrazu algebraicznego

$$\frac{X}{Y \sqrt[m]{R}}$$

sprowadza się do funkcji

$$\frac{L}{M \sqrt[m]{R}}$$

gdzie L, M oznaczają wielomiany całkowite. Przypuścić możemy, że ułamki $\frac{X}{Y}, \frac{L}{M}$ są nieprzywiedlnymi.

Niechaj $x-a_1$ będzie jednym z czynników liniowych wielomianu

$$R = (x-a_1)^{n_1} (x-a_2)^{n_2} \dots (x-a_\lambda)^{n_\lambda},$$

p_1 zaś wykładnik dwumianu $x - a_1$ w pierwszym wyrazie rozwinięcia ułamka $\frac{X}{Y}$ według potęg rosnących tego dwumianu; widoczna, że w podobnym rozwinięciu funkcji $\frac{X}{Y\sqrt[m]{R}}$, pierwszy wyraz zawierać będzie $(x - a_1)^{p_1 - \frac{n_1}{m}}$, a więc pierwszy wyraz rozwinięcia funkcji $\frac{L}{M\sqrt[m]{R}}$ zawierać będzie $(x - a_1)^{p_1 - \frac{n_1}{m} - 1}$

w rozwinięciu zaś ułamka $\frac{L}{M}$ pierwszy wyraz zawierać będzie $(x - a_1)^{p_1 - 1}$. Niechaj dalej dwumian $x - b$, pierwszy względem wielomianu R , będzie czynnikiem q -krotnym wielomianu Y ; rozumując w sposób powyższy, przekonywamy się, że wielomian M dzielić się będzie przez $(x - b)^{q-1}$. Z uwag tych wypływa że jeżeli wielomian M nie posiada ani pierwiastków wielokrotnych, ani też pierwiastków wspólnych z wielomianem R , jest tedy

$$Y = \text{stała},$$

wielomian X dzieli się przez iloczyn

$$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_\lambda);$$

a więc wtedy stopień funkcji $\frac{X}{Y\sqrt[m]{R}}$ nie będzie niższy od

$$\lambda - \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_\lambda}{m}.$$

Zauważmy jeszcze, iż ten stopień będzie wyższy od zera, ponieważ $\frac{n_i}{m} < 1$.

Wnioskujemy więc, że jeżeli w wyrażeniu $\frac{L}{M\sqrt[m]{R}}$ pochodną funkcji $\frac{X}{Y\sqrt[m]{R}}$

wielomian M nie zawiera ani pierwiastków wielokrotnych, ani też pierwiastków wspólnych z wielomianem R , natenczas stopień naszego wyrażenia będzie nie niższy od

$$\lambda - \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_\lambda}{m} - 1$$

i wyższy od

$$-1.$$

6. Pochodna wyrazu logarytmowego

$$\log W = \log \left[\varphi(\sqrt[m]{R}) \varphi^{\alpha}(\alpha \sqrt[m]{R}) \varphi^{\alpha^2}(\alpha^2 \sqrt[m]{R}) \dots \varphi^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1} \sqrt[m]{R}) \right]$$

sprowdza się do funkcji

$$\int \frac{\eta}{\Delta \sqrt[m]{R}}$$

gdzie P, Q oznaczają wielomiany całkowite ze zmienną x . Dla zbadania tej funkcji przedstawimy ją pod inną postacią.

Niechaj będzie μ stopień równania nieprzywiedlnego, ze współczynnikami wymiernymi, któremu czyni zadość pierwiastek α . Ponieważ dla każdego i całkowitego ≥ 0 mamy

$$\alpha^{\mu+i} = c_0 + c_1 \alpha + c_2 \alpha^2 + \dots + c_{\mu-1} \alpha^{\mu-1},$$

gdzie c oznaczają liczby całkowite wymierne, wypływa stąd przeto, że funkcję $\log W$ możemy sprowadzić do postaci

$$\log W = \log \left[\phi_0(\sqrt[m]{R}) \cdot \phi_1^{\alpha}(\sqrt[m]{R}) \cdot \phi_2^{\alpha^2}(\sqrt[m]{R}) \dots \phi_{\mu-1}^{\alpha^{\mu-1}}(\sqrt[m]{R}) \right]$$

gdzie $\phi_i(\sqrt[m]{R})$ są funkcjami wymiernymi ilości x i $\sqrt[m]{R}$. Miec więc będziemy równość

$$\frac{\eta}{\Delta \sqrt[m]{R}} = \frac{d \log W}{dx} = \frac{d}{dx} \log \left[\phi_0(\sqrt[m]{R}) \cdot \phi_1^{\alpha}(\sqrt[m]{R}) \cdot \phi_2^{\alpha^2}(\sqrt[m]{R}) \dots \phi_{\mu-1}^{\alpha^{\mu-1}}(\sqrt[m]{R}) \right]$$

