

wartości funkcji przy pomocy funkcji tworzących; lecz „prawo najwyższe“ oprócz tej kwestii, pozwala podjąć zadanie daleko donioślejsze: funkcja $F(x)$ nie jest daną, lecz ma być znalezioną na podstawie warunków danego zagadnienia. Odpowiednio do tych warunków, dobierają się funkcje tworzące Ω i za pomocą nich, na podstawie „prawa najwyższego“, *buduje się* funkcja sznkana. Metoda taka służy już nietylko do oznaczenia wartości ale i do *określenia natury* badanej funkcji. Pomysł i wykonanie tej metody godnymi są poznania i dla tego zajmujemy się nią w dalszym ciągu niniejszego studium.

WŁASNOŚCI SZCZEGÓLNYCH TRÓJEK PUNKTÓW TRÓJKĄTA.

PRZEZ

S. KĘPIŃSKIEGO.

W ostatnich czasach wiele prac poświęcono roztrząsaniu własności punktów trójkąta, na które przedtém nie zwracano uwagi. Pierwszą z całej tej grupy własności szczególnych punktów trójkąta zaznaczył w „*Eléments d'analyse géométrique et d'analyse algébrique*“, 1809, Szymon Lhulier, tyle zasłużony autor podręczników matematycznych dla naszych szkół, ogłoszonych przez Komisję Edukacyjną. W tej pracy Lhulier zastanawia się nad takim punktem trójkąta i czworoscianu, którego suma kwadratów odległości odpowiednio od boków trójkąta lub od ścian czworoscianu ma wartość najmniejszą. On również zauważył, że prosta, łącząca ten punkt trójkąta z wierzchołkiem trójkąta, dzieli bok przeciwległy na odcinki, proporcjonalne względem kwadratów boków przyległych. W r. 1852 Catalan dowiódł (w dziele: *Théorèmes et Problèmes de géométrie élémentaire*, par H. Ch. de la Frémoire), że ów punkt trójkąta danego jest środkiem ciężkości trójkąta, którego wierzchołki są spódkami prostopadłych, spuszczonej zeń na boki trójkąta danego, jakoteż, że odległości owego punktu od jego boków są względem tych boków proporcjonalne. Wcześniej już zauważył Grebe (*Archiv von Grunert*, t. IX, 1847), że gdy na bokach trójkąta, czy to wewnątrz, czy też zewnątrz wystawimy kwadraty, to środek podobieństwa trójkątów danego i utworzonego przez boki kwadratów, równoległe do boków trójkąta danego, jest takim punktem, iż jego odległości od boków są względem nich proporcjonalne. Mathieu, Schlömilch i inni zauważyli inne własności, które, jak się później okazało, są związane z owym punktem szczególnym. Zaś w r. 1873, na kon-

gresie w Lyonie towarzystwa l'Association française pour l'avancement des sciences, Lemoine przedstawił doniosłe studium, roztrząsające już całą grupę własności tego punktu. Ta praca wywołała cały szereg rozpraw nad tą kwestią, głównie Neuberga, Brocarda, d'Ocagne'a, Tarry, Tuckera, jako też tegoż Lemoine'a¹⁾, pomieszczonych po większej części w *Nouv. ann. de math.*, *Mathesis* i protokołach posiedzeń wspomnianego towarzystwa. Z tych prac na szczególniejszą zasługują wzmiankę rozprawy Brocarda, przedstawione na zjazdach w Algierze r. 1881 i w Rouen r. 1883, w których on roztrząsa własności dwu punktów, zauważonych już przezeń w r. 1875 (*Nouv. Ann.*; *Nouv. Correspondance*), takich, iż proste, przechodzące przez nie i przez wierzchołki trójkąta, tworzą z jego bokami odpowiednie kąty równe. Dalsze badania wykryły związek tych punktów z owym poprzednim punktem trójkąta, jakoteż wykazały, że te dwa punkty były już w r. 1849 mimochodem zauważone²⁾ przez Clarke'a (*Théoremes et Problèmes de trigonométrie*). Ponieważ jednak głównie prace Lemoine'a i Brocarda wywołały gruntowne badania własności tych punktów, przeto obecnie, zgodnie z propozycją Neuberga (*Nouv. Corresp.*, t. I, 1874), noszą one nazwę, pierwszy punktu Lemoine'a, drugie dwa punktów Brocarda. Lemoine również pierwszy uogólnił badania nad temi punktami, szukając dwu punktów, do którychby się dochodziło w taki sposób z punktu dowolnego na płaszczyźnie trójkąta danego, w jaki z punktu Lemoine'a dojść można do punktów Brocarda. Okazało się, że proste, poprowadzone przez punkt dowolny i wierzchołki trójkąta, wyznaczają na przeciwległych jego bokach punkty, które, połączone prostymi z punktami przecięcia się prostej dowolnej z bokami trójkąta, wyznaczają na innych jego bokach sześć punktów takich, iż proste, łączące je z przeciwległymi wierzchołkami trójkąta, przecinają się po trzy w dwu punktach; te właśnie dwa punkty i ów punkt dowolny przedstawiają trójkę punktów, której szczególnym przypadkiem jest trójka punktów, utworzona przez punkty Brocarda i punkt Lemoine'a. Własności tych ogólniejszych trójek punktów trójkąta są przedmiotem prac najnowszych Lemoine'a, a Neuberg to zadanie jeszcze uogólnił dla czworoboku.

Wyłożył systematycznie najważniejsze tak ogólnych tych trójek punktów, jak i szczególnej trójki punktów Lemoine'a i Brocarda, jest zadaniem niniejszej pracy, napisanej wskutek ogłoszenia przez uniwersytet Jagielloński na ten temat konkursu z fundacyi Juliana Bayera. Przygotowaniem do tej pracy były dla mnie zadania szczególne z tego zakresu, jakie opracowywałem w seminarium matematycznym p. prof. M. A. Baranie-

¹⁾ W rozprawie, pomieszczonej w VI t. czasopisma „Mathesis” Lemoine podaje wiadomości historyczne i bibliograficzne prac do r. 1886, odnoszących się do tej kwestyi. Z tej pracy czerpię przytoczone tu wzmianki historyczne.

²⁾ Porównaj niżej ust. 11-ty § II.

ckiego, który mi do napisania tej rozprawy zachęcił i nadto mi przy ostatecznej jej redakcyi swych rad udzielał.

Nie mogąc w systematycznym wykładzie uwzględnić historycznego rozwoju kwestyi, której niniejsze studium jest poświęcone, uznałem, iż najwzględniej i najkorzystniej da się ona przedstawić, gdy się ją postawi najogólniej, t. j., gdy się rzecz rozpocznie od roztrząsania własności takich ogólnych trójek punktów trójkąta; temu poświęciłem § I tej pracy. W § II zajmuję się wysłowieniem tychże własności dla szczególnej trójki punktów, t. j. punktów Lemoine'a i Brocard'a, jakoteż szczegółowszém roztrząsaniem ich w tym przypadku. Nakoniec w § III wyprowadzam te jeszcze osobliwe własności punktów Lemoine'a i Brocard'a, które nie są szczególnym przypadkiem własności, uzasadnionych w § I.

§ 1.

1. Na płaszczyźnie trójkąta ABC (fig. 1) weźmy jakikolwiek punkt K .

Ten trójkąt nadal uważać będziemy za trójkąt odniesienia współrzędnych jednorodnych. Współrzędne takie tego obranego punktu K stale oznaczać będziemy $\xi : \eta : \zeta$.

Punkty przecięcia się prostych AK, BK, CK z bokami przeciwległymi trójkąta ABC , które nazwijmy K_a, K_b, K_c , będą odpowiednio $0 : \eta : \zeta$; $\xi : 0 : \zeta$; $\xi : \eta : 0$.

Trójkąt $K_a K_b K_c$ posiada oczywiście z trójkątem ABC jako wspólny środek homologii punkt K . Wiadomo jednak, że trójkąty mające wspólny środek homologii, mają także wspólną oś homologii. Aby znaleźć jej równanie, zważmy, że równanie prostej $K_a K_b$ jest

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & \eta & \zeta \\ \xi & 0 & \zeta \end{vmatrix} = 0, \text{ czyli } \frac{x}{\xi} + \frac{y}{\eta} - \frac{z}{\zeta} = 0;$$

równanie więc punktu przecięcia się prostej $K_a K_b$ z bokiem AB (t. j. z prostą $z = 0$) jest

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ 1 & 1 & -1 \\ \xi & \eta & -\zeta \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ czyli } u\xi - v\eta = 0;$$

podobnie równanie punktu przecięcia się prostych $K_a K_c$ i AC jest

$$u\xi - w\zeta = 0;$$

równanie zatem prostej, przechodzącej przez owe dwa punkty, t. j. szukaną oś homologii trójkątów ABC i $K_a K_b K_c$, jest

$$\frac{x}{\xi} + \frac{y}{\eta} + \frac{z}{\zeta} = 0 \quad (1)$$

2. Weźmy prostą dowolną LL_1 , której równaniem niech będzie

$$Mx + Ny + Pz = 0; \quad (2)$$

punkty przecięcia się jej z bokami trójkąta ABC nazwijmy A_s, B_s, C_s . Równanie punktu przecięcia się tej prostej (2) z bokiem BC ($x=0$) jest

$$vP - wN = 0, \text{ czyli } \frac{v}{N} - \frac{w}{P} = 0;$$

współrzędne zatem tego punktu są $0: \frac{1}{N} : -\frac{1}{P}$. Odpowiednio znajdziemy współrzędne punktu B_s , $-\frac{1}{M}: 0: \frac{1}{P}$ i punktu C_s , $\frac{1}{M}: -\frac{1}{N}: 0$.

Oznaczmy punkty przecięcia się prostej BC z prostymi $K_s B_s$ i $K_s C_s$ odpowiednio przez λ i λ' , punkty przecięcia się prostej CA z prostymi $K_s C_s$ i $K_s A_s$ odpowiednio przez μ i μ' , zaś punkty przecięcia się prostej AB z prostymi $K_s A_s$ i $K_s B_s$ przez ν i ν' . Aby znaleźć współrzędne tych punktów, zważmy, że równanie prostej $K_s B_s$, łączącej punkty K_s ($\xi: \eta: 0$) i B_s ($-\frac{1}{M}: 0: \frac{1}{P}$) jest $x\frac{\eta}{P} - y\frac{\xi}{P} + z\frac{\eta}{M} = 0$, równanie więc punktu λ przecięcia się tej prostej i boku BC ($x=0$) jest

$$v\frac{\eta}{M} + w\frac{\xi}{P} = 0, \text{ czyli } v\eta P + w\xi M = 0$$

tak, iż stosunki współrzędnych tego punktu λ są $0: \eta P: \xi M$; punkty zaś μ i ν będą wyznaczone odpowiednio przez stosunki $\eta N: 0: \zeta M$ i $\xi N: \zeta P: 0$.

Łącząc te punkty z przeciwległymi wierzchołkami trójkąta, otrzymamy proste $\Delta\lambda, \Delta\mu, \Delta\nu$, których równania są odpowiednio

$$-y\xi M + z\eta P = 0, \quad x\zeta M - z\eta N = 0, \quad -x\zeta P + y\xi N = 0.$$

Wyznacznik utworzony przez współczynniki tych równań

$$\begin{vmatrix} 0 & -\xi M & \eta P \\ \zeta M & 0 & -\eta N \\ \zeta P & -\xi N & 0 \end{vmatrix} = \xi\eta\zeta \begin{vmatrix} 0 & -M & P \\ M & 0 & -N \\ P & -N & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Zatem te trzy proste $\Delta\lambda, \Delta\mu, \Delta\nu$ przecinają się w jednym punkcie. Ten punkt stale nazywać będziemy ω . Równaniem jego, jako punktu przecięcia się któ-

rychkolwiek dwu z owych trzech prostych, jest $u\frac{N}{\zeta} + v\frac{P}{\xi} + w\frac{M}{\eta} = 0$, a więc jego współrzędnymi $\frac{N}{\zeta}: \frac{P}{\xi}: \frac{M}{\eta}$.

Łącząc zaś pozostałe trzy punkty λ', μ', ν' , wyznaczone odpowiednio przez $0: \xi M: \zeta N$; $\xi P: 0: \eta N$; $\zeta P: \eta M: 0$, prostymi z przeciwległymi wierzchołkami trójkąta, otrzymamy trzy proste przecinające się w jednym punkcie, który nadal nazywać będziemy ω' . Jego współrzędne są $\frac{P}{\eta}: \frac{M}{\zeta}: \frac{N}{\xi}$.

Te dwa punkty ω i ω' oraz punkt K przedstawiają trójkę punktów, której własności bliżej tu rozpatrzmy.

3. Równanie prostej łączącej dwa te punkty ω i ω' jest

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{N}{\zeta} & \frac{P}{\xi} & \frac{M}{\eta} \\ \frac{P}{\eta} & \frac{M}{\zeta} & \frac{N}{\xi} \end{vmatrix} = 0, \text{ czyli}$$

$$x\left(\frac{NP}{\xi^2} - \frac{M^2}{\eta^2}\right) + y\left(\frac{MP}{\eta^2} - \frac{N^2}{\xi^2}\right) + z\left(\frac{MN}{\zeta^2} - \frac{P^2}{\eta\xi}\right) = 0, \text{ czyli}$$

$$\frac{M^2\xi^2 - NP\eta\zeta}{\xi}x + \frac{N^2\eta^2 - MP\xi\zeta}{\eta}y + \frac{P^2\zeta^2 - MN\xi\eta}{\zeta}z = 0,$$

albo, gdy nazwiemy dla krótkości $M^2\xi^2 - NP\eta\zeta = M_1$, $N^2\eta^2 - MP\xi\zeta = N_1$, $P^2\zeta^2 - MN\xi\eta = P_1$,

$$\frac{M_1}{\xi}x + \frac{N_1}{\eta}y + \frac{P_1}{\zeta}z = 0. \quad (3)$$

Wyznacznik utworzony przez współczynniki równań (1), (2), (3)

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\xi} & \frac{1}{\eta} & \frac{1}{\zeta} \\ M & N & P \\ \frac{M^2\xi^2 - NP\eta\zeta}{\xi} & \frac{N^2\eta^2 - MP\xi\zeta}{\eta} & \frac{P^2\zeta^2 - MN\xi\eta}{\zeta} \end{vmatrix} = 0,$$

zatem oś homologii trójkątów ABC i $K_s K_s K_s$, prosta LL_1 i prosta $\omega\omega'$ przecinają się w jednym punkcie; nazwijmy go Q . Współrzędne tego punktu są $\xi(N\eta - P\zeta): \eta(P\zeta - M\xi): \zeta(M\xi - N\eta)$.

4. Sześć punktów $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu'$, które nam służyły przy wyznaczaniu punktów ω, ω' , leżą na jednym przecięciu stożkowym. Jakoż, jeżeli w ogólnym równaniu krzywych stopnia 2-go,

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx = 0, \quad (A)$$

podstawimy kolejno współrzędne pierwszych pięciu z tych punktów (us. 2) i z tych pięciu równości i wypisanego równania (A) wyrugujemy stosunki współczynników $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{31}$, to, po opuszczeniu czynnika wspólnego $NP\xi^2\eta(\eta^2N^2 - \xi\xi MP)(M^2\xi^2 - \eta\xi NP)$, otrzymamy równanie

$$MNP(M\eta\xi x^2 + N\xi^2y^2 + P\xi\eta z^2) - [NP(M^2\xi^2 + NP\eta\xi)zy + MP(N^2\eta^2 + MP\xi\xi)xz + MN(P^2\xi^2 + MN\xi\eta)xy] = 0,$$

które możemy napisać w postaci

$$MNP \sum M\eta\xi x^2 - \sum NP(M^2\xi^2 + NP\eta\xi)zy = 0, \quad (4)$$

jeżeli znaki sumy odnoszą się do składników, otrzymywanych z wypisanego wskutek zastąpienia wszystkich weń wchodzących elementów przez odpowiednie w porządku kołowym. Gdy zaś w to równanie zamiast współrzędnych bieżących $x : y : z$ podstawimy współrzędne punktu ν t. j. $\xi P : \eta M : 0$, otrzymamy tożsamość.

5. Przez punkty ω i ω' poprowadźmy krzywą stopnia 2-go, opisaną na trójkącie ABC . Ponieważ równanie ogólne krzywej stopnia 2-go, opisaną na trójkącie odniesienia, ma kształt

$$\frac{m_1}{x} + \frac{m_2}{y} + \frac{m_3}{z} = 0 \quad (B)$$

współrzędne zaś punktów ω i ω' zadość im czynią, przeto z powyższego równania i z równości $\frac{m_1\xi}{N} + \frac{m_2\xi}{P} + \frac{m_3\eta}{M} = 0$, $\frac{m_1\eta}{P} + \frac{m_2\xi}{M} + \frac{m_3\xi}{N} = 0$ otrzymamy jako równanie krzywej szukaną

$$\left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \\ \frac{\xi}{N} & \frac{\xi}{P} & \frac{\eta}{M} \\ \frac{\eta}{P} & \frac{\xi}{M} & \frac{\xi}{N} \end{array} \right| = 0,$$

czyli

$$\frac{M_1}{Mx} + \frac{N_1}{Ny} + \frac{P_1}{Pz} = 0, \quad (5)$$

gdzie M_1, N_1, P_1 mają teżsame znaczenia, co w ust. 3-cim.

W szczególnym przypadku, kiedy istnieje równość $M_1 = 0$, t. j. $M^2\xi^2 - NP\eta\xi = 0$, czyli ogólniej, kiedy punkt K leży na krzywej stopnia drugiego

$$M^2x^2 - NPyz = 0, \quad (6)$$

równanie nasze (5) stopnia 2-go sprowadza się do równania

$$x \left(\frac{N_1}{Ny} + \frac{P_1}{Pz} \right) = 0,$$

przedstawiającego dwie proste, z których jedna jest bokiem BC ($x=0$), druga przechodzi przez przeciwległy temu bokowi wierzchołek A . Powyższe zaś równanie (6) tak przy $y=0$ jak i przy $z=0$ wyznacza dwie wartości sobie równe $x=0$, a zatem do krzywej (6) są styczne boki AB i AC w wierzchołkach B i C . Nadto widocznie ta krzywa (6) przechodzi przez punkt $x:y:z = \frac{1}{M} : \frac{1}{N} : \frac{1}{P}$, który stale nadal oznaczać będziemy przez E .

Do podobnych spostrzeżeń doszlibyśmy w przypadkach, kiedyby albo $N_1=0$, albo $P_1=0$, t. j. kiedyby punkt K znajdował się albo na krzywej

$$N^2y^2 - MPxz = 0, \quad (6')$$

albo też na krzywej

$$P^2z^2 - MNxy = 0. \quad (6'')$$

Wszystkie te krzywe (6), (6'), (6'') przechodzą przez punkt E ; do nich są styczne po dwa boki trójkąta odniesienia w punktach przecięcia się ich z pozostałym; jeżeli zaś na którejkolwiek z tych krzywych leży punkt K , to przecięcie stożkowe (5), opisane na trójkącie odniesienia i przechodzące przez punkty ω i ω' staje się dwiema prostymi, z których jedna jest bokiem trójkąta, druga prostą przechodzącą przez tenż bokowi przeciwległy wierzchołek.

6. Przypuśćmy, że, przy stałym położeniu raz poprowadzonej prostej LL_1 , punkt K zmienia swoje położenie. Wówczas punkt K_a poruszać się będzie po boku BC , zaś proste B_bK_a , tworzące pęk promieni o wierzchołku B_b , wyznaczą na boku AB szereg punktów μ . Ten szereg i szereg punktów ν na boku AC , wyznaczonych przez proste C_cK_a , są jednokreślne. Proste, łączące odpowiednie punkty tych szeregów, obwodzi przecięcie stożkowe, do którego są styczne ich podstawy t. j. AB i AC . Punktom styczności tych podstaw do owej krzywej odpowiada punkt ich przecięcia się, t. j. wierzchołek A . Zważmy, że gdy punkt K , zmieniając swe położenie, znajdzie się na boku AC , czyli gdy punkt K_a zejdzie się z punktem C , to punkt μ znajdzie się w punkcie B , zaś ν w punkcie A ; a więc punktowi A szeregu ν odpowiada punkt B szeregu μ ; gdy zaś punkt K będzie na prostej AB , czyli K_a w punkcie B , punkt μ przypadnie w punkcie A , a punkt ν w punkcie C . Punktowi zatem A przecięcia się podstaw szeregów AB i AC odpowiada w jednym szeregu punkt B , w drugim zaś punkt C ; a więc podstawy owe szeregów, t. j. boki trójkąta, są styczne do krzywej w wierzchołkach B i C . Nadto, gdy punkt K znajdzie się na prostej AA_a , a więc wtedy punkt K_a w punkcie A_a , to punkt μ będzie

punktem B , zaś ν punktem C , zatem prosta B_0C_0 czyli LL_1 jest jednym z promieni tego pęku 2-go rzędu, t. j. jest styczną do naszej krzywej.

Na mocy tego możemy powiedzieć: gdy punkt K zmienia swe położenie, zaś prosta LL_1 pozostaje niezmienną, proste μ, ν obwodzą przecięcie stożkowe, do którego są styczne owa prosta LL_1 i boki trójkąta AB i AC ; te ostatnie w wierzchołkach odpowiednio B i C .

