Z DZIEDZINY RACHUNKU CAŁKOWEGO,

PRZEZ

M. CIEMNIEWSKIEGO

I. O PEWNYM SPOSOBIE REDUKCYI CAŁEK WIELOKROTNYCH.

Wiadomo, że obliczanie całek wielokrotnych o tyle jest możliwém, o ile dają się one sprowadzać do całki pojedyńczéj. Czynność ta, zwana redukcyą całki wielokrotnéj, najczęściéj daje się uskutecznić za pomocą zamiany zmiennych. Trafnie dobrane nowe zmienne, mające zastąpić pierwotne pod znakiem całkowania, często ułatwiają bardzo redukcyą i obliczanie całki wielokrotnéj. Sposób zamiany zmiennych niżéj przedstawiony odznacza się tém: 1) że może być stosowany do wielkiéj liczby całek; 2) że za pomocą tego sposobu argument funkcyi ogólnie wyrażonéj pod znakiem całkowania daje się wyrazić w jednéj tylko zmiennéj; 3) że całki, do których sposób ten się stosuje, należą do rzędu całek, mających liczne zastosowania praktyczne.

Przedstawimy ten sposób przedewszystkiém na całce podwójnéj, a następnie dopiero zwrócimy się do całek bardziej złożonych.

Niechaj będzie dana całka podwójna:

$$\omega = \iint f(x+y)\,dx\,dy \ldots \tag{1}$$

z warunkami dla granic:

$$\left.\begin{array}{l} x+y \leqq 1 \\ x \geqq 0, \geqq 0 \end{array}\right\} \tag{2}$$

Oznaczając granice z warunków (2), będziemy mieli całkę oznaczoną

$$\omega = \int_0^1\int_0^{1-x} f(x+y)\,dx\,dy \tag{3}$$

Całką tę sprowadzimy do całki pojedynczéj za pomocą podstawień

$$x+y=\xi \quad \text{i} \quad y=\eta, \quad \text{skąd} \quad x=\xi-\eta \tag{4}$$

Zadanie zamiany zmiennych w całce oznaczonéj, jak wiadomo, składa się z trzech częściowych zadań:

1) wprowadzenia nowych zmiennych do funkcyi pod znakiem całkowania; 2) wyrażenia w nowych zmiennych iloczynu $dx\,dy$; 3) określenia granic całkowania przy nowych zmiennych.

Co się tyczy pierwszego punktu, oczywiście

$$f(x+y)=f(\xi)$$

Co do drugiego

$$dx\,dy = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right) d\xi\,d\eta$$
$$= 1 \,.\, d\xi\,d\eta$$

Wreszcie co do trzeciego punktu, wprowadzając nowe zmienne do warunków (2), otrzymujemy

$$\xi \leqq 1, \quad \xi-\eta \geqq 0, \quad \eta \geqq 0 \;;$$

skąd wynika, że

$$\omega = \int_0^1\int_0^{\xi} f(\xi)\,d\xi\,d\eta \tag{5}$$

Lecz czynnik $f(\xi)d\xi$ jest stałym w granicach całkowania względem η; biorąc go przeto za nawias i całkując względem η, sprowadzamy całkę daną do pojedyńczéj

$$\omega = \int_0^1 f(\xi)\,\xi\,d\xi \tag{6}$$

Jeżeli w szczególności

$$f(x)=(x+y)^2$$

to

$$\int_0^1\int_0^{1-x}(x+y)^2\,dx\,dy=\int_0^1\xi^3\,d\xi=\Big/_0^1\frac{\xi^4}{4}=\frac{1}{4}$$