Postaramy się teraz znaleźć pierwszy wyraz w rozwinięciu funkcji $\frac{\eta}{\Delta \sqrt[m]{R}}$ według potęg malejących ilości x . Przyjmijmy, iż pierwszy wyraz w podobnym rozwinięciu funkcji $\phi_i(\sqrt[m]{R})$ zawiera $x^{n^{(i)}}$; na mocy ostatniej równości przekonywamy się z łatwością, że za wyraz szukany możemy przyjąć

$$\frac{\eta_0}{x} = \frac{n^{(0)} + n^{(1)} \alpha + n^{(2)} \alpha^2 + \dots + n^{(\mu-1)} \alpha^{\mu-1}}{x}.$$

Wnioskujemy stąd, iż stopień funkcji $\frac{\eta}{\Delta \sqrt[m]{R}}$ nie przewyższa -1 . Jeśli zaś ten stopień jest niższy od -1 , wtedy mamy

$$\eta_0 = 0,$$

a zatem

$$n^{(0)} = n^{(1)} = \dots = n^{(\mu-1)},$$

t. j. wtedy wszystkie funkcje $\phi_i(\sqrt[m]{R})$, dla wartości $x = \infty$, pozostają skończonymi; własność ta będzie miała miejsce przy wszystkich m znaczeniach pierwiastka $\sqrt[m]{R}$, ponieważ z równości, określającej funkcję $\frac{\eta}{\Delta \sqrt[m]{R}}$, wypływa jeszcze równość

$$\frac{\mathfrak{P}}{\Omega \alpha^m \sqrt[m]{R}} = \frac{d}{dx} \log \phi_0(\alpha^m \sqrt[m]{R}) \cdot \phi_1 \alpha^m (\alpha^m \sqrt[m]{R}) \cdot \phi_2 \alpha^{2m} (\alpha^m \sqrt[m]{R}) \dots \phi_{\mu-1} \alpha^{(\mu-1)m} (\alpha^m \sqrt[m]{R})].$$

Dla znalezienia pierwszego wyrazu w rozwinięciu funkcji $\frac{\mathfrak{P}}{\Omega \sqrt[m]{R}}$ według potęg wzrastających dwumianu $x-b$, przyjmijmy, iż pierwszy wyraz w podobnym rozwinięciu ilości $\phi_i(\sqrt[m]{R})$ zawiera $(x-b)^n$; na mocy równości, określającej badaną funkcję, przekonujemy się, iż za wyraz szukany przyjmując możemy

$$\frac{\mathfrak{P}_1}{x-b} = \frac{n_0 + n_1 \alpha + n_2 \alpha^2 + \dots + n_{\mu-1} \alpha^{\mu-1}}{x-b}.$$

Wynika stąd, iż w wyrażeniu $\frac{\mathfrak{P}}{\Omega \sqrt[m]{R}}$ wielomian Ω nie posiada ani pierwiastków wielokrotnych, ani też wspólnych z wielomianem R . Jeśli zaś wielomian Ω nie dzieli się przez $x-b$, wtedy mamy

$$\mathfrak{P}_1 = 0,$$

a zatem

$$n_0 = n_1 = n_2 = \dots = n_{\mu-1},$$

t. j. wtedy wszystkie funkcje $\phi_i(\sqrt[m]{R})$ dla wartości $x-b$, pozostają skończonemi; własność ta będzie miała miejsce przy wszystkich m znaczeniach pierwiastka $\sqrt[m]{R}$.

Łatwo teraz widzieć, że wyrażenie

$$\frac{\mathfrak{P}}{\Omega \sqrt[m]{R}}$$

nie może być stopnia niższego od -1 , gdy $\Omega=1$.