Na zasadzie tych własności łatwym sposobem otrzymać możemy równanie tego przecięcia stożkowego. Jeżeli do krzywej (A) (ust. 4) są styczne boki AB i AC trójkąta odniesienia w wierzchołkach B i C , to zachodzą związki $a_{12}^2 = a_{11}a_{22} = 0$, $a_{13}^2 = a_{11}a_{33} = 0$; równanie więc jej redukuje się do $a_{11}x^2 + 2a_{23}yz = 0$. Z warunku jednak, że do tej krzywej jest styczna prosta LL_1 , t. j. prosta (2), mamy $a_{11} = -\frac{2M^2}{NP}a_{23}$, wskutek czego równanie naszej krzywej jest

$$M^2x^2 - 4NPyz = 0. \quad (7)$$

Znajdziemy współrzędne środka krzywej (7). Środek krzywej stopnia 2-go jest, jak wiemy, biegunem prostej w nieskończoności względem téjże krzywej. Równanie biegunowej punktu $x':y':z'$ względem przecięcia stożkowego przedstawionego przez ogólne równanie (A) (ust. 4) jest

$$x f_1(x', y', z') + y f_2(x', y', z') + z f_3(x', y', z') = 0, \quad (C)$$

gdzie f_1, f_2, f_3 oznaczają połowy pochodnych cząstkowych wielomianu lewej strony równania (A) względem x, y, z . Ponieważ tu $f_1 = M^2x'$, $f_2 = -2NPz'$, $f_3 = -2NPz'$, przeto równanie biegunowej punktu $x':y':z'$ względem krzywej (7) jest

$$-M^2x'x + 2NPz'y + 2NPz'z = 0.$$

Gdy długości boków BC, CA, AB trójkąta odniesienia ABC nazwiemy odpowiednio a, b, c , to $ax + by + cz = 0$ przedstawia prostą w nieskończoności. Z równaniem tém równanie poprzedzające będzie identyczne, gdy $\frac{M^2x'}{a} = -\frac{2NPz'}{b}$

$$= -\frac{2NPz'}{c}, \text{ czyli } -\frac{M^2x'}{2NP a} = \frac{z'}{b} = \frac{y'}{c}. \text{ A więc współrzędne środka są } x':y':z' \\ = -\frac{2NP a}{M^2} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}. \text{ Stąd wynika, że środek krzywej (7) leży na prostej } y:z \\ = \frac{1}{b} : \frac{1}{c}, \text{ łączącej środek boku } BC \text{ z przeciwległym mu wierzchołkiem, czyli na}$$

prostej, łączącej punkt ciężkości trójkąta ABC $\left(\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}\right)$ z wierzchołkiem A .

Tak samo postępując znajdziemy, że do obu krzywych

$$\begin{aligned} N^2y^2 - 4MPxz &= 0 \\ P^2z^2 - 4MNxy &= 0, \end{aligned} \quad (7'')$$

wyznaczonych przez szeregi odpowiednio ν i λ' , λ i μ' , jest styczna prosta LL_1 , zaś do pierwszej są styczne boki AB i AC w punktach odpowiednio A i B , i że nadto środki tych krzywych leżą na prostych, łączących środki boków odpowiednio CA i AB z przeciwległymi wierzchołkami, t. j. na prostych łączących punkt ciężkości trójkąta ABC z jego wierzchołkami, odpowiednio B i C . Możemy więc powiedzieć: gdy punkt K zmienia swoje położenie, szeregi punktów μ, ν ; ν, λ' ; λ, μ' powstałe na parach boków trójkąta odniesienia wyznaczają trzy przecięcia stożkowe, do których jest styczna prosta LL_1 , a nadto do każdego z nich są styczne dwa boki trójkąta odniesienia w punktach przecięcia się ich z trzecim. Środki tych trzech krzywych leżą na prostych, łączących punkt ciężkości trójkąta odniesienia t. j. punkt $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$ z wierzchołkami tegoż trójkąta.

Równania prostych μ, ν, λ, μ' są odpowiednio: $-M\xi\eta x + P\xi^2y + N\eta^2z = 0$, $P\xi^2x - N\xi^2y + M\xi^2z = 0$, $N\eta^2x + M\xi^2y - P\xi\eta z = 0$, współrzędne więc punktów styczności tych trzech prostych do krzywych odpowiednio (7), (7'), (7'') są

$$\frac{1}{M\eta\xi} : \frac{1}{2P\xi^2} : \frac{1}{2N\eta^2}, \quad \frac{1}{2P\xi^2} : \frac{1}{N\xi^2} : \frac{1}{2M\xi^2}, \quad \frac{1}{2N\eta^2} : \frac{1}{2M\xi^2} : \frac{1}{P\xi\eta}.$$

Łącząc te punkty z wierzchołkami odpowiednio A, B, C trójkąta odniesienia, otrzymamy trzy proste

$$P\xi^2y - N\eta^2z = 0, \quad P\xi^2x - M\xi^2z = 0, \quad N\eta^2x - M\xi^2y = 0.$$

Wyznacznik utworzony przez współczynniki tych równań

$$\begin{vmatrix} 0 & P\xi^2 & -N\eta^2 \\ P\xi^2 & 0 & -M\xi^2 \\ N\eta^2 & -M\xi^2 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

a więc te trzy proste przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten stale oznaczać będziemy literą D ; jego współrzędne są $M\xi^2 : N\eta^2 : P\xi^2$.

Prosta LL_1 jest styczna do owych krzywych (7) w punktach odpowiednio

$$-\frac{2}{M} : \frac{1}{N} : \frac{1}{P}, \quad \frac{1}{M} : -\frac{2}{N} : \frac{1}{P}, \quad \frac{1}{M} : \frac{1}{N} : -\frac{2}{P}.$$

Gdy te punkty połączymy z wierzchołkami odpowiednio A, B, C , to otrzymamy proste

$$Ny - Pz = 0, \quad Mx - Pz = 0, \quad Mx - Ny = 0,$$

które widocznie przecinają się wszystkie w jednym punkcie, mianowicie w punkcie E , o którym była mowa w ust. 5-ym.

7. Zróbmy teraz odwrotne przypuszczenie, mianowicie, że przy stałym położeniu raz dowolnie obranego punktu K prosta LL_1 zmienia swoje położenie. Wówczas punkt A_s będzie się poruszał po boku BC i w punktach K_b, K_c powstaną pęki perspektywiczne, wyznaczające nam, pierwszy na boku AB , drugi na boku AC , szeregi μ' i ν jednokreślne. Promienie więc μ' pęku rzędu 2-go obwodzić będą krzywą stopnia 2-go. Postępując podobnie jak poprzednio, moglibyśmy udowodnić, że do tej krzywej są styczne boki trójkąta AB i AC w wierzchołkach B i C . Nadto z uwagi że, gdy punkt A_s znajdzie się w punkcie K_s , odpowiadającymi promieniami owych pęków będą boki $K_b K_s, K_c K_s$ trójkąta $K_s K_b K_c$, wynika, iż do tej krzywej będzie styczna także oś homologii trójkątów ABC i $K_s K_b K_c$ (ust. 1.) Na mocy tych własności znajdziemy równanie tego przecięcia stożkowego. Ponieważ równanie krzywej stopnia 2-go, do której są styczne boki AB, AC w wierzchołkach B i C jest (ust. 6) $a_{11}x^2 + 2a_{23}yz = 0$, zaś z warunku, że owa oś homologii t. j. prosta (1) jest styczna do tej krzywej, mamy $a_{11} = -\frac{2\eta\zeta}{\xi^2}a_{23}$; przeto równanie szukanego przecięcia stożkowego jest

$$\eta\zeta x^2 - 4\xi^2 yz = 0. \quad (8)$$

Podstawiając w równanie (C) (ust. 6) biegunowej punktu $x':y':z'$ względem krzywej (A) wyrażenia połów cząstkowych pochodnych wielomianu lewej strony równania (8) względem x, y, z , mianowicie: $f_1 = \eta\zeta x', f_2 = -2\xi^2 z', f_3 = -2\xi^2 y'$, otrzymamy jako równanie biegunowej punktu $x':y':z'$ względem krzywej (8)

$$\eta\zeta x'x - 2\xi^2 z'y - 2\xi^2 y'z = 0$$

Jeżeli współrzędne $x':y':z'$ mają przedstawiać środek krzywej (8), to z tym ostatnim równaniem będzie identyczne równanie prostej w nieskończoności $ax + by + cz = 0$. Z warunku tego mieć będziemy związki $\frac{\eta\zeta}{a}x' = -\frac{2\xi^2}{b}z' = -\frac{2\xi^2}{c}y'$, z których otrzymamy współrzędne szukanego środka krzywej (8) $x':y':z' = -\frac{2\xi^2}{\eta\zeta} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$. Widzimy więc, że środek krzywej (8) leży na prostej $\frac{y}{z} = \frac{c}{b}$,

łączącej punkt ciężkości trójkąta odniesienia t. j. punkt $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$ z wierzchołkiem A .

Do podobnych wniosków doszlibyśmy, gdybyśmy brali szeregi punktów $\nu' i \lambda; \lambda' i \mu$, jednokreślne, których podstawami są odpowiednio boki AC i CB ; CB i BA . Równania krzywych przez te szeregi wyznaczonych są odpowiednio

$$\zeta\xi y^2 - 4\eta^2 xz = 0, \quad (8')$$

$$\xi\eta z^2 - 4\xi^2 xy = 0. \quad (8'')$$

Środki krzywych (8')(8'') leżą na prostych, łączących punkt ciężkości trójkąta ABC z wierzchołkami odpowiednio B i C . A zatem, gdy punkt K pozostaje niezmiennym, zaś prosta LL_1 zmienia swoje położenie, szeregi punktów jednokreślne $\mu', \nu; \nu', \lambda; \lambda', \mu$, powstałe na bokach trójkąta odniesienia, wyznaczają trzy przecięcia stożkowe, do których jest styczna oś homologii trójkątów ABC i $K_s K_b K_c$, a nadto do każdego są styczne dwa boki trójkąta odniesienia w punktach przecięcia się ich z pozostałym bokiem; środkitych krzywych leżą na prostych, łączących punkt ciężkości trójkąta odniesienia z jego wierzchołkami.

Równania prostych μ', ν, μ', ν są odpowiednio

$$\begin{aligned} NP\eta\zeta x - N^2\xi\eta y - P^2\xi\zeta z &= 0, & -M^2\xi\eta x + MP\xi\eta y - P^2\eta\zeta z &= 0, \\ -M^2\xi\zeta x - N^2\eta\zeta y + MN\xi\eta z &= 0; \end{aligned}$$

proste te są styczne do krzywych odpowiednio (8), (8'), (8'') w punktach

$$\frac{1}{NM\eta\zeta} : \frac{1}{2N^2\xi\eta} : \frac{1}{2P^2\xi\zeta}, \quad \frac{1}{2M^2\xi\eta} : \frac{1}{MP\xi\zeta} : \frac{1}{2P^2\eta\zeta}, \quad \frac{1}{2M^2\xi\zeta} : \frac{1}{2N^2\eta\zeta} : \frac{1}{MN\xi\eta},$$

a więc proste, łączące te punkty odpowiednio z wierzchołkami A, B, C , przecinają się w jednym punkcie $\frac{1}{M^2\xi} : \frac{1}{N^2\eta} : \frac{1}{P^2\zeta}$, który stale oznaczać będziemy literą D .

Oś homologii trójkątów ABC i $K_s K_b K_c$ t. j. prosta (1) jest styczna do krzywych (8) odpowiednio w punktach

$$2\xi : \eta : \zeta, \quad \xi : 2\eta : \zeta, \quad \xi : \eta : 2\zeta.$$

Łącząc więc te trzy punkty z wierzchołkami trójkąta odniesienia odpowiednio A, B, C , otrzymamy trzy proste,

$$\zeta y - z\eta = 0, \quad \zeta x - \xi z = 0, \quad \eta x - \xi y = 0,$$

przecinające się w jednym punkcie $\xi : \eta : \zeta$, a zatem w punkcie K .

8. Punkty przecięcia się prostych $A\omega, B\omega, C\omega$ odpowiednio z prostymi $C\omega', A\omega', B\omega'$ nazwijmy B_1, C_1, A_1 . (fig. 1). Współrzędne tych punktów A_1, B_1, C_1 są odpowiednio

$$\xi NP : \zeta P^2 : \eta N^2\zeta : P^2\eta PM : \xi M^2 : \eta N^2 : \xi M^2 : \zeta MN.$$

Równaniem prostej KA_1 jest: $-(\eta N + \zeta P)x + N\xi y + P\xi z = 0$, ta więc prosta przecina bok BC w punkcie, którego równaniem jest $\frac{1}{N} - \frac{1}{P} = 0$, a zatem w punkcie A_s , przecięcia się prostej LL_1 z bokiem BC (ust. 2). Podobnie postępując, można udowodnić, że proste KB_1, KC_1 przecinają boki CA, AB odpowiednio w punktach B_s, C_s przecięcia się prostej LL_1 z temiż bokami.

Punkty przecięcia się tychże prostych KA_1, KB_1, KC_1 z pozostałymi bokami trójkąta ABC t. j. odpowiednio z bokami CA, AB, BC, CA nazwijmy po kolei $A_s, A_c, B_s, B_c, C_s, C_c$. Ich współrzędne są odpowiednio $P\xi : 0 : (N\eta + P\zeta)$, $N\xi : (N\eta + P\zeta) : 0$, itd. Podobnie jak w ust. 4 można okazać, że sześć tych punktów leży na przecięciu stożków:

$$\frac{M}{\xi}(N\eta + P\zeta)x^2 + \frac{N}{\eta}(P\zeta + M\xi)y^2 + \frac{P}{\zeta}(M\xi + N\eta)z^2 - \frac{1}{\eta\xi}(M\xi^2 + NP\eta\xi + \Delta_1)yz - \frac{1}{\xi\xi}(N^2\eta^2 + MP\xi\eta + \Delta_1)zx - \frac{1}{\xi\eta}(P^2\zeta^2 + MN\xi\eta + \Delta_1)xy = 0, \quad (9)$$

gdzie $\Delta_1 = NP\eta\xi + PM\xi\xi + MN\xi\eta$.

9. Trzy punkty A_1, B_1, C_1 wyznaczają trójkąt homologiczny z trójkątem odniesienia ABC . Jakoż, równania prostych AA_1, BB_1, CC_1 są odpowiednio

$$-N^2\eta y + P^2\zeta z = 0, \quad M^2\xi x - P^2\zeta z = 0, \quad M^2\xi x - N^2\eta y = 0;$$

wyznacznik więc utworzony przez ich współczynniki

$$\begin{vmatrix} 0 & -N^2\eta & P^2\zeta \\ M^2\xi & 0 & -P^2\zeta \\ M^2\xi & -N^2\eta & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Środkiem homologii tych dwu trójkątów ABC i $A_1 B_1 C_1$ jest punkt $\frac{1}{M^2\xi} : \frac{1}{N^2\eta}$: $\frac{1}{P^2\zeta}$ t. j. punkt D , który już poprzednio otrzymaliśmy w ust. 7-ym. Równanie osi homologii tych dwu trójkątów jest

$$\frac{M}{M_1}x + \frac{N}{N_1}y + \frac{P}{P_1}z = 0, \quad (10)$$

gdzie M_1, N_1, P_1 mają tożsamo znaczenie, co w ust. 3-cim.

10. Punkty przecięcia się prostych $A\omega, B\omega, C\omega$ z prostymi odpowiednio $B\omega', C\omega', A\omega'$, nazwijmy po kolei C_1', A_1', B_1' . Współrzędne tych punktów A_1', B_1', C_1' są odpowiednio

$$NP\eta\xi : MN\eta^2 : MP\xi^2, \quad MN\xi^2 : MP\xi\xi : NP\zeta^2, \quad MP\xi^2 : PN\eta^2 : MN\xi\eta.$$

Postępując podobnie, jak w poprzedzającym ustępie, możemy udowodnić, że trójkąt $A_1' B_1' C_1'$ jest homologiczny z trójkątem ABC , że środkiem ich homologii jest punkt $M\xi^2 : N\eta^2 : P\zeta^2$ t. j. punkt D' , otrzymany już w ust. 6-ym, i że osią ich homologii jest prosta (10). A więc trzy trójkąty $ABC, A_1 B_1 C_1,$

A', B', C_1 posiadają jako wspólną oś homologii prostą (10). Zważając na tę własność, widzimy, że także trójkąty $A, B_1 C_1$ i $A', B_1' C_1'$ są homologiczne; środkiem ich homologii jest punkt $\frac{M^2\xi^2 + NP\eta\xi}{M} : \frac{N^2\eta^2 + MP\xi\xi}{N} : \frac{P^2\zeta^2 + MN\xi\eta}{P}$.

Punkt ten nazwijmy D'' . Wyznacznik utworzony przez współrzędne punktów D, D', D'' :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{M^2\xi} & \frac{1}{N^2\eta} & \frac{1}{P^2\zeta} \\ M\xi^2 & N\eta^2 & P\zeta^2 \\ \frac{M^2\xi^2 + NP\eta\xi}{M} & \frac{N^2\eta^2 + MP\xi\xi}{N} & \frac{P^2\zeta^2 + MN\xi\eta}{P} \end{vmatrix} = M^3 N^3 P^3 \xi \eta \zeta \begin{vmatrix} NP\eta\xi & MP\xi\xi & MN\xi\eta \\ M^2\xi^2 & N^2\eta^2 & P^2\zeta^2 \\ M^2\xi^2 + NP\eta\xi & N^2\eta^2 + MP\xi\xi & P^2\zeta^2 + MN\xi\eta \end{vmatrix} = 0,$$

a więc te trzy punkty leżą na jednej prostej

$$M^2\xi(N^2\eta^2 - P^2\zeta^2)x + N^2\eta(P^2\zeta^2 - M^2\xi^2)y + P^2\zeta(M^2\xi^2 - N^2\eta^2)z = 0. \quad (11)$$

Możemy więc powiedzieć: z trzech trójkątów $ABC, A_1 B_1 C_1, A' B_1' C_1'$ każde dwa są z sobą homologiczne; środki ich homologii leżą na jednej prostej, zaś wszystkie trzy te trójkąty mają wspólną oś homologii.

11. Przez punkty $A_1, B_1, C_1, \omega, \omega'$ poprowadźmy przecięcie stożkowe. W czworoboku $B_1\omega C_1\omega'$ w toż przecięcie wpisanym przeciwległe boki $C_1\omega$ i $B_1\omega'$ przecinają się w punkcie A_1' (ust. 10), zaś dwa pozostałe $B_1\omega$ i $C_1\omega'$ przecinają się w punkcie A . Stąd wynika, że prosta AA_1' jest biegunową punktu przecięcia się przekątnych $\omega\omega'$ i $B_1 C_1$. Gdybyśmy zaś wzięli czworobok $\omega C_1\omega' A_1$, to podobnie moglibyśmy okazać, że prosta BB_1' jest biegunową punktu przecięcia się przekątnych $\omega\omega'$ i $A_1 C_1$. Te proste AA_1' i BB_1' przecinają się (ust. 10) w punkcie D' , a więc biegunową punktu D' jest prosta, przechodząca przez oba punkty przecięcia się przekątnych tych dwu czworoboków, a zatem wspólna ich przekątna t. j. prosta $\omega\omega'$.

Tę samą własność można okazać analitycznie. Z warunku, że nasze przecięcie stożkowe przechodzi przez pięć punktów $A_1, B_1, C_1, \omega, \omega'$, znajdujemy jego równanie

$$M\eta\xi x^2 + N\xi\eta y^2 + P\xi\eta z^2 - M\xi^2 yz - N\eta^2 xz - P\zeta^2 yx = 0. \quad (12)$$

Postępując zaś podobnie jak w ust. 7-ym, znajdziemy równanie biegunowej punktu $x':y':z'$ względem krzywej (12)

$$(2M\eta\xi x' - N\xi\eta y' - P\zeta^2 y')x + (2N\xi\eta y' - M\xi^2 z' - P\zeta^2 x')y + (2P\zeta^2 y' - M\xi^2 y' - N\eta^2 x')z = 0.$$

Równanie więc biegunowej punktu D' ($M\xi^2:N\eta^2:P\zeta^2$) (ust. 6) jest

$$(M^2\xi^2 - NP\eta\xi)\eta\xi x + (N^2\eta^2 - MP\xi\eta)\xi\eta y + (P^2\zeta^2 - MN\xi\eta)\xi\eta z = 0,$$

czyli, po podzieleniu obu stron przez $\xi\eta\xi$,

$$\frac{M^2\xi^2 - NP\eta\xi}{\xi} x + \frac{N^2\eta^2 - MP\xi\eta}{\eta} y + \frac{P^2\zeta^2 - MN\xi\eta}{\zeta} z = 0,$$

które, jak wiemy (ust. 4), jest równaniem prostej $\omega\omega'$.