Weźmy teraz pod uwagę całkę bardziej złożoną

$$\omega=\iint f(x^m+y^n)\,dx\,dy$$

z warunkami dla granic

$$x^m+y^n\leqq 1,\quad x\geqq 0\quad y\geqq 0 \tag{8}$$

Przypuszczamy, że liczby m i n są dodatnie. Przy warunkach (8) całka przedstawia się pod postacią

$$\omega=\int_0^1\int_0^{\sqrt[n]{1-x^m}}f(x^m+y^n)\,dx\,dy \tag{9}$$

Wprowadzamy podstawienia

$$x^m+y^n=\xi,\quad y^n=\eta\quad\text{czyli}\quad x=(\xi-\eta)^{1/m},\ y=\eta^{1/n}$$

stąd

$$\frac{\partial x}{\partial\xi}=\frac{1}{m}(\xi-\eta)^{\frac{1}{m}-1},\qquad \frac{\partial x}{\partial\eta}=-\frac{1}{m}(\xi-\eta)^{\frac{1}{m}-1}$$

$$\frac{\partial y}{\partial\xi}=0\qquad,\qquad \frac{\partial y}{\partial\eta}=\frac{1}{n}\eta^{\frac{1}{n}-1}$$

a więc

$$dx\,dy=\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{dx}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)d\xi\,d\eta=\frac{1}{mn}(\xi-\eta)^{\frac{1}{m}-1}\eta^{\frac{1}{n}-1}d\xi\,d\eta$$

Warunki zaś (8) zmieniają się na następujące

$$\xi\leqq 1,\qquad (\xi-\eta)^{1/m}\geqq 0\qquad \eta^{1/n}\geqq 0$$

lub też

$$\xi-\eta\geqq 0,\qquad \eta\geqq 0\qquad \xi\leqq 1$$

skąd

$$0\leqq\xi\leqq 1\qquad\text{i}\qquad 0\leqq\eta\leqq\xi.$$

Przeto

$$\omega=\frac{1}{mn}\int_0^1\int_0^{\xi}f(\xi)(\xi-\eta)^{\frac{1}{m}-1}\eta^{\frac{1}{n}-1}d\xi\,d\eta \tag{10}$$

Otrzymaliśmy całkę postaci prostszéj, aniżeli całka (9), gdyż prościéj wyrażają się granice całkowania, oraz argument funkcyi f, którą można teraz wynieść za znak całkowaniu względem η; będzie zatém

$$\omega=\frac{1}{mn}\int_0^1 f(\xi)\,d\xi\int_0^{\xi}(\xi-\eta)^{\frac{1}{m}-1}\eta^{\frac{1}{n}-1}d\eta$$

Aby zaś wyprowadzić zupełnie zmienną ξ z pod znaku całkowania względem η, a zarazem téj ostatniéj całce nadać granice stałe, wprowadzamy w niéj podstawienie

$$\eta=\xi t,$$

wskutek którego będzie

$$\omega=\frac{1}{mn}\int_0^1 f(\xi)\,\xi^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1}d\xi\int_0^1(1-t)^{\frac{1}{m}}t^{\frac{1}{n}-1}\,dt$$

Całka względem t jest to tak zwana funkcya beta

$$B\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}$$

Ostatecznie więc

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt[n]{1-x^m}}f(x^m+y^n)dxdy=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{mn\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}\int_0^1 f(\xi)\,\xi^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1}\,d\xi \tag{11}$$

Przypuściwszy

$$x=\frac{x_1}{a}\qquad y=\frac{y_1}{b}$$

gdzie a i b są wielkości stałe dodatnie, otrzymamy warunki dla granic

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^m+\left(\frac{y_1}{b}\right)^n\leqq 1\qquad \frac{x_1}{a}\geqq 0\qquad \frac{y_1}{b}\geqq 0$$

daléj

$$dx = \frac{dx_1}{a}, \qquad dy = \frac{dy_1}{b}$$

Skutkiem tych podstawień i zastępując ilości x_1, y_1 pierwotnemi x i y, otrzymujemy

$$\int_0^a\int_0^{b\sqrt[n]{1-\left(\frac{x}{a}\right)^m}} f\left[\left(\frac{x}{a}\right)^m+\left(\frac{y}{b}\right)^n\right] dx\,dy = \frac{ab}{mn}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}\int_0^1 f(\xi)\,\xi^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1}d\xi \qquad (12)$$

