równa się stałéj Eulera, którą zwykle oznaczają przez C; wprowadzając ją do poprzedniego wzoru otrzymujemy ostatecznie

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)} = e^{Cx} \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}. \tag{38}$$

Wzór ten, jak wiadomo, ma związek z twierdzeniem Weierstrassa, dotyczącém rozwijania funkcyj przestępnych całkowitych (homolorficznych) na iloczyny nieskończone.

Petersburg, w kwietniu 1889 r.

PRZYCZYNEK DO TEORYI ELIMINACYI.

PRZEZ

WŁ. KRETKOWSKIEGO.

Teorya rugowania czyli eliminacyi pomiędzy dwoma równaniami algebraicznemi z jedną niewiadomą, oraz wyznaczanie pierwiastków wspólnych i niewspólnych tymże równaniom, przedstawiane są zwykle w sposób już to niezupełny, już to długi, a niekiedy nawet nie ścisły. Poniżéj ośmielam się przedstawić metodę, zdaje mi się, wyczerpującą i prostą. Pozwala ona bowiem z jednéj strony, gdy danemi są dwa równania, wypisać bezpośrednio zastrzeżenia konieczne i dostateczne, aby te równania mogły mieć daną liczbę pierwiastków wspólnych,—i, gdy te zastrzeżenia są wypełnione,—wypisać również bezpośrednio równanie, dające pierwiastki wspólne oraz dwa równania, dające pierwiastki nie wspólne, i to wszystko, jako funkcye wyraźne współczynników danych równań. Z drugiéj znów strony, dowód téj metody otrzymuje się na najprostszéj drodze algebraicznéj t. j. z pewnych tożsamości algebraicznych. Ubocznie tą drogą otrzymuję iloraz i resztę dzielenia dwóch danych wielomianów, oraz zastrzeżenia konieczne i dostateczne, aby dwa dane wielomiany posiadały za największy wspólny dzielnik wielomian stopnia danego, i—w razie gdy te zastrzeżenia są wypełnione—otrzymuję wyrażenia tegoż dzielnika i dwóch ilorazów najmniejszych, jako funkcye wyraźne współczynników danych wielomianów.

Ponieważ wzory ogólne byłyby bardzo długie, a dowód sam nie byłby może dosyć wyraźnym, prowadzić będę przeto rachunki w części na przykładzie szczególnym; czytelnik wszakże z łatwością przekona się, że ogólność dowodów nic na tém nie ucierpi.

Uważmy dwa wielomiany algebraiczne

$$A_m = A_5 = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + a_5 z^5,$$
$$B_n = B_3 = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3,$$

odpowiednio stopni $m = 5$ i $n = 3$. Można będzie założyć zawsze, że m jest większe lub równe n, w razie bowiem nierówności stopni m i n uważać będziemy zawsze wielomian stopnia wyższego za wielomian pierwszy A_m.

Przystępuję teraz do wyprowadzenia układu tożsamości algebraicznych, na których treść pracy niniejszéj polega. Uważmy naprzód znany wyznacznik znakomitego matematyka angielskiego Sylvester'a, napotkany przezeń przed pół wiekiem. Wypisuję go poniżej dla wielomianów szczególnych powyższych; wypisanie go bowiem dla wielomianów ogólnych byłoby za długiém, a nie przedstawia trudności żadnéj.

$$S = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5 \\ \cdot & a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & \cdot \\ a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & \cdot & \cdot \\ b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_0, & b_1, & b_2, & b_3 \end{vmatrix}$$

Wyznacznik ten jest rzędu $m+n=5+3=8$; dla większéj wyrazistości składniki będące zerami zastąpiłem punktami.