W rzeczy samej, w razie przeciwnym, jakeśmy dowiedli, wszystkie funkcje $\phi_i(\sqrt[m]{R})$, dla wszystkich m wartości pierwiastka $\sqrt[m]{R}$, pozostają skończonemi dla wszelkiej wartości x , skończonej lub nieskończonej wielkiej. Kładąc

$$\phi_i(\sqrt[m]{R}) = X_0 + X_1 \sqrt[m]{R} + X_2 \sqrt[m]{R^2} + \dots + X_{m-1} \sqrt[m]{R^{m-1}},$$

mamy równość

$$m X_k \sqrt[m]{R^k} = \phi_i(\sqrt[m]{R}) + \alpha^{-k} \phi_i(\alpha \sqrt[m]{R}) + \alpha^{-2k} \phi_i(\alpha^2 \sqrt[m]{R}) + \dots + \alpha^{-(m-1)k} \phi_i(\alpha^{m-1} \sqrt[m]{R})$$

która wskazuje, iż, przy naszym założeniu wszystkie funkcje $\phi_i(\sqrt[m]{R})$, a więc i wyrażenie W , sprowadzają się do ilości stałych.

7. Rozważmy wreszcie pochodną wyrażenia

$$\Sigma A \log W,$$

które znajdujemy we wzorze n-ru 4; możemy przyjąć, że w naszej sumie liczba logarytmów sprowadzona została do najmniejszej ilości.

Kładąc

$$\frac{d}{dx} \Sigma A \log W = \Sigma A \frac{\mathfrak{P}}{\Omega \sqrt[m]{R}} = \frac{\mathfrak{P}_1}{\Omega_1 \sqrt[m]{R}},$$

z twierdzeń n-ru poprzedniego wnioskujemy o funkcji

$$\frac{\mathfrak{P}_1}{\Omega_1 \sqrt[m]{R}},$$

że stopień jej nie przewyższa -1 i że wielomian Ω_1 nie posiada ani pierwiastków wielokrotnych, ani też wspólnych z wielomianem R .

Łatwo też dowieść, że stopień tej funkcji nie może być niższym od -1 , gdy $\Omega_1=1$.

W rzeczy samej, wypadek przeciwny może mieć miejsce tylko przy jednym z dwóch następujących założeń: 1-o każda z funkcji $\frac{\mathfrak{P}}{\Omega \sqrt[m]{R}}$ jest stopnia

niższego od -1 , gdy jednocześnie $\Omega=1$; 2-o współczynniki A sumy $\Sigma A \log W$ czynią zadość równaniu $\Sigma A \mathfrak{P}=0$, gdzie $\mathfrak{P}$ oznaczają liczby natury wskazanej w n-rze poprzedzającym. Lecz pierwsze założenie, jakeśmy już wskazali, jest niemożliwe; niemożliwem jest i drugie, ponieważ istnienie związku $\Sigma A \mathfrak{P}=0$ pozwoliłoby, jak to łatwo wykazać, zmniejszyć o jedność liczbę logarytmów, zawartych w sumie $\Sigma A \log W$, a to sprzeczniwa się naszemu zastrzeżeniu.

§ III.

8. Twierdzenia § poprzedzającego pozwalają udowodnić niektóre własności całki, sprowadzonej do postaci normalnej, t. j. całki

$$\int \frac{P_1 dx}{Q_1 \sqrt[m]{R}}$$

gdzie

$$R = (x-a_1)^{n_1} (x-a_2)^{n_2} \dots (x-a_r)^{n_r},$$

stopień ułamka $\frac{P_1}{Q_1}$ nie przewyższa $\lambda - 2$ i wielomian Q_1 nie posiada ani pierwiastków wielokrotnych, ani też wspólnych z wielomianem R .

9. Jeśli całka nasza sprowadza się do postaci skończonej, w takim razie możemy ją położyć

$$\int \frac{P_1 dx}{Q_1 \sqrt[m]{R}} = \Sigma A \log W.$$

Aby dowieść tego twierdzenia, zauważmy najprzód, iż, skoro całka wyraża się pod postacią skończoną, natenczas mamy (zob. wstęp)

$$\int \frac{P_1 dx}{Q_1 \sqrt[m]{R}} = \frac{X}{Y \sqrt[m]{R}} + \Sigma A \log W;$$

należy więc dowieść, iż ta równość istnieje może tylko w przypuszczeniu, że $X=0$.