Przykład. Za pomocą wzoru (12) możemy obliczyć objętość ósméj części elipsoidy, zawartéj w przestrzeni współrzędnych dodatnich. Równanie téj elipsoidy jest:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Wspomniana część objętości elipsoidy wyraża się całką:

$$v=\iiint dx\,dy\,dz$$

z warunkami dla granic

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqq 1 \qquad x\geqq 0 \qquad y\geqq 0$$

a więc tak:

$$v=\int_0^a\int_0^{b\sqrt[n]{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\int_0^{c\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}} dx\,dy\,dz = c\int_0^a\int_0^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}\,dx\,dy$$

Kładąc we wzorze (12)

$$m=n=2$$

i pamiętając że

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}, \qquad a\Gamma(a)=\Gamma(1+a), \qquad \Gamma(1)=1,$$

otrzymujemy

$$\frac{v}{c}=\frac{ab}{4}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)}\int_0^1\sqrt{1-\xi}\,d\xi=-\frac{\pi ab}{4}\Big/\int_0^1\frac{2(1-\xi)^{3/2}}{3}=\frac{\pi ab}{6}$$

stąd

$$v=\frac{1}{8}V=\frac{\pi abc}{6}$$

a zatém całkowita objętość elipsoidy

$$V={}^4/_3\,\pi\,a\,b\,c$$

Zastosujemy tę metodę zamiany zmiennych do całki wielokrotnéj:

$$\Omega=\iint\ldots\int f(x_1^{m_2}+x_2^{n_3}+\ldots+x_n^{m_n})\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n \qquad (13)$$

z warunkami dla granic

$$x_1^{m_1}+x_2^{m_2}+\ldots+x_n^{m_n}\leqq 1 \text{ i } \begin{cases} x_1\geqq 0\\ x_2\geqq 0\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ x_n\geqq 0\end{cases} \qquad (14)$$

Wprowadzamy podstawienia

$$x_1^{m_1}+x_2^{m_2}+\ldots+x_n^{m_n}=\xi,$$
$$x_2^{m_2}=\xi_2,\ x_3^{m_3}=\xi_3,\ \ldots,\ x_n^{m_n}=\xi_n$$

czyli

$$x_1=(\xi_1-\xi_2-\xi_3-\ldots-\xi_n)^{\frac{1}{m_1}} \qquad \text{i} \qquad x_i=\xi_i^{\frac{1}{m_i}}$$

Warunki (13) przedstawią się tak

$$\xi_1\leqq 1;\quad \xi_1-\xi_2-\xi_3-\ldots-\xi_n\geqq 0;\quad \xi_2\geqq 0;\quad \xi_3\geqq 0;\ \ldots\ \xi_n\geqq 0$$

lub

$$0\leqq\xi_n\leqq\xi_1-\xi_2-\xi_3-\ldots-\xi_{n-1};\ 0\leqq\xi_{n-1}\leqq\xi_1-\xi_2-\ldots-\xi_{n-2};\ldots;\ 0\leqq\xi_2\leqq\xi_1;\ 0\leqq\xi_1\leqq 1$$

Wyznacznik funkcyjny D, będący współczynnikiem iloczynu rożniczek nowych zmiennych pod znakiem całki wielokrotnej, w tym przypadku będzie

$$D=\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\cdot\ldots\frac{\partial x_n}{\partial \xi_n},$$

ponieważ

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}=0.$$

Przytém

$$\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}=\frac{1}{m_1}(\xi_1-\xi_2-\ldots-\xi_n)^{\frac{1}{m_1}-1}$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_i}=\frac{1}{m_i}\xi_i^{\frac{1}{m_i}-1}$$

więc

$$D=\frac{1}{m_1\,m_2\ldots m_n}(\xi_1-\xi_2-\ldots-\xi_n)^{\frac{1}{m_1}-1}\xi_2^{\frac{1}{m_2}-1}\ldots\xi_n^{\frac{1}{m_n}-1}$$

Otrzymujemy przeto

$$\Omega=\frac{1}{m_1\,m_2\ldots m_n}\int_0^1 f(\xi_1)\,d\xi_1\int_0^{\xi_1}\xi_2^{\frac{1}{m_2}-1}\,d\xi_2\ldots\int^{\xi_1-\xi_2-\ldots-\xi_{n-1}}(\xi_1-\xi_2-\ldots-\xi_n)^{\frac{1}{m_1}-1}\,\xi_n^{\frac{1}{m_n}-1}d\xi_n$$