Znajdziemy tu jeszcze współrzędne bieguna prostej LL_1 względem przecięcia stożkowego (12). Ponieważ wówczas powyższe wypisane równanie biegunowej punktu $x':y':z'$ względem krzywej (12) jest identyczne z równaniem (2) prostej LL_1 więc współrzędne szukanego bieguna zadość czynią równościom

$$\begin{aligned} -M\zeta(2N\eta + P\zeta)x' + N\zeta(P\zeta + 2A\xi)y' + (N^2\eta^2 - M^2\xi^2)z' &= 0, \\ (P^2\zeta^2 - N^2\eta^2)x' - N\xi(2P\zeta + M\xi)y' + P\xi(M\xi + 2N\eta)z' &= 0. \end{aligned}$$

Z tych równań otrzymamy współrzędne szukanego bieguna

$$x':y':z' = \xi(M_1 - \Delta_1) : \eta(N_1 - \Delta_1) : \zeta(P_1 - \Delta_1)$$

gdzie M_1, N_1, P_1 mają znaczenie podane w ust. 3-cim, zaś Δ_1 znaczenie podane w ust. 8-ym. Biegun ten nazywać będziemy Z .

Ponieważ biegunem prostej $\omega\omega'$ względem krzywej (12) jest punkt D' , zaś biegunem prostej LL_1 względem tegoż przecięcia jest punkt Z , zatem prosta $D'Z$, łącząca te bieguny, t. j. prosta

$$\frac{N\eta - P\zeta}{\xi} x + \frac{P\zeta - M\xi}{\eta} y + \frac{M\xi - N\eta}{\zeta} z = 0 \quad (13)$$

jest biegunową punktu przecięcia się prostych LL_1 i $\omega\omega'$. Punkt ten stałe oznaczać będziemy literą G ; jego współrzędne są $\xi(N\eta - P\zeta) : \eta(P\zeta - M\xi) : \zeta(M\xi - N\eta)$. Jeżeli zaś punkt przecięcia się prostych $D'Z$ z prostą $\omega\omega'$ t. j. punkt $(N\eta + P\zeta)\xi : (P\zeta + M\xi)\eta : (M\xi + N\eta)\zeta$, nazwiemy S , to ponieważ punkty ω, ω' leżą na przecięciu stożkowym (12), pary punktów ω, ω' i G, S są z sobą harmonicznie związane, tak iż mamy symbolicznie $(\omega \omega' G S) = -1$. Zauważmy tu jeszcze, że przez ten punkt S przechodzi także prosta DE , łącząca środek homologii trójkątów ABC i $A_1B_1C_1$ (ust. 10) z punktem E (ust. 5), t. j. prosta

$$M^2\xi(N\eta - P\zeta)x + N^2\eta(P\zeta - M\xi)y + P^2\zeta(M\xi - N\eta)z = 0. \quad (14)$$

Trzy więc proste $\omega\omega', DE, D'Z$ przecinają się w jednym punkcie S .

Jako punkty przecięcia się prostych $D'Z$ z przecięciem stożkowym (12) otrzymamy punkt $\xi : \eta : \zeta$, t. j. punkt K , i punkt $\xi(N\eta + P\zeta - M\xi) : \eta(M\xi + P\zeta - N\eta) : \zeta(M\xi + N\eta - P\zeta)$, który nadal oznaczać będziemy literą O_k .

A więc przecięcie stożkowe (12) przechodzi przez siedm punktów $A_1, B_1, C_1, \omega, \omega', K, O_k$ i dlatego nazywają je także krzywą siedmiu punktów. Cztery zaś punkty K, D', O_k, Z leżą na jednej prostej (13).

12. Ponieważ punkt K leży na przecięciu stożkowym (12), zatem trzy proste AK, BK, CK przecinać je jeszcze będą w trzech tylko różnych punktach. Punkty te nazwiemy po kolei A_2, B_2, C_2 ; ich współrzędne będą odpowiednio

$$\frac{N\eta + P\zeta - M\xi}{M} : \eta : \zeta, \xi : \frac{M\xi + P\zeta - N\eta}{N} : \zeta, \xi : \eta : \frac{M\xi + N\eta - P\zeta}{P}.$$

Oczywiście, że trójkąt $A_2B_2C_2$ jest homologiczny z trójkątem danym ABC ; ich środkiem homologii jest punkt K , zaś ich osią homologii jest prosta

$$-\frac{M}{2M\xi + N\eta + P\zeta} x + \frac{N}{M\xi - 2N\eta + P\zeta} y + \frac{P}{M\xi + N\eta - 2P\zeta} z = 0. \quad (15)$$

Okazemy tu nadto, że trójkąt $A_2B_2C_2$ jest homologiczny z trójkątem $A_1B_1C_1$. Zważmy bowiem, że równania prostych A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 są odpowiednio

$$\begin{aligned} M(P\zeta - N\eta)x + N(N\eta - M\xi)y + P(M\xi - P\zeta)z &= 0, \\ M(N\eta - M\xi)x + N(M\xi - P\zeta)y + P(P\zeta - N\eta)z &= 0, \\ M(M\xi - P\zeta)x + N(P\zeta - N\eta)y + P(N\eta - M\xi)z &= 0; \end{aligned}$$

wyznacznik więc utworzony przez współczynniki tych równań

$$MNP \begin{vmatrix} P\zeta - N\eta & N\eta - M\xi & M\xi - P\zeta \\ N\eta - M\xi & M\xi - P\zeta & P\zeta - N\eta \\ M\xi - P\zeta & P\zeta - N\eta & N\eta - M\xi \end{vmatrix} = 0.$$

Współrzędne środka homologii tych dwu trójkątów są $\frac{1}{A} : \frac{1}{B} : \frac{1}{C}$. Środkiem więc homologii trójkątów $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ jest punkt E (ust. 6); osią ich homologii jest prosta

$$M(N\eta - P\zeta)x + N(P\zeta - M\xi)y + P(M\xi - N\eta)z = 0. \quad (16)$$

Ponieważ jednak dwa te trójkąty są w tożsamo przecięcie stożkowe (12) wpisane, zatem oś homologii (16) jest także biegunową punktu E względem krzywej (12).

13. Punkty przecięcia się prostych A_1E, B_1E, C_1E , t. j. prostych A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 z przeciwległymi bokami trójkąta $A_1B_1C_1$ odpowiednio B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 , nazwiemy kolejno α, β, γ . Współrzędne tych punktów są odpowiednie

$$\frac{P\zeta+N\eta}{M} : \frac{N\eta+M\xi}{N} : \frac{M\xi+P\zeta}{P} : \frac{N\eta+M\xi}{M} : \frac{M\xi+P\zeta}{N} : \frac{P\zeta+N\eta}{P},$$

$$\frac{M\xi+P\zeta}{M} : \frac{P\zeta+N\eta}{N} : \frac{N\eta+M\xi}{P}.$$

Punkty zaś przecięcia się prostej LL_1 z temiż bokami B_1C_1 , C_1A_1 , A_1B_1 , nazwijmy kolejno α' , β' , γ' ; współrzędne ich są

$$\frac{P\zeta-N\eta}{M} : \frac{N\eta-M\xi}{N} : \frac{M\xi-P\zeta}{P}, \quad \frac{N\eta-M\xi}{M} : \frac{M\xi-P\zeta}{N} : \frac{P\zeta-N\eta}{P},$$

$$\frac{M\xi-P\zeta}{M} : \frac{P\zeta-N\eta}{N} : \frac{N\eta-M\xi}{P}.$$

Zważmy tu, że współrzędne punktów α i α' możemy przedstawić odpowiednio przez $(P^2\zeta - \frac{P}{N}N^2\eta) : (MP\eta + \frac{P}{N}M^2\xi) : (M^2\xi + \frac{P}{N}MN\zeta)$ i $(P^2\zeta - \frac{P}{N}N^2\eta) : (MP\eta - \frac{P}{N}M^2\xi) : (M^2\xi - \frac{P}{N}MN\zeta)$, i że stosunki, utworzone przez pierwsze składniki wielomianów w nawiasach, są współrzędnymi punktu B_1 (ust. 8), stosunki zaś, utworzone przez drugie składniki tychże wielomianów, po opuszczeniu wspólnego czynnika $\frac{N}{P}$, są współrzędnymi punktu C_1 . Mamy więc współrzędne

punktów α i α' wyrażone za pomocą współrzędnych punktów B_1 i C_1 . Wiemy jednak, że, gdy mamy współrzędne dwu punktów dowolnych $x':y':z'$ i $x'':y'':z''$ a współrzędne dwu innych punktów czynią zadość związkowi $x''':y''':z''' = (x'+\lambda x'') : (y'+\lambda y'') : (z'+\lambda z'') : (x''':y''':z''') = (x'-\lambda x'') : (y'-\lambda y'') : (z'-\lambda z'')$, to dwie pary takich punktów są z sobą harmonicznymi sprzężone. W naszym więc przypadku para punktów B_1, C_1 jest harmonicznie sprzężona z parą punktów α, α' ; własność tę możemy przedstawić zapomocą symbolu $(B_1 C_1 \alpha \alpha') = -1$. Odpowiednio mieć będziemy $(C_1 A_1 \beta \beta') = -1$ i $(A_1 B_1 \gamma \gamma') = -1$.

14. Współrzędne punktu tworzącego z punktem $A_1(0 : -\frac{C}{B} : 1)$ parę harmonicznie sprzężoną z parą wierzchołków B, C są $0 : \frac{C}{B} : 1$; punkt ten nazwijmy A'_1 . Prosta łącząca punkt A'_1 z punktem C_2 (ust. 12) to jest prosta $(M\xi - P\zeta)x + N\eta y + P\zeta z = 0$, przecina prostą LL_1 w punkcie $-2N\xi : (2M\xi - P\zeta) : N\zeta$. Prosta zaś, łącząca punkt ten z wierzchołkiem B , t. j. prosta $\xi x + 2\zeta z = 0$, przecina się z prostą CC_2 , czyli, co na jedno wychodzi, z prostą $CK : \frac{x}{\xi} - \frac{y}{\eta} = 0$ w punkcie $\xi : \eta : -\frac{\zeta}{2}$; punkt ten nazwijmy J_c ; jak z jego współrzędnych wnosimy, nie zależy on od położenia prostej dowolnej LL_1 . Połączmy następnie

punkt J_c z punktem $C_c(\frac{1}{M} : -\frac{1}{N} : 0)$ (ust. 2). Wówczas prosta $J_c C_c$, t. j. prosta $M\zeta x + N\eta y + 2(M\xi + N\eta)z = 0$ przecinać będzie prostą CC_c , której równaniem jest $-M\xi + N\eta = 0$, w punkcie $\frac{1}{M} : \frac{1}{N} : -\frac{\zeta}{M\xi + N\eta}$, który nazwijmy I_c .

Przez wierzchołki trójkąta ABC i punkty powyżej otrzymane J_c i I_c poprowadźmy przecięcie stożkowe. Postępując tak samo, jak w ust. 5-ym znajdziemy jako jego równanie

$$\frac{\xi}{x} + \frac{\eta}{y} + \frac{\zeta}{z} = 0. \quad (17)$$

Biorąc odpowiednie punkty B_b, C_c na bokach CA i AB , otrzymalibyśmy punkty J_b, J_a , niezależne od położenia prostej LL_1 i punkty I_b, I_a na przecięciu stożkowym (17) tak, iż możemy powiedzieć: gdy przy stałym położeniu punktu K prosta LL_1 zmienia swoje położenie, punkty I_a, I_b, I_c zakreślają przecięcie stożkowe (17), opisane na trójkącie odniesienia i przechodzące przez trzy stałe punkty J_a, J_b, J_c .

Szukajmy bieguna prostej LL_1 względem krzywej (17). Postępując podobnie jak w ust. 6-ym, otrzymamy równanie biegunowej punktu $x':y':z'$ względem krzywej (17) t. j.

$$(\eta z' + \xi y')x + (\xi z' + \zeta x')y + (\xi y' + \eta x')z = 0. \quad (18)$$

Z warunku, że prosta LL_1 jest tu biegunową punktu $x':y':z'$, mieć będziemy dwa związki:

$M\zeta x' - N\eta y' + (M\xi - N\eta)z' = 0$ i $M\eta x' + (M\xi - P\zeta)y' - P\eta z' = 0$, z których otrzymamy współrzędne szukanego bieguna $x':y':z' = \xi(N\eta + P\zeta - M\xi) : \eta(M\xi - N\eta + P\zeta) : \zeta(M\xi + N\eta - P\zeta)$, które określają punkt O_k (ust. 11).

15. W wierzchołkach A, B, C poprowadźmy styczne do krzywej (17) i punkty przecięcia się ich z sobą, przeciwległe wierzchołkom A, B, C , nazwijmy odpowiednio A'', B'', C'' . Jeżeli w równaniu (18) biegunowej punktu $x':y':z'$ względem krzywej (17) przyjmiemy $x':y':z' = 1:0:0$, t. j. podstawimy współrzędne wierzchołka A , otrzymamy równanie stycznej $B''C''$ do krzywej (17) w punkcie A , t. j. równanie $\xi y + \eta z = 0$. Odpowiednio równaniem stycznej $A''C''$ w punkcie B jest $\xi x + \xi z = 0$, równaniem zaś stycznej $A''B''$ w punkcie C jest $\eta x + \xi z = 0$. Współrzędne więc punktów A'', B'', C'' są odpowiednio $-\xi : \eta : \xi, -\eta : \xi, \xi : \eta$. Leżą zatem te punkty A'', B'', C'' na prostych odpowiednio AK, BK, CK , skąd wynika, że nawzajem trzy proste AA'', BB'', CC'' przecinają się w jednym punkcie K , to znaczy, że trójkąty ABC i $A''B''C''$ są homologiczne, a środkiem ich homologii jest punkt K ; osią homologii jest prosta (1). Ponieważ punkt K jest środkiem homologii także trójkątów ABC i $K_a K_b K_c$ (ust. 1), prosta zaś (1) ich osią homologii, zatem trzy trójkąty $ABC, K_a K_b K_c, A''B''C''$ mają wspólny środek homologii: punkt K i wspólną oś homologii: prostą (1).

16. Weźmy nadto krzywą stopnia 2-go, wpisaną w trójkąt odniesienia ABC i przechodzącą przez punkty $K_a(0 : \eta : \xi), K_b(\xi : 0 : \zeta)$; okażemy, że ona

przechodzi także przez punkt $K_c(\xi:\eta:0)$. Jeżeli krzywa (A) (ust. 4) jest wpisana w trójkąt odniesienia, to, ponieważ wówczas $a_{23}^2 = a_{22}a_{33}$, $a_{31}^2 = a_{33}a_{11}$, $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$, równanie ogólne (A) redukuje się do

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2\sqrt{a_{22}a_{33}}yz + 2\sqrt{a_{33}a_{11}}zx + 2\sqrt{a_{11}a_{22}}xy = 0,$$

czyli, gdy przyjmiemy $a_{11} = a_1^2$, $a_{22} = a_2^2$, $a_{33} = a_3^2$, do

$$(a_1x)^{\frac{2}{3}} + (a_2y)^{\frac{2}{3}} + (a_3z)^{\frac{2}{3}} = 0. \quad (D)$$

Ponieważ nasza krzywa przechodzi przez punkty K_a , K_b , zatem równaniem jej będzie

$$\sqrt{\frac{x}{\xi}} + \sqrt{\frac{y}{\eta}} + \sqrt{\frac{z}{\zeta}} = 0. \quad (19)$$

Temu równaniu czynią zadość współrzędne punktu K_c ; a więc krzywa (19) jest jednocześnie wpisana w trójkąt ABC i opisana na trójkącie $K_aK_bK_c$. Z ustępu poprzedzającego wiemy, że proste, łączące odpowiadające wierzchołki trzech owych trójkątów ABC , $K_aK_bK_c$ i $A'B'C''$, przecinają się w jednym punkcie K i że każde trzy sobie odpowiadające boki tych trójkątów przecinają się w trzech punktach, leżących na prostej (1). Stąd wynika, że punkt K jest biegunem prostej (1) tak względem przecięcia stożkowego (17), jak względem przecięcia stożkowego (19).

17. Przez punkty D (ust. 7) i E (ust. 5) poprowadźmy przecięcie stożkowe, opisane na trójkącie ABC . Podstawiając w równaniu (B) (ust. 5) współrzędne punktów E i D t. j. $\frac{1}{M}:\frac{1}{N}:\frac{1}{P}$, $\frac{1}{M^2\xi}:\frac{1}{N^2\eta}:\frac{1}{P^2\zeta}$, mieć będziemy związki $Mm_1 + Nm_2 + Pm_3 = 0$, $M^2\xi m_1 + N^2\eta m_2 + P^2\zeta m_3 = 0$, z których otrzymamy $m_1:m_2:m_3 = \frac{N\eta - P\zeta}{M}:\frac{P\zeta - M\xi}{N}:\frac{M\xi - N\eta}{P}$, tak iż równanie szukane krzywej jest

$$\frac{N\eta - P\zeta}{Mx} + \frac{P\zeta - M\xi}{Ny} + \frac{M\xi - N\eta}{Pz} = 0. \quad (20)$$

Postępując zaś podobnie jak w ust. 6-ym, znajdziemy równanie biegunowej punktu $x':y':z'$ względem krzywej (20)

$$\left(\frac{P\zeta - M\xi}{N}z' + \frac{M\xi - N\eta}{P}y'\right)x' + \left(\frac{M\xi - N\eta}{P}x' + \frac{N\eta - P\zeta}{M}z'\right)y' + \left(\frac{N\eta - P\zeta}{M}y' + \frac{P\zeta - M\xi}{N}x'\right)z' = 0.$$

Jeżeli w tym równaniu podstawimy $x':y':z' = \frac{1}{M}:\frac{1}{N}:\frac{1}{P}$ t. j. współrzędne punktu E , otrzymamy równanie biegunowej tegoż punktu względem krzywej (20)

$$\left(\frac{\eta}{P} - \frac{\xi}{N}\right)x + \left(\frac{\xi}{M} - \frac{\xi}{P}\right)y + \left(\frac{\xi}{N} - \frac{\eta}{M}\right)z = 0, \quad (21)$$

które z uwagi, że punkt E leży na krzywej (20), przedstawia styczną do krzywej (20) w punkcie E . Zważmy, że równanie to możemy napisać także w kształcie

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \xi & \eta & \zeta \\ \frac{1}{M} & \frac{1}{N} & \frac{1}{P} \end{vmatrix} = 0,$$

skąd się okazuje, że taż prosta (21) przechodzi także przez punkt K . Prosta zatem KE jest styczna do krzywej (20) w punkcie E . Druga ze stycznych, które możemy poprowadzić z punktu K do przecięcia (20), jest

$$M(N\eta - P\zeta)(-M\xi + N\eta + P\zeta)x + N(P\zeta - M\xi)(M\xi - N\eta + P\zeta)y + P(N\eta - M\xi)(M\xi + N\eta - P\zeta)z = 0;$$

a punktem jej styczności jest punkt

$$\frac{1}{M(-M\xi + N\eta + P\zeta)}:\frac{1}{N(M\xi - N\eta + P\zeta)}:\frac{1}{P(M\xi + N\eta - P\zeta)},$$

który nazwiemy O'_k . Stąd wynika, że prosta EO'_k jest biegunową punktu K względem krzywej (20). Równanie prostej EO'_k jest

$$M(N\eta - P\zeta)(-M\xi + N\eta + P\zeta)x + N(P\zeta - M\xi)(M\xi - N\eta + P\zeta)y + P(M\xi - N\eta)(M\xi + N\eta - P\zeta)z = 0.$$

Chcąc na koniec znaleźć biegun prostej LL_1 względem krzywej (20), należy przyjąć, że współczynniki w powyższym równaniu biegunowej punktu $x':y':z'$ względem krzywej (20) są proporcjonalne względem współczynników równaniu (2) prostej LL_1 . Z warunku tego mieć będziemy dwa związki:

$$M(M\xi - N\eta)x' + N(N\eta - M\xi)y' + P(M\xi + N\eta - 2P\zeta)z' = 0, \\ M(M\xi - P\zeta)x' + N(M\xi - 2N\eta + P\zeta)y' + P(P\zeta - M\xi)z' = 0,$$

z których otrzymamy współrzędne szukanego bieguna

$$x':y':z' = \frac{(P\zeta - N\eta)^2}{M}:\frac{(N\eta - M\xi)^2}{N}:\frac{(M\xi - N\eta)^2}{P}.$$

Na przecięciu stożkowym (20) leżą jeszcze punkty:

$$\frac{1}{M(M^2\xi^2 - 2NP\eta\xi - MN\xi\eta - MP\xi\zeta)} : \frac{1}{N(N^2\eta^2 - 2MP\xi\zeta - MN\xi\eta - NP\eta\xi)}$$

$$: \frac{1}{P(P^2\zeta^2 - 2MN\xi\eta - MP\xi\zeta - NP\eta\xi)},$$

nazwijmy go Z' ;

$$\frac{1}{M(N\eta + P\xi)} : \frac{1}{N(P\xi + M\xi)} : \frac{1}{P(M\xi + N\eta)}, \text{ nazwijmy go } S';$$

$$\frac{1}{M[N\eta(N\eta - M\xi) + P\xi(P\xi - M\xi)]} : \frac{1}{N[P\xi(P\xi - N\eta) + M\xi(M\xi - N\eta)]}$$

$$: \frac{1}{P[M\xi(M\xi - P\xi) + N\eta(N\eta - P\xi)]},$$

nazwijmy go N .

18. Punkty ω i ω' zależą od tego, jaki punkt i jaką prostą wzięliśmy jako punkt K i jako prostą LL_1 . Jakoż, współrzędne punktów ω i ω' są związane ze współrzędnymi punktu K i współczynnikami równania (2) (ust. 2); mianowicie, aby otrzymać współrzędne punktu ω , należy współczynniki M, N, P , poczynając od drugiego, podzielić odpowiednio przez współrzędne ξ, η, ζ , poczynając od trzeciej; aby zaś otrzymać współrzędne punktu ω' , należy te same współczynniki M, N, P , poczynając od trzeciego, podzielić przez powyższe współrzędne, poczynając od drugiej.