W razie przeciwnym, korzystając z oznaczeń § poprzedzającego, otrzymamy związek

$$\frac{P_1}{Q_1 \sqrt[m]{R}} = \frac{L}{M \sqrt[m]{R}} + \frac{Y_1}{\Sigma_1 \sqrt[m]{R}}.$$

Tu wielomian M , jak to wypływa z własności wyrażeń Q_1 i Σ_1 , nie posiada ani pierwiastków wielokrotnych, ani też wspólnych z wielomianem R ; a zatem stopień drugiego wyrazu (nr 5) będzie nie niższy od $\lambda - 1 - \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_i}{m}$ i wyższy od -1 , t. j. będzie przewyższał stopnie wyrazów pierwszego i trzeciego, co być nie może.

10. Z twierdzenia n-ru poprzedniego, w związku z twierdzeniami § II, wyprowadzamy wnioski następujące:

i) Sprowadzenie całki

$$\int \frac{P dx}{Q \sqrt[m]{R}},$$

gdzie P , Q są wielomianami całkowitemi, do całki postaci

$$\int \frac{P_1 dx}{Q_1 \sqrt[m]{R}}$$

pod warunkiem, aby

$$\int \frac{P dx}{Q \sqrt[m]{R}} = \text{funk. alg. zm. } x + \int \frac{P_1 dx}{Q_1 \sqrt[m]{R}},$$

może być wykonane tylko jednym sposobem.

ii) Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby całka

$$\int \frac{P dx}{Q \sqrt[m]{R}}$$

mogła być przedstawioną przez funkcją algebraiczną zmienną x , jest

$$P_1 = 0.$$

iii) Całka

$$\int \frac{P_1 dx}{Q_1 \sqrt[m]{R}}$$

nie daje się przedstawić pod postacią skończoną, skoro tylko stopień funkcji $\frac{P_1}{Q_1 \sqrt[m]{R}}$ przewyższa -1 .

Przykład. Całka

$$\int \frac{x^2 dx}{V(1-x^2)(1-k^2 x^2)}$$

nie może być przedstawioną za pomocą skończonej liczby funkcji algebraicznych i logarytmowych.

iv) Całka

$$\int \frac{P_1 dx}{Q_1 \sqrt[m]{R}}$$

nie daje się przedstawić pod postacią skończoną, jeśli stopień funkcji $\frac{P_1}{Q_1 \sqrt[m]{R}}$ jest niższy od -1 , gdy jednocześnie $Q_1=1$.

Przykład. Całka

$$\int \frac{dx}{V(1-x^2)(1-k^2 x^2)}$$

nie może być przedstawioną za pomocą skończonej liczby funkcji algebraicznych i logarytmowych.

§ IV.

11. Sprowadzenie całki

$$\int \frac{P dx}{Q \sqrt[m]{R}},$$

gdzie P, Q, R oznaczają wielomiany całkowite i gdzie

$$R = (x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2} \dots (x-a_i)^{n_i},$$

do całki

$$\int \frac{P_1 dx}{Q_1 \sqrt[m]{R}},$$

gdzie stopień ułamka $\frac{P_1}{Q_1}$ nie przewyższa $\lambda - 2$, a wielomian Q_1 nie posiada pierwiastków ani wielokrotnych, ani też wspólnych z wielomianem R , — może być dokonaniem za pomocą samych tylko działań arytmetycznych.

Zauważmy najprzód, iż za pomocą zwyczajnego dzielenia możemy znaleźć wielomian, równy iloczynowi

$$(x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_i),$$

przez co wyznaczymy od razu liczbę

$$\lambda,$$

a następnie możemy rozłożyć ten iloczyn na dwa czynniki

$$R_1, R_2,$$

z których drugi przedstawia wielomian dzielnicy Q , a pierwszy — wielomian pierwszy względem Q .

Zauważmy teraz, iż z trzech wzorów, wyprowadzonych w n-rach I i 2 §-u I, wynika, iż możemy położyć

$$\int \frac{P dx}{Q \sqrt[m]{R}} = \frac{M R_1}{N \sqrt[m]{R}} + \int \frac{P_1 dx}{Q_1 \sqrt[m]{R}},$$

gdzie M, N oznaczają wielomiany całkowite. Badając zaś bliżej wskazane wzory, znajdziemy sposób dla oznaczenia wielomianów M, N, P_1, Q_1 za pomocą samych tylko działań arytmetycznych.