Pod znakiem całkowania względem ξ_n wprowadzamy podstawienie

$$\xi_n=(\xi_1-\xi_2-\ldots-\xi_{n-1})\,t$$

i wyprowadzamy czynniki stałe względem ξ_n za znak całkowania, otrzymujemy wtedy całkę względem ξ_n równą $B\left(\frac{1}{m_1},\frac{1}{m_n}\right)$, którą tu wyprowadzamy przed znak całki i w ten sposób zniżamy o jedność rząd całki wielokrotnéj. Toż działanie powtarzamy z całką odnoszącą się do ξ_{n-1}, wprowadzając podstawienie:

$$\xi_{n-1}=(\xi_1-\xi_2-\ldots-\xi_{n-2})\,t$$

Prowadząc daléj podobne działanie, otrzymujemy ostatecznie

$$\Omega=\frac{1}{m_1\,m_2\ldots m_n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m_1}\right)\Gamma\left(\frac{1}{m_2}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{1}{m_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\ldots+\frac{1}{m_n}\right)}\int_0^1 f(\xi_1)\,\xi_1^{\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\ldots+\frac{1}{m_n}-1}\,d\xi$$

Gdyby warunek dla granic całki Ω wyrażał się w formie $x_1^{m_1}+x_2^{m_2}+\ldots+x_n^{m_n}\leqq r^{\mu}$, to oczywiście granica górna całki w wyrażeniu poprzedzającém byłaby równą r^{μ}.

Wprowadzając w całce (13) podstawienia

$$x_1=\frac{x_1'}{a_1},\quad x_2=\frac{x_2'}{a_2},\ \ldots,\ x_u=\frac{x_n'}{a_n}$$

otrzymujemy wzór na redukcyą nowéj całki

$$\omega=\int_0^{a_1\sqrt[m_2]{-1\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{m_1}}}\cdots\cdots\int_0^{a_n\sqrt[m_n]{1-\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{m_1}\ldots-\left(\frac{x_{n-1}}{a_{n-1}}\right)^{m_n}-1}}f\left[\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{m_1}+\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{m_2}+\ldots+\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{m_n}\right]dx_1\,dx_2\ldots dx_n$$

$$=\frac{a_1\,a_2\ldots a_n}{m_1 m_2\ldots m_n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m_1}\right)\Gamma\left(\frac{1}{m_2}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{1}{m_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\ldots+\frac{1}{m_n}\right)}\int_0^1 f(\xi)\,\xi^{\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\ldots+\frac{1}{m_n}-1}\,d\xi$$

Przykład. Obliczyć moment bezwładności kuli jednorodnéj, któréj środek znajduje się w środku współrzędnych, względem jednéj z osi np. osi z.

Moment bezwładności wyraża się wzorem

$$J=\Sigma\, m\,\delta^2$$

gdzie m oznacza masę elementu kuli, a δ odległość jego od osi Z; summa rozciąga się na całą objętość kuli.

Oznaczając przez ρ gęstość elementu, przez Δv jego objętość, mamy

$$m=\rho\Delta v=\rho\Delta x\Delta y\Delta z$$

$$\delta^2=x^2+y^2$$

stąd

$$J=\lim\sum_x\sum_y\sum_z\rho\,(x^2+y^2)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z=\rho\int\int\int\rho\,(x^2+y^2)\,dxdydz$$

Dla ułatwienia zadania, wyliczymy tylko moment bezwładności ósmej części kuli, zawartéj w przestrzeni współrzędnych dodatnich. Ponieważ wszystkie osiem części znajdują się w jednakowych warunkach względem osi z, otrzymamy w ten sposób ósmą część momentu bezwładności całkowitéj kuli. Warunki dla granic całki $J/8$ będą

$$x^2+y^2+z^2\leqq r^2\qquad x\geqq 0\qquad y\geqq 0\qquad z\geqq 0$$

stąd

$$\frac{J}{8}=\rho\int_0^r\int_0^{\sqrt{r^2-x}}\int_0^{\sqrt{r^2-x^2-y}}(x^2+y^2)\,dxdy\,dz$$