Przy tej samej prostej LL_1 weźmy zamiast punktu K punkt ω ($\frac{N}{\xi} : \frac{P}{\xi} : \frac{M}{\eta}$) i szukajmy związanego z nim punktu F w taki sposób, w jaki punkt ω jest związany z punktem K . Według powyższego prawa współrzędne punktu F znajdziemy, dzieląc owe współczynniki M, N, P , poczynając od drugiego, przez współrzędne punktu ω , poczynając od trzeciej; otrzymamy w ten sposób współrzędne punktu F wyrażone przez $\frac{N\eta}{M} : \frac{P\xi}{N} : \frac{M\xi}{P}$. Dzieląc następnie współczynniki M, N, P , poczynając od drugiego, przez współrzędne punktu F , poczynając od trzeciej, mieć będziemy współrzędne $\frac{1}{MP\xi} : \frac{1}{N^2\eta} : \frac{1}{P^2\zeta}$, które wyznaczają punkt D (ust. 7). Podzielmy następnie współczynniki M, N, P , poczynając od drugiego, przez współrzędne punktu D , poczynając od trzeciej, otrzymamy $\frac{P\xi}{M} : \frac{M\xi}{N} : \frac{N\eta}{P}$; punkt ten nazwijmy W . Punktem zaś powstającym z punktu W w taki sposób, w jaki powstaje punkt ω z punktu K , będzie punkt $\frac{P}{\eta} : \frac{M}{\xi} : \frac{N}{\zeta}$, t. j. punkt ω' (ust. 2). Gdybyśmy wreszcie podzieliли owe współczynniki M, N, P , poczynając od drugiego, przez współrzędne punktu

ω' , poczynając od trzeciej, otrzymalibyśmy $\xi : \eta : \zeta$ a zatem współrzędne punktu K ; wrócilibyśmy więc do punktu K . I t. d.

Otrzymujemy więc tym sposobem dla jakiegoś punktu K i dowolnej prostej LL_1 peryod $K, \omega, F, D, W, \omega'; K$, i t. d., złożony tylko z sześciu różnych punktów, z których każdy w taki sposób powstaje z poprzedzającego, w jaki z punktu K powstaje punkt ω .

Gdybyśmy zaś sobie postawili zadanie: mając punkty K i ω' , szukać punktów, z którychby każdy powstawał z poprzedzającego w taki sposób, w jaki z punktu K powstaje punkt ω' , to otrzymalibyśmy znowu peryod $K, \omega', W, D, F, \omega; K$ i t. d., a więc ten sam peryod w odwrotnym tylko porządku.

19. Między dwoma bezpośrednio po sobie następującymi punktami powyżej wypisanych szeregów punktów istnieje pokrewieństwo stopnia 2-go, to znaczy, że gdy jeden z takich punktów porusza się po prostej dowolnej, pozostały zakreśla przecięcie stożkowe. Weźmy bowiem którąkolwiek parę takich punktów np. K i ω . Współrzędne punktu ω $x_\omega : y_\omega : z_\omega = \frac{N}{\xi} : \frac{P}{\xi} : \frac{M}{\eta}$ możemy napisać w kształcie związków

$$x_\omega = \rho \frac{N}{\xi}, \quad y_\omega = \rho \frac{P}{\xi}, \quad z_\omega = \rho \frac{M}{\eta}. \quad (a)$$

Stąd mieć będziemy współrzędne punktu K wyrażone przez

$$\xi = \rho \frac{P}{y_\omega}, \quad \eta = \rho \frac{M}{z_\omega}, \quad \zeta = \rho \frac{N}{x_\omega}. \quad (b)$$

Niech punkt K porusza się po prostej $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$. Przy zmianie punktu K zmieniać się będzie odpowiednio punkt ω ; podstawiając więc w ostatnim równaniu zamiast x, y, z wyrażenia (b), otrzymamy po opuszczeniu wskaźników ω równanie

$$\frac{\gamma N}{x} + \frac{\alpha P}{y} + \frac{\beta M}{z} = 0,$$

przedstawiające miejsce geometryczne punktu ω . Jak z tego równania widzimy, punkt ω zakreśla przecięcie stożkowe, opisane na trójkącie odniesienia.

W szczególnym przypadku, gdy $\alpha : \beta : \gamma = \frac{b}{P} : \frac{c}{M} : \frac{a}{N}$, gdzie $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, t. j. gdy punkt K porusza się po prostej $\frac{b}{P}x + \frac{c}{M}y + \frac{a}{N}z = 0$, punkt ω zakreślać będzie krzywą $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$, a więc koło opisane na trójkącie odniesienia.

§ II.

Dowolny dotąd na płaszczyźnie danego trójkąta ABC punkt K określimy teraz jako punkt szczególny, mianowicie taki, którego współrzędne zaśadość czynią związkowi $\xi:\eta:\zeta = a:b:c$, gdzie a, b, c są długościami boków trójkąta odniesienia. Również dowolną dotąd prostą (2) określimy jako prostą w nieskończoności; wtedy jej równanie będzie (ust. 19, § I) $ax+by+cz=0$, tak, iż $M:N:P = a:b:c$. A więc przyjmijmy, że $\xi:\eta:\zeta = M:N:P = a:b:c$.

W tym paragrafie wysłowimy dla powyższego założenia własności wprowadzone w paragrafie poprzednim i niektóre z nich szczegółowiej rozważymy. Aby uczynić widoczniejszym związek treści tego paragrafu z treścią poprzedniego, nadajemy ustępom § II numeracją odpowiednią do zachowania w § I.

Dla uproszczenia niektórych wywodów przyjmijmy odtąd stałe, że współrzędne jednorodne są prostopadłe.

1. Tak określony punkt K nazywa się punktem Lemoine'a. Jeżeli ξ, η, ζ oznaczać nam będą długości współrzędnych punktu K , to ze związków $\xi:\eta:\zeta = a:b:c$ otrzymamy $\frac{\xi}{a} = \frac{\eta}{b} = \frac{\zeta}{c}$. Nadto, gdy przez p oznaczymy pole trójkąta odniesienia, to z uwagi, że punkt K leży na płaszczyźnie trójkąta ABC , mieć będziemy $a\xi+b\eta+c\zeta=2p$. Rugując z trzech ostatnich związków $\frac{\eta}{b}, \frac{\zeta}{c}$ mieć będziemy $\frac{\xi}{a} = \frac{2p}{a^2+b^2+c^2}$. A więc

$$\frac{\xi}{a} = \frac{\eta}{b} = \frac{\zeta}{c} = \frac{2p}{a^2+b^2+c^2}.$$

Proste łączące punkt K z wierzchołkami trójkąta ABC przecinają jego boki przeciwległe w trzech punktach K_a, K_b, K_c , których współrzędnymi są odpowiednio $0:b:c, a:0:c, a:b:0$. Jeżeli spodki prostopadłych, spuszczonego z punktu K_a odpowiednio na boki AC i AB , nazwiemy r i s , to $K_ar = K_as \sin C$ $K_as = K_aB \sin B$; stąd $\frac{K_aB}{K_aC} = \frac{K_as \sin C}{K_ar \sin B} = \frac{c^2}{b^2}$. A więc proste łączące punkt Lemoine'a z wierzchołkami trójkąta ABC dzielą jego boki przeciwległe na odcinki w stosunku kwadratów boków przyległych. Trójkąty ABC i $K_aK_bK_c$ są homologiczne, środkiem ich homologii jest oczywiście punkt Lemoine'a, zaś osią homologii (odpowiednio do ust. 1, § I) prosta

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0. \quad (1)$$

2. Ponieważ prosta LL_1 jest teraz zgodnie z uczynionym założeniem prostą w nieskończoności, więc punkty A_s, B_s, C_s przecięcia się prostej LL_1

z bokami trójkąta są punktami w nieskończoności; ich współrzędne są odpowiednio

$$0:\frac{1}{b}:-\frac{1}{c}; -\frac{1}{a}:0:\frac{1}{c}; \frac{1}{a}:-\frac{1}{b}:0.$$

W skutek tego punktami λ, λ' będą odpowiednio punkty przecięcia się boku BC z równoległymi do boków AC i AB , poprowadzonymi odpowiednio przez punkty K_c, K_b ; w podobny sposób wyznaczmy punkty μ i μ' , jakoteż punkty ν i ν' . Współrzędne punktów λ, μ, ν są odpowiednio

$$0:bc:a^2, \quad b^2:0:ac, \quad ab:c^2:0,$$

zaś współrzędne punktów λ', μ', ν' odpowiednio

$$0:a^2:bc, \quad ac:0:b^2, \quad c^2:ab:0.$$

Trzy proste $A\lambda, B\mu, C\nu$ przecinają się w jednym punkcie $\omega \left(\frac{b}{c} : \frac{c}{a} : \frac{a}{b} \right)$,

zaś trzy proste $A\lambda', B\mu', C\nu'$ przecinają się w innym punkcie $\omega' \left(\frac{c}{b} : \frac{a}{c} : \frac{b}{a} \right)$.

Punkty ω i ω' nazywają się punktami Brocarda. Dwa te punkty Brocarda i punkt Lemoine'a tworzą szczególną trójkę stałych punktów trójkąta.

3. Prosta łącząca punkty Brocarda nazywa się prostą Brocarda. Jej równanie jest

$$\frac{a^4-b^2c^2}{a}x + \frac{b^4-a^2c^2}{b}y + \frac{c^4-a^2b^2}{c}z = 0. \quad (3)$$

Ponieważ proste $LL_1, \omega\omega'$ i prosta (1) mają się przecinać w jednym punkcie, a prosta LL_1 jest w nieskończoności, zatem prosta Brocarda jest równoległa do prostej (1), t. j. do osi homologii trójkątów ABC i $K_aK_bK_c$.

4. Sześć punktów $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu'$ leży na jednym przecięciu stożkowym $a^2b^2c^2(x^2+y^2+z^2) - bc(a^4+b^2c^2)yz - ca(b^4+a^2c^2)zx - ab(c^4+a^2b^2)xy = 0. \quad (4)$

Z ogólnej teorii przecięć stożkowych wiadomo, że, jeżeli równanie (A) (ust. 4, § I) ma przedstawiać elipsę, hyperbole, lub parabolę, to wyznacznik

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \frac{1}{h_a} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \frac{1}{h_b} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \frac{1}{h_c} \\ \frac{1}{h_a} & \frac{1}{h_b} & \frac{1}{h_c} & 0 \end{vmatrix},$$

gdzie h_a, h_b, h_c oznaczają wysokości trójkąta odniesienia, ma wartość odpowiednio ujemną, dodatnią lub równą zero. W naszym przypadku wyznacznik Δ , utworzony przy pomocy współczynników równania (4), redukuje się do wyrażenia

$$\frac{b^2 c^2}{4h_a^2} \{ (a^4 + b^4 + c^4 + a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2) (a^4 + b^4 + c^4 - 3a^2 b^2 - 3b^2 c^2 - 3c^2 a^2) - 4(b^4 c^4 + c^4 a^4 + a^4 b^4) \}.$$

Ponieważ dla boków każdego trójkąta istnieje nierówność $a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2 b^2 - 2b^2 c^2 - 2c^2 a^2 < 0$, zatem wartość całego wielomianu jest zawsze ujemną. Stąd wynika, że krzywa (4) dla każdego trójkąta jest elipsą. W razie, gdy trójkąt ABC jest równoboczny, krzywa ta jest kołem.

5. Przecięcie stożkowe, opisane na trójkącie danym i przechodzące przez oba punkty Brocarda, jest

$$\frac{a^4 - b^2 c^2}{ax} + \frac{b^4 - a^2 c^2}{by} + \frac{c^4 - a^2 b^2}{cz} = 0. \quad (5)$$

Dla równania tego wyznacznik Δ ustępu poprzedzającego redukuje się do wyrażenia

$$\frac{1}{a^2 h_a^2} \{ (a^4 + b^4 + c^4 + b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2)^2 + 4(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) (a^4 + b^4 + c^4 - b^2 c^2 - c^2 a^2 - a^2 b^2) \}$$

Ponieważ jednak dla boków każdego trójkąta istnieje nierówność $a^4 + b^4 + c^4 > b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2$, zatem wypisany wielomian jest zawsze dodatni, skąd wynika, że przecięcie stożkowe (5) jest zawsze hyperbolą.

Zważmy na to, że gdy ogólne równanie (A) (ust. 4, § I) przedstawia hyperbolę równoboczną, to

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} - 2a_{23} \cos A - 2a_{31} \cos B - 2a_{12} \cos C = 0. \quad (E)$$

Gdybyśmy więc szukali warunku, pod jakim krzywa (5) staje się hyperbolą równoboczną, otrzymalibyśmy równość $a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2 b^2 c^2 = 0$, która jednak istnieje tylko dla trójkąta równobocznego, w przeciwnym bowiem razie zawsze $a^6 + b^6 + c^6 > 3a^2 b^2 c^2$. Lecz gdy mamy trójkąt równoboczny, t. j. kiedy $a = b = c$, z równania (5) otrzymujemy tożsamość; a więc krzywa (5) nigdy nie może być hyperbolą równoboczną.

W przypadku, gdy długość jednego z boków trójkąta odniesienia jest średnią geometryczną długości boków pozostałych, t. j. kiedy np. $a^2 = bc$, wtedy z równania (5) otrzymujemy równania:

$$x = 0, \quad y - z = 0, \quad (6)$$

z których pierwsze przedstawia bok BC , drugie dwusieczną kąta bokowi temu przeciwnego.

Zauważmy tu jeszcze, że współczynniki równania (5) są też same, co w równaniu (3) (ust. 3); zatem przecięcie stożkowe (5) jest zakreślone przez jeden z punktów izogonicznych¹⁾, w razie, gdy pozostały porusza się po prostej Brocarda.

6. W ustępie 6-ym § I przy pewnym, określonym położeniu dowolnie poprowadzonej prostej LL_1 przyjmowaliśmy, że punkt K zmienia swoje położenie, co nas doprowadziło do rozważania pewnych trzech przecięć stożkowych zależnych od położenia prostej LL_1 , a posiadających tę własność, iż oddzielnemu położeniu punktu K odpowiadały trzy proste $\mu\nu, \nu\lambda, \lambda\mu$, styczne do owych przecięć stożkowych w takich punktach, iż, gdy je połączymy z wierzchołkami trójkąta odniesienia, otrzymamy trzy proste przecinające się w jednym punkcie D' . Aby móc wyznaczyć trzy takie punkty na prostych $\mu\nu, \nu\lambda, \lambda\mu$ odpowiadających punktowi Lemoin'e'a i prostej w nieskończoności, musimy na-przód otrzymać przecięcia stożkowe zależne od położenia prostej LL_1 w nieskończoności przy zmianie położenia punktu K . Powołując się na postępowanie w ust. 6-ym § I-go, zauważymy tu, że promienie $K_a C_c, K_b B_b, K_c C_c$ są równoległe do boków odpowiednio AB i CA (ust. 2 § II); szeregi więc punktów μ i ν , na bokach odpowiednio AB i CA , powstałe wskutek przecięcia się ich z temiż prostymi $K_a B_b, K_b C_c$ są podobne. Tak samo można udowodnić, że szeregi ν, λ ; λ, μ są podobne. Stąd zaś wynika, że przecięcia stożkowe przez te szeregi wyznaczone są parabolami takimi, iż do każdej z nich są styczne dwa boki trójkąta ABC w punktach przecięcia się ich z trzecim. Równania ich są

$$a^2 x^2 - 4bcyz = 0 \quad (7)$$

$$b^2 x^2 - 4acxz = 0 \quad (7')$$

$$c^2 z^2 - 4abxy = 0. \quad (7'')$$

Mając te równania, łatwo znajdziemy punkty styczności promieni $\mu\nu, \nu\lambda, \lambda\mu$ pęku drugiego rzędu, odpowiadających położeniu punktu K w punkcie Lemoin'e'a, stycznych do krzywych kolejno (7), (7'), (7''). Równania bowiem tych promieni są odpowiednio

$$-abcx + c^2 y + b^2 z = 0, \quad c^2 x - abcy + a^2 z = 0, \quad b^2 x + a^2 y - abz = 0,$$

¹⁾ Parą punktów izogonicznych nazywamy taką parę punktów P i P' , iż proste, łączące je z którymkolwiek z wierzchołków trójkąta, tworzą z przyległymi bokami równe kąty $\angle PAB = \angle P'AC$ i t. d. Na podstawie tego określenia można łatwo, wyrażając współrzędne tych punktów przez ich odległości od odpowiednich wierzchołków, wyprowadzić inną własność cechującą dwa punkty izogoniczne, a mianowicie, że współrzędne jednego z nich są odwrotnie proporcjonalne względem odpowiednich współrzędnych punktu pozostałego. Stąd zaś wynika, że między punktami izogonicznymi istnieje pokrewieństwo stopnia 2-go, to znaczy, że gdy jeden z nich porusza się po prostej $ax + by + cz = 0$, pozostały zakreśla przecięcie stożkowe $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$, opisane na trójkącie odniesienia.

zatem szukane punkty styczności są

$$\frac{2}{abc} : \frac{1}{c^3} : \frac{1}{b^3}, \quad \frac{1}{c^3} : \frac{2}{abc} : \frac{1}{a^3}, \quad \frac{1}{b^3} : \frac{1}{a^3} : \frac{2}{abc}.$$

Proste więc łączące te punkty z wierzchołkami odpowiednio A, B, C , t. j. proste $\frac{y}{b^3} - \frac{z}{c^3} = 0$, $\frac{x}{a^3} - \frac{z}{c^3} = 0$, $\frac{x}{a^3} - \frac{y}{b^3} = 0$, przecinają się w jednym punkcie D' ($a^3 : b^3 : c^3$).

Ponieważ do parabol (7) jest styczna prosta w nieskończoności kolejno w punktach $-\frac{2}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$, $\frac{1}{a} : -\frac{2}{b} : \frac{1}{c}$, $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : -\frac{2}{c}$, zatem proste łączące te punkty z wierzchołkami odpowiednio A, B, C , t. j. proste

$$by - cz = 0, \quad ax - cz = 0, \quad ax - by = 0$$

są równoległe do osi parabol. Proste te przecinają się w jednym punkcie $E \left(\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} \right)$ t. j. w punkcie ciężkości danego trójkąta.

Jeżeli ogniska parabol (7), (7'), (7'') nazwiemy odpowiednio F_1, F_2, F_3 , to z uwagi na własność ogólną przecięć stożkowych, iż proste, łączące ogniska krzywych stopnia 2-go z jakimkolwiek punktem, tworzą ze stycznymi, poprowadzonymi z tegoż punktu do przecięcia stożkowego, równe kąty i z uwagi na powyżej udowodnioną własność, że proste AE, BE, CE są równoległe do osi parabol (7), mamy

$$\text{kąt } EAC = F_1AB, \quad \text{kąt } EBA = F_2BC, \quad \text{kąt } ECB = F_3CA.$$

Widzimy więc, że proste AF_1, BF_2, CF_3 tworzą z bokami odpowiednio AB, BC, CA kąty równe kątom, które tworzą proste AE, BE, CE odpowiednio z bokami AC, BA, CB . Własność taka, jak wiemy, charakteryzuje proste łączące punkty izogoniczne z wierzchołkami trójkąta. Stąd wynika, że proste AF_1, BF_2, CF_3 przecinają się w punkcie izogonicznym z punktem ciężkości $E \left(\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} \right)$ t. j. w punkcie $a : b : c$. A więc proste łączące ogniska parabol (7), (7'), (7'') z wierzchołkami odpowiednio A, B, C przecinają się w punkcie Lemoine'a.

Wyprowadzimy tu jeszcze kilka ciekawych własności dotyczących parabol (7).

