

U W A G I

O ROZWINIĘCIU PEWNYCH FUNKCYJ NA SZEREGL

PRZEZ
J. SOCHOCKIEGO.

1. Znane przekształcenie szeregu

$$S = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \dots$$

na szereg

$$S = u_0 + u_1 \frac{x}{1-x} + \Delta u_1 \left(\frac{x}{1-x} \right)^2 + \dots$$

podane przez Eulera, daje liczne zastosowania nader ważne i ciekawe; zwrócimy tu uwagę na jeden szczególnie prosty wzór na różnicę logarytmów, który tą drogą otrzymuje się bezpośrednio i może zastąpić znany wzór na różnicę $\log(m+h) - \log m$, zwykle wyprowadzany w kursach rachunku różniczkowego.

W rzeczy samej, stosując przekształcenie Eulera do szeregu

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \log \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = 1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{7} + \dots,$$

mamy

$$u_n = \frac{1}{2n+1} ;$$

zatem

$$\begin{aligned}\Delta u_n &= \frac{-2}{(2n+1)(2n+3)}, \\ \Delta^2 u_n &= \frac{2.4}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}, \\ &\dots \\ \Delta^m u_n &= \frac{(-1)^m 2.4.6 \dots 2m}{(2n+1)(2n+3) \dots (2n+2m+1)};\end{aligned}$$

stąd, czyniąc $n=1$, znajdujemy

$$\left. \begin{aligned}\Delta u_1 &= -\frac{2}{3 \cdot 5}, \\ \Delta^2 u_1 &= \frac{2^3 \cdot 1}{3 \cdot 5 \cdot 7}, \\ \Delta^m u_1 &= (-1)^m 2^{m-1} \frac{1}{(2m+1)(2m+3)} \frac{1 \cdot 2 \dots (m-1)}{(m+1)(m+2) \dots (2m-1)}\end{aligned} \right\} (1)$$

Zatrzymując dla krótkości oznaczenia $\Delta u_1, \Delta^2 u_1, \dots$, mamy

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \log \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = 1 + \frac{1}{3} \frac{x}{1-x} + \Delta u_1 \left(\frac{x}{1-x} \right)^2 + \Delta^2 u_1 \left(\frac{x}{1-x} \right)^3 + \dots,$$

albo, kładąc po obu stronach $x^2/4$ w miejsce x :

$$\frac{1}{x} \log \frac{2+x}{2-x} = 1 + \frac{1}{3} \frac{x^2}{4-x^2} + \Delta u_1 \left(\frac{x^2}{4-x^2} \right)^2 + \dots$$

Wzór ten można napisać tak:

$$\frac{1}{x} \log \left(1 + \frac{2}{\frac{x}{2} - 1} \right) = 1 + \frac{1}{3} \frac{1}{\left(\frac{x}{2} - 1 \right) \left(\frac{x}{2} + 1 \right)} + \Delta u_1 \frac{1}{\left(\frac{x}{2} - 1 \right)^2 \left(\frac{x}{2} + 1 \right)^2} + \dots$$

stąd, podstawiając w obydwu stronach $1+2x$ zamiast $2/x$, otrzymujemy

$$\frac{1+2x}{2} \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1 + \frac{1}{3 \cdot 4} \frac{1}{x(x+1)} + \frac{\Delta u_1}{2^4} \frac{1}{x^2(x+1)^2} + \frac{\Delta^2 u_1}{2^6} \frac{1}{x^3(x+1)^3} + \dots$$

albo

$$\log \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{1+2x} \left[2 + \frac{1}{6x(x+1)} + \frac{\Delta u_1}{2^3} \frac{1}{x^2(x+1)^2} + \frac{\Delta^2 u_1}{2^5} \frac{1}{x^3(x+1)^3} + \dots \right]. \quad (2)$$

Czyniąc teraz dla skrócenia

$$\Delta^{m-1} u_1 = (-1)^{m-1} \frac{2^{m-1}}{a_m},$$

z wzoru (1) wyprowadzamy

$$a_m = 4(2m-1)(2m+1) \frac{m(m+1) \dots (2m-3)}{1 \cdot 2 \dots (m-2)}, \quad (3)$$

skąd widać bezpośrednio, że a_m jest liczbą całkowitą. Dla $m=1$ należy uznać $a_1=6$, dalej znajdujemy $a_2=60$; wogóle każda liczba następująca otrzymuje się z poprzedzającej za pomocą wzoru

$$a_m = 2 \frac{2m+1}{m-1} a_{m-1}. \quad (4)$$

Tym sposobem znajdujemy tablicę pierwszych dziesięciu liczb:

$a_1 = 6,$	$a_6 = 72072.$
$a_2 = 60,$	$a_7 = 360360,$
$a_3 = 420,$	$a_8 = 1750320,$
$a_4 = 2520,$	$a_9 = 8314020,$
$a_5 = 13860,$	$a_{10} = 38798760, \dots$

Co się zaś tyczy wzoru (2), to teraz można go napisać tak:

$$\log \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{1+2x} \left[2 + \frac{1}{6x(x+1)} - \frac{1}{60x^2(x+1)^2} + \frac{1}{420x^3(x+1)^3} - \frac{1}{2520x^4(x+1)^4} + \dots + \frac{(-1)^{m-1}}{a_m x^m (x+1)^m} + \dots \right], \quad (5)$$

gdzie a_m określa się wzorem (3).