Widzimy najprzód, że pierwiastek ν -krotny wielomianu N jest $(\nu+1)$ -krotnym pierwiastkiem wielomianu Q ; a więc wielomian N może być wyznaczony jako największy wspólny dzielnik funkcji Q i jej pochodnej. Wszystkie pierwiastki wielomianu Q_1 są pojedyncze i sprowadzają do zera funkcję Q , nie sprowadzając do zera funkcji R ; mamy przeto:

$$Q_1 = \frac{Q}{N \cdot R_2}.$$

Wyznaczwszy wielomiany N i Q_1 , z łatwością znajdziemy p, m , — stopnie wielomianów P_1, M , — pamiętając, iż stopień ułamka $\frac{P_1}{Q_1}$ można przyjąć jako równy $\lambda - 2$ i mając na względzie rozważaną równość.

Dla wyznaczenia współczynników funkcji M, P_1 , za pomocą rozważanej równości różniczkujemy ją i mnożymy następnie przez $Q \sqrt[m]{R}$, przez co otrzymujemy

$$P - M R_1 \frac{Q}{N} - M \left(R_1' \frac{Q}{N} - R_1 \frac{N' Q}{N^2} - \frac{1}{m} \frac{R R_1' Q}{N R} \right) = \frac{Q}{Q_1} \cdot P_1,$$

gdzie $M', \dots$ oznaczają pochodne, funkcje zaś

$$\frac{Q}{N}, \frac{N' Q}{N^2}, \frac{R R_1' Q}{N R}, \frac{Q}{Q_1}$$

przedstawiają wielomiany całkowite. Związek ten wskazuje, iż przy dzieleniu pierwszej jego strony przez wielomian $\frac{Q}{Q_1}$ powinniśmy otrzymać resztę równą zeru i iloraz stopnia p -go. Z warunku tego otrzymamy równania liniowe, które posłużą do wyznaczenia współczynników M ; równania te będą zupełnie wystarczającymi, jak to wypływa z twierdzenia I w art. 10.

Znając wartości współczynników M , podstawimy je w iloraz otrzymany przy naszym dzieleniu; iloraz ten przedstawi nam wartość funkcji P_1 .

12. Przykłady.

1) Niechaj będzie

$$\int \frac{P dx}{Q \sqrt[m]{R}} = \int \frac{10x^9 + 7x^8 - 2x^7 + 15x^6 + 17x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 10x - 1}{(x^5 + x + 1)^3 \sqrt[3]{x^5 - x^3 + 4x^2 - 3x + 2}} dx.$$

Mamy

$$(x-a_1) \dots (x-a_i) = (x^2 - x + 1)(x + 2) = x^3 + x^2 - x + 2,$$

$$R_2 = 1, \quad R_1 = x^3 + x^2 - x + 2;$$

$$\lambda = 3.$$

Największy wspólny dzielnik funkcji $Q = x^5 + x + 1$ i jej pochodnej, równej $5x^4 + 1$, jest 1, więc

$$N = 1, \quad Q_1 = x^5 + x + 1.$$

Stopień ułamka $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_1}{x^5 + x + 1}$ jest $\lambda - 2 = 1$, więc wielomian P_1 będzie 6-go stopnia. Ponieważ w równości

$$\int \frac{P dx}{Q \sqrt[m]{R}} = \frac{M R_1}{N \sqrt[m]{R}} + \int \frac{P_1 dx}{Q_1 \sqrt[m]{R}}$$

wyraz pierwszy jest stopnia $3\frac{1}{2}$ i wyraz trzeci jest stopnia $\frac{1}{2}$, więc wyraz drugi

$\frac{M.R_1}{N\sqrt[m]{R}} = \frac{M(x^3+x^2-x+2)}{\sqrt[m]{x^5-x^3+4x^2-3x+2}}$ będzie stopnia $3\frac{1}{2}$; skąd wypływa, iż wielomian

M będzie 2-go stopnia.