Z podobieństwa owych szeregów $\mu, \nu; \lambda, \lambda'; \lambda, \mu'$ wypada, że, jeżeli przez λ_1, μ_1, ν_1 oznaczymy jakieś trzy sobie odpowiadające ich punkty to $\frac{B\lambda_1}{\lambda_1 C} = \frac{C\mu_1}{\mu_1 A} = \frac{A\nu_1}{\nu_1 B} (\alpha)$. Jeżeli ten z punktów K_α , który służy nam do wyznaczenia

punktów μ_1, ν_1 nazwiemy K_α , środki boków BC, CA, AB oznaczmy odpowiednio przez E_a, E_b, E_c , zaś środki boków $\mu_1 \nu_1, \nu_1 \lambda_1, \lambda_1 \mu_1$ trójkąta $\lambda_1 \mu_1 \nu_1$ nazwiemy kolejno $E_{a_1}, E_{b_1}, E_{c_1}$, mieć będziemy $\nu K_\alpha = A\mu_1 (\beta)$. Z uwagi zaś, że $\frac{C\mu_1}{A\mu_1} = \frac{K_\alpha C}{K_\alpha B} = \frac{B\lambda_1}{\lambda_1 C}$, otrzymamy $K_\alpha C = B\lambda_1 (\gamma)$, a więc także $E_a K_\alpha = E_a \lambda_1 (\gamma')$. Według związku (γ) w trójkącie $\lambda_1 \nu_1 K_\alpha$ prosta $E_a E_{b_1}$ jako prosta łącząca środki jego boków, jest równoległa do prostej $\nu_1 K_\alpha$, a więc także do prostej AC . Stąd wynika, że prosta $E_a E_{b_1}$ schodzi się z prostą $E_a E_c$, zaś odcinek $E_a E_{b_1} = \frac{1}{2} \nu_1 K_\alpha$, a więc także $E_a E_{b_1} = \frac{1}{2} A\mu_1 (\delta)$. Gdy przez E oznaczmy punkt przecięcia się prostych $E_a \mu_1$ i $E_a A$, to z podobieństwa trójkątów $E_a E_{b_1} E$ i $E A \mu_1$ otrzymamy związki $\frac{E_a E}{AE} = \frac{E_a E_{b_1}}{A\mu_1}$, $\frac{E_b E}{E\mu_1} = \frac{E_a E_{b_1}}{A\mu_1}$, lub, skorzystawszy z równości (δ), związki $E_a E = \frac{1}{2} AE, E_b E, E_c E = \frac{1}{2} E\mu_1$, które właśnie określają punkt E jako środek ciężkości w trójkątach ABC i $\lambda_1 \mu_1 \nu_1$. Możemy więc powiedzieć: boki trójkątów wpisanych w dany trójkąt i posiadających z nim wspólny środek ciężkości obwładają trzy parabole (7).

Punkt przecięcia się prostej $\mu_1 \nu_1$ z bokiem BC nazwijmy ρ . Jeżeli ogólnie prostą $\rho \mu_1 \nu_1$ przedstawimy za pomocą równania $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, to współrzędne punktów ρ, μ_1, ν_1 będą odpowiednio $0 : \frac{1}{\beta} : -\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\alpha} : 0 : \frac{1}{\gamma} : \frac{1}{\alpha} : 0$. Weźmy tu proste przechodzące przez punkt stały ρ , t. j. przypuścimy, że wartość stosunku $\beta : \gamma$ jest stała i tylko α jest ilością zmienną, i szukamy jakiemu warunkowi muszą zadość czynić α, β, γ , aby iloczyn odcinków $A\nu_1 \times C\mu_1$ miał wartość największą albo najmniejszą. Z warunków, że

$$-\frac{1}{\alpha} = \frac{C\mu_1 \cdot \sin C}{A\mu_1 \cdot \sin A} = \frac{C\mu_1 \cdot c}{(b - C\mu_1)a} \quad \text{i} \quad -\frac{1}{\alpha} = \frac{b(C - A\nu_1)}{aA\nu_1},$$

znajdziemy $C\mu_1 = \frac{ab\gamma}{a\gamma - c\alpha}$, zaś $A\nu_1 = \frac{bca}{b\alpha - a\beta}$. Mamy zatem iloczyn $A\nu_1 \times C\mu_1$ wyrażony w funkcji α , t. j.

$$A\nu_1 \times C\mu_1 = ab^2 c \gamma \frac{\alpha}{(a\gamma - c\alpha)(b\alpha - a\beta)} = F(\alpha).$$

Funkcja $F(\alpha)$ może otrzymywać wartość największą albo najmniejszą, gdy jej pochodna

$$F'(\alpha) = ab^2 c \gamma \frac{\alpha^2 bc - a^2 \beta \gamma}{(b\alpha - a\beta)^2 (a\gamma - c\alpha)^2}$$

ma wartość (1°) nieskończenie wielką, albo (2°) równą zeru.

1^o) $F(x)$ może mieć wartość nieskończenie wielką, gdy albo a) $bx - ay = 0$; wówczas prosta $\mu_1 \nu_1$ jest równoległa do boku AB ; albo b) $ay - cx = 0$; wówczas prosta $\mu_1 \nu_1$ jest równoległa do boku AC ; albo c) równocześnie $bx - ay = 0$ i $ay - cx = 0$; wówczas prosta $\mu_1 \nu_1$ jest prostą w nieskończoności.

2^o) $F(x)$ może mieć wartość równą zeru a) gdy α jest nieskończenie wielkie; wtenczas z równania $x + \frac{\beta y + \gamma z}{\alpha} = 0$ wynika $x = 0$, co przedstawia bok trójkąta BC ; b) gdy $abc = a^2 \beta \gamma$, czyli, gdy $\frac{\alpha^2}{\beta \gamma} = \frac{a^2}{bc}$; wówczas prosta $\mu_1 \nu_1$ jest styczną do paraboli (7).

Widzimy więc, że, wyjąwszy widoczne przypadki 1^o) a), b); 2^o) a), t. j. gdy prosta $\mu_1 \nu_1$ jest równoległa do którego z boków albo staje się bokiem, z iloczynów odcinków $A\nu_1$, $B\mu_1$, wyznaczanych przez proste przechodzące przez punkt p , tylko iloczyn odcinków odpowiadających stycznej do paraboli (7) ma wartość największą albo najmniejszą.

Okażemy na koniec, że parabole (7), (7'), (7'') przecinają się z sobą w punktach na prostych AE_a , BE_b , CE_c , dzielących je na odcinki w stosunku 1:8. Jakoż, punkty przecięcia się parabol (7') i (7'') będą określone przez wspólnie rozwiązania ich równań. Jako jedno z tych rozwiązań otrzymamy $x_1:y_1:z_1 = 1:0:0$, a więc współrzędne wierzchołka A ; inne rozwiązanie $x_2:y_2:z_2 = \frac{1}{4a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$ przedstawiać będzie pozostały z punktów rzeczywistych przecięcia się tychże parabol. Punkt ten, leżący widocznie na prostej AE_a , nazwijmy P . Jeżeli x_2, y_2, z_2 oznaczać będą długości jego współrzędnych, to

$$\frac{\text{pole } BPE_a}{\text{pole } BPA} = \frac{\frac{a}{2} x_2}{c z_2} = \frac{1}{8}. \quad \text{Z drugiej strony z uwagi, że trójkąty } BPE_a$$

i BPA mają równe wysokości, jest $\frac{\text{pole } BPE_a}{\text{pole } BPA} = \frac{EP}{PA}$. A więc $\frac{EP}{PA} = \frac{1}{8}$.

7. Czyniąc tu przypuszczenie odwrotne przypuszczeniu zrobionemu w ustępie poprzedzającym, t. j. że punkt K pozostaje stałe punktem Lemoine'a, zaś prosta LL_1 zmienia swoje położenie, otrzymamy na bokach trójkąta ABC , wskutek przecięcia się ich z promieniami pęków K_a, K_b, K_c perspektywicznych, trzy szeregi jednokreślne $\mu', \nu'; \nu', \lambda; \lambda', \mu$, wyznaczające nam krzywe

$$bcx^2 - 4a^2yz = 0, \quad (8)$$

$$cay^2 - 4b^2xz = 0, \quad (8')$$

$$abz^2 - 4c^2xy = 0, \quad (8'')$$

do których jest styczna prosta (1), t. j. oś homologii trójkątów ABC i $K_a K_b K_c$, a nadto do każdej z nich są styczne dwa boki trójkąta ABC w punktach przecięcia się ich z trzecim. Środki tych krzywych leżą na prostych łączących środek ciężkości trójkąta odniesienia z jego wierzchołkami.

Mając równania (8), możemy znaleźć współrzędne punktów styczności promieni pęku rzędu 2-go, t. j. prostych μ', ν', λ, μ , stycznych do krzywych (8), a odpowiadających położeniu prostej w nieskończoności i punktowi Lemoine'a. Równania bowiem tych prostych będą odpowiednio

$$b^2c^2x - ab^3y - ac^3z = 0, \quad -a^3bx + a^2c^2y - bc^3z = 0, \quad -a^3cx - b^3cy + a^2b^2z = 0;$$

a więc ich punkty styczności do krzywych (8) będą określone przez stosunki

$$\frac{1}{b^2c^2} : \frac{1}{2ab^3} : \frac{1}{2ac^3}, \quad \frac{1}{2a^3b} : \frac{1}{a^2b^2} : \frac{1}{2bc^3}, \quad \frac{1}{2a^3c} : \frac{1}{2b^3c} : \frac{1}{a^2b^2}.$$

Proste łączące te punkty z wierzchołkami odpowiednio A, B, C przecinają się w jednym punkcie $D\left(\frac{1}{a^3} : \frac{1}{b^3} : \frac{1}{c^3}\right)$, izogonicznym z punktem D' (ust. 6).

Oś homologii trójkątów ABC i $K_a K_b K_c$ jest styczna do krzywych (8), (8'), (8'') odpowiednio w punktach

$$2a : b : c, \quad a : 2b : c, \quad a : b : 2c;$$

a więc trzy proste łączące je z wierzchołkami kolejno A, B, C przecinają się w jednym punkcie $a : b : c$, t. j. w punkcie Lemoine'a.

8. Podobnie, jak w ust. 8-ym § I, oznaczmy punkty przecięcia się prostych $C\omega, A\omega, B\omega$ z prostymi odpowiednio $B\omega', C\omega', A\omega'$ przez A_1, B_1, C_1 (fig. 2); ich współrzędne będą

$$abc : c^3 : b^3, \quad c^3 : abc : a^3, \quad b^3 : a^3 : abc.$$

Ponieważ punkty A_1, B_1, C_1 przecięcia się boków BC, CA, AB z prostą LL_1 są punktami w nieskończoności, zatem proste KA_1, KB_1, KC_1 , które według ustępu 8-go § I-go, przez te punkty przechodzą, są równoległe do boków trójkąta. Inne jego boki przecinają one w sześciu punktach leżących na przecięciu stożków

$$\sum (b^2 + c^2)x^2 - \sum \frac{1}{bc} (a^4 + b^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)yz = 0, \quad (9)$$

gdzie znaki sumy odnoszą się do składników otrzymywanych z wypisanych wskutek zastąpienia wszystkich w nie wchodzących elementów przez odpowiednie w porządku kołowym. Udowodnimy, że równanie (9) jest równaniem koła. Zważmy, że, gdy ogólne równanie (A) (ust. 4 § I) ma przedstawiać koło, to między współczynnikami jego zachodzą związki

$$a_{22}c^2 + a_{33}b^2 - 2a_{33}bc = a_{33}a^2 + a_{11}c^2 - 2a_{13}ca = a_{11}b^2 + a_{22}a^2 - 2a_{12}ab.$$

W naszym przypadku mamy

$$(c^2+a^2)c^2+(a^2+b^2)b^2+a^4+b^2c^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(a^2+b^2+c^2)^2, \text{ i t. d.}$$

warunkowi więc owemu staje się zadość. Koło to (fig. 2), przechodzące przez sześć punktów przecięcia się boków trójkąta z równoległymi do nich poprowadzonymi przez punkt Lemoine'a, nazywa się kołem Lemoine'a. Jego środkiem jest punkt

$$a(a^4-b^2c^2-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2) : b(b^4-a^2c^2-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2) : c(c^4-a^2b^2-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2).$$

9. Trójkąt $A_1B_1C_1$ nazywa się pierwszym trójkątem Brocarda. Zogólnego roztrząsania. (ust. 9 § I), wynika, iż ten pierwszy trójkąt Brocarda jest homologiczny z trójkątem odniesienia; środkiem ich homologii jest punkt $D\left(\frac{1}{a^3} : \frac{1}{b^3} : \frac{1}{c^3}\right)$ (ust. 7), zaś osią homologii prosta

$$\frac{a}{a^4-b^2c^2}x + \frac{b}{b^4-a^2c^2}y + \frac{c}{c^4-a^2b^2}z = 0. \quad (10)$$

10. Trójkąt $A'_1B'_1C'_1$ (fig. 2) wyznaczony przez punkty $A'_1(b^2c^2:ab^3:ac^3)$, $B'_1(a^3b:a^2c^2:bc^3)$, $C'_1(a^3c:b^3c:a^2b^2)$ przecięcia się prostych $B\omega$, $C\omega$, $A\omega$ odpowiednio z prostymi $C\omega'$, $A\omega'$, $B\omega'$ nazywa się drugim trójkątem Brocarda. Z ust. 10-go § I wynika, że ten trójkąt jest homologiczny 1^o) z trójkątem danym; środkiem homologii jest punkt $D'(a^3:b^3:c^3)$; i 2^o) z pierwszym trójkątem Brocarda; środkiem homologii jest punkt $D''\left(\frac{a^4+b^2c^2}{a} : \frac{b^4+a^2c^2}{b} : \frac{c^4+a^2b^2}{c}\right)$.

Wspólną osią homologii dwu tych par trójkątów jest prosta (10). Zważając więc także na to, cośmy wyprowadzili w ustępie poprzedzającym, widzimy, że trzy pary trójkątów homologicznych: trójkąt dany i pierwszy trójkąt Brocarda, trójkąt dany i drugi trójkąt Brocarda, pierwszy i drugi trójkąty Brocarda posiadają wspólną oś homologii (10); stąd zaś wynika, że trzy środki homologii trzech owych par trójkątów, t. j. punkty D , D' , D'' , leżą na jednej prostej; równaniem jej jest

$$a^3(c^6-b^6)x + b^3(a^6-c^6)y + c^3(b^6-a^6)z = 0. \quad (11)$$

11. Przecięcie stożkowe (fig. 2), opisane na pierwszym trójkącie Brocarda i przechodzące przez oba punkty Brocarda, jest

$$abc(x^2+y^2+z^2)-(a^3yz+b^3zx+c^3xy)=0. \quad (12)$$

Postępując podobnie, jak w ust. 8-ym § II, moglibyśmy udowodnić, że równanie (12) przedstawia koło. Koło to, opisane na pierwszym trójkącie Brocarda, nazywa się kołem Brocarda. Z ust. 11-go § I wynika, że biegunową środka homologii D' trójkąta danego i drugiego trójkąta Brocarda, względem koła Brocarda jest prosta Brocarda, zaś biegunem prostej LL_1 t. j. tutaj środkiem koła Brocarda jest punkt Z , którego współrzędnymi są

$$a(a^4-b^2c^2-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2) : b(b^4-a^2c^2-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2) : c(c^4-a^2b^2-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2).$$

Punkt ten otrzymaliśmy już w ust. 8-ym jako środek koła Lemoine'a. A więc koła Lemoine'a i Brocarda są współśrodkowe.

Prosta $D'Z$, której równanie jest

$$\frac{b^2-c^2}{a}x + \frac{c^2-a^2}{b}y + \frac{a^2-b^2}{c}z = 0, \quad (13)$$

przecina prostą Brocarda w punkcie $S[a(b^3+c^3):b(c^3+a^3):c(a^3+b^3)]$, który z punktem G przecięcia się prostych $\omega\omega'$ i LL_1 tworzy parę harmonicznie sprzężoną z parą punktów Brocarda. Ponieważ jednak punkt G jest punktem w nieskończoności, więc punkt S dzieli odcinek $\omega\omega'$ na połowy. Zauważmy nadto, że, ponieważ $D'Z$ przechodzi przez środek koła Brocarda, zaś odcinek $\omega\omega'$ jest cięciwą tegoż koła, zatem $D'Z$ jest prostopadłą do prostej Brocarda. Prosta ta $D'Z$ przecina koło Brocarda w dwu ważnych punktach t. j. w punkcie Lemoine'a i w punkcie O_k , którego współrzędnymi są $a(b^3+c^3-a^3):b(c^3+a^3-b^3):c(a^3+b^3-c^3)$, czyli $\cos A : \cos B : \cos C$, który więc jest środkiem koła opisanego na trójkącie danym. Możemy więc powiedzieć: prosta łącząca punkt Lemoine'a ze środkiem koła opisanego na trójkącie odniesienia jest średnicą koła Brocarda i nadto jest prostopadłą do prostej Brocarda w punkcie dzielącym na połowy jej odcinek zawarty między punktami Brocarda. Na tej własności polega łatwy sposób kreślenia koła Brocarda.

Wypada tu jeszcze zaznaczyć, że przez ten punkt S przechodzi także prosta DE

$$a^3(b^2-c^2)x + b^3(c^2-a^2)y + c^3(a^2-b^2)z = 0, \quad (14)$$

łącząca środek ciężkości E trójkąta danego ze środkiem homologii D trójkąta danego i pierwszego trójkąta Brocarda.

Ponieważ proste KA_1 , KB_1 , KC_1 są równoległe do boków trójkąta danego odpowiednio BC , CA , AB (ust. 8), zaś kąt $KA_1O_k = KB_1O_k = KC_1O_k = \frac{\pi}{2}$, zatem punkty A_1, B_1, C_1 możemy także otrzymać jako punkty przecięcia się prostych równoległych do boków trójkąta odniesienia, poprowadzonych przez punkt Lemoine'a, z prostopadłami do owych boków, przechodzącymi przez środek koła opisanego, t. j. z prostopadłami do boków, wystawionymi w ich środkach.

Jeżeli punkty A_1, B_1, C_1 połączymy z parami wierzchołków odpowiednio B i C , C i A , A i B , otrzymamy trzy trójkąty A_1BC , B_1CA , C_1AB , które z uwagi, że prostopadłe wystawione w środkach E_a, E_b, E_c ich podstaw odpowiednio BC , CA , AB , przechodzą przez przeciwległe wierzchołki A_1, B_1, C_1 , są równoramienne. Udowodnimy jeszcze, że te trzy trójkąty są do siebie podobne.

Zważmy bowiem, że odcinki $E_a A_1, E_b B_1, E_c C_1$ są równe długościom współrzędnych punktu Lemoine'a. Na podstawie związków między współrzędnymi punktu tego (ust. 1 § II) mamy $\frac{E_a A_1}{a} = \frac{E_b B_1}{b} = \frac{E_c C_1}{c} = \frac{2p}{a^2 + b^2 + c^2}$. Lecz $\frac{E_a A_1}{\left(\frac{a}{2}\right)} = \operatorname{tg} A, BC, \frac{E_b B_1}{\left(\frac{b}{2}\right)} = \operatorname{tg} B, CA, \frac{E_c C_1}{\left(\frac{c}{2}\right)} = \operatorname{tg} C, AB$. Stąd wynika, że $\operatorname{tg} A, BC$

$= \operatorname{tg} B, CA = \operatorname{tg} C, AB = \frac{4p}{a^2 + b^2 + c^2}$, czyli, że kąt $\omega'BC = \omega'CA = \omega'AB = \alpha$, a więc że także kąt $\omega CB = \omega BA = \omega AC = \alpha$. Kąt ten α nazywa się kątem Brocarda. Z powyższego związku $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4p}{a^2 + b^2 + c^2}$ możemy wyprowadzić

inne często używane określenia. Mamy bowiem $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{2p} + \frac{b^2}{2p} + \frac{c^2}{2p} \right)$. Lecz $2p = ab \sin C = bc \sin A = ca \sin B$, a więc $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b \sin C} + \frac{b}{c \sin A} + \frac{c}{a \sin B} \right)$. Ponieważ jednak $b \sin C = h_a, c \sin A = h_b, a \sin B = h_c$, gdzie h_a, h_b, h_c oznaczają wysokości trójkąta odniesienia, więc

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c} \right).$$

Gdy przez H_a, H_b, H_c oznaczymy spodki wysokości odpowiednio h_a, h_b, h_c to $a = BH_a + H_a C = h_a (\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C)$, $b = h_b (\operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} A)$, $c = h_c (\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B)$. Stąd wynika, że

$$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C.$$

Zważmy jeszcze że

$$\sin(A - \alpha) = \sin A \sin \alpha (\operatorname{cotg} \alpha - \operatorname{cotg} A) = \sin A \sin \alpha (\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C)$$

czyli

$$\sin(A - \alpha) = \sin \alpha \frac{\sin^2 A}{\sin B \sin C};$$

odpowiednio mieć będziemy

$$\sin(B - \alpha) = \sin \alpha \frac{\sin^2 B}{\sin A \sin C}, \text{ zaś } \sin(C - \alpha) = \sin \alpha \frac{\sin^2 C}{\sin A \sin B}.$$

Mnożąc równości te stronami przez siebie, otrzymamy

$$\sin^3 \alpha = \sin(A - \alpha) \sin(B - \alpha) \sin(C - \alpha).$$

Te dwa ostatnie wzory określające kąt Brocarda przedstawiają pierwszą z własności punktu ω lub ω' , dostrzeżonych przez Clarke'a jeszcze w r. 1849.

12. Gdy punkty przecięcia się koła Brocarda z prostymi AK, BK, CK nazwiemy kolejno A_2, B_2, C_2 , to możemy powiedzieć, że trójkąt $A_2 B_2 C_2$ jest homologiczny z trójkątem odniesienia; środkiem ich homologii jest oczywiście punkt Lemoine'a, zaś osią homologii prosta

$$\frac{a}{-2a^2 + b^2 + c^2}x + \frac{b}{a^2 - 2b^2 + c^2}y + \frac{c}{a^2 + b^2 - 2c^2}z = 0. \quad (15)$$

Trójkąt ten $A_2 B_2 C_2$ jest homologiczny także z pierwszym trójkątem Brocarda, środkiem homologii jest środek ciężkości E trójkąta odniesienia, zaś osią homologii prosta

$$a(b^2 - c^2)x + b(c^2 - a^2)y + c(a^2 - b^2)z = 0. \quad (16)$$

Ponieważ nadto oba trójkąty $A_1 B_1 C_1$ i $A_2 B_2 C_2$ są wpisane w toż samo koło Brocarda, zatem prosta (16) jest zarazem biegunową środka ciężkości E względem tego koła.

