Jednym z szczególnych przypadków twierdzenia VI* jest prawo o środku ciężkości ostrosłupa trójściannego.

Zajmującem może zadaniem byłoby zbadanie następstw, jakie z ciągłego lub chwilowego istnienia siłośrodu wynikałyby dla D y n a m i k i układu punktów, poddanych działaniu sił wewnętrznych [1]).

---

[1]) Dla układu trzech punktów, przyciągających się wzajem podług prawa N e w t o n a, uczynił p. D e l a u n a y w tym względzie tylko pierwszy krok w przytoczonym powyżej wykładzie, wprowadził mianowicie spółrzędne siłośrodu formalnie w odnośne równania różniczkowe ruchu.

S. ZAREMBA.

O ZASADZIE DIRICHLETA [1]).

§ 1. Rozważania poniższe stosują się z równą łatwością do przestrzeni, jak i do płaszczyzny, tak że jedynie dla ustalenia myśli ograniczymy się do przypadku płaszczyzny.

Uważajmy na płaszczyznie układ spółrzędnych prostokątnych (x, y) oraz obszar (D), nie rozciągający się do nieskończoności i dający się kwadrować.

Z drugiej strony uważajmy funkcyę ciągłą σ, określoną na ograniczeniu (S) obszaru (D), oraz mnogość (E) wszystkich funkcyj f, mających następujące własności:

1-o. Każda z funkcyj f jest ciągła wewnątrz obszaru (D) oraz na ograniczeniu tego obszaru;

2-o. Wartości każdej z tych funkcyj f na ograniczeniu mają zlewać się z wartościami funkcyi σ.

3-o. W e w n ą t r z obszaru (D) pochodne $\frac{\partial f}{\partial y}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ są ciągłe.

Może się zdarzyć, że dla żadnej z funkcyj f całka:

(1) $$A(f) = \iint\limits_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy$$

---

[1]) Komunikat, odczytany w Sekcyi Analizy na IV-ym Kongresie międzynarodowym matematyków w Rzymie dnia 11 kwietnia 1908.

nie ma wartości skończonej. Wykazał to Hadamard na przykładzie bardzo prostym[1]). Przyjmiemy, że funkcya σ spełnia warunki, potrzebne na to, aby okoliczność rzeczona nie zachodziła. Wtedy wartości całki $A(f)$ posiadać będą kres niższy I, zupełnie oznaczony. Przy tych założeniach oto jak wyrazić się daje zasada Dirichleta, jak ją pojmował Riemann:

W mnogości (E) istnieć będzie funkcya u, sprawdzająca równanie:

$$A(u) = I. \tag{2}$$

Z tego to faktu, jak wiadomo, Riemann wywnioskował możność zagadnienia Dirichleta.

Wskutek krytyki znanej Weierstrasa[2]) badania, dotyczące istnienia rozwiązania zagadnienia Dirichleta pozostawały przez długi czas niezależnemi od faktu istnienia liczby I. Pierwszą próbę, mającą na celu uzupełnienie rozumowania Riemanna, uczynił H. Weber (Journ. f. Math. **71**). Następnie C. Arzelà przewidział z zupełną jasnością płodność badań, mających na celu rehabilitacyę zasady Dirichleta (patrz Notę: „Sul principio di Dirichlet", przedstawioną przez tego wybitnego analistę na posiedzeniu Akademii bolońskiej 24 stycznia 1891 roku). Nakoniec danem było Hilbertowi[3]) w przypadku szczególnym pokonać wszystkie trudności zagadnienia. Wiadomo, jak ważne wyniki otrzymali później na tejże drodze Beppo Levi, Fubini i Lebesgue[4]).

Powracając do naszego pytania, zamierzam wskazać nową metodę, pozwalającą otrzymać te wyniki sposobem bardzo prostym, bez żadnej ujmy dla ogólności.

---

[1]) Hadamard, Sur le principe de Dirichlet (Bulletin de la Société math. de France, 1906 p. 135).

[2]) Werke I–II p. 49—54. Porówn. K. Weierstrass, O tak nazwanej zasadzie Dirichleta. Wiadomości matematyczne. Tom 2, str. 1—6.

[3]) Ueber das Dirichlet'sche Princip (Jahresberichte der Deutschen Mathematiker Vereinigung 1900).

Ueber des Dirichlet'sche Princip (Festschrift zur Feier des 150-jährigen Bestehens der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1901).

[4]) Patrz zwłaszcza w „Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo" prace następujące:

Beppo Levi, Sul principio di Dirichlet (2 sem. 1906).

Fubini, Il principio di minimo e i teoremi di esistenza per i problemi al contorno relativi alle equazioni alle derivate parziali di ordini pari (2 sem. 1901).

Lebesgue H., Sur le problème de Dirichlet (2 sem. 1907).

§ 2. Połóżmy ogólnie:

$$B(P,Q) = \iint_{(D)} \left\{\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial y}\right\} dx\,dy \tag{3}$$

i rozpatrzmy następujące zagadnienie:

Mając daną funkcyę φ taką, że całka $A(\varphi)$ ma wartość oznaczoną i skończoną, wyznaczyć funkcyę v harmoniczną wewnątrz obszaru (D) taką, aby całka $A(v)$ była skończoną i nadto taką, aby dla wszelkiej funkcyi h, harmonicznej wewnątrz obszaru (D), było:

$$B(\varphi, h) = B(v, h), \tag{4}$$

o ile tylko całka $A(h)$ nie jest pozbawiona znaczenia.

Nazywam to zagadnienie zagadnieniem Dirichleta przekształconem lub wprost zagadnieniem przekształconem.

Łatwo widzieć, że rozwiązanie tego zagadnienia, o ile ono istnieje jest wyznaczone aż do stałej dodajnej.

W samej rzeczy, jeżeli funkcya v_0 jest rozwiązaniem zagadnienia, będzie oczywiście funkcya $v_0 + \text{const.}$ innem rozwiązaniem. Z drugiej strony, jeżeli każda z funkcyj v' i v'' jest rozwiązaniem rozważanego zagadnienia, będzie:

$$B(v', h) = B(\varphi, h),$$
$$B(v'', h) = B(\varphi, h),$$

skąd:

$$B(v' - v'', h) = 0,$$

o ile tylko funkcya harmoniczna h nie nadaje całce $A(h)$ wartości nieskończonej.

Połóżmy, co jest dozwolone

$$h = v' - v'';$$

będzie:

$$B(v' - v'', v' - v'') = A(v' - v'') = 0,$$

skąd:

$$v' - v'' = \text{const.}$$

Twierdzenie tedy jest dowiedzione.

§ 3. Zobaczymy zaraz, że zagadnienie przekształcone jest zawsze możliwe.

Przyjmijmy to tymczasowo i zobaczmy, jaką korzyść można stąd osiągnąć dla zbadania pytań, związanych z zasadą Dirichleta.

Mamy najprzód twierdzenie następujące:

Jeżeli pomiędzy funkcyami, należącemi do mnogości E, określonej w § 1, istnieje funkcya harmoniczna u, funkcya ta przedstawia rozwiązanie zagadnienia przekształconego odnośnie każdej z tych funkcyj uważanej mnogości, dla których całka $A(f)$ ma wartość skończoną.

Z twierdzenia tego wypływa wniosek następujący: funkcya u, jeżeli istnieje, czyni zadość równaniu (2).

W samej rzeczy, jeżeli h ma to samo znaczenie co wyżej, będzie:

$$B(f,h) = B(u,h),$$

skąd:

$$B(f,u) = A(u),$$

jażeli położymy, na co mamy prawo,

$$h = u,$$

Będzie zatem:

$$A(f) = A(u) + A(f-u).$$

A więc, o ile tylko funkcya f nie zlewa się z funkcyą u, będzie:

$$A(f) > A(u),$$

co stwierdza, że funkcya u czynić będzie zadość równaniu (2).

Oto znów twierdzenie drugie, uzupełniające poprzednie:

Niechaj w mnogości (E) będzie f_0 funkcya taka, że całka $A(f_0)$ jest skończona; oznaczmy przez w rozwiązanie zagadnienia przekształconego dla obszaru (D) odnośnie funkcyi f_0. Skoro tylko obszar (D) czyni zadość warunkowi bardzo ogólnemu, który zaraz przytoczymy i który chwilowo nazwę warunkiem (C), funkcya w posiada wartości na ograniczeniu zupełnie oznaczone, różniące się tylko o stałą od wartości funkcyi f_0, a więc i od wartości każdej innej funkcyi, należącej do rozważanej mnogości.

Twierdzenie to pozwala oczywiście udowodnić z wielką ogólnością istnienie rozwiązania zagadnienia Dirichleta w bardzo szerokiej mierze.

Winienem teraz wyszczególnić wspomniany wyżej warunek (C), stanowiący restrykcyę, z jaką metoda moja pozwala udowodnić drugie

z twierdzeń poprzedzających, albowiem nie znając tego warunku, nie możnaby sądzić o stopniu ogólności wyników.

Dla wysłowienia warunku (C), weźmy jakikolwiek punkt O, położony na ograniczeniu (S) obszaru (D) i z tego punktu, jako ze środka, opiszmy koło (Σ) o promieniu r. Mnogość punktów, znajdujących się równocześnie wewnątrz (Σ) i wewnątrz (D), może stanowić obszar, zawierający skończoną lub nieskończoną liczbę dziedzin różnych (d). Oznaczmy przez (d') jednę z tych dziedzin i uważajmy punkt zmienny M, poddany warunkowi pozostawania wewnątrz (d'). Niechaj θ będzie kątem, utworzonym przez promień OM z pewną osią stałą. Poddajmy kąt θ warunkowi zmieniania się w sposób ciągły wraz