Z tego wyznacznika utworzyć można $n=3$ wyznaczników, zastępując w nim wiersz pionowy p^{-ty}; $p=1, 2, \ldots, n$; przez wiersz pionowy następujący.

$$\begin{matrix} A_m z^{n-1} \\ A_m z^{n-2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_m z \\ A_m \\ B_n \\ B_n z \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B_n z^{m-2} \\ B^n z^{m-1} \end{matrix} \qquad (1)$$

a więc w szczególnym naszym przypadku $m=5$, $n=3$ przez:

$$\begin{matrix} A_5 z^2 \\ A_5 z \\ A_5 \\ B_3 \\ B_3 z \\ B_3 z^2 \\ B_3 z^3 \\ B_3 z^4 \end{matrix}$$

i opuszczając w tak zmienionym wyznaczniku $p-1$ obwodów zewnętrznych, przez co otrzymamy $n=3$ wyznaczników $S_{m+n-2(p-1)}$; $p=1,2, \ldots n$; odpowiednio rzędów $m+n-2(p-1)=10-2p=8, 6, 4$.

$$S_8 = \begin{vmatrix} A_5 z^2, & \cdot, & a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5 \\ A_5 z, & a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & \cdot \\ A_5, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & \cdot, & \cdot \\ B_3, & b_1, & b_2, & b_3, & \cdot, & \cdot, & \cdot, & \cdot \\ B_3 z, & b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & \cdot, & \cdot, & \cdot \\ B_3 z^2, & \cdot, & b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & \cdot, & \cdot \\ B_3 z^3, & \cdot, & \cdot, & b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & \cdot \\ B_3 z^4, & \cdot, & \cdot, & \cdot, & b_0, & b_1, & b_2, & b_3 \end{vmatrix}$$

$$S_6 = \begin{vmatrix} A_5 z, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5 \\ A_5, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & \cdot \\ B_3, & b_2, & b_3, & \cdot, & \cdot, & \cdot \\ B_3 z, & b_1, & b_2, & b_3, & \cdot, & \cdot \\ B_3 z^2, & b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & \cdot \\ B_3 z^3, & \cdot, & b_0, & b_1, & b_2, & b_3 \end{vmatrix}$$

$$S_4 = \begin{vmatrix} A_5, & a_3, & a_4, & a_5 \\ B_3, & b_3, & \cdot, & \cdot \\ B_3 z, & b_2, & b_3, & \cdot \\ B_3 z^2, & b_1, & b_2, & b_3 \end{vmatrix}$$

Ostatni z tych wyznaczników t. j. ten, dla którego $p=n=3$, jest rzędu $m+n-2(n-1)=m-n+2=5-3+2=4$.

Powyższe wyznaczniki, których jest $n=3$, rozwinę każdy dwoma sposobami, a otrzymane tak dwa rozwinięcia porównane ze sobą, podadzą $n=3$ zapowiedzianych tożsamości.

Pierwszy sposób rozwinięcia polega na uważaniu w tych wyznacznikach wiersza pionowego (1) za sumę dwóch innych

$$\text{jednego}\quad \begin{matrix} A^m z^{n-1} \\ A_m z^{n-2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_m z \\ A_m \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \quad \text{i drugiego} \quad \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \\ B_n \\ B_n z \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B_n z^{m-2} \\ B_n z^{m-1} \end{matrix}$$

a więc w szczególnym naszym przypadku za sumę

$$\text{jednego}\quad \begin{matrix} A_5 z^2 \\ A_5 z \\ A_5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \quad \text{i drugiego} \quad \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ B_n \\ B_n z \\ B_n z^2 \\ B_n z^3 \\ B_n z^4 \end{matrix}$$

co pozwala, na mocy znanéj dawno własności wyznaczników, uważać każdy z $n=3$ wyznaczników $S_{m+n-2(p-1)}$ za sumę dwóch wyznaczników innych tegoż rzędu $m+n-2(p-1)$, mających w uważanych wierszach pionowych odpowiednio czynniki A_m i A_n, które zatém można wyłączyć. Po dokonaniu tego wyłączenia, nazwawszy wyznaczniki otrzymane $C_{m+n-2(p-1)}$ i $D_{m+n-2(p-1)}$, otrzymamy n rozwinięć

$$S_{m+n-2(p-1)} = A_m\, C_{m+n-2(p-1)} + B_n D_{m+n-2(p-1)};\quad p=1,2,\ldots,\ n$$

a więc w uważanym przez nas wypadku trzy rozwinięcia:

$$S_8 = A_5\, C_8 + B_3\, D_8$$
$$S_6 = A_5\, C_6 + B_3\, D_4$$
$$S_4 = A_4\, C_4 + B_3\, D_4$$

gdzie

$$C_8 = \begin{vmatrix} z^2, & \cdot, & a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5 \\ z, & a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & \cdot \\ 1, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & \cdot, & \cdot \\ \cdot, & b_1, & b_2, & b_3, & \cdot, & \cdot, & \cdot, & \cdot \\ \cdot, & b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & \cdot, & \cdot, & \cdot \\ \cdot, & \cdot, & b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & \cdot, & \cdot \\ \cdot, & \cdot, & \cdot, & b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & \cdot \\ \cdot, & \cdot, & \cdot, & \cdot, & b_0, & b_1, & b_2, & b_3 \end{vmatrix}, \qquad D_8 = \begin{vmatrix} \cdot, & \cdot, & a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5 \\ \cdot, & a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & \cdot \\ \cdot, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & \cdot, & \cdot \\ 1, & b_1, & b_2, & b_3, & \cdot, & \cdot, & \cdot, & \cdot \\ z, & b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & \cdot, & \cdot, & \cdot \\ z^2, & \cdot, & b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & \cdot, & \cdot \\ z^3, & \cdot, & \cdot, & b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & \cdot \\ z^4, & \cdot, & \cdot, & \cdot, & b_0, & b_1, & b_2, & b_3 \end{vmatrix},$$

$$C_6 = \begin{vmatrix} z, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5 \\ 1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & \cdot \\ \cdot, & b_2, & b_3, & \cdot, & \cdot, & \cdot \\ \cdot, & b_1, & b_2, & b_3, & \cdot, & \cdot \\ \cdot, & b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & \cdot \\ \cdot, & \cdot, & b_0, & b_1, & b_2, & b_3 \end{vmatrix}, \qquad D_6 = \begin{vmatrix} \cdot, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5 \\ \cdot, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & \cdot \\ 1, & b_2, & b_3, & \cdot, & \cdot, & \cdot \\ z, & b_1, & b_2, & b_3, & \cdot, & \cdot \\ z^2, & b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & \cdot \\ z^3, & \cdot, & b_0, & b_1, & b_2, & b_3 \end{vmatrix},$$

$$C_4 = \begin{vmatrix} 1, & a_3, & a_4, & a_5 \\ \cdot, & b_3, & \cdot, & \cdot \\ \cdot, & b_2, & b_3, & \cdot \\ \cdot, & b_1, & b_2, & b_3 \end{vmatrix}, \qquad D_4 = \begin{vmatrix} \cdot & a_3, & a_4, & a_5 \\ 1, & b_3, & \cdot, & \cdot \\ z, & b_2, & b_3, & \cdot \\ z^2, & b_1, & b_2, & b_3 \end{vmatrix},$$

Zwrócę tu uwagę na to, że wyznaczniki $C_{m+n-2(p-1)}$ i $D_{m+n-2(p-1)}$ są względem z wielomianami odpowiednio stopni $n-p$ i $m-p$, oraz że wyznacznik, odpowiadający wartości p równéj n, mianowicie $C_{m+n-2(n-1)} = C_{m-n+2} = C_4$, jest równy $b_n^{m-n+1} = b_3^3$.

Drugi sposób rozwinięcia n wyznaczników $S_{m+n-2(p-1)}$ polega na znanéj także dawno własności wyznaczników, że one nie zmieniają swéj wartości, gdy od któregokolwiek z ich wierszy pionowych odejmujemy ich wiersze pionowe pozostałe, pomnożone przez czynniki dowolne. Odejmijmy więc od uważanych wyżéj wierszy pionowych pozostałe wiersze pionowe, pomnożone przez takie potęgi ilości z, jakiego rzędu są też wiersze w wyznaczniku S, zmniejszonego jednością. W szczególnym więc naszym przykładzie, w wyznaczniku S_8 odej-

miemy kolejno pozostałe wiersze pionowe, pomnożone przez $z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6, z^7$; w S_6 pomnożone przez z^2, z^3, z^4, z^5, z^6; a w S_4 przez z^3, z^4, z^5.