13. Z ust. 15-go § I wynika, że proste $A_1 E, B_1 E, C_1 E$, łączące punkt E z wierzchołkami trójkąta $A_1 B_1 C_1$, przecinają jego boki przeciwległe w punktach α, β, γ , tworzących z punktami przecięcia się tychże boków z prostą LL_1 t. j. z punktami kolejno α', β', γ' pary harmonicznie sprzężone z parami wierzchołków $B_1, C_1; C_1, A_1; A_1, B_1$. Ponieważ jednak prosta LL_1 jest w nieskończoności, skąd oczywiście wynika, że także punkty α', β', γ' są punktami w nieskończoności, więc punkty α, β, γ dzielą boki trójkąta $A_1 B_1 C_1$ na połowy. A więc punkt E , jako punkt przecięcia się prostych łączących wierzchołki trójkąta $A_1 B_1 C_1$ ze środkami przeciwległych jego boków, będzie środkiem ciężkości tego trójkąta. Trójkąt zatem odniesienia i pierwszy trójkąt Brocarda posiadają wspólny środek ciężkości.

14. Ponieważ punkty A_a, B_b, C_c (ust. 2 § II) są w nieskończoności, zatem punkty A_a', B_b', C_c' , tworzące z powyższymi pary harmonicznie sprzężone z parami wierzchołków odpowiednio $B, C; C, A; A, B$, będą środkami E_a, E_b, E_c boków trójkąta ABC . W skutek tego, aby, odpowiednio do ust. 14-go § I, otrzymać punkty J_a i J_b , postąpimy w ten sposób: przez wierzchołek B poprowadzimy równoległą do prostej $C_a E_a$; punkt przecięcia się jej z prostą CC_2 będzie punktem J_a ($a : b : -\frac{c}{2}$). Punkt zaś przecięcia się prostej, poprowadzonej przez punkt J_a i równoległej do boku BA , z prostą CE_c , będzie punktem J_b ($\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{-c}{a^2 + b^2}$). Odpowiednio postępując, znajdziemy punkty J_a ($-\frac{a}{2} : b : c$), J_b ($a : -\frac{b}{2} : c$); J_c ($\frac{-a}{b^2 + c^2} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$), I_b ($\frac{1}{a} : \frac{-b}{a^2 + c^2} : \frac{1}{c}$). Przecięcie stożkowe, przez te sześć punktów przechodzące, jest przedstawione zapomocą równania

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0, \quad (17)$$

a więc jest kołem opisanem na trójkącie odniesienia. Środkiem jego jest punkt O_k (ust. 11).

Zważmy tu, że punkty I_a, I_b, I_c leżą na prostych, łączących środek ciężkości trójkąta odniesienia z jego wierzchołkami, zaś punkty J_a, J_b, J_c na prostych łączących punkt Lemoine'a z temiż wierzchołkami trójkąta. Jeżeli więc przez punkty przecięcia się koła, opisanego na trójkącie odniesienia, z prostymi, łączącymi jego środek ciężkości z wierzchołkami, poprowadzimy równoległe do boków trójkąta tymże wierzchołkom przeciwnych, otrzymamy trzy punkty przecięcia się wspomnianego koła z owymi równoległymi takie, iż trzy proste łączące je z przeciwnymi wierzchołkami trójkąta przecinają się w punkcie Lemoine'a. Własność ta służyć może do wyznaczenia punktu Lemoine'a w danym trójkącie.

15. Odpowiednio do tego, cośmy wyprowadzili w ust. 15-ym § I, mamy: styczne do koła, opisanego na trójkącie odniesienia, w jego wierzchołkach tworzą trójkąt $A''B''C''$ homologiczny z trójkątem odniesienia i trójkątem $K_aK_bK_c$ (ust. 2). Wspólnym środkiem homologii jest punkt Lemoine'a, zaś osią homologii prosta (1). Prosta ta jest zarazem biegunową punktu Lemoine'a względem koła ABC , a więc jest prostą do prostej KO_k , jako prostą łączącą biegun jej K ze środkiem koła O_k . Punkt przecięcia się dwu tych prostych nazwijmy R . Gdy z punktu R poprowadzimy styczne do koła ABC , to punkty styczności T_1 i T_2 leżeć będą na biegunowej punktu R względem tegoż koła, a więc na prostą do prostej KO_k w punkcie K , jako biegunie prostej (1) względem koła ABC . Z trójkąta zatem RT_1O_k mamy $RT_1^2 = RK \cdot RO_k$. Gdy zaś punkty przecięcia się prostej KO_k z kołem ABC nazwijmy m i m_1 , otrzymamy $RT_1^2 = Rm \cdot Rm_1$. Z dwu tych związków okazuje się, iż $RK \cdot RO_k = Rm \cdot Rm_1$. Widzimy więc, że punkt R leży na osi pierwiastkowej koła ABC i koła zakreślonego na KO_k jako na średnicy, t. j. koła Brocarda (ust. 11). Prostopadła więc w tym punkcie R do prostej KO_k t. j. powyższa oś homologii trójkątów ABC , $K_aK_bK_c$, $A''B''C''$ jest osią pierwiastkową dwu kół: koła opisanego na trójkącie odniesienia i koła Brocarda.

Współrzędne punktów A'', B'', C'' są odpowiednio

$$-a : b : c, \quad a : -b : c, \quad a : b : -c. \quad (18)$$

16. Przecięcie stożkowe, wpisane w trójkąt odniesienia i zarazem opisane na trójkącie $K_aK_bK_c$, jest

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 0. \quad (19)$$

Opierając się na tej własności przecięć stożkowych, że prosta, poprowadzona

z ogniska do punktu przecięcia się dwu stycznych, jest dwusieczną kąta utworzonego przez promienie wodzące, poprowadzone z tegoż ogniska do obu punktów styczności, udowodnimy, iż punkty Brocarda są ogniskami przecięcia (19). Okażemy mianowicie, że proste, łączące jeden z punktów Brocarda z wierzchołkami A, B, C , są dwusiecznymi kątów utworzonych przez proste, łączące ten punkt Brocarda z parami punktów odpowiednio K_c i K_b , K_a i K_c , K_b i K_a styczności par boków schodzących się w owych wierzchołkach.

Zważmy, że styczna kąta $\Delta \omega K_c$, utworzonego przez proste $\Delta \omega$ i ωK_c , których równania są odpowiednio

$$a^2y - bcx = 0, \quad abcx - a^2cy + b(c^2 - b^2)z = 0,$$

po skróceniu przez wielomian $b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2$ jest $\operatorname{tg} \Delta \omega K_c = \frac{\sin B}{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}}$

$= \operatorname{tg} B$, zaś styczna kąta $\Delta \omega K_b$, utworzonego przez prostą $\Delta \omega$ i prostą ωK_b przedstawioną przez równanie

$$-b^2cx + a(b^2 - a^2)y + abcx = 0,$$

jest $\operatorname{tg} \Delta \omega K_b = -\operatorname{tg} B$. W ten sam sposób znajdziemy $\operatorname{tg} B \omega K_a = \operatorname{tg} C$, zaś $\operatorname{tg} B \omega K_c = -\operatorname{tg} C$ i t. d. Z tych równości wynika, że, licząc kąty w tym samym kierunku,

$$\text{kąt } K_b \omega A = \Delta \omega K_c = B, \text{ kąt } K_c \omega B = B \omega K_a = C,$$

$$\text{kąt } K_a \omega C = C \omega K_b = A \text{ i t. d., c. n. d.}$$

Względem rozważanego tu przecięcia stożkowego (19) biegunową punktu Lemoine'a jest podobnie, jak względem koła ABC , prosta (1).

17. Przecięcie stożkowe, opisane na trójkącie odniesienia a przechodzące przez środek ciężkości E tegoż trójkąta i środek homologii D trójkątów odniesienia i pierwszego trójkąta Brocarda, jest przedstawione przez równanie

$$\frac{b^2 - c^2}{ax} + \frac{c^2 - a^2}{by} + \frac{a^2 - b^2}{cz} = 0. \quad (20)$$

Postępując podobnie, jak w ust. 5-ym § II, moglibyśmy udowodnić, że krzywa (20) jest hyperbolą. Ponieważ nadto współczynniki tegoż równania czynią zażość warunkowi (E), zatem przecięcie stożkowe (20), opisane na trójkącie odniesienia i przechodzące przez punkty E i D , jest hyperbolą równoboczną.

Punktami styczności stycznych poprowadzonych z punktu Lemoine'a do hyperboli (20) są punkty $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$ t. j. środek ciężkości E i punkt

$O_k \left(\frac{1}{a(b^2 + c^2 - a^2)} : \frac{1}{b(a^2 + c^2 - b^2)} : \frac{1}{c(a^2 + b^2 - c^2)} = \frac{1}{\cos A} : \frac{1}{\cos B} : \frac{1}{\cos C} \right)$, który jest punktem przecięcia się wysokości trójkąta odniesienia. Hyperbola

więc (20) przechodzi także przez punkt przecięcia się wysokości trójkąta odniesienia. Z powyższego okazuje się nadto, że biegunową punktu Lemoine'a względem hyperboli (20) jest prosta łącząca środek ciężkości E z punktem przecięcia się wysokości w trójkącie odniesienia. Hyperbola (20) przechodzi jeszcze przez następujące ważne punkty: przez punkt Z'

$$\left(\frac{1}{a(a^4 - b^2c^2 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2)} : \frac{1}{b(b^4 - a^2c^2 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2)} : \frac{1}{c(c^4 - a^2b^2 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2)} \right)$$

t. j. punkt izogoniczny ze środkiem koła Lemoine'a; przez punkt

$S' \left(\frac{1}{a(b^2 + c^2)} : \frac{1}{b(a^2 + c^2)} : \frac{1}{c(a^2 + b^2)} \right)$, izogoniczny z punktem S (ust. 12) i przez punkt $\frac{b+c}{a} : \frac{a+c}{b} : \frac{a+b}{c}$, który, jak to niżej okażemy, jest środkiem ciężkości

obwodu trójkąta odniesienia. Jakoż, ponieważ odległości środków ciężkości boków CA i AB od boku BC są równe $\frac{h_a}{2}$, więc według znanej własności środka ciężkości układu punktów, odległość szukanego środka ciężkości całego

obwodu trójkąta od boku BC będzie $x = \frac{\frac{h_a}{2} + c \cdot \frac{h_a}{2}}{a+b+c} = (b+c) \frac{h_a}{2(a+b+c)}$.

Odpowiednio odległości y i z szukanego środka ciężkości od boków CA i AB będą wyrażone przez $y = (c+a) \frac{h_b}{2(a+b+c)}$, $z = (a+b) \frac{h_c}{2(a+b+c)}$. Stąd wynika, że $x:y:z = (b+c)h_a : (c+a)h_b : (a+b)h_c$. Wiadomo jednak, że $h_a:h_b:h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$, a więc $x:y:z = \frac{b+c}{a} : \frac{c+a}{b} : \frac{a+b}{c}$.

Środkiem hyperboli (20) jest punkt $\frac{(c^2 - b^2)^2}{a} : \frac{(a^2 - c^2)^2}{b} : \frac{(b^2 - a^2)^2}{c}$.

Dalsze badanie hyperboli (20) znacznie się uprości, jeżeli równaniu jej (20) nadamy inną postać. Zważmy, że

$$\sin(B-C) = \frac{\sin A}{a} \frac{b^2 - c^2}{a}, \quad \sin(C-A) = \frac{\sin B}{b} \frac{c^2 - a^2}{b}, \quad \sin(A-B) = \frac{\sin C}{c} \frac{a^2 - b^2}{c}.$$

Zamiast więc równania (20) możemy wziąć równanie

$$\frac{\sin(B-C)}{x} + \frac{\sin(C-A)}{y} + \frac{\sin(A-B)}{z} = 0,$$

albo w postaci wyznacznika równanie

$$\begin{vmatrix} \sin A \cos A & \frac{1}{x} \\ \sin B \cos B & \frac{1}{y} \\ \sin C \cos C & \frac{1}{z} \end{vmatrix} = 0;$$

równanie zaś to możemy uważać jako wynik rugowania wielkości φ i ρ z równań

$$\sin A \cos \varphi - \cos A \sin \varphi = \frac{\rho}{x}$$

$$\sin B \cos \varphi - \cos B \sin \varphi = \frac{\rho}{y}$$

$$\sin C \cos \varphi - \cos C \sin \varphi = \frac{\rho}{z},$$

lub, co na jedno wychodzi, z równań

$$\sin(A-\varphi) = \frac{\rho}{x}$$

$$\sin(B-\varphi) = \frac{\rho}{y}$$

$$\sin(C-\varphi) = \frac{\rho}{z}.$$

(20')

Z równań (20') wynika, że współrzędne jakiegokolwiek punktu na hyperboli, nazwijmy go π' , możemy przedstawić zapomocą układu $x:y:z = \frac{1}{\sin(A-\varphi)} : \frac{1}{\sin(B-\varphi)} : \frac{1}{\sin(C-\varphi)}$.

Aby znaleźć znaczenie wprowadzonego kąta zmiennego φ , zależnego od położenia punktu π' , postąpimy w ten sposób: Połączmy punkt π' z którymkolwiek z wierzchołków trójkąta odniesienia n. p. z wierzchołkiem A . Punkt przecięcia się prostej $A\pi'$ t. j. prostej $y \sin(B-\varphi) - z \sin(C-\varphi) = 0$ z prostopadłą do boku BC wystawioną w jego środku t. j. z prostą $E_a O_a$, której równaniem jest $\frac{\sin 2B - \sin 2C}{2} x - \cos A \sin B y - \cos A \sin C z = 0$, nazwijmy m' .

Z jego współrzędnych $\sin \varphi : \sin(C-\varphi) : \sin(B-\varphi)$ okazuje się, że proste łączące go z wierzchołkami B i C tworzą z bokiem BC kąty sobie równe, mianowicie kąt $m'BC = m'CB = \varphi$. Podobnie, gdy punkt przecięcia się prostej $B\pi'$ z prostopadłą do boku AC , wystawioną w jego środku E_b , nazwijmy n' , zaś przez p' oznaczmy punkt przecięcia się prostej $C\pi'$ z prostopadłą do boku AB , wystawioną w jego środku E_c , to z uwagi, że współrzę-

dne tych punktów n' i p' będą odpowiednio $\sin(C-\varphi) : \sin\varphi : \sin(A-\varphi)$, $\sin(B-\varphi) : \sin(A-\varphi) : \sin\varphi$, kąt $n'CA = n'AC = p'AB = p'BA = \varphi$. Z tych równości kątów wynika, że trójkąty $m'BC$, $n'CA$, $p'AB$ są równoramienne i podobne. Stąd zaś wypada naodwrot, że, jeżeli na bokach trójkąta danego, jako na podstawach, wystawimy trójkąty równoramienne podobne, to każde trzy proste, łączące wierzchołki trzech takich trójkątów sobie odpowiadających z przeciwległymi wierzchołkami trójkąta danego, przecinają się w jednym punkcie π' , miejscem zaś geometrycznym takich punktów π' jest hyperbola równoboczna (20). Tę ważną własność spopatrzył Kiepert w r. 1869 (Nouv. Ann.) i dlatego to nazwał Neubergerową hyperbolę hyperbolą Kieperta.

Oczywiście, że kąt zmienny φ może przybierać wszystkie wartości od 0 do 2π , to znaczy, że owe trójkąty mogą być kreślone na bokach trójkąta danego albo wewnątrz albo zewnątrz.

Gdy punkt na hyperboli odpowiadający kątowi $2\pi - \varphi$ nazwiemy π'' , to z uwagi, że jego współrzędne będą $\frac{1}{\sin(A+\varphi)} : \frac{1}{\sin(B+\varphi)} : \frac{1}{\sin(C+\varphi)}$, prostą łączącą go z punktem π' (odpowiadającym kątowi φ) będziemy mogli przedstawić zapomocą równania

$$x \sin(B-C) (\cos^2\varphi - \cos^2A) + y \sin(C-A) (\cos^2\varphi - \cos^2B) + z \sin(A-B) (\cos^2\varphi - \cos^2C) = 0,$$

czyli

$$\cos^2\varphi [\sin(B-C)x + \sin(C-A)y + \sin(A-B)z] - [\sin(B-C)\cos^2Ax + \sin(C-A)\cos^2By + \sin(A-B)\cos^2Cz] = 0$$

Z równania zaś tego okazuje się, że prosta $\pi'\pi''$ przechodzi przez punkt przecięcia się prostej

$$\sin(B-C)x + \sin(C-A)y + \sin(A-B)z = 0, \quad (21)$$

a więc prostą łączącą punkt Lemoine'a ($\sin A : \sin B : \sin C$) ze środkiem koła opisanego na trójkącie ABC t. j. z punktem $O_k(\cos A : \cos B : \cos C)$, — z prostą

$$\sin(B-C)\cos^2Ax + \sin(C-A)\cos^2By + \sin(A-B)\cos^2Cz = 0,$$

więc z prostą łączącą punkt Lemoine'a z punktem przecięcia się wysokości t. j. z punktem $O'_k(\frac{1}{\cos A} : \frac{1}{\cos B} : \frac{1}{\cos C})$. Punktem więc tym przecięcia się jest tu oczywiście punkt Lemoine'a; a zatem proste łączące punkty hyperboli Kieperta odpowiadające kątowi φ i $2\pi - \varphi$, przecinają się w jednym punkcie Lemoine'a.

Punkty przecięcia się ramion Bp' i Cn' , Cm' i Ap' , An' i Bm' nazwijmy kolejno m_1 , n_1 , p_1 ; ich współrzędne są odpowiednio

$$\frac{1}{\sin\varphi} : \frac{1}{\sin(C-\varphi)} : \frac{1}{\sin(B-\varphi)}, \quad \frac{1}{\sin(C-\varphi)} : \frac{1}{\sin\varphi} : \frac{1}{\sin(A-\varphi)},$$

$$\frac{1}{\sin(B-\varphi)} : \frac{1}{\sin(A-\varphi)} : \frac{1}{\sin\varphi}.$$

Równania więc prostych Am_1 , Bn_1 , Cp_1 są odpowiednio

$$y \sin(C-\varphi) - z \sin(B-\varphi) = 0, \quad x \sin(C-\varphi) - z \sin(A-\varphi) = 0,$$

$$y \sin(B-\varphi) - z \sin(C-\varphi) = 0;$$

a zatem te trzy proste przecinają się widocznie w jednym punkcie $x : y : z = \sin(A-\varphi) : \sin(B-\varphi) : \sin(C-\varphi)$, który, jak widzimy, jest izogoniczny z punktem π' na hyperboli, odpowiadającym temu samemu kątowi φ . Punkt ten nazwijmy π_1 . Uważając $x : y : z$ za współrzędne bieżące i rugując z dwu ostatnich związków zmienny kąt φ , otrzymamy równanie

$$\sin(B-C)x + \sin(C-A)y + \sin(A-B)z = 0$$

miejsca geometrycznego punktu π_1 . Równanie to jest toż samo, co równanie (21). Możemy więc powiedzieć: gdy punkt π' porusza się po hyperboli Kieperta, punkt z nim izogoniczny π_1 zakreśla prostą, przechodzącą przez punkt Lemoine'a i środek koła opisanego na trójkącie odniesienia.