Kładąc

$$M = ax^2 + bx + c,$$

widzimy, że związek, który służy do wyznaczenia ilości M i P_1 , przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} & 10x^9 + 7x^8 - 2x^7 + 15x^6 + 10x^5 + 17x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 10x - 1 \\ & - (2ax + b)(x^5 + x + 1)(x^3 + x^2 - x + 2) \\ & - (ax^2 + bx + c)[(3x^2 + 2x - 1)(x^5 + x + 1) - \frac{1}{3}(5x^2 + 5x - 3)(x^5 + x + 1)] = P_1. \end{aligned}$$

Warunek, iż pierwsza jego strona powinna być 6-go stopnia, daje nam trzy równania, z których znajdujemy

$$a=3, b=0, c=3;$$

na mocy czego otrzymujemy

$$M = 3x^2 + 3, \quad P_1 = 2x^6 - 3x - 1.$$

Tym sposobem całkę daną sprowadziliśmy do całki

$$\int \frac{P_1 dx}{Q_1 \sqrt[m]{R}} = \int \frac{2x^6 - 3x - 1}{(x^5 + x + 1) \sqrt[m]{x^5 - x^3 + 4x^2 - 3x + 2}} dx,$$

związaną z całką daną związkiem

$$\begin{aligned} & \int \frac{10x^9 + 7x^8 - 2x^7 + 15x^6 + 10x^5 + 17x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 10x - 1}{(x^5 + x + 1) \sqrt[m]{x^5 - x^3 + 4x^2 - 3x + 2}} dx \\ & = \frac{(3x^2 + 3)(x^3 + x^2 - x + 2)}{\sqrt[m]{x^5 - x^3 + 4x^2 - 3x + 2}} + \int \frac{2x^6 - 3x - 1}{(x^5 + x + 1) \sqrt[m]{x^5 - x^3 + 4x^2 - 3x + 2}} dx. \end{aligned}$$

Uwaga. Całka, sprowadzona do postaci normalnej (n° 10, III), a więc i całka dana nie mogą być przedstawione za pomocą skończonej liczby funkcji algebraicznych i logarytmowych.

II) Weźmy

$$\int \frac{P dx}{Q \sqrt[m]{R}} = \int \frac{7x^5 + 10x^4 - 3x^2 - 7x - 4}{(x^2 + 2x + 1) \sqrt[m]{x^5 + x + 1}} dx$$

Znajdziemy

$$(x - a_1) \dots (x - a_k) = x^5 + x + 1,$$

$$R_2 = 1, \quad R_1 = x^5 + x + 1;$$

$$\lambda = 5;$$

$$N = x + 1, \quad Q_1 = x + 1;$$

$$p = 4, \quad m = 0.$$

Kładąc

$$M = a,$$

dla wyznaczenia stałej a i wielomianu P_1 , otrzymamy związek

$$7x^5 + 10x^4 - 3x^2 - 7x - 4 + a(x^5 + x + 1) - a \cdot \frac{2}{3}(x + 1)(5x^4 + 1) = (x + 1) \cdot P_1.$$

Z warunku, iż pierwsza strona dzieli się przez $x + 1$, znajdujemy

$$a = 3;$$

więc

$$M = 3, \quad P_1 = -3x - 3.$$

Zauważmy, iż

$$\frac{P_1}{Q_1} = -3.$$

Tym sposobem sprowadziliśmy całkę daną do całki normalnej:

$$\int \frac{7x^5 + 10x^4 - 3x^2 - 7x - 4}{(x^2 + 2x + 1) \sqrt[m]{x^5 + x + 1}} dx = \frac{3 \sqrt[m]{(x^5 + x + 1)^3}}{x + 1} + \int \frac{-3 dx}{\sqrt[m]{x^5 + x + 1}}.$$

Uwaga. Całka, sprowadzona do postaci normalnej (n° 10, IV), a więc i całka dana nie przedstawiają się za pomocą funkcji algebraicznych i logarytmowych.

III) Rozważając całkę

$$\int \frac{x^6 - 2x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1}{(x^4 - 2x^3 + x^2) \sqrt{x^4 + x^2 + 1}} dx,$$

znajdziemy

$$P_1 = 0;$$

i wartość całki przedstawimy za pomocą wzoru

$$\int \frac{x^6 - 2x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1}{(x^4 - 2x^3 + x^2)\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} dx = \frac{(x+1)\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}{x^2 - x}.$$

iv) Całka

$$\int \frac{3x^5 + 24x^2 + x}{(x^3 + 8)\sqrt{x^3 - 1}} dx$$

sprowadza się do całki normalnej przy pomocy równości

$$\int \frac{3x^5 + 24x^2 + x}{(x^3 + 8)\sqrt{x^3 - 1}} dx = 2\sqrt{x^3 - 1} + \int \frac{x dx}{(x^3 + 8)\sqrt{x^3 - 1}}.$$