Tym sposobem pokaże się, że wyznacznik $S_{m+n-2(p-1)}$ odpowiadający $p=1$, mianowicie $S_{m+n-2(1-1)}=S_{m+n}=S_8$ jest równy wyznacznikowi S; wyznaczniki zaś odpowiadające $p=2, 3, \ldots, n$, w liczbie $n-1$, są w szczególności:

$$S_6=\begin{vmatrix} a_0z, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5 \\ a_0+a_1z, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & . \\ b_0+b_1z, & b_2, & b_3, & ., & ., & . \\ b_0z, & b_1, & b_2, & b_3, & ., & . \\ ., & b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & . \\ ., & ., & b_0, & b_1, & b_2, & b_3 \end{vmatrix}, \quad S_4=\begin{vmatrix} a_0+a_1z+a_2z^2, & a_3, & a_4, & a_5 \\ b_0+b_1z+b_2z^2, & b_3, & ., & . \\ b_0z+b_1z^2, & b_2, & b_3, & . \\ b_0z^2, & b_1, & b_2, & b_3 \end{vmatrix}.$$

Po tém drugiém przekształceniu wyznaczniki $S_{m+n-2(p-1)}$ uważać można za wielomiany względem ilości z stopnia $p-1$, uważając daléj ich wiersze pionowe pierwsze odpowiednio za sumy p innych wierszy pionowych, mających za czynniki wspólne potęgi $0,1,2,\ldots,p-1$ ilości z. I tak w wyznacznikach S_6 i S_4 uważać będziemy odpowiednio ich wiersze pierwsze za sumy dwóch i trzech wierszy pionowych następujących

$$\begin{matrix} . & & a_0z \\ a_0 & & a_1z \\ b_0 & \text{i} & b_1z \\ . & & b_0z \\ . & & . \\ . & & . \end{matrix} \qquad \text{oraz} \qquad \begin{matrix} a_0 & a_1z & & a_2z^2 \\ b_0 & , b_1z & \text{i} & b_2z^2 \\ . & b_0z & & b_1z^2 \\ . & . & & b_0z^2 \end{matrix}$$

z których wyłączyć można odpowiednio czynniki wspólne potęgi ilości z: 1 z oraz $1, z, z^2$. Nazwawszy w ogólności współczynniki tychże potęg ilości z, będące także wyznacznikami rzędu $m+n-2(p-1)$, przez $E_{p,r}$; $p=1, 2, \ldots, n$; $r=0, 1, 2, \ldots, p-1$; otrzymamy tym sposobem n rozwinięć

$$S_{m+n-2(p-1)}=\mathop{S}_{r=0}^{r=p-1} E_{p,r}z^r; \quad p=1, 2, \ldots, n,$$

a więc dla $p=1$ mamy zawsze

$$S_{m+n}=E_{1,0}=S,$$

a w szczególnym naszym przypadku

$$S_8=E_{1,0}=S$$
$$S_6=E_{2,0}+E_{2,1}z$$
$$S_4=E_{3,0}+E_{3,1}z+E_{3,2}z^2$$

gdzie

$$E_{2,0}=\begin{vmatrix} ., & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5 \\ a_0, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & . \\ b_0, & b_2, & b_3, & ., & ., & . \\ ., & b_1, & b_2, & b_3, & ., & . \\ ., & b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & . \\ ., & ., & b_0, & b_1, & b_2, & b_3 \end{vmatrix}, \quad E_{2,1}=\begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5 \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & . \\ b_1, & b_2, & b_3, & ., & ., & . \\ b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & ., & . \\ ., & b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & . \\ ., & ., & b_0, & b_1, & b_2, & b_3 \end{vmatrix},$$

$$E_{3,0}=\begin{vmatrix} a_0, & a_3, & a_4, & a_5 \\ b_0, & b_3, & ., & . \\ ., & b_2, & b_3, & . \\ ., & b_1, & b_2, & b_3 \end{vmatrix}, \quad E_{3,1}=\begin{vmatrix} a_1, & a_3, & a_4, & a_5 \\ b_1, & b_3, & ., & . \\ b_0, & b_2, & b_3, & . \\ ., & b_1, & b_2, & b_3 \end{vmatrix}, \quad E_{3,2}=\begin{vmatrix} a_2, & a_3, & a_4, & a_5 \\ b_2, & b_3, & ., & . \\ b_1, & b_2, & b_3, & . \\ b_0, & b_1, & b_2, & b_3 \end{vmatrix}.$$