Podamy na koniec wartości kąta φ odpowiadające niektórym ważniejszym punktom hyperboli i z nimi izogonicznym punktom prostej KO_k :

a) Gdy $\varphi = A$, $\varphi = B$, $\varphi = C$, punkt π' schodzi się z wierzchołkami trójkąta danego kolejno A , B , C , zaś punkt π_1 z punktami przecięcia się prostej KO_k z bokami owym wierzchołkom przeciwległymi.

b) Gdy $\varphi = 0$, punkt $\pi'(\frac{1}{\sin A} : \frac{1}{\sin B} : \frac{1}{\sin C})$ jest środkiem ciężkości, zaś punkt $\pi_1(\sin A : \sin B : \sin C)$ jest punktem Lemoine'a.

c) Gdy $\varphi = \alpha$, gdzie α jest kątem Brocarda, punkt π' ma za współrzędne układ $\frac{1}{\sin(A-\alpha)} : \frac{1}{\sin(B-\alpha)} : \frac{1}{\sin(C-\alpha)}$ czyli z uwagi, że $\sin(A-\alpha) = \frac{\sin\alpha \cdot \sin^2A}{\sin A \sin B \sin C}$ i t. d. (ust. 11), układ $\frac{1}{\sin^3A} : \frac{1}{\sin^3B} : \frac{1}{\sin^3C}$ czyli $\frac{1}{a^3} : \frac{1}{b^3} : \frac{1}{c^3}$) a więc wówczas punkt π' schodzi się z punktem D (ust. 7). Punkt π_1 przypada wtedy w punkcie $D'(a^3 : b^3 : c^3)$ (ust. 6).

d) Gdy $\varphi = 2\pi - \alpha$, współrzędnymi punktu π' są $\frac{1}{\sin(A+\alpha)} : \frac{1}{\sin(B+\alpha)} : \frac{1}{\sin(C+\alpha)}$ czyli z uwagi, że $\sin(A+\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\sin A \sin B \sin C} \cdot \sin A (\sin^2B + \sin^2C)$ i t. d., $\frac{1}{\sin A (\sin^2B + \sin^2C)} : \frac{1}{\sin B (\sin^2C + \sin^2A)} : \frac{1}{\sin C (\sin^2A + \sin^2B)}$, czyli $\frac{1}{a(b^2+c^2)} : \frac{1}{b(c^2+a^2)} : \frac{1}{c(a^2+b^2)}$. Punkt π' jest więc wówczas punktem S' , izogoniczny zaś z nim punkt π_1 jest punktem S (ust. 11).

e) Gdy $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$, punkt π' jest przedstawiony przez układ $\frac{1}{\cos(A+\alpha)} : \frac{1}{\cos(B+\alpha)} : \frac{1}{\cos(C+\alpha)}$ lub z uwagi, że $\cos(A+\alpha) = \frac{\sin \alpha}{a^2+b^2+c^2} a [b^4+c^4 - a^2b^2 - a^2c^2]$ i t. d., przez układ

$$\frac{1}{a(b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2)} : \frac{1}{b(a^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2)} : \frac{1}{c(a^4+b^4-a^2b^2-b^2c^2)}.$$

Punkt ten nazywa się punktem Tarry'ego leży on także na kole ABC . Odpowiadający punkt π_1 ma współrzędne $a(b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2) : b(a^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2) : c(a^4+b^4-a^2b^2-b^2c^2)$.

f) Gdy $\varphi = \frac{3}{2}\pi + \alpha$, współrzędnymi punktu π' są $\frac{1}{\cos(A-\alpha)} : \frac{1}{\cos(B-\alpha)} : \frac{1}{\cos(C-\alpha)}$ lub, ponieważ $\cos(A-\alpha) = -\frac{\sin \alpha}{a^2+b^2+c^2} a (a^4-b^2c^2-a^2b^2-b^2c^2 - c^2a^2)$ i t. d., $\frac{1}{a(a^4-b^2c^2-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2)} : \frac{1}{b(b^4-a^2c^2-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2)} : \frac{1}{c(c^4-a^2b^2-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2)}$. Punkt więc π' schodzi się z punktem Z' ; zaś punkt π_1 jest punktem $Z[a(a^4-b^2c^2-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2) : b(b^4-a^2c^2-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2) : c(c^4-a^2b^2-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2)]$, t. j. środkiem kół spółśrodkowych Lemoine'a i Brocarda (ust. 8, 11).

g) Gdy $\varphi = \frac{\pi}{2}$, punkt $\pi' \left(\frac{1}{\cos A} : \frac{1}{\cos B} : \frac{1}{\cos C} \right)$ schodzi się z punktem przecięcia się wysokości, zaś punkt π_1 ze środkiem koła opisanego na trójkącie odniesienia.

h) Gdy $\varphi = \frac{5}{3}\pi$, punkt π' jest określony przez układ $\frac{1}{\sin(A+\frac{\pi}{3})} : \frac{1}{\sin(B+\frac{\pi}{3})} : \frac{1}{\sin(C+\frac{\pi}{3})}$. Punkt ten, jak to łatwo okazać można, jest takim punktem, iż kąty, które tworzą z sobą proste łączące go z wierzchołkami, są sobie równe.

i) Gdy $\varphi = \arctg \frac{4p}{s^2}$, gdzie p oznacza pole trójkąta, zaś $s = a+b+c$ obwód jego, to $\sin(A-\varphi) = \cos \varphi \left(\sin A - \frac{4p}{s^2} \cos A \right) = \frac{\cos \varphi}{s^2} (\sin A \cdot s^2 - 2bc \sin A \cos A) = \frac{2\cos \varphi}{s^2} \cdot \sin A(a+b)(a+c)$. Odpowiednio otrzymamy $\sin(B-\varphi) = \frac{2\cos \varphi}{s^2} \sin B(a+b)(b+c)$, $\sin(C-\varphi) = \frac{2\cos \varphi}{s^2} \sin C(a+c)(b+c)$. Wówczas więc współrzędnymi

punktu π' są $\sin A(a+b)(a+c) : \sin B(a+b)(b+c) : \sin C(a+c)(b+c)$ czyli $\frac{b+c}{a} : \frac{c+a}{b} : \frac{a+b}{c}$. A zatem punkt π' jest wtedy środkiem ciężkości obwodu trójkąta.

18. Mając dany punkt Lemoine'a i prostą w nieskończoności, możemy otrzymać współrzędne pierwszego z punktów Brocarda, t. j. punktu ω , dzieląc wielkości a, b, c , poczynając od trzeciej, przez też same wielkości, poczynając od drugiej. Szukając zaś punktów, z którychby każdy powstawał z poprzedzającego w taki sposób w jaki z punktu Lemoine'a powstaje pierwszy punkt Brocarda ω , otrzymamy peryod złożony z sześciu tylko różnych od siebie punktów: $K, \omega, F, D, W, \omega'$; $K, \dots$, gdzie K jest punktem Lemoine'a; ω punktem Brocarda; $F \left(\frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2} : \frac{1}{c^2} \right)$ takim punktem, iż proste łączące go z wierzchołkami trójkąta danego dzielą jego przeciwległe boki na odcinki odwrotnie proporcjonalne względem boków przyległych; punkt D jest środkiem homologii pierwszego trójkąta Brocarda i trójkąta danego; punkt W jest przedstawiony przez układ $(bc^3 : ca^3 : ab^3)$; zaś punkt ω' jest drugim z punktów Brocarda.

Ten sam peryod tylko w odwrotnym porządku otrzymalibyśmy, biorąc punkty, z którychby każdy powstawał z poprzedzającego w taki sposób, w jaki ω' powstaje z punktu Lemoine'a.

§ III.

1. Dowiedzimy naprzód następujących własności: prosta równoległa do jednego z boków trójkąta $A''B''C''$ (ust. 15 § II) tworzy z dwoma bokami trójkąta ABC , schodzącymi się w wierzchołku leżącym na obranym boku trójkąta $A''B''C''$, kąty równe kątowi trójkąta ABC , które tworzą też dwa jego boki, ale wzięte w odwrotnym porządku, z boki pozostałym, zaś prosta łącząca powyższy wierzchołek trójkąta ABC z punktem Lemoine'a, dzieli na połowy odcinek owej prostej równoległej do boku trójkąta $A''B''C''$, zawarty między rozważanymi dwoma bokami trójkąta ABC .

Jakoż, przez wierzchołek A'' trójkąta $A''B''C''$ poprowadźmy równoległą do boku $B''C''$ i punkty przecięcia się jej z bokami AB i AC nazwijmy odpowiednio B''' , C''' . Wówczas kąt $A''B''B''' = BAC' = C$, zaś kąt $A''C''C''' = CAB' = B$. Ponieważ nadto kąt $A''BB''' = C$, zaś kąt $A''CC''' = B$, więc trójkąty $C'''A''C$ i $A''B''B$ są równoramienne, a zatem $C'''A'' = CA''$, $A''B = A''B'''$. Że zaś $CA'' = A''B$, jako odcinki stycznych poprowadzonych z punktu A'' do koła ABC , więc $C'''A'' = A''B'''$. Widzimy więc, że prosta $A''B'''$ tworzy z bokami AB i AC kąty równe kątowi odpowiednio C i B , zaś prosta AA'' , która, jak wiemy z ust. 15-go § II, przechodzi przez punkt Lemoine'a, przecina tę prostą $A''B'''$ w takim punkcie A' , iż $A''B''' = A''C'''$. Oczywiście, że teżsame własności posiadają będą proste równoległe do prostej $A''B'''$ czyli do boku $B''C''$.

2. Weźmy trójkąt $A'B'C'$ homotetyczny z trójkątem $A''B''C''$ i taki, iżby środkiem podobieństwa tych dwu trójkątów był punkt Lemoine'a. Stąd bezpośrednio wynika, że trójkąt $A'B'C'$ jest homologiczny z trójkątem ABC , a środkiem ich homologii jest punkt Lemoine'a.

Punkty przecięcia się każdego z boków $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ z trzema bokami BC , CA , AB nazwiemy odpowiednio A_c' , A_b' , A_a' ; B_a' , B_b' , B_c' ; C_a' , C_b' , C_c' . Wówczas punkty A_a' , B_b' , C_c' wyznaczają nam oś homologii trójkątów ABC i $A'B'C'$, zaś z twierdzenia udowodnionego w ustępie poprzedzającym wynika, 1° że boki trójkąta $A'B'C'$ tworzą z bokami trójkąta ABC kąty $A_c'A_b'A_a' = B_b'B_a'B_c' = C$, i t. d. i 2° że, gdy punkty przecięcia się prostych AK , BK , CK z bokami odpowiednio $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ nazwiemy σ , β , γ , to

$$\alpha A_c' = \alpha A_c', \quad \beta B_c' = \beta B_a', \quad \gamma C_a' = \gamma C_b'. \quad (1)$$

Z podobieństwa dwu par trójkątów $\alpha KC'$ i AKC'' ; $C'K\beta$ i $C''KB$ mamy

$$K\alpha : KA = K\beta : KB, \quad (2)$$

skąd się okazuje, że prosta $\alpha\beta$ jest równoległa do boku AB . Ponieważ nadto $\alpha A_b' = \alpha A_c'$, $\beta B_c' = \beta B_a'$ t. j. ponieważ prosta $A_b'B_a'$ jest równoległa do boku AB i ponieważ kąt $B_c'A_c'A_b' = A_c'B_b'B_a' = \pi - C$, zatem czworobok $A_c'A_b'B_b'B_c'$ jest trapezem równoramiennym, a więc $A_b'A_c' = B_b'B_a'$. Podobnie postępując, moglibyśmy udowodnić, że czworobok $A_c'A_b'C_c'C_b'$ jest trapezem równoramiennym, a więc że $C_a'C_b' = A_b'A_c'$. Mamy zatem

$$A_b'A_c' = B_c'B_a' = C_a'C_b',$$

a więc odcinki boków trójkąta $A'B'C'$ zawarte między bokami trójkąta ABC są sobie równe.

Na trapezie $A_c'A_b'B_b'B_c'$ opiszmy koło i nazwijmy je Ω . Wówczas z uwagi, że w czworoboku $B_c'A_c'A_b'C_b'$, mającym trzy wierzchołki wspólne z poprzedzającym, kąt $B_c'A_c'A_b' = \pi - C$, zaś jemu przeciwległy kąt $B_b'C_b'A_b' = C$, t. j. że suma kątów przeciwległych $B_c'A_c'A_b' + B_b'C_b'A_b' = \pi$, wynika, że owo koło Ω przechodzi także przez punkt C_b' . Biorąc na koniec trapez $C_b'C_a'B_b'B_c'$, udowodnilibyśmy, że także punkt C_a' leży na kole Ω . Sześć więc punktów przecięcia się boków trójkąta ABC z bokami trójkąta $A'B'C'$ leży na jednym kole Ω .

W punkcie α wystawmy prostopadłą do boku $C'B'$ czyli równoległą do prostej AO_k , gdzie O_k jest środkiem koła ABC . Punkt przecięcia się tej prostej z prostą KO_k nazwijmy Z_1 ; wtedy $K\alpha : K\alpha = KO_k : KZ_1$. Prowadząc podobnie prostopadłą w punkcie β do prostej $C'A'$ i oznaczając punkt przecięcia się jej z prostą KO_k przez Z_2 , otrzymamy związek $K\beta : K\beta = KO_k : KZ_2$. Zważając jednak na związek (2), mamy $KZ_1 = KZ_2$. Widzimy więc, że punkt przecięcia się prostopadłych do cięciw $A_c'A_b'$, $B_c'B_a'$ wyprowadzonych z ich środków, t. j. środek koła Ω , leży na prostej KO_k .

Z podobieństwa par trójkątów $A_c'A_c'C_a'$ i $A_a'A_b'C$, $A_a'A_b'C$ i $A_a'A_b'B_c'$ mamy $A_c'A_c' : A_c'C_a' = A_a'B_c' : A_a'B$ czyli $A_c'A_c' : A_c'C_a' = A_a'B_c' : A_a'B$. Podobnie moglibyśmy otrzymać równość $B_b'B_a' : B_b'B_c' = B_b'A_b' : B_b'C'$. Z dwu tych równości wynika, że prosta $A_a'B_b'$, t. j. oś homologii trójkątów ABC i $A'B'C'$, jest osią pierwiastkową kół Ω i ABC .

Zauważmy tu jeszcze, że czworoboki $BCA_b'A_c'$, $CAB_c'B_a'$, $AB C_a'C_b'$ można wpisać w koła, które nazwiemy odpowiednio Ω_a , Ω_b , Ω_c . Jednym z punktów przecięcia się pary kół Ω_b i Ω_c jest oczywiście punkt A . Ponieważ zaś cztery punkty B_c' , B_b' , O_b' , C_c' leżą na jednym kole Ω , mamy tu nadto równość $A'B_c' : A'B_b' = A'C_c' : A'C_b'$. Stąd wynika, że osią pierwiastkową kół Ω_b i Ω_c jest prosta AA' . Odpowiednio osiami pierwiastkowymi par kół Ω_a i Ω_b , Ω_a i Ω_c będą proste BB' i CC' . Ponieważ zaś trzy te proste przecinają się w punkcie Lemoine'a, więc punktem przecięcia się osi pierwiastkowych kół Ω_a , Ω_b , Ω_c jest punkt Lemoine'a.

3. Punkty przecięcia się par prostych $A_b'B_a'$ i $A_c'C_a'$, $A_c'C_a'$ i $B_c'C_b'$, $B_c'C_b'$ i $A_b'B_a'$ nazwiemy odpowiednio α' , β' , γ' . Ponieważ te proste, jak z ustępu poprzedzającego wiadomo, są równoległe do boków trójkąta ABC , otrzymamy trzy równoległoboki $AA_b'\alpha'A_c'$, $BB_b'\beta'B_c'$, $CC_c'\gamma'C_a'$, których przekątne $A_b'A_c'$, $B_b'B_c'$, $C_c'C_a'$ są (na mocy równości (1) ust. 2) przez proste odpowiednio AK , BK , CK podzielone na połowy w punktach α , β , γ . Widzimy więc, że te proste AK , BK , CK będą przechodziły także przez punkty α' , β' , γ' . Trójkąt zatem $\alpha'\beta'\gamma'$ jest homotetyczny z trójkątem ABC ; środkiem podobieństwa jest punkt Lemoine'a. Stąd zaś okazuje się, że wszystkie powyższe własności owych sześciu punktów przecięcia się boków trójkąta $A'B'C'$ z bokami trójkąta ABC stosować się będą także do punktów przecięcia się boków trójkątów ABC i $\alpha'\beta'\gamma'$.

Rozważymy teraz niektóre szczególne przypadki trójkąta $\alpha'\beta'\gamma'$.

a) Jeżeli jeden z boków trójkąta $\alpha'\beta'\gamma'$ np. bok $\beta'\gamma'$ będzie odległy od boku BC o długość równą bokowi $BC=a$, to, jak to łatwo okazać można, bok $\gamma'\alpha'$ będzie odległy od boku CA o długość równą $CA=b$, zaś bok $\alpha'\beta'$ od boku AB o długość równą $AB=c$, zaś proste łączące odpowiadające wierzchołki tych dwu trójkątów przecinają się w jednym punkcie, który jest punktem Lemoine'a dla każdego z tych dwu trójkątów. Własność tę można jeszcze tak wysłowić: trójkąt, utworzony przez boki kwadratów wystawionych na bokach trójkąta danego równoległe do tychże boków, jest homotetyczny z danym trójkątem, a środkiem podobieństwa jest punkt, który jest wspólnym punktem Lemoine'a obu trójkątów. Oczywiście, że te kwadraty mogą być wszystkie trzy wewnętrzne, albo wszystkie trzy zewnętrzne.

b) Gdy trójkąt $\alpha'\beta'\gamma'$ zredukuje się do punktu Lemoine'a, to koło Ω będzie kołem Lemoine'a (ust. 8 § II).

c) W przypadku na koniec, gdy trójkąt $\alpha'\beta'\gamma'$ stanie się równym trójkątomu ABC i z tymże będzie symetrycznie położony względem wspólnego obu tym trójkątów punktu Lemoine'a, to trójkąt $A'B'C'$ (ust. 2) zredukuje się do

punktu Lemoine'a, który będzie zarazem środkiem odpowiadającego koła Ω . Koło to oznaczmy przez Ω_L . Wtedy proste $A_b'A_c'$, $B_c'B_a'$, $C_a'C_b'$, jako średnice tego koła sobie równe, będziemy mogli uważać za przekątne trzech prostokątów $C_a'B_a'C_b'B_c'$, $C_a'A_b'C_b'A_c'$, $B_a'A_b'B_c'A_c'$, wpisanych w trójkąt dany ABC i mających jako wspólny środek punkt Lemoine'a K .

Ponieważ prosta $B_c'C_b'$ (fig. 3) jest równoległa do boku BC , więc, gdy punkt przecięcia się jej z prostą AE_a (E_a jest środkiem boku BC) nazwiemy m , mieć będziemy $B_c'm = mC_b'$; prosta zatem mK jest prostopadłą do boku BC . Punkt przecięcia się tej prostopadłej z bokiem BC nazwijmy n , zaś spodek wysokości trójkąta ABC przechodzącej przez wierzchołek A nazwijmy H_a . Wówczas w trójkącie AE_aH_a prosta E_aK dzieli odcinek mn w punkcie K na połowy, a więc dzieli także na połowy bok AE_a równoległy do prostej mn . Podobnie moglibyśmy udowodnić, że proste E_bK , E_cK dzielą odpowiednie wysokości BH_b , CH_c na połowy. Naodwrot zaś: proste łączące środki boków trójkąta ze środkami odpowiednich wysokości przecinają się w punkcie Lemoine'a.

4. Rozważając boki trzech prostokątów $C_a'B_a'C_b'B_c'$, $C_a'A_b'C_b'A_c'$, $B_a'A_b'B_c'A_c'$ (ustępu 3-ego), prostopadłe do boków trójkąta ABC , widzimy, że możemy je tak ugrupować, aby tworzyły dwa trójkąty $A_c'B_a'C_b'$, $A_c'B_c'B_a'$. Trójkąty te będą sobie równe, do trójkąta ABC podobne i wpisane w koło Ω_L .

Weźmy jeden z tych trójkątów n.p. $A_c'B_a'C_b'$ (fig. 3). Ponieważ trójkąt ten jest podobny do trójkąta ABC , więc kąty, które tworzą boki i proste łączące wierzchołki z punktem Lemoine'a w trójkącie ABC , są równe kątom, które tworzą odpowiednie boki i odpowiednie proste łączące wierzchołki z punktem Lemoine'a w trójkącie $A_c'B_a'C_b'$. Gdy więc punkt Lemoine'a w trójkącie $A_c'B_a'C_b'$ oznaczmy przez K_1 , mieć będziemy $B_a'A_c'K_1 = BAK$, i t. d. Ponieważ nadto boki jednego z tych trójkątów są prostopadłe do odpowiednich boków drugiego trójkąta, więc proste łączące wierzchołki z punktem Lemoine'a w jednym trójkącie są prostopadłe do odpowiednich prostych łączących wierzchołki z punktem Lemoine'a w drugim trójkącie. A więc prosta AK jest prostopadła do $A_c'K_1$, BK do $B_a'K_1$, zaś CK do $C_b'K_1$. Stąd zaś wynika, że punkty przecięcia się trzech tych par prostych, nazwijmy je A_2 , B_2 , C_2 , leżą na kole zakreślonym na odcinku KK_1 jako na średnicy, które z uwagi, że punkt K_1 jest punktem Lemoine'a, trójkąta $A_c'B_a'C_b'$, zaś punkt K środkiem koła na tymże trójkącie opisanego, jest kołem Brocarda tegoż trójkąta $A_c'B_a'C_b'$.

5. Weźmy jeszcze na trójkącie $A_c'B_a'C_b'$ opisany trójkąt $\alpha''\beta''\gamma''$ (fig. 3) taki, iżby jego boki tworzyły z odpowiadającymi bokami trójkąta $A_c'B_a'C_b'$ kąty sobie równe, t. j. taki, iżby kąt $\alpha''A_cC_b = \beta''B_aA_c = \gamma''B_aC_b = \delta$. Ponieważ boki trójkąta ABC są prostopadłe do odpowiadających boków trójkąta $A_c'B_a'C_b'$, zatem także kąt $\alpha''A_c'A = \beta''A_c'B = \gamma''B_a'B = \dots = A_cC_b\alpha'' = \frac{\pi}{2} - \delta$.