Uwaga. Jeśli całka dana przedstawia się pod postacią skończoną, to nowa całka (n° 9) powinna się wyrazić przez logarytmy. Badanie zagadnienia, które się tutaj nasuwa, nie wchodzi w zakres pracy niniejszej; ograniczyć się na uwadze, że rzeczywiście mamy:

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{(x^3 + 8)\sqrt{x^3 - 1}} &= \frac{-\sqrt{-1} + \sqrt{3}}{36} \log \frac{\frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{-1}}{2}x + \sqrt{3} + \sqrt{x^3 - 1}}{\frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{-1}}{2}x + \sqrt{3} - \sqrt{x^3 - 1}} \\ &+ \frac{-\sqrt{-1} - \sqrt{3}}{36} \log \frac{\frac{-\sqrt{3} - 3\sqrt{-1}}{2}x - \sqrt{3} + \sqrt{x^3 - 1}}{\frac{-\sqrt{3} - 3\sqrt{-1}}{2}x - \sqrt{3} - \sqrt{x^3 - 1}}, \end{aligned}$$

jak o tym można się przekonać, wzięwszy pochodną drugiej strony.

Całkę $\int \frac{x dx}{(x^3 + 8)\sqrt{x^3 - 1}}$ spotykamy już u Eulera; badał ją szczegółowo Legendre; ostatniemi zaś czasami zajmowało się nią wielu matematyków.

§ V.

13. Twierdzenia n° 10 dają możność rozwiązania zagadnienia: „Jakim powinien być pierwiastek

$$\sqrt[m]{R} = \sqrt[m]{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2} \dots (x-a_k)^{n_k}},$$

aby całka

$$\int F(x, \sqrt[m]{R}) dx,$$

dla każdej funkcji wymiernej F i $\sqrt[m]{R}$ mogła być przedstawioną za pomocą skończonej liczby funkcji algebraicznych i logarytmowych?”

Twierdzenie.

Aby całka

$$\int F(x, \sqrt[m]{R}) dx,$$

dla wszystkich wartości funkcji wymiernej F , mogła być przedstawioną pod postacią skończoną, potrzeba i wystarcza, aby pierwiastek $\sqrt[m]{R}$ posiadał jedną z dwóch postaci: albo

$$\sqrt[m]{R} = \sqrt[m]{(x-a)^n},$$

albo

$$\sqrt[m]{R} = \sqrt[m]{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2} \dots (x-a_k)^{n_k}}.$$

Że warunek wskazany wystarcza, wynika to stąd, iż, przy $\sqrt[m]{R} = \sqrt[m]{(x-a)^n}$, kładąc $x-a=z^m$, a, przy $\sqrt[m]{R} = \sqrt[m]{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2} \dots (x-a_k)^{n_k}}$, kładąc $\frac{x-a_1}{x-a_2} = z^m$,

sprowadzamy różniczkę $F(x, \sqrt[m]{R}) dx$ do postaci wymiernej.

Dla udowodnienia zaś, że warunek nasz jest koniecznym, dostatecznie jest wskazać całki postaci $\int F(x, \sqrt[m]{R}) dx$, które nie przedstawiają się pod postacią skończoną, skoro tylko pierwiastek $\sqrt[m]{R}$ nie posiada jednej z dwóch form powyższych.

14. W tym celu dowiedzmy, iż trzy następujące całki postaci $\int \frac{P dx}{Q \sqrt[m]{R}}$

(A) $\int \frac{x^{\lambda-2} dx}{\sqrt[m]{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2} \dots (x-a_k)^{n_k}}}$, gdzie $n_1 + n_2 + \dots + n_k < m$, $\lambda \geq 2$;

(B) $\int \frac{x^{\lambda-2} dx}{\sqrt[m]{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2} \dots (x-a_k)^{n_k}}}$, gdzie $n_1 + n_2 + \dots + n_k = m$, $\lambda > 2$;

(C) $\int \frac{dx}{\sqrt[m]{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2} \dots (x-a_k)^{n_k}}}$, gdzie $n_1 + n_2 + \dots + n_k > m$,

nie mogą być przedstawione za pomocą funkcji algebraicznych i logarytmowych.