Chcemy tu właśnie zwrócić szczególną uwagę na szereg (5), który pod względem praktycznym może mieć pierwszeństwo przed innymi podobnymi szeregami.

2. Bardzo łatwo jest sprawdzić bezpośrednio wzór (5) dla wartości zmiennej x , czyniącej zadość warunkowi

$$x(x+1) \geq 1.$$

W samą rzecz, niech s_m oznacza sumę m pierwszych wyrazów szeregu

$$\frac{2}{1+2x} + \frac{1}{6x(x+1)(2x+1)} - \frac{1}{60x^2(x+1)^2(2x+1)^2} + \dots$$

znajdujemy

$$\frac{d}{dx} \left[\log \left(1 + \frac{1}{x} \right) - s_1 \right] = \frac{-1}{x(x+1)(2x+1)^2},$$

$$\frac{d}{dx} \left[\log \left(1 + \frac{1}{x} \right) - s_2 \right] = \frac{1}{6x^2(x+1)^2(2x+1)^2},$$

$$\frac{d}{dx} \left[\log \left(1 + \frac{1}{x} \right) - s_3 \right] = \frac{-2}{60x^3(x+1)^3(2x+1)^2},$$

skąd łatwo spostrzedz, a następnie i sprawdzić wzór ogólny

$$\frac{d}{dx} \left[\log \left(1 + \frac{1}{x} \right) - s_m \right] = \frac{(-1)^m (m-1)}{60^{m-1} x^m (x+1)^m (2x+1)^2}.$$

Przy wartościach dodatnich ilości x mamy

$$(-1)^m \frac{d}{dx} \left[\log \left(1 + \frac{1}{x} \right) - s_m \right] > 0$$

na zasadzie czego wnosimy, że przy wartościach dodatnich ilości x funkcja

$$(-1)^m \left[\log \left(1 + \frac{1}{x} \right) - s_m \right]$$

jest stale wzrastająca; ponieważ zaś dla $x = \infty$ funkcja ta przyjmuje wartość zero, przeto przy wszelkich wartościach dodatnich zmiennej x mamy nierówność

$$(-1)^m \left[\log \left(1 + \frac{1}{x} \right) - s_m \right] < 0,$$

która wskazuje, że przy wszelkich wartościach dla k , począwszy od $k = 1$, będzie

$$s_{2k-1} < \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) < s_{2k};$$

a ponieważ przy warunku $x(x+1) > 1$ jest oczywiście

$$\lim s_{2k-1} = \lim s_{2k}, \quad (k = \infty),$$

przeto

$$\log \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \lim s_m, \quad (m = \infty),$$

co stwierdza nowowzór (5).

3. Wzór (5) daje rozwinięcie funkcji

$$(1+2x) \log \left(1 + \frac{1}{x} \right).$$

na szereg według potęg malejących ilości $x(x+1)$. Czyniąc $x(x+1) = t$ i przyjmując t za zmienną niezależną, łatwo zauważyć, że funkcja

$$(1+2x) \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \sqrt{1+4t} \log \frac{\sqrt{1+4t}+1}{\sqrt{1+4t}-1}$$

posiada dwa jedyne punkty krytyczne: $t = 0$ i $t = -\frac{1}{4}$; na zasadzie więc znanego twierdzenia Cauchy'ego, wnosimy, że funkcja ta rozwija się na szereg według potęg malejących ilości t , zbieżny dla wszelkich wartości tej zmiennej, czyniących zadość warunkowi

$$\operatorname{mod} t > \frac{1}{4},$$

czyli

$$\operatorname{mod} x(x+1) > \frac{1}{4}.$$

Aby zaś to miało miejsce, jest niezbędnym i dostatecznym, by punkt x leżał zewnątrz lemniskaty, mającej ogniska w punktach 0 i -1 .

4. Korzystając z powyżej otrzymanego rezultatu, we wzorze (5) zamiast x możemy podstawić ilość urojoną

$$\frac{-1+i\sqrt{(2x+1)^2-2}}{2},$$

otrzymamy tedy nowy wzór, mający miejsce dla wszystkich wartości rzeczywistych ilości x , czyniących zadość warunkowi

$$(2x+1)^2 > 2,$$

mianowicie:

$$\begin{aligned} \sqrt{(2x+1)^2-2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{(2x+1)^2-2}}{2x^2+2x+1} &= 2 - \frac{1}{6x(x+1)} - \frac{1}{60x^2(x+1)^2} \\ &\quad - \frac{1}{420x^3(x+1)^3} - \dots \end{aligned} \quad (6)$$

I tu znowu łatwo przekonać się, że wzór (6) ma miejsce dla wszelkich war-

tości x , tak rzeczywistych jak i urojonych, byleby punkt x leżał zewnątrz lemniskaty o ogniskach 0 i -1 . Z równań (5) i (6) wyprowadzamy bezpośrednio:

$$\frac{1}{2}(2x+1)\log\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{(2x+1)^2-2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{(2x+1)^2-2}}{2x^2+2x+1} \\ = 2 - \frac{1}{a_2 x^2 (x+1)^2} - \frac{1}{a_4 x^4 (x+1)^4} - \dots - \frac{1}{a_{2m} x^{2m} (x+1)^{2m}} - \dots \quad (7)$$

$$\frac{1}{2}(2x+1)\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{(2x+1)^2-2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{(2x+1)^2-2}}{2x^2+2x+1} \\ = \frac{1}{a_1 x (x+1)} + \frac{1}{a_3 x^3 (x+1)^3} + \dots + \frac{1}{a_{2m+1} x^{2m+1} (x+1)^{2m+1}} + \dots, \quad (8)$$

gdzie $a_1=6$, $a_2=60$, $a_3=420$ i t. d. [patrz wzór (3)].