Całkując względem z, będziemy mieli

$$\frac{J}{8}=\rho\int\int^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,(x^2+y^2)\sqrt{r^2-\xi}\,(x^2+y^2)dx\,dy$$

Uważając funkcyą pod znakiem całkowania, jako funkcyą wielkości x^2+y^2, otrzymujemy na zasadzie powyższego

$$\frac{J}{8}=\rho\cdot\frac{1}{4}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)}\int_0^{r^2}\sqrt{r^2-\xi}\,d\xi=\frac{\pi\rho r^5}{15}$$

skąd

$$J=\frac{8}{15}\pi\rho r^5$$

lub też oznaczając przez M całkowitą masę, a przez V całkowitą objętość kuli, mamy

$$J=\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\cdot\rho r^2=\frac{2}{5}V\rho r^2=\frac{2}{5}Mr^2$$

Tę samę metodę podstawień zastosować można do całki Liouville'a

$$\Omega=\iint\ldots\int f(\alpha_1x_1^{p_1}+\alpha_2x_2^{p_2}+\ldots+\alpha_nx_n^{p_n})x_1^{a_1-1}x_2^{a_2-1}\ldots x_n^{a_n-1}dx_1dx_2\ldots dx_n$$

z warunkami dla granic

$$\alpha_1x_1^{p_1}+\alpha_2x_2^{p_2}+\ldots+\alpha_nx_n^{p_n}\leqq h\qquad x_1\geqq 0\qquad x_2\geqq 0\qquad x_n\geqq 0$$

Wszystkie α i p, jakoteż h są to wielkości dodatnie.

Wprowadzając podstawienia

$$\alpha_1x_1^{p_1}+\alpha_2x_2^{p_2}+\ldots+\alpha_nx_n^{p_n}=\xi_1,\quad \alpha_2x_2^{p_2}=\xi_2,\ldots,\alpha_nx_n^{p_n}=\xi_n,$$

otrzymujemy w rezultacie

$$\Omega=\frac{1}{p_1p_2\ldots p_n}\cdot\frac{1}{\alpha_1^{\frac{a_1}{p_1}}\alpha_2^{\frac{a_2}{p_2}}\ldots\alpha_n^{\frac{a_n}{p_n}}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{a_1}{p_1}\right)\Gamma\left(\frac{a_2}{p_2}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{a_n}{p_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{a_1}{p_1}+\frac{a_2}{p_2}+\ldots+\frac{a_n}{p_n}\right)}\int_0^h f(\xi)\xi^{\frac{a_1}{p_1}+\frac{a_2}{p_2}+\ldots+\frac{a_n}{p_n}-1}d\xi$$

---

2. O rozwinięciu całki oznaczonéj na szereg.

Rozwijając na szereg Maclaurina funkcyą pod znakiem całki oznaczonéj i całkując następnie oddzielne wyrazy szeregu, otrzymujemy w rezultacie całkę oznaczoną, wyrażoną za pomocą szeregu nieskończonego.

Niech będzie

$$\omega=\int_a^b f(x)dx;$$

według powyższego otrzymujemy

$$\omega=\sum_{i=0}^{i=\infty}\frac{b^{i+1}-a^{i+1}}{(i+1)!}f^i(0)$$

W przypadku, gdy górna granica $=a$, dolna zaś równa jest zeru, mamy

$$\int_0^a f(x)\,dx=\sum_{i=0}^{i=\infty}\frac{a^{i+1}}{(i+1)!},f^i(0)$$

Wreszcie, gdy górna granica $=0$, dolna zaś $=-a$, będzie

$$\int_{-a}^{+a}f(x)\,dx=2\sum_{i=0}^{i=\infty}\frac{a^{2i+1}}{(2i+1)!},f^{2i}(0)$$

ponieważ wyrazy z pochodnemi rzędu nieparzystego znikają.