Widzimy z powyższego, że p współczynników $E_{p,r}$ $(r=0,1,2,\ldots p-1)$ wielomianu $S_{m+n-2(p-1)}$ otrzymać można z wyznacznika pierwotnego S, opuszczając w nim $2(p-1)$ wierszy poziomych, mianowicie $p-1$ początkowych i tyleż końcowych, następnie z otrzymanego tak układu prostokątnego o $m+n-2(p-1)$ wierszach poziomych a $m+n-(p-1)$ pionowych tworząc p wyznaczników rzędu $m+n-2(p-1)$, biorąc kolejno każdy z p wierszy pionowych początkowych wraz z pozostałemi pionowemi w liczbie $m+n-(p-1)-p=m+n-2(p-1)-1$. I tak w szczególności dla wielomianu S_6, ponieważ $p=2$, dwa współczynniki powstają z układu prostokątnego o $5+3-2(2-1)=6$, to jest o sześciu wierszach poziomych i o $5+3-(2-1)=7$, to jest o siedmiu wierszach pionowych

$$\begin{vmatrix} ., & a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5 \\ a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & . \\ b_0, & b_2, & b_2, & b_3, & ., & ., & . \\ ., & b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & ., & . \\ ., & ., & b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & . \\ ., & ., & ., & b_0, & b_1, & b_2, & b_3 \end{vmatrix}$$

biorąc kolejno każdy z $p=2$, to jest z dwóch wierszy pionowych początkowych z pozostałemi $m+n-2(p-1)-1=5+3-2(2-1)-1=5$, to jest pięciu piono-

wemi; a dla wielomianu S_4, ponieważ $p=3$, z układu prostokątnego o $5+3-2(3-1)=4$ to jest czterech wierszach pionowych i $5+3-(3-1)=6$ pionowych

$$\begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5 \\ b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & ., & . \\ ., & b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & . \\ ., & ., & b_0, & b_1, & b_2, & b_3 \end{vmatrix},$$

biorąc kolejno każdy z $p=3$, to jest z trzech wierszy pionowych początkowych z pozostałemi $5+3-2(3-1)-1=3$, to jest z trzema.

Porównawszy teraz odpowiednio otrzymane $2n$ rozwinięć n wyznaczników, otrzymamy n zapowiedzianych tożsamości:

$$A_m C_{m+n-2(p-1)} + B_n D_{m+n-2(p-1)} = \mathop{S}_{r=0}^{r=p-1} E_{p,r} z^r; p=1, 2, \ldots, n. \qquad (2)$$

a więc w szczególności, trzy tożsamości

$$A_5 C_8 + B_3 D_8 = E_{1,0}$$
$$A_5 C_6 + B_3 D_6 = E_{2,0} + E_{2,1} z$$
$$A_5 C_4 + B_3 D_4 = E_{3,0} + E_{3,1} z + E_{3,2} z^2$$

Dowiodę teraz kilku twierdzeń, dotyczących wyznaczników równych zeru, a które w następstwie będą mi potrzebne.

Wyobraźmy sobie układ mn ilości $a_{k,l}$; $k=1,2,\ldots,m$; $l=1,2,\ldots,n$, ustawionych w m wierszach poziomych i n pionowych, i przypuśćmy że m nie większe od n

$$\begin{matrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,l}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,l}, & \ldots, & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k,1}, & a_{k,2}, & \ldots, & a_{k,l}, & \ldots, & a_{k,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1}, & a_{m,2}, & \ldots, & a_{m,l}, & \ldots, & a_{m,n} \end{matrix}$$

Z tych ilości utworzyć można $n-m+1$ wyznaczników rzędu m, biorąc z powyższego układu którekolwiek $m-1$ wierszy pionowych, naprzykład początkowych, kolejno z każdym z $n-m+1$ wierszy pionowych pozostałych. Twierdzenie, którego dowiodę najprzód, brzmi:

„Jeżeli $n-m+1$ wyznaczników, utworzonych w powyższy sposób, są są zerami, to wtedy każdy z pomiędzy $\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots m}$ wyznaczników, utworzonych z którychkolwiek m wierszy pionowych układu powyższego, jest także zerem.“