Czyniąc w ostatnich dwóch wzorach $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, otrzymujemy

$$\sqrt{5} \log \frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{\pi}{6}\sqrt{3} = 2 - \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_4} - \frac{1}{a_6} - \dots, \quad (9)$$

$$\sqrt{5} \log \frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{\pi}{6}\sqrt{3} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_5} + \dots \quad (10)$$

5. Zwróćmy jeszcze tu uwagę na to, że wzór (6) można napisać tak:

$$\sqrt{4x-1} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{4x-1}}{2x-1} = 2 - \frac{1}{6x} - \frac{1}{60x^2} - \frac{1}{420x^3} - \dots - \frac{1}{a_m x^m} - \dots,$$

albo lepiej tak jeszcze:

$$\sqrt{x-1} (\pi - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{4x-1}) = 2 - \frac{1}{6x} - \frac{1}{60x^2} - \frac{1}{420x^3} - \dots$$

Podstawiawszy nareszcie x^2 w miejsce $4x-1$, otrzymujemy ostatecznie

$$2x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \pi x - 2 + \frac{4}{6(x^2+1)} + \frac{4^2}{60(x^2+1)^2} + \frac{4^3}{420(x^2+1)^3} + \dots,$$

albo

$$x \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x} = 1 - \frac{4}{12(x^2+1)} - \frac{4^2}{120(x^2+1)^2} - \dots - \frac{4^m}{2a_m(x^2+1)^m} - \dots \quad (11)$$

Wzór ten, wyprowadzony w przypuszczeniu, że wartości dla x są rzeczywiste i dodatnie, ma miejsce oczywiście przy wszelkich wartościach ilości x tak rze-

czywistych jak i urojonych, byleby tylko punkt x znajdował się zewnątrz lemniskaty, której ogniska są w punktach $-i$ i $+i$.

6. Szeregi wyżej wyprowadzone, mogą być z korzyścią stosowane w wielu szczególnych przypadkach. Tak, na przykład, wartość całki

$$\int_x^\infty \frac{dx}{x^m (x+1)^m}$$

może być obliczoną za pomocą wzoru

$$\int_x^\infty \frac{dx}{x^m (x+1)^m} = \frac{2}{(2m-1) x^{m-1} (x+1)^{m-1} (2x+1)} \\ + \frac{A}{2x+1} \left[\frac{1}{a_m x^m (x+1)^m} - \frac{1}{a_{m+1} x^{m+1} (x+1)^{m+1}} + \dots \right], \quad (12)$$

gdzie $a_m, a_{m+1}, \dots$ są też same współczynniki co i w szeregu (3), A zaś wyraża się tak:

$$A = \frac{m(m+1) \dots (2m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)}. \quad (13)$$

7. Za pomocą wartości całki

$$\int_x^\infty \frac{dx}{x^m (x+1)^m}$$

daje się łatwo obliczyć wartość sumy

$$\sum_m = \frac{1}{x^m (x+1)^m} + \frac{1}{(x+1)^m (x+2)^m} + \dots$$

Najlepiej w tym celu użyć szeregu Maclaurina, mianowicie:

$$\int_x^{x+h} f(x) dx = hf(x) + \frac{h}{2} \Delta f(x) - \frac{B_1}{1 \cdot 2} h^2 \Delta f'(x) + \dots \\ + (-1)^{n-1} \frac{B_{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n-2)} h^{2n-2} \Delta f^{2n-3}(x) + R_n,$$

gdzie wyraz dopełniający R_n wyraża się tak:

$$R_n = (-1)^n \frac{B_n}{1 \cdot 2 \dots 2n} h^{2n+1} f^{2n}(x+h).$$

Uczyniwszy tu $f(x) = \Sigma_m$, $h = 1$, mamy

$$\int_x^{x+1} f(x) dx = \int_x^\infty \frac{dx}{x^m (x+1)^m}; \Delta f(x) = -\frac{1}{x^m (x+1)^m},$$

zatem

$$\begin{aligned} \int_x^\infty \frac{dx}{x^m (x+1)^m} &= \sum_m -\frac{1}{2} \frac{1}{x^m (x+1)^m} + \frac{B_1}{1.2} \frac{d}{dx} \frac{1}{x^m (x+1)^m} \\ &\quad - \frac{B_2}{1.2.3.4} \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{x^m (x+1)^m} + \dots \\ &\quad + (-1)^n \frac{B_{n-1}}{1.2.3 \dots (2n-2)} \frac{d^{2n-3}}{dx^{2n-3}} \frac{1}{x^m (x+1)^m} + R_n, \\ R_n &= (-1)^n \frac{B_n}{1.2.3 \dots 2n} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \sum_m (x + \theta h), \end{aligned} \quad (14)$$

Zobaczmy teraz, co można powiedzieć o pochodnych, znajdujących się po stronie prawej poprzedniego wzoru.

Czyniąc

$$y_m = \frac{1}{x^m (x+1)^m} = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right)^m,$$

znajdujemy

$$\frac{dy_m}{dx} = -m y_{m-1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \right);$$

stąd pokazuje się, że przy $x > 0$ mamy $y'_m < 0$. Dalej znajdujemy

$$\frac{d^2 y_m}{dx^2} = 2m y_m \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3} \right) + m(m-1) y_{m-2} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \right),$$

skąd bezpośrednio wnosimy, że przy $x > 0$ mamy $y''_m > 0$.

Postępując takim sposobem dalej, przekonywamy się ostatecznie, że znak pochodnej $y_m^{(n)}$ przy $x > 0$ określa się znakiem ilości $(-1)^n$; a ponieważ, pisząc $y_m(x)$ zamiast y_m , mamy

$$\Sigma_m = y_m(x) + y_m(x+1) + y_m(x+2) + \dots,$$

przeto i znak pochodnej

$$\frac{d^n}{dx^n} \sum_m$$

przy $x > 0$ określa się znakiem ilości $(-1)^n$.

Na mocy tego wnosimy, że znaki ilości R_n i R_{n+1} , są różne, to jest,

$$\frac{R_{n+1}}{R_n} < 0.$$

Lecz oczywiście mamy

$$R_n = (-1)^{n+1} \frac{B_n}{1.2.3 \dots 2n} \frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}} \frac{1}{x^m (x+1)^m} + R_{n+1},$$

zatem

$$\frac{1}{R_n} \frac{(-1)^{n+1} B_n}{1.2.3 \dots 2n} \frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}} \frac{1}{x^m (x+1)^m} > 1,$$

a stąd wnosimy, że gdy uczynimy

$$R_n = \theta (-1)^n \frac{B_n}{1.2.3 \dots 2n} \frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}} \frac{1}{x^m (x+1)^m},$$

to ilość θ będzie ułamkiem dodatnim i właściwym.

Otrzymamy rezultat pozwalający nam równanie (14) napisać tak:

$$\begin{aligned} \sum_m &= \int_x^\infty \frac{dx}{x^m (x+1)^m} + \frac{1}{2} \frac{1}{x^m (x+1)^m} - \frac{B_1}{1.2} \frac{d}{dx} \frac{1}{x^m (x+1)^m} \\ &\quad + \frac{B_2}{1.2.3.4} \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{x^m (x+1)^m} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{B_{n-1}}{1.2 \dots (2n-2)} \frac{d^{2n-3}}{dx^{2n-3}} \frac{1}{x^m (x+1)^m} \\ &\quad + (-1)^n \theta \frac{B_n}{1.2 \dots 2n} \frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}} \frac{1}{x^m (x+1)^m}. \end{aligned} \quad (15)$$

I tak, błąd popełniony przy obliczeniu wartości szeregu Σ_m za pomocą wzoru (15), nie przewyższa wyrazu, przed którym chcemy zatrzymać się. Co się tyczy wyrazu po prawej stronie wzoru (15), to wartość jego może być znalezioną za pomocą tablic logarytmowych, jak to widać z (12).

Do obliczania wartości różnych pochodnych funkcji

$$y_m = \frac{1}{x^m (x+1)^m}$$

może służyć równanie

$$\begin{aligned} x(x+1) \frac{d^{n-1} y_m}{dx^{n-1}} + (m+n-1)(2x+1) \frac{d^{n-1} y_m}{dx^{n-1}} \\ + (n-1)(n+2m-2) \frac{d^{n-2} y_m}{dx^{n-2}} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

które pozwala, za pomocą dwóch sąsiednich pochodnych $y_m^{(n-2)}$, $y_m^{(n-1)}$ znaleźć trzecią, po nich następującą, $y_m^{(n)}$.

Przyпускаjąc, jak zawsze $x > 0$, widzimy z wzoru (16) że wyrazy skrajne są jednakowego znaku, a średni znaku przeciwnego; mamy więc

$$x(x+1) \frac{d^n y_m}{dx^n} < (m+n-1)(2x+1) \frac{d^{n-1} y_m}{dx^{n-1}},$$

skąd wnosimy, że

$$\frac{d^{n+1} y_m}{dx^{n+1}} < \frac{2(m+n)}{x} \frac{d^n y_m}{dx^n},$$

przyczém rozumie się samo przez się, że nie należy zwracać tu uwagi na znaki pochodnych. Jeżeli teraz zauważymy, że, odrzucając znak, mamy

$$\frac{dy_m}{dx} = m \frac{2x+1}{x^{m+1}(x+1)^{m+1}} < \frac{2m}{x^{2m+1}},$$

to na zasadzie poprzedniej nierówności wnioskujemy, że dla wszelkich wartości n , poczynwszy od $n=1$, ma miejsce nierówność

$$\frac{d^n y_m}{dx^n} < \frac{2^n m(m+1) \dots (m+n-1)}{x^{n+2m}}. \quad (17)$$

Przejdźmy teraz do ostatniego wyrazu we wzorze (15); oznaczwszy go przez R_n , na zasadzie (17) otrzymujemy dla liczebnej wartości wyrazu R_n granicę wyższą

$$R_n < 2^{2n-1} \frac{B_n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n} \frac{n(m+1) \dots (m+2n-2)}{x^{2n+2m-1}}$$

Lecz wiadomo, że

$$\frac{B_n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n} < \frac{1}{2^{2n-1} \pi^{2n}},$$

przeto

$$R_n < \frac{m(m+1) \dots (m+2n-2)}{\pi^{2n} x^{2n+2m-1}}. \quad (18)$$

Stąd łatwo przekonać się, że przy dość wielkich wartościach dla x , co oczywiście przypuszczać wolno, i przy odpowiednio dobranem n , wartość R_n będzie dostatecznie małą.

Tak, na przykład, czyniąc we wzorze (15) $m=2$, $x=5$, i ograniczając się tylko na trzech wyrazach po całej z prawej strony, otrzymujemy

$$\sum_{x=5}^{x=\infty} \frac{1}{x^2(x+1)^2} = \int_5^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)^2} + 0,0006223100,$$

przyczém błąd nie przewyższa połowy jednostki dziesiątego rzędu.

Za pomocą wzoru (12) i tablic logarytmowych znajdujemy prawie bezpośrednio

$$\int_5^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)^2} = 0,0020235531;$$

zatem ostatecznie znajdujemy

$$\sum_{x=5}^{x=\infty} \frac{1}{x^2(x+1)^2} = 0,0026458631$$

z błędem, nie przewyższającym jednostki dziesiątego rzędu.

8. Oznaczając przez $\Sigma_1, \Sigma_2 \dots$ też same funkcje co wyżej, to jest

$$\Sigma_m = \frac{1}{x^m(x+1)^m} + \frac{1}{(x+1)^m(x+2)^m} + \dots,$$

weźmy pod uwagę szereg

$$\frac{1}{2a_1 x} - \frac{1}{2a_2} \Sigma_2 + \frac{1}{2a_3} \Sigma_3 - \dots, \quad (19)$$

w przypuszczeniu, że $x \geq 1$, przyczém $a_1, a_2, \dots$ są liczbami określonymi wyżej wzorem (3). Zbieżność bezwzględna tego szeregu jest oczywista; wartość jego oznaczmy dla skrótowania przez $F(x)$. Różnica pierwsza funkcji $F(x)$ wyraża się za pomocą szeregu

$$\Delta F(x) = -\frac{1}{2a_1} \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{2a_2} \frac{1}{x^2(x+1)^2} - \frac{1}{2a_3} \frac{1}{x^3(x+1)^3} + \dots,$$

co na zasadzie równania (4) daje się napisać tak:

$$\Delta F(x) = 1 - \left(x + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{x}\right). \quad (20)$$

Wypisawszy wyrażenie (19) dla $F(x)$ pod postacią szeregu podwójnego

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2a_1} \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{2a_2} \frac{1}{x^2(x+1)^2} + \dots \\ & + \frac{1}{2a_1} \frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{2a_2} \frac{1}{(x+1)^2(x+2)^2} + \dots \\ & + \frac{1}{2a_1} \frac{1}{(x+2)(x+3)} - \frac{1}{2a_2} \frac{1}{(x+2)^2(x+3)^2} + \dots \\ & + \dots \end{aligned}$$

i sumując każdy wiersz oddzielnie, otrzymujemy

$$\begin{aligned} F(x) = & \left[\left(x + \frac{1}{2} \right) \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) - 1 \right] + \left[\left(x + 1 + \frac{1}{2} \right) \log \left(1 + \frac{1}{x+1} \right) - 1 \right] \\ & + \left[\left(x + 2 + \frac{1}{2} \right) \log \left(1 + \frac{1}{x+2} \right) - 1 \right] + \dots, \end{aligned}$$

stąd wynika, że jeśli założymy

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2} \right) \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) - 1, \quad (21)$$

to funkcję $F(x)$ można będzie przedstawić w sposób następujący:

$$F(x) = f(x) + f(x+1) + f(x+2) + \dots + f(x+n) + \dots \quad (22)$$

Szereg (22) ma tę wyższość nad szeregiem (19), że jest zbieżnym dla wszelkich wartości zmiennej x , tak rzeczywistych jak i urojonych, może przeto służyć do określenia funkcji $F(x)$ dla wszelkich wartości zmiennej niezależnej. Prawdziwość wzoru (20) przy pomocy wzoru (22) sprawdza się bezpośrednio.

Funkcja $F(x)$ prowadzi wprost do rozwiązania zadania o interpolacji szeregu liczb

$$1, 1.2, 1.2.3, 1.2.3.4, \dots$$

W samą rzecz, czyniąc

$$\varphi(x) = \left(x - \frac{1}{2} \right) \log x - x,$$

znajdujemy

$$\Delta \varphi(x) = \left(x + \frac{1}{2} \right) \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) - 1 + \log x. \quad (23)$$

Z równań (20) i (23) wynika

$$\Delta[\varphi(x) + F(x)] = \log x;$$

oznaczając więc przez $\Gamma(x)$ funkcję

$$\Gamma(x) = e^{\varphi(x) + F(x) + C} \quad (24)$$

gdzie C jest ilością stałą dowolną, mamy

$$\Delta \log \Gamma(x) = \log x. \quad (25)$$

By funkcja $\Gamma(x)$, określona za pomocą wzoru (24), przyjmowała dla całkowitych wartości $x = 1, 2, 3, \dots$ odpowiednio wartości

$$1, 1, 1.2, 1.2.3, \dots$$

naależy ilości C dać wartość

$$C = -\varphi(1) - F(1),$$

to jest

$$\begin{aligned} C = & 1 - \left[\frac{3}{2} \log 2 - 1 \right] - \left[\frac{5}{2} \log \frac{3}{2} - 1 \right] - \left[\frac{7}{2} \log \frac{4}{3} - 1 \right] \\ & - \dots - \left[\frac{2n+1}{2} \log \frac{n+1}{n} - 1 \right] - \dots \end{aligned}$$

Równanie to można napisać:

$$C = \lim \left[n + 1 - \frac{1}{2} \log \frac{2^3 \cdot 3^5 \cdot 4^7 \cdot \dots \cdot (n+1)^{2n+1}}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot n^{2n+1}} \right], \quad (n = \infty),$$

co po skróceniu przedstawia się tak:

$$C = \lim \left[n + 1 - \frac{1}{2} \log \frac{(n+1)^{2n+1}}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot n^2} \right],$$

albo lepiej jeszcze tak:

$$C = \lim \log \frac{1.2.3 \dots n e^{n+1}}{(n+1)^{n+1/2}}.$$

Ostatnie równanie można jeszcze uprościć; dla tego przedstawimy je pod postacią

$$e^C = \lim \frac{1.2.3 \dots n e^n}{\sqrt[n]{n^n}} \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/2}};$$

stąd, przy uwadze, że

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e, \quad \lim \left(1 + \frac{1}{2} \right)^{1/2} = 1,$$

otrzymujemy

$$e^c = \lim \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n e^n}{\sqrt[n]{n} n^*}. \quad (26)$$

Granica po prawej stronie równania (26) daje się wyrazić w postaci skończonej na podstawie znanego wzoru Wallisa, który tu znajduje najważniejsze zastosowanie.

W tym celu wzór Wallisa przedstawmy w postaci:

$$\lim \frac{2^{2n} (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n)^2}{\sqrt[n]{n} 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n} = \sqrt{\pi}. \quad (27)$$

Podnosząc do kwadratu obie strony równania (26), otrzymujemy

$$e^{2c} = \lim \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n)^2 e^{2n}}{n^{2n} + \frac{1}{2}}; \quad (28)$$

lecz znowu równanie (26) można napisać tak:

$$e^c = \lim \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n e^{2n}}{\sqrt[2n]{2n} (2n)^{2n}}; \quad (29)$$

dzieląc równanie (28) przez równanie (29), otrzymujemy

$$e^c = \lim \frac{\sqrt[2]{2}^{2n} (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n)^2}{\sqrt[n]{n} 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n}$$

Na mocy wzoru (27) wnosimy, że prawa strona ostatniego równania równa się $\sqrt[2]{2\pi}$; zatem

$$e^c = \sqrt[2]{2\pi},$$

skąd wyprowadzamy

$$C = \frac{1}{2} \log 2\pi. \quad (30)$$

Podstawiając we wzorze (26) zamiast C znaną wartość, otrzymujemy znany wzór Stirlinga

$$\lim \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{\sqrt[2]{2\pi n} e^{-n} n^n} = 1,$$

który, jak tu widzimy jest bezpośrednim wnioskiem z twierdzenia Wallisa, na co zresztą już dawno zwrócono uwagę.

Funkcja $\Gamma(x)$ określona wzorem

$$\Gamma(x) = \sqrt[2]{2\pi} e^{\gamma(x) + F(x)}$$

czyli

$$\Gamma(x) = \sqrt[2]{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} e^{F(x)} \quad (31)$$

jest dobrze określona dla wszelkich wartości x , tak urojonych jak i rzeczywistych, a przy całkowitem i dodatniem x mamy

$$\Gamma(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (x-1),$$

przytém

$$\Gamma(1) = 1.$$

Bez trudności przekonać się można, że funkcja (31) jest tożsąmą ze znaną całką Eulera.

9. Funkcja $\log \Gamma(x)$ jest jedną z tych, do której najlepiej stosuje się szereg Mac Laurina, pomimo to, że szereg otrzymamy w tym razie jest rozbieżny. Fakt ten, zbyt dobrze znany w nauce, otrzymuje się najprostszą drogą ze wzoru (31) następującym sposobem.

Wzór Mac Laurina zastosowany do $\log \Gamma(x)$ daje równanie

$$\int_x^{x+1} \log \Gamma(x) dx = \log \Gamma(x) + \frac{1}{2} \Delta \log \Gamma(x) - \frac{B_1}{1 \cdot 2} \frac{d}{dx} \Delta \log \Gamma(x) + \dots + (-1)^{n-1} \frac{B_{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n-2)} \frac{d^{2n-3}}{dx^{2n-3}} \Delta \log \Gamma(x) + R_n, \quad (32)$$

gdzie

$$R_n = (-1)^n \frac{B_n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \log \Gamma(x+\theta).$$

Ze wzoru (31) otrzymujemy bezpośrednio

$$\frac{d^2 \log \Gamma(x)}{dx^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \dots;$$

skąd widać, że przy $x > 0$ wartość $\frac{d^2 \log \Gamma(x)}{dx^2}$ posiada znak stały, równy $(-1)^n$ jeśli tylko $n > 1$; więc i znak ilości R_n przy $x > 0$ równa się $(-1)^n$. Za pomocą tedy takiego samego zupełnie rozumowania jak wyżej, w paragrafie 7, przychodzimy do wniosku, że R_n można przedstawić pod postacią:

$$R_n = (-1)^n \theta \frac{B_n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n} \frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}} \Delta \log \Gamma(x),$$

gdzie θ oznacza pewien ułamek właściwy i dodatni. Na miejsce tedy wzoru (32) mamy teraz takie równanie:

$$\int_x^{x+1} \log \Gamma(x) dx = \log \Gamma(x) + \frac{1}{2} \Delta \log \Gamma(x) - \frac{B_1}{1.2} \frac{d}{dx} \Delta \log \Gamma(x) + \dots$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{B_{n-1}}{1.2.3 \dots (2n-2)} \frac{d^{2n-3}}{dx^{2n-3}} \Delta \log \Gamma(x)$$

$$+ (-1)^n \frac{\theta B_n}{1.2.3 \dots 2n} \frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}} \Delta \log \Gamma(x).$$

Przyjmując pod uwagę równość

$$\Delta \log \Gamma(x) = \log x,$$

mamy

$$\frac{d^n}{dx^n} \Delta \log \Gamma(x) = (-1)^{n-1} 1.2.3 \dots (n-1) \frac{1}{x^n},$$

z ostatniego przeto równania otrzymujemy

$$\log \Gamma(x) = \int_x^{x+1} \log \Gamma(x) dx - \frac{1}{2} \log x + \frac{B_1}{1.2} \frac{1}{x} - \frac{B_2}{3.4} \frac{1}{x^3}$$

$$+ \frac{B_3}{5.6} \frac{1}{x^5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{\theta B_n}{(2n-1)2n} \frac{1}{x^{2n-1}}. \quad (33)$$

Pozostaje nam znaleźć wartość całki po prawej stronie. Dla tego weźmy pod uwagę wzór (31), z którego otrzymujemy

$$\int_x^{x+1} \log \Gamma(x) dx = \frac{1}{2} \log 2\pi + \int_x^{x+1} \left[\left(x - \frac{1}{2}\right) \log x - x \right] dx + \int_x^{x+1} F(x) dx. \quad (34)$$

Całka pierwsza po prawej stronie otrzymuje się za pomocą całkowania bezpośredniego, mianowicie:

$$\int_x^{x+1} \left[\left(x - \frac{1}{2}\right) \log x - x \right] dx = \frac{1}{2} x [(x+1) \log (x+1) - (x-1) \log x]$$

$$- \frac{1}{4} (6x+1).$$

Dalej dla znalezienia wartości całki

$$\int_x^{x+1} F(x) dx,$$

zauważmy, że czyniąc

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \log x - 1,$$

mamy, według (22),

$$F(x) = f(x) + f(x+1) + f(x+2) + \dots;$$

zatem

$$\int_x^{x+1} F(x) dx = \int_x^{x+1} f(x) dx + \int_x^{x+1} f(x+1) dx + \int_x^{x+1} f(x+2) dx + \dots,$$

albo

$$\int_x^{x+1} F(x) dx = \int_x^{x+1} f(x) dx + \int_{x+1}^{x+2} f(x) dx + \int_{x+2}^{x+3} f(x) dx + \dots$$

$$= \int_x^\infty f(x) dx = \int_x^\infty \left[\left(x + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 \right] dx$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} x(x+1) \log \left(1 + \frac{1}{x}\right). \quad (35)$$

Z wzorów (33), (34), (35) za pomocą rugowania otrzymujemy ostatecznie

$$\log \Gamma(x) = \frac{1}{2} \log 2\pi + \left(x - \frac{1}{2}\right) \log x - x + \frac{B_1}{1.2} \frac{1}{x} - \frac{B_2}{3.4} \frac{1}{x^3}$$

$$+ \frac{B_3}{5.6} \frac{1}{x^5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{\theta B_n}{(2n-1)2n} \frac{1}{x^{2n-1}}. \quad (36)$$

Sądźmy, że metoda, której użyliśmy tu do wyprowadzenia wzoru Stirlinga, może być uważaną za najprostszą; większa część autorów wyprowadza ją drogami bocznymi. Co się tyczy wzoru (31), który tu nam posłużył za punkt wyjścia, to ten nie różni się w gruncie rzeczy od znanego wzoru Gudermanna, który w teorii funkcji gamma winien być stawiany na pierwszym miejscu.

Należy zwrócić uwagę na to, że dla wartości urojonych zmiennej x wzór (36) ma również miejsce, byleby część rzeczywista ilości x była dodatnią; w takim razie przez θ we wzorze (36) należy rozumieć pewną ilość urojoną, z pewnością mniejszą od jedności. Sprawdzenie tego spostrzeżenia jest łatwe; pozostawiamy je czytelnikowi.

10. Zwróćmy się jeszcze raz do wzoru Gudermanna (31) i napiszmy go tak:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-x+\frac{1}{2}} e^x \frac{e}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}} \frac{e}{\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1+\frac{1}{2}}} \cdots,$$

albo, co na jedno wychodzi, pod postacią

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-x+\frac{1}{2}} e^x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^x x^{x+\frac{1}{2}} (x+1)^{x+1+\frac{1}{2}} \cdots (x+n-1)^{x+n-\frac{1}{2}}}{(x+1)^{x+\frac{1}{2}} (x+2)^{x+1+\frac{1}{2}} \cdots (x+n)^{x+n-\frac{1}{2}}},$$

gdzie granicę rozumiemy dla ilości n wzrastającej do nieskończoności.

Upraszczając ostatnie wyrażenie, otrzymujemy

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(x+1)(x+2) \cdots (x+n-1) e^n}{(x+n)^{x+n-\frac{1}{2}}},$$

albo

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n 1.2.3 \cdots n}{n(x+n)^{x+n-\frac{1}{2}}} x \left(1+\frac{x}{1}\right) \left(1+\frac{x}{2}\right) \cdots \left(1+\frac{x}{n}\right),$$

lub

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n 1.2.3 \cdots n}{n^{x+n+\frac{1}{2}} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{x+n-\frac{1}{2}}} x \left(1+\frac{x}{1}\right) \cdots \left(1+\frac{x}{n}\right).$$

Lecz według twierdzenia Stirlinga mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n 1.2.3 \cdots n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi},$$

zatem

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = e^x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^x \left(1+\frac{x}{n}\right)^{x+n-\frac{1}{2}}} x \left(1+\frac{x}{1}\right) \cdots \left(1+\frac{x}{n}\right).$$

Daléj mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{x-\frac{1}{2}} = 1,$$

przeto

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^x} x \left(1+\frac{x}{1}\right) \cdots \left(1+\frac{x}{n}\right). \quad (37)$$

Jestto znany wzór Gaussa, właściwie Eulera.

11. Ze wzoru (37) widać, że iloczyn nieskończony

$$x \left(1+\frac{x}{1}\right) \left(1+\frac{x}{2}\right) \cdots \left(1+\frac{x}{n}\right) \cdots$$

jest rozbieżny; wartość jego równa się ∞ przy $x > 0$, zeru przy $x < 0$. Lecz jeśli przy każdym czynniku przypiszemy odpowiednio dobrany mnożnik, to łatwo takim sposobem otrzymać nowy iloczyn nieskończony, który będzie zbieżnym; tak, jeśli zamiast $1 + \frac{x}{n}$ napiszemy $\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}$, to otrzymany nowy iloczyn

$$x \cdot \left(1+\frac{x}{1}\right) e^{-\frac{x}{1}} \cdot \left(1+\frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} \cdots \left(1+\frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} \cdots$$

będzie zbieżnym, albowiem szereg

$$\log x + \log \left(1+\frac{x}{1}\right) e^{-\frac{x}{1}} + \cdots + \log \left(1+\frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} + \cdots$$

jest oczywiście zbieżny.

Biorąc to pod uwagę, napiszemy wzór (37) tak:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{x}{1} + \frac{x}{2} + \cdots + \frac{x}{n}}}{n^x} x \left(1+\frac{x}{1}\right) e^{-\frac{x}{1}} \left(1+\frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} \cdots \left(1+\frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}$$

albo lepiej, nazywając dla skrócenia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{x}{1}\right) e^{-\frac{x}{1}} \left(1+\frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} \cdots = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}},$$

napisać go możemy:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\left(1+\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right)x} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}.$$

Granica różnicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

równa się stałej Eulera, którą zwykle oznaczają przez C ; wprowadzając ją do poprzedniego wzoru otrzymujemy ostatecznie

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)} = e^{Cx} \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}. \quad (38)$$

Wzór ten, jak wiadomo, ma związek z twierdzeniem Weierstrassa, dotyczącym rozwijania funkcji przestępnych całkowitych (homomorficznych) na iloczyny nieskończone.

Petersburg, w kwietniu 1889 r.

PRZYSZYNEK DO TEORYI ELIMINACYI.

PRZEZ

WŁ. KRETKOWSKIEGO.

Teoria rugowania czyli eliminacyi pomiędzy dwoma równaniami algebraicznymi z jedną niewiadomą, oraz wyznaczanie pierwiastków wspólnych i niewspólnych tymże równaniom, przedstawiane są zwykle w sposób już to niezupełny, już to długi, a niekiedy nawet nie ścisły. Poniżej ośmielam się przedstawić metodę, zdaje mi się, wyczerpującą i prostą. Pozwala ona bowiem z jednej strony, gdy danymi są dwa równania, wypisać bezpośrednio zastrzeżenia konieczne i dostateczne, aby te równania mogły mieć daną liczbę pierwiastków wspólnych,—i, gdy te zastrzeżenia są wypełnione,—wypisać również bezpośrednio równanie, dające pierwiastki wspólne oraz dwa równania, dające pierwiastki nie wspólne, i to wszystko, jako funkcje wyraźne współczynników danych równań. Z drugiej znów strony, dowód tej metody otrzymuje się na najprostszym drodze algebraicznej t. j. z pewnych tożsamości algebraicznych. Ubocznie tą drogą otrzymuję iloraz i resztę dzielenia dwóch danych wielomianów, oraz zastrzeżenia konieczne i dostateczne, aby dwa dane wielomiany posiadały za największy wspólny dzielnik wielomian stopnia danego, i—w razie gdy te zastrzeżenia są wypełnione—otrzymuję wyrażenia tegoż dzielnika i dwóch ilorazów najmniejszych, jako funkcje wyraźne współczynników danych wielomianów.

Ponieważ wzory ogólne byłyby bardzo długie, a dowód sam nie byłby może dosyć wyraźnym, prowadzić będę przeto rachunki w części na przykładzie szczególnym; czytelnik wszakże z łatwością przekona się, że ogólność dowodów nic na tym nie ucierpi.