Jeżeli więc kąt δ zmieniać będzie swoją wartość, to punkty $\alpha''\beta''\gamma''$ posuwają się będą po kołach odpowiednio $AA_cA_2C_b'$, $BA_cB_2A_c'$, $CA_cC_2B_a'$, zakreślonych na odcinkach AA_c , BB_a , CC_b jako na średnicach. Stąd zaś wynika, że każdy z trójkątów $\alpha''\beta''\gamma''$ jest podobny do trójkąta ABC i że, gdy punkty α'' , β'' , γ'' położymy odpowiednio z punktami A_2 , B_2 , C_2 , kąt $\beta''\alpha''A_2 = BA_2A_c$, kąt $\gamma''\beta''B_2 = CB_2B_a$, zaś kąt $\alpha''\gamma''C_2 = ACC_a$. Mając dwie te ostatnie własności na uwadze, zgodnie z tym, cośmy powiedzieli w ustępie poprzedzającym, wnosimy, że proste $\alpha''A_2$, $\beta''B_2$, $\gamma''C_2$ są prostymi łączącymi punkt Lemoine'a trójkąta $\alpha''\beta''\gamma''$ z jego wierzchołkami. Trzy zatem proste $\alpha''A_2$, $\beta''B_2$, $\gamma''C_2$ przecinają się w punkcie, nazwijmy go K'' , który jest punktem Lemoine'a trójkąta $\alpha''\beta''\gamma''$. Przy zmianie kąta δ otrzymamy w punktach A_2 , B_2 , C_2 trzy pęki jednokierunkowe, z uwagi, że kąt $\alpha''A_2A = \alpha''A_c'A = \beta''A_c'B = \dots$, przystające i takie, iż każde trzy ich promienie sobie odpowiadające przecinają się będą w punkcie, który będzie punktem Lemoine'a trójkąta $\alpha''\beta''\gamma''$ tymże promieniom odpowiadającego. Pęki te wyznaczają koło przechodzące przez ich wierzchołki A_2 , B_2 , C_2 , które, jak to z ustępu poprzedzającego wynika, jest kołem Brocarda trójkąta $A_c'B_a'C_b'$. Możemy więc powiedzieć: koło Brocarda jest miejscem geometrycznym punktów Lemoine'a trójkątów na danym trójkącie opisanych i do niego podobnych.

6. Przyjmijmy, że x , y , z oznaczają długości współrzędnych punktu na płaszczyźnie danego trójkąta ABC . Wówczas dla punktu Lemoine'a i punktów A'' , B'' , C'' (ust. 15 § II) odpowiednie wielomiany

$$x^2 + y^2 + z^2, \quad -x^2 + y^2 + z^2, \quad x^2 - y^2 + z^2, \quad x^2 + y^2 - z^2$$

mają wartości najmniejsze, trzy ostatnie jednak pod warunkiem, że kąty trójkąta danego, między ramionami których znajdują się punkty kolejno $A''B''C''$, są kątami rozwartymi.

Niech

$$F = x^2 + y^2 + z^2$$

Ponieważ punkt $x : y : z$ leży na płaszczyźnie trójkąta, więc $ax + by + cz = 2p$, gdzie p oznacza pole tego trójkąta. Miec więc będziemy

$$F = x^2 + y^2 + \frac{(2p - ax - by)^2}{c^2}.$$

Wartości x , y , z , dla których wielomian F ma wartość największą albo najmniejszą, znajdziemy z równań

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{2} \frac{\partial F}{\partial x} &= (c^2 + a^2)x + aby - 2ap = 0 \\ \frac{c^2}{2} \frac{\partial F}{\partial y} &= abx + (c^2 + b^2)y - 2bp = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Otrzymamy mianowicie

$$x = a \frac{2p}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad y = b \frac{2p}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad z = c \frac{2p}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (2)$$

Biorąc pochodne wielomianów (1), mieć będziemy

$$\frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = c^2 + a^2$$

$$\frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = b^2 + c^2$$

$$\frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = ab.$$

Ponieważ więc

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{4}{c^2} (a^2 + b^2 + c^2)$$

jest mniejsze od zera, przeto wartości x, y, z (2), które, jak wiadomo z ust. 1 § II, są współrzędnymi punktu Lemoine'a, odpowiadają najmniejszości wielomianu F .

Do tego samego rezultatu doszlibyśmy, używając równości Lagrange'a

$$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) - (ax + by + cz)^2 = (ay - bz)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2.$$

Postępując podobnie jak poprzednio, znajdziemy, iż najmniejszości wielomianu

$$-x^2 + y^2 + z^2 = F$$

odpowiadają wartości

$$x = -a \frac{2p}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad y = b \frac{2p}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad z = c \frac{2p}{a^2 + b^2 + c^2},$$

pod tym jednak warunkiem, że kąt A , między ramionami którego leży punkt $A''(-a : b : c)$, jest rozwarty.

7. Środkami przecięć stożkowych wyznaczonych przez takie punkty, iż gdy x, y, z oznaczają jak w ustępie poprzedzającym długości ich współrzędnych, wielomiany

$$x^2 + y^2 + z^2, \quad -x^2 + y^2 + z^2, \quad x^2 - y^2 + z^2, \quad x^2 + y^2 - z^2$$

mają wartości stałe, są odpowiednio punkt Lemoine'a i punkty A'', B'', C'' .

Jeżeli bowiem m oznaczać będzie jakąś liczbę stałą, to jako równanie pierwszego z tych przecięć stożkowych otrzymamy

$$x^2 + y^2 + z^2 = m^2,$$

lub z uwagi, że $\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} = 1$, gdzie h_a, h_b, h_c oznaczają wysokości trójkąta odniesienia, w kształcie jednorodnym

$$x^2 + y^2 + z^2 = m^2 \left(\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} \right)^2. \quad (1)$$

Zmieniając stałą dowolną m , otrzymywać będziemy przecięcia stożkowe homotetyczne. W przypadku, gdy $m=0$, równanie (1) redukuje się do równania

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad (2)$$

które z uwagi, że wyznacznik utworzony przez jego współczynniki tak, jak w ust. 4-ym § II,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{h_a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{h_b} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{h_c} \\ \frac{1}{h_a} & \frac{1}{h_b} & \frac{1}{h_c} & 0 \end{vmatrix} = -\left(\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2} \right) < 0,$$

przedstawiać nam będzie elipsę urojoną.

Środek $x' : y' : z'$ krzywej (2) znajdziemy z warunku, że jego biegunowa względem krzywej (2), t. j. prosta

$$xx' + yy' + zz' = 0,$$

jest prostą w nieskończoności. Otrzymamy zatem jako współrzędne środka $x' : y' : z' = a : b : c$, które, jak wiemy, są współrzędnymi punktu Lemoine'a.

Jeżeli przyjmimy $m = h_c$, równanie (1) zredukuje się do

$$c^2(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2, \quad (3)$$

a więc będzie ono przedstawiało elipsę przechodzącą przez wierzchołek $C(0 : 0 : 1)$. Styczna do krzywej (3) w wierzchołku C ma jako równanie

$$ax + by = 0,$$

jest więc równoległą do boku AB .

Przecięcia stożkowe, którego punkty czynią zadość równości

$$x^2 + y^2 - z^2 = m^2, \quad (4)$$

gdzie m jest liczbą stałą, ma jako równanie związek ten (4) albo w kształcie jednorodnym równość

$$x^2 + y^2 - z^2 = m^2 \left(\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} \right)^2. \quad (5)$$

Jeżeli przyjmujemy $m=0$, to równanie (5) zredukuje się do

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Równanie zaś to przedstawiać nam będzie elipsę, hyperbolę lub parabolę zależnie od tego, czy wyznacznik tak utworzony jak w ustępie 4-ym § II, czyli, co na jedno wychodzi, czy wielomian $\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} - \frac{1}{h_c^2}$ mieć będzie wartość ujemną, dodatnią lub równą zeru.

W pierwszym przypadku, gdy $\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} - \frac{1}{h_c^2} < 0$, jest także $a^2 + b^2 - c^2 < 0$, czyli $\cos C < 0$, a więc kąt $C > \frac{\pi}{2}$. W drugim przypadku, gdy $\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} - \frac{1}{h_c^2} > 0$, jest $C < \frac{\pi}{2}$. Nakoniec gdy $\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} - \frac{1}{h_c^2} = 0$, $C = \frac{\pi}{2}$.

Postępując podobnie jak poprzednio, znaleźlibyśmy, że środkiem krzywej (5), a więc także całego układu krzywych z nią homotetycznych, jest punkt $C'(a:b:-c)$.

8. Punkt Lemoine'a jest środkiem przecięcia stożkowego, do którego są styczne boki trójkąta w spodkach jego wysokości.

Ponieważ spodki wysokości H_a, H_b, H_c są określone przez układy

$$0 : \frac{1}{\cos B} : \frac{1}{\cos C}, \quad \frac{1}{\cos A} : 0 : \frac{1}{\cos C}, \quad \frac{1}{\cos A} : \frac{1}{\cos B} : 0,$$

przeko równaniem przecięcia stożkowego, przechodzącego przez te punkty a wpisanego w trójkąt odniesienia, będzie

$$\sqrt{\cos A x} + \sqrt{\cos B y} + \sqrt{\cos C z} = 0.$$

Postępując podobnie jak w ust. 7, znajdziemy współrzędne środka: $\sin A : \sin B : \sin C$, które są współrzędnymi punktu Lemoine'a.

9. Punkt Lemoine'a i środek ciężkości są ogniskami przecięcia stożkowego takiego, iż do niego są styczne boki trójkąta odniesienia w punktach dzielących je na odcinki w stosunku kwadratów prostych łączących wierzchołki trójkąta ze środkami przeciwległych boków.

Równanie tej krzywej jest

$$\sqrt{a[2(b^2+c^2)-a^2]x} + \sqrt{b[2(c^2+a^2)-b^2]y} + \sqrt{c[2(a^2+b^2)-c^2]z} = 0;$$

własności zaś powyższej można dowieść tym sposobem, któregośmy użyli w ust. 16-ym § II.

10. Rzuty prostopadłe punktu Lemoine'a na boki trójkąta ABC nazwijmy K_a, K_b, K_c . Jeżeli długości współrzędnych punktu Lemoine'a oznaczmy, jak w ust. 1-ym § II, przez ξ, η, ζ , to pole $K_a'KK_b' = \frac{1}{2} \xi \eta \sin C$, pole

$K_a'KK_c' = \frac{1}{2} \xi \zeta \sin B$, zaś pole $K_c'KK_b' = \frac{1}{2} \eta \zeta \sin A$. Ponieważ jednak $\xi:\eta:\zeta = a:b:c$, zaś $ab \sin C = ac \sin B = bc \sin A$, więc

$$\text{pole } K_a'KK_b' = \text{polu } K_a'KK_c' = \text{polu } K_b'KK_c'.$$

W trójkącie więc $K_a'K_b'K_c'$ punkt K jest takim punktem, iż, gdy go połączymy z wierzchołkami, otrzymamy trzy trójkąty sobie równoważne. Taka własność cechuje środek ciężkości, a więc punkt Lemoine'a jest środkiem ciężkości trójkąta wyznaczonego przez rzuty prostopadłe tego punktu na boki trójkąta danego.

Zauważmy nadto że

$$\overline{K_a'K_b'}^2 = \overline{KK_a'}^2 + \overline{KK_b'}^2 + 2\overline{KK_a'} \cdot \overline{KK_b'} \cos C$$

czyli

$$\overline{K_a'K_b'}^2 = \xi^2 + \eta^2 + 2\xi\eta \cos C.$$

Odpowiednio mieć będziemy

$$\overline{K_a'K_c'}^2 = \xi^2 + \zeta^2 + 2\xi\zeta \cos B$$

$$\overline{K_b'K_c'}^2 = \eta^2 + \zeta^2 + 2\eta\zeta \cos A.$$

A więc

$$\overline{K_a'K_b'}^2 : \overline{K_a'K_c'}^2 : \overline{K_b'K_c'}^2 = (a^2+b^2+2ab \cos C) : (a^2+c^2+2ac \cos B) : (b^2+c^2+2bc \cos A).$$

Wiadomo jednak, że, gdy E_a, E_b, E_c oznaczają środki boków trójkąta, to

$$\overline{AE_a}^2 = \frac{1}{4}(b^2+c^2+2bc \cos A), \text{ i t. d.}$$

Stąd wynika, że

$$K_a'K_b' : K_a'K_c' : K_b'K_c' = CE_c : BE_b : AE_a;$$

a zatem boki owego trójkąta $K_a'K_b'K_c'$ są proporcjonalne względem prostych łączących wierzchołki trójkąta danego ze środkami przeciwległych boków.

11. *Zagadnienie.* Wykreślić trójkąt, mając dane jego dwa boki $AB=c$, $AC=b$ i odcinek AK_a , gdzie K_a jest punktem przecięcia się boku BC z prostą łączącą wierzchołek A z punktem Lemoine'a.

W ust. 1-ym § II mieliśmy

$$\frac{CK_a}{BK_a} = \frac{b^2}{c^2}$$

Przez punkt C poprowadźmy równoległą do boku AB i oznaczmy punkt przecięcia się prostej AK_a z tą równoległą przez D . Wówczas

$$\frac{CD}{AB} = \frac{CK_a}{BK_a} = \frac{b^2}{c^2}, \text{ skąd}$$

$$CD = \frac{b^2}{c}; \quad (1)$$

ponieważ zaś $\frac{K_a D}{K_a A} = \frac{K_a C}{K_a B} = \frac{b^2}{c^2}$, więc $K_a D = AK_a \frac{b^2}{c^2}$, czyli

$$K_a D = AK_a \frac{CD}{c}. \quad (2)$$

Znalazłszy z równości (1) i (2) długości CD i $K_a D$, wykreślimy trójkąt pomocniczy ACD , przez punkt A poprowadźmy równoległą do prostej CD i odetniemy na niej długość $AB = c$; wówczas łącząc punkt B z punktem C , otrzymamy szukany trójkąt ABC .

12. *Zagadnienie.* Wykreślić trójkąt, mając dany jego bok $BC = a$ i długości AE_a, AK_a .

Na trójkącie ABC opiszmy koło. Niech prosta AE_a przecina to koło w punkcie I_a , zaś prosta AK_a w punkcie J_a . Ponieważ kąt $BAJ_a = I_a AC$, zatem $BJ_a = I_a C$; że zaś $BE_a = E_a C$, więc także kąt $BCI_a = CBJ_a$. Zatem trójkąt $BE_a J_a$ jest równy trójkątowi $E_a C I_a$, a więc

$$E_a I_a = E_a J_a. \quad (1)$$

Z rozważania prostych AI_a i BC jako dwu cięciw w kole ABC przecinających się w punkcie E_a wypada $AE_a \cdot E_a I_a = E_a B \cdot E_a C$ czyli $AE_a \cdot E_a I_a = \frac{a^2}{4}$ stąd

$$E_a I_a = \frac{a^2}{4AE_a}, \quad (2)$$

a więc

$$AI_a = AE_a + \frac{a^2}{4AE_a}. \quad (3)$$

Ponieważ zaś prosta $I_a J_a$ jest równoległa do boku BC (ust. 14 § II), więc $AJ_a : AI_a = AK_a : AE_a$, skąd

$$AJ_a = \frac{AK_a \cdot AI_a}{AE_a}. \quad (4)$$

Znalazłszy więc z równości (2), (3) odcinki $E_a J_a = E_a I_a$ i AI_a a z równości (4) odcinek AJ_a , należy wykreślić trójkąt $AE_a J_a$, następnie trójkąt $AJ_a I_a$. Wówczas punkty przecięcia się koła opisanego na trójkącie $AJ_a I_a$ z równoległą do boku

$I_a J_a$ przechodzącą przed punkt E_a będą wierzchołkami B i C szukanego trójkąta.

13. *Zagadnienie.* Wykreślić trójkąt, mając dane jego wierzchołki B i C i jeden z punktów Brocarda n. p. ω .

Połączmy punkt ω z punktami B i C i poprowadźmy prostą CA , tworzącą z prostą $C\omega$ kąt $\omega CA = \omega BC$. Przez punkty B i ω poprowadźmy koło styczne do boku BC ; wówczas każdy z dwu punktów A i A' przecięcia się tego koła z prostą CA będziemy mogli uważać za wierzchołek trójkąta danego. Staje się bowiem wtedy zadość równościom cechującym punkt ω Brocarda (ust. 11 § II)

$$\omega AB = \omega BC = \omega CA, \text{ lub } \omega A'B = \omega BC = \omega CA'.$$

14. *Zagadnienie.* Wykreślić trójkąt, mając dane dwa jego wierzchołki B i C i punkt Lemoine'a.

Przypuśćmy naprzód, że nie mamy ściśle wyznaczonego punktu K , tylko mamy dany kierunek prostej BK , łączącej wierzchołek B z punktem Lemoine'a. Prosta BE_b przechodzącą przez punkt B , zresztą dowolną, uważajmy za prostą łączącą wierzchołek B ze środkiem ciężkości E w trójkącie, który w następujący sposób wykreślimy: na prostej BC odetnijmy od punktu B $BF = BC$ i przez punkt F poprowadźmy równoległą do prostej BE_b . Równoległa ta przecinać będzie prostą BA , tworzącą z prostą BE_b kąt $ABE_b = CBK$, w punkcie A , tak iż mieć będziemy $AE_b = E_b C$; ten więc punkt A będzie pozostałym z wierzchołków trójkąta odpowiadającego prostej BE_b . Gdy zmieniać będziemy kierunek prostej BE_b , wówczas z uwagi, że punkty B i F pozostają wciąż też same i że kąt $FAB = ABE_b (= KBC)$ ma wartość stałą, punkt A opisywać będzie koło przechodzące przez punkt F i styczne do prostej BK w punkcie B .

Jeżeli zaś będziemy mieli dany także kierunek prostej CK , t. j. gdy będziemy mieli zupełnie określony punkt Lemoine'a, wówczas, podobnie jak poprzednio, zakreślimy koło styczne do prostej CK w punkcie C i przechodzące przez punkt F' , taki, iż $CF' = CB$. Każdy z dwu punktów przecięcia się tych dwu kół będziemy mogli uważać za wierzchołek trójkąta czyniącego zadość warunkom zagadnienia.

Do art: S KĘPIŃSKIEGO

Własności szczególnych trójek punktów trójkąta.

Fig. 1

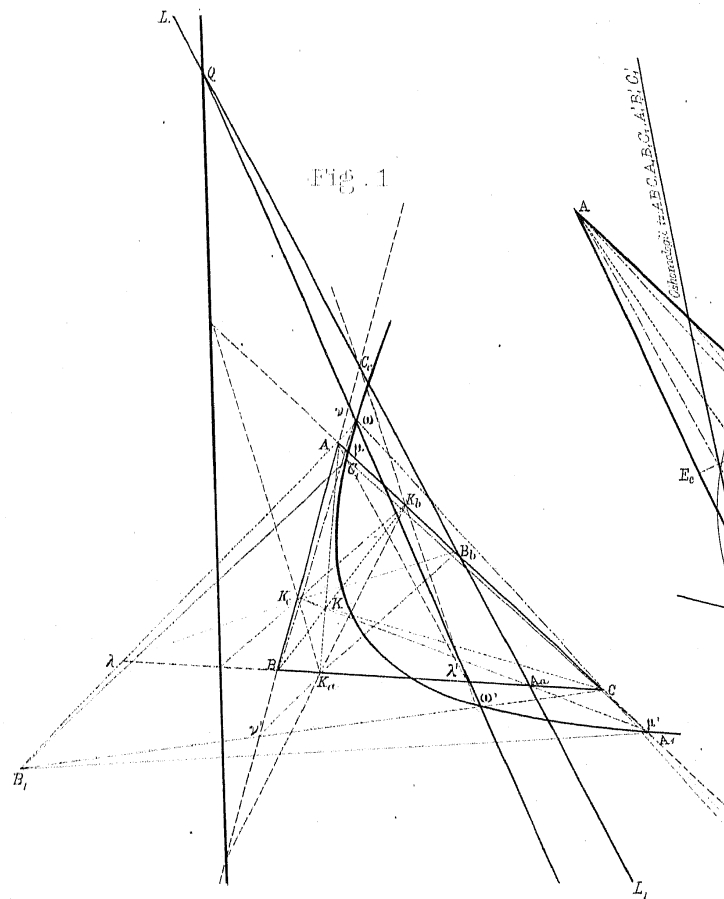


Fig. 2

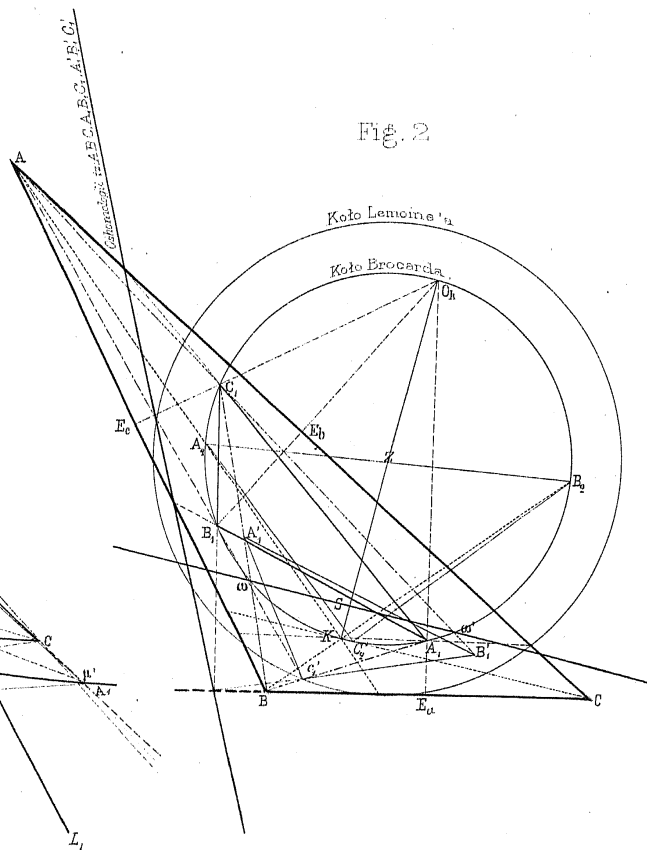


Fig. 3