Aby tego dowieść, uważmy, że mamy n równań

$$0 = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,m-1}, & a_{1,l} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,m-1}, & a_{2,l} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1}, & a_{m,2}, & \ldots, & a_{m,m-1}, & a_{m,l} \end{vmatrix} = \mathop{S}_{k=1}^{k=m} a_{k,l} b_k; \; l=1, 2, \ldots, n,$$

gdzie

$$b_k = (-1)^{1+k} \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,m-1} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,m-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1,1}, & a_{k-1,2}, & \ldots, & a_{k-1,m-1} \\ a_{k+1,1}, & a_{k+1,2}, & \ldots, & a_{k+1,m-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1}, & a_{m,2}, & \ldots, & a_{m,m-1} \end{vmatrix}; \; k=1,2,\ldots,m;$$

gdyż dla $l=1,2,\ldots,m-1$ wyznaczniki m rzędu w przedostatniém równaniią są zerami, jako mające po dwa wiersze pionowe $l^{\text{-ty}}$ i ostatni $m^{\text{-ty}}$ jednakowe, a dla $l=m, m+1, \ldots, n$ wyznaczniki są zerami z założenia. Biorąc więc którekolwiek m równań z pomiędzy n przedostatnich, naprzykład $l_1^{\text{-te}}, l_2^{\text{-te}}, \ldots, l_m^{\text{-te}}$ i rugując z nich m ilości b_k ($k=1,2,\ldots,m$) otrzymamy, jak zapowiada twierdzenie

$$0 = \begin{vmatrix} a_{1,l_1}, & a_{1,l_2}, & \ldots, & a_{1,l_m} \\ a_{2,l_1}, & a_{2,l_2}, & \ldots, & a_{2,l_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,l_1}, & a_{m,l}, & \ldots, & a_{m,l_m} \end{vmatrix}; \; l_1, l_2, \ldots, l_m = 1,2, \ldots, n.$$

Drugie twierdzenie brzmi:

„Jeżeli w wyznaczniku rzędu n istnieje m wierszy poziomych lub pionowych takich, że wszystkie wyznaczniki częściowe rzędu m z tych wierszy utworzone są zerami, to i uważany wyznacznik rzędu n jest także zerem.“

Aby tego dowieść, dosyć rozwinąć uważany wyznacznik rzędu n podług uważanych m wierszy, według znanego twierdzenia Vandermonde'a. Rozwinięcie to bowiem jest wielomianem jednorodnym liniowym względem wyznaczników częściowych rzędu m wyżéj wspomnianych, a więc wraz z niemi jest zerem, a przeto i wyznacznik rzędu n.

Łącząc dwa powyższe twierdzenia, otrzymujemy twierdzenie trzecie:

„Wyznacznik rzędu n, mający m wierszy poziomych (pionowych) takich, że $n-m+1$ wyznaczników częściowych rzędu m, utworzonych z tychże m wierszy poziomych, biorąc z nich $m-1$ wierszy pionowych (poziomych) oznaczonych i jednego z $n-m+1$ pionowych poziomych, (pionowych) pozostałych, są zerami, to i wyznacznik uważany rzędu n jest także zerem.“

Nakoniec podam jeszcze czwarte twierdzenie ogólniejsze:

„Jeżeli mamy układ mn ilości, ustawionych w m wierszach poziomych i n pionowych, i założymy, że m nie większe od n, oraz że istnieje p wierszy poziomych takich, iż z $n-p+1$ wyznaczników rzędu p, utworzonych z tychże p wierszy, —biorąc z nich $p-1$ wierszy pionowych oznaczonych wraz z każdym z $n-p+1$ wierszy pionowych pozostałych—są zerami, to wtedy będzie zerem i każdy z wyznaczników rzędów wyższych od p, utworzonych z uważanych p wierszy poziomych i pozostałych poziomych wszystkich lub w części oraz tyluż wierszy pionowych którychkolwiek.“

Przypuśćmy teraz, że dwa wielomiany A_m i B_n mają jako największy wspólny dzielnik wielomian stopnia s^{go} względem ilości z. Uważając wtedy układ $2n$ tożsamości, spostrzeżemy, że w nich współczynniki $E_{p,r}$ dla p mniejszego od $s+1$, są zerami wszystkie; w przeciwnym bowiem razie pierwsze strony s tożsamości uważanych byłyby podzielne przez dzielnik założony, a drugie strony, jako wielomiany względem z stopni niższych od s, nie byłyby przezeń podzielnemi. Sprzeczność ta dowodzi niemożebności przypuszczenia. Widzimy daléj z tychże s tożsamości, że iloraz najmniejszy wielomianu A_m, to jest iloraz z podzielenia tegoż wielomianu A_m przez dzielnik wspólny największy, będący wielomianem stopnia $m-s$, dzieli wielomiany $D_{m+n-2(p-1)}$ stopnia $m-p$; $p=1,2,\ldots,s$; nie różni się więc chyba czynnikiem, niezależnym od ilości z, od wielomianu $D_{m+n-2(s-1)}$, będącego wielomianem tegoż stopnia. Podobnież iloraz najmniejszy wielomianu B_n nie różni się, chyba czynnikiem niezależnym od ilości z, od wielomianu $C_{m+n-2(s-1)}$.