W metodzie téj, jak i w innych opartych na rozwijaniu w szereg nieskończony, trzeba mieć na uwadze warunki dotyczące zbieżności i w ogóle możliwości przedstawiania funkcyi za pomocą takich szeregów.

Niech będzie

$$\omega=\int_a^b f(x)dx$$

ω będzie funkcyą zmiennych b i a. Przypuszczamy, że

$$b=\varphi(k,t)$$
$$a=\psi(k,t)$$

gdzie t jest wielkością zmienną, k zaś stałą; całka ω będzie tedy funkcyą zmiennéj t i może być rozwinięta na szereg według potęg ilości t

$$\omega = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{t^i}{i!}\left(\frac{d^i\omega}{dt^i}\right)_{t=0}$$

Pierwsza pochodna funkcyi ω względem t oblicza się w sposób następujący

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial b}\frac{db}{dt} + \frac{\partial\omega}{\partial a}\frac{da}{dt} = f(b)\frac{d\varphi}{dt} - f(a)\frac{d\psi}{dt}$$

Mając pierwszą pochodną, obliczamy łatwo następne, poczém kładąc w tych pochodnych $t=0$, a zamiast t^i podstawiając jego wartość wyrażoną w funkcyi zmiennych a i b, będziemy mieli szereg postaci żądanéj.

Z pomiędzy różnych szeregów, jakie za pomocą tej metody otrzymywać można, wyszczególnimy tylko kilka.

Weźmy pod uwagę, jak poprzednio, całkę oznaczoną w ogólnéj formie

$$\omega = \int_0^b f(x)dx$$

i przypuśćmy że

$$b = k + t$$
$$a = k - t$$

stąd

$$k = \frac{b+a}{2}, \qquad t = \frac{b-a}{2}$$

Na zasadzie powyższego będzie

$$\omega' = \frac{d\omega}{dt} = f(b) + f(a) = f(k+t) + f(k-t), \qquad \omega'_0 = 2f(k)$$

daléj $\quad \omega'' = f'(b) - f'(a) = f'(k+t) - f'(k-t), \qquad \omega_0'' = 0$

„ $\quad \omega''' = f''(b) + f''(a) = f''(k+t) + f''(k-t), \qquad \omega_0''' = 2f''(k)$

. . . . . .

Widzimy więc, że w ogóle pochodne funkcyi ω rzędu parzystego znikają dla $t=0$, pochodne zaś rzędu nieparzystego wyrażają się w formie

$$\omega_0^{(2i+1)} = 2f^{2i}(k)$$

Z tego powodu szereg nasz przedstawia się w uważanym przypadku tak:

$$\omega = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!}\omega_0^{(2i+1)} = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{2t^{2i+1}}{(2i+1)!}f^{2i}(k)$$

a stąd:

$$\omega = \int_0^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{(b-a)^{2i+1}}{2^{2i}.(2i+1)!}f^{2i}\left(\frac{b+a}{2}\right) \qquad \text{(m)}$$

Podstawiając zero zamiast a i a zamiast b, mamy

$$\int_0^a f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{a^{2i+1}}{2^{2i}.(2i+1)!}f^{2i}\left(\frac{a}{2}\right)$$

Wreszcie, zamiast b podstawiając a, a w miejsce a podstawiając $-a$, otrzymamy

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 2\sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{a^{2i+1}}{(2i+1)!}f^{2i}(0)$$

Za pomocą téjże metody możemy wyrazić całkę oznaczoną przez szereg ze znakami naprzemian idącemi. Przypuszczamy w tym celu, że

$$b = a + t \qquad a = a$$

to

$$\omega' = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial b}\frac{db}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial b} = f(b) = f(a+t) \quad , \quad \omega_0' = f(a)$$

$$\omega'' = f'(a+t) \quad , \quad \omega_0'' = f'(a)$$

i t. d.

i w ogóle

$$\omega^{(i)} = f^{i-1}(a),$$

Stąd na zasadzie powyższego

$$\omega = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{t^i}{i!}f^{i-1}(a)$$

lub wreszcie

$$\omega = \int_0^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{(b-a)^i}{i!}f^{i-1}(a).$$

Niech teraz w szczególnym przypadku będzie $b=0$, to

$$\int_a^0 f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx = \sum_{i=1}^{i=\infty} (-1)^i \frac{a^i}{i!} f^{i-1}(a)$$

lub też

$$\int_0^a f(x)dx = \sum_{i=1}^{i=\infty} (-1)^{i-1} \frac{a^i}{i!} f^{i-1}(a)$$

Znaki w tym szeregu idą naprzemian.

Całka $\omega = \int_0^a f(x)dx$, jak widzimy z powyższego, daje się przedstawić w trojaki sposób

$$\omega = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{a^i}{i!} f^{i-1}(0)$$

$$\omega = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{a^{2i+1}}{2^{2i}(2i+1)!} f^{2i}\left(\frac{a}{2}\right)$$

$$\omega = \sum_{i=1}^{i=\infty} (-1)^{i-1} \frac{a^i}{i!} f^{i-1}(a)$$

Przykład 1.

$$\omega = \int_{-1}^{+1} x e^x \, dx$$

tu $f(x) = xe^x$; $f'(x) = e^x(x+1)$; $f''(x) = e^x(x+2)$; ... $f^{2i}(x) = e^x(x+2i)$,

$$f^{2i}(0) = 2i.$$

Stosując tu wzór (m) mamy:

$$\omega = 2 \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{2i}{(2i+1)!} = 4 \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{i}{(2i+1)!} = 4S$$

gdzie

$$S = \frac{1}{1.2.3} + \frac{2}{1.2.3.4.5} + \frac{3}{1.2.3.4.5.6.7} + \dots;$$

z drugiéj strony

$$\omega = \int_{-1}^{+1} xe^x dx = \Big/_{-t}^{+1} (xe^x - e^x) = \frac{2}{e}$$

stąd

$$S = \frac{1}{2e}$$

Znajdujemy przeto związek między szeregiem dla liczby e i szeregiem S, odznaczającym się zbieżnością w wysokim stopniu, gdyż stosunek $\frac{u_i+1}{u_i}$ dwu po sobie idących wyrazów.

$$\frac{u_i+1}{u_i} = \frac{i+1}{(2i+3)!} : \frac{i}{(2i+1)!} = \frac{i+1}{i(2i+3)(2i+2)} = \frac{1}{2i(2i+3)}$$

szybko maleje w miarę jak i rośnie. Już, gdy $i=1$, mamy

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{10}$$

gdy przeto w ogóle $\frac{u_i+1}{u_i} < {}^1/_{10} < 1$, szereg jest zbieżny i, jak widzimy, wyrazy jego szybko maleją.

Przykład 2.

W wyrażeniu ogólném całki oznaczonéj wprowadzamy oznaczenia

$$b = \mu + \nu \quad \text{i} \quad a = \mu - \nu,$$

wtedy wzór (m) przedstawi się w sposób następujący

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\mu-\nu}^{\mu+\nu} f(x)\,dx = 2 \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{\nu^{2i+1}}{(2i+1)!} f^{2i}(\mu)$$

Na zasadzie tego wzoru rozwijamy całkę na szereg:

$$\omega = \int_{\mu-\nu}^{\mu+\nu} xe^x dx = 2 \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{\nu^{2i+1}}{(2i+1)!} e^\mu (\mu + 2i) = 2e^\mu \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{\nu^{2i+1}(\mu+2i)}{(2i+1)!}$$

Z drugiéj strony

$$\omega = \Big/_{\mu-\nu}^{\mu+\nu} e^x(x-1) = e^{\mu+\nu}(\mu+\nu-1) - e^{\mu-\nu}(\mu-\nu-1)$$

skąd

$$\frac{e^{\mu-\nu}(\mu+\nu-1) - e^{\mu-\nu}(\mu-\nu-1)}{2e^\mu} = \frac{e^\nu(\mu+\nu-1) - e^{-\nu}(\mu-\nu-1(}{2e^\mu}$$

$$= \frac{\nu\mu}{1} + \frac{\nu^3(\mu+2)}{1.2.3} + \frac{\nu^5(\mu+4)}{1.2.3.4.5} + \frac{\nu^7(\mu+6)}{1.2.3.4.5.6.7} + \dots$$

Przypuszczamy wreszcie, że $\nu=1$, wtedy

$$\frac{\mu e^2-\mu+2}{2e}=\frac{\mu}{1}+\frac{\mu+2}{1.2.3}+\frac{\mu+4}{1.2.3.4.5}+\frac{\mu+6}{1.2.3.4.5.6.7}+\ldots$$

Ażeby zbadać warunki zbieżności szeregu po drugiéj stronie znaku równości, bierzemy pod uwagę stosunek dwu po sobie idących wyrazów

$$\frac{u_{i+1}}{u_i}=\frac{\mu+2i+2}{(2i+3)!}:\frac{\mu+2i}{(2i+1)!}=\frac{\mu+2i+2}{\mu+2i}\cdot\frac{1}{(2i+2)(2i+3)}$$

$$=\left(1+\frac{2}{\mu+2i}\right)\cdot\frac{1}{(2i+2)(2i+3)}$$

Stosunek ten zmniejsza się w miarę wzrastania i. Gdy $i=0$, $\frac{u_1}{u_0}=\left(1+\frac{2}{\mu}\right)\cdot\frac{1}{6}$

Oczywiście $\frac{u_1}{u_0}<1$ wtedy, gdy

$$1+\frac{2}{\mu}<6 \quad \text{czyli} \quad \mu>\frac{2}{5}.$$

Jeżeli zaś $i=1$, to $\frac{u_2}{u_1}=\left(1+\frac{2}{\mu+2}\right)\cdot\frac{1}{20}$ i ten ostatni stosunek mniejszy jest od jedności, gdy $\mu>-\frac{36}{19}$. Łatwo przekonać się przeto, że szereg jest zbieżnym i wyrazy jego szybko maleją dla dodatnich wartości ilości μ. W razie μ ujemnego, pierwsze wyrazy szeregu będą ujemne, dalsze zaś dodatnie, poczynając od $2i$, większego od wartości liczebnéj ilości μ.

O PRĘDKOŚCI DZIAŁANIA CHEMICZNEGO POMIĘDZY GLINEM METALICZNYM I ŁUGAMI ALKALICZNEMI

PRZEZ

J. J. BOGUSKIEGO i J. ZALESKIEGO.

Badania nad przytoczonym w tytule przedmiotem, rozpoczęte przez jednego z nas jeszcze w r. 1886 [1]), prowadziliśmy w dalszym ciągu w roku 1889 w Pracowni Fizycznéj Muzeum Przemysłu i Rolnictwa w Warszawie. Metody, stosowane w celu otrzymania prędkości reakcyi, jako funkcyi temperatury i stężenia ługów alkalicznych, były bardzo rozmaite i różniły się zarówno od metody, za pomocą któréj jeden z nas badał prędkość rozpuszczania się marmuru w kwasach [2]), jak i od metod stosowanych przez W. Springa w tymże samym celu [3]). Prędkość reakcyi wyznaczyliśmy wprawdzie z ilości wydziejącego się wodoru, ale samo zbieranie i przechowywanie gazu musiało w ciągu badania ulegać licznym zmianom, ze względu na nastręczające się w ciągu badań trudności.

Szczegółowy opis metody badań przyjętéj ostatecznie, równie jak i otrzymane dane mamy zamiar ogłosić na innem miejscu — tu więc ograniczamy się na przytoczeniu głównych tylko wyników:

1°) Glin handlowy (francuski i niemiecki) w blachach i drutach rozpuszcza się w ługach alkalicznych mniej prawidłowo, aniżeli marmur (Boguski) lub cynk (Spring), wskutek czego do reakcyj, w których glin przyjmuje udział, nie można stosować wzoru

---

[1]) Posiedzenie komissyi stałéj I-éj Towarzystwa Ogrodniczego, d. 6 października.

[2]) Patrz Kosmos I tom p. 459. r. 1876.

[3]) Annales de Chimie et de Physique, 3-e Série t. XIII n. 3. 1887. 3-e Série t. XIV n. 12. 1887.