Rozważmy całkę (A). Ponieważ w niej $Q=1$ i stopień funkcji $\frac{P}{Q}$ równa

się $\lambda - 2$, stanowi więc ona całkę postaci $\int \frac{P_1 dx}{Q_1 \sqrt{R}}$. Stopień funkcji $\frac{P_1}{Q_1 \sqrt{R}}$ jest

równy $\lambda - 2 - \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_\lambda}{m}$, a więc, przy $n_1 + n_2 + \dots + n_\lambda < m$ i $\lambda \geq 2$, ten

stopień będzie przewyższał -1 ; wnioskujemy stąd (n^o 10, III), że całka (A) nie może być przedstawioną pod postacią skończoną.

Weźmy całkę (B); stanowi ona całkę postaci $\int \frac{P_1 dx}{Q_1 \sqrt{R}}$. Ponieważ, przy

$n_1 + n_2 + \dots + n_\lambda = m$ i $\lambda > 2$, stopień funkcji $\frac{P_1}{Q_1 \sqrt{R}}$ przewyższa -1 , całka więc

(B) nie może się równać funkcji skończonej.

Rozważmy nareszcie całkę (C). W niej $Q = 1$ i stopień funkcji P/Q równa się zero, a więc nie przewyższa $\lambda - 2$, ponieważ, oczywiście, przy $n_1 + n_2 + \dots + n_\lambda > m$ musimy mieć $\lambda > 2$. Całka więc nasza jest postaci $\int \frac{P_1 dx}{Q_1 \sqrt{R}}$. W niej $Q_1 = 1$ i stopień funkcji $\frac{P_1}{Q_1 \sqrt{R}}$ równa się $-\frac{n_1 + n_2 + \dots + n_\lambda}{m}$.

a więc, ponieważ $n_1 + n_2 + \dots + n_\lambda > m$, stopień ten jest niższy od -1 . Całka więc (C) nie przedstawi się pod postacią skończoną (n^o 10, IV).

Twierdzenie n^o 13 jest przeto zupełnie dowiedzioném.

Peterhof, w marcu 1889 r.

O TEORII CYNETYCZNEJ ZJAWISKA JOULE'A

PRZEZ

WŁ. NATANSONA.

1. Badania nad zjawiskami cieplnymi, zachodzącymi przy nagłych zmianach ciśnienia w ciałach gazowych, rozpoczął Dalton. Gay-Lussac, de la Rive i Marcet prowadzili je w dalszym ciągu; lecz nie zdołali ich wytłumaczyć inaczej, jak za pomocą hipotez o działaniu substancji cieplnej na materię ważką, które dziś wydają nam się niedorzecznymi; choć przed pół wiekiem jeszcze były otoczone uznaniem. Dni tych hipotez już były policzone. Mayer odgadł prawdę, a Joule wykrył ją indukcyjnie. W rozprawie „On the changes of temperature produced by the rarefaction and condensation of air“ (którą w Czerwcu 1844 r. przedstawił Towarzystwu Królewskiemu w Londynie a wydrukował w „Philosophical Magazine“ za Maj 1845) Joule dowiódł, że „ciepło, wytwarzane przy ściskaniu powietrza, jest objawianiem się pod nowym kształtem potęgi mechanicznej, zużytej przy ściskaniu.“

Rachunek Mayera (i podobny doń rachunek Joule'a), który prowadził do znalezienia wielkości mechanicznego równoważnika ciepła z wielkości owych zmian cieplnych, zasadzał się na przypuszczeniu, że gazy nie ulegają zmianom temperatury, gdy, rozprężając się, nie mogą wykonywać pracy mechanicznej. Joule wypełnił naczynie miedziane (o objętości 136½ cali sześciennych) powietrzem pod ciśnieniem 22-ch atmosfer; zamknąwszy je i złączywszy z drugim pustym naczyniem (o obj. 134 cali sześć.) za pomocą krótkiej rury, otworzył kran. (Obadwa naczynia były umieszczone w kalorymetrze, który zawierał 16½ funtów wody.) Rozprężenie następuje, na termometrze kalorymetru (po zamieszaniu wody) żadna zmiana nie jest widoczną. Dziś wiemy, że nieznaczne oziębienie *musiało* zajść w tém doświadczeniu. Według Sir W. Thomsona