Widzimy następnie, że tożsamość odpowiadająca p równemu $s+1$:

$$A_m C_{m+n-2s} + B_n D_{m+n-2s} = \mathop{S}_{r=0}^{r=s} E_{s+1,r} z^r$$

pokazuje, że jéj strona druga, jako wielomian stopnia s, podzielny przez założony największy wspólny dzielnik, nie może się różnić od tegoż, chyba czynnikiem niezależnym od ilości z, i że współczynnik $E_{s+1,s}$ jest różnym od zera. Gdyby bowiem był zerem, to albo strona druga tożsamości byłaby wielomianem stopnia niższego od s, a więc przez założony dzielnik niepodzielną, albo byłaby zerem, a wtedy D_{m+n-2s}, C_{m+n-2s} byłyby wielomianami odpowiednio stopni $m-s+1$, $n-s+1$ i dowodziłyby, że dzielniki nie wspólne wielomianom A_m i B_n są stopni niższych odpowiednio od założonych $m-s$, $n-s$; jest to sprzeczność dowodząca niemożebności przypuszczenia.

Opierając się więc na dowiedzionych wyżéj własnościach wyznaczników równych zeru, spostrzegamy, że $1+s$ zastrzeżeniami koniecznemi istnienia dzielnika największego stopnia s, wspólnego dwóm wielomianom A_m i B_n odpowiednio stopni m i n są:

$$0 = E_{s,r};\ r=0,1,2,\ldots,s-1;\ 0 \mid E_{s+1,s}$$

i że dzielnikiem wspólnym największym jest każda strona tożsamości, odpowiadającéj p równemu $s+1$, a ilorazami najmniejszemi odpowiednio wielomianów A_m i B_n przez ich największy wspólny dzielnik— wyrażenia $D_{m+n-2(s-1)}$ i $C_{m+n-2(s-1)}$, oprócz pewnych czynników niezależnych od ilości z.

Zastrzeżenia te są dostatecznemi. Dzielnik bowiem wspólny największy, na mocy tożsamości, odpowiadającéj $p=s$, dzieląc pierwszą a razem i drugą stronę tożsamości, nie może być wielomianem stopnia wyższego od tejże, będącéj wielomianem stopnia s. Tożsamość zaś odpowiadająca $p=s-1$, dowodzi, że dzielniki nie wspólne wielomianom A_m i B_n dzielić muszą odpowiednio $D_{m+n-2(s-1)}$ i $C_{m+n-2(s-1)}$, będące wielomianami odpowiednio stopni $m-s$ i $n-s$, a więc wyższych stopni być nie mogą. Nie można przypuścić, że dzielnik i ilorazy są niższych stopni od s, $m-s$ i $n-s$, gdyż sumy stopnia dzielnika i każdego z ilorazów nie byłyby równemi m i n odpowiednio. Skoro więc nie mogą być ani stopni wyższych od s, $m-s$, $n-s$ ani niższych, są przeto im równemi, a dzielnik i ilorazy nie różnią się odpowiednio od

$$\mathop{S}_{1=0}^{n=s} E_{s+1,r} z^r,\ D_{m+n-2(s-1)},\ C_{m+n-2(s-1)},$$

chyba czynnikami niezależnemi od z.

Tożsamość 2 odpowiadająca $p=n$ rozwiązuje bezpośrednio kwestyą dzielenia wielomianu A_m przez B_n. Gdyż mamy

$$A_m C_{m-n+2} + B_n D_{m-n+2} = \mathop{S}_{r=0}^{r=n-1} E_{n,r} z^r$$

$$C_{m-n+2} = b_n^{m-n+1}$$

a stąd z łatwością otrzymujemy iloraz i resztę.

Przejdźmy teraz do oznaczenia równań, zawierających pierwiastki, wspólne i niewspólne dwóm danym równaniom $A_m=0$ i $B_n=0$.

Ponieważ największy wspólny dzielnik dwóch wielomianów A_m i B_n daje pierwiastki wspólne dwóm równaniom powyższym, a więc warunki konieczne i dostateczne istnienia największego wspólnika dzielnika stopnia s są warunkami istnienia s pierwiastków wspólnych danym równaniom $A_m=0$, i $B_n=0$; jeżeli więc są wypełnione, możemy zająć się oznaczeniem piezwiastków wspólnych i niewspólnych. Największy wspólny dzielnik, o którym mówimy, dany jest przez

$$\overset{r=s}{\underset{r=0}{S}} E_{s+1,r} z^r = 0,$$

a więc to ostatnie równanie daje s pierwiastków wspólnych; a w szczególnym przypadku naszym, dla $s=1, 2, 3$, równaniem, dającém pierwiastki wspólne, jest odpowiednio

$$S_6 = 0,\ S_4 = 0 \text{ lub też } B_3 = 0,$$

pierwiastki zaś niewspólne dane są przez odpowiednie najmniejsze ilorazy a które z tożsamości 2) odpowiadającéj $p=s$ są odpowiednio w ogólności

$$D_{m+n-2(s-1)} = 0, \text{ pierwiastki różne 1-go równania}$$
$$C_{m+n-2(s-1)} = 0, \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{2-go równania}$$

Przechodząc więc do naszego szczególnego przypadku, w razie jeżeli dane równania mają jeden pierwiastek wspólny ($s=1$), będzie

$$D_8 = 0, \ldots 4 \text{ pierw. niewspól. 1-go } A_5 = 0$$
$$C_8 = 0, \ldots 2 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{2-go } B_2 = 0$$

Jeżeli $s=2$, to równaniami temi będą

$$D_6 = 0, \ldots 3 \text{ pierw. niewspólne równ. } B_3 = 0$$
$$C_6 = 0, \ldots 1 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ równ. } B_3 = 0$$

Jeżeli $s=3$, to równanie

$$D_4 \text{ daje 2 pierwiastki równania } A_5 = 0.$$

Warszawa, w kwietniu 1889 roku.

O RYTMICZNYCH OSCYLACYACH MORZA.

PRZEZ

M. P. RUDZKIEGO.

W piątym rozdziale swojéj „Geologii“ Ch. Lyell wypowiada zdanie „morze nie porusza się; tylko lądy wznoszą się i opadają“. — Przeciwko temu twierdzeniu wystąpił w ostatnich czasach E. Suess, twierdząc, że, przeciwnie, kolejne zalewy lądów przez morza, których ślady widzimy we wszystkich formacyach geologicznych, należy przypisywać raczéj oscylacyom wód, nie zaś lądów. Suess bynajmniéj nie odrzuca możliwości oscylacyj samego lądu, ale twierdzi, że obszerne transgresye, np. jurajska i kredowa [1]), a także częste przekładanie słodkowodnych i morskich osadów — należy tłomaczyć przez zmiany w poziomie mórz. Zapatrywania jego są wyłożone w ostatnim rozdziale drugiego tomu dzieła: „Antlitz der Erde“.

W pracy niniejszéj chciałem zbadać, jakie przyczyny i w jakich granicach mogą sprawiać oscylacye poziomu wód. Badanie to jest o tyle ułatwione, że tego rodzaju oscylacye odbywają się w mniéj lub więcéj długich przeciągach czasu, wskutek czego mogą być podciągnięte pod kategoryą zadań o potencyale. Gdyby zaś takie oscylacye były wywoływane przez chwilowe, gwałtowne wstrząśnienia, wtedy musielibyśmy je badać w taki sposób, jak badamy np. fale, wywołane przez trzęsienia ziemi.

Atoli o tych ostatnich wiemy, że, aczkolwiek sprawiają straszne spustoszenia na wybrzeżach, jednak nie mogą wywołać stałéj zmiany poziomu wód: po kilku lub więcéj coraz to słabszych drganiach morze powraca do swego zwykłego stanu.

[1]) Transgresyą nazywa się wylew wód daleko po za zwykłe granice oceanów, t. j. nawet w takich okolicach, które w innych epokach były pospolicie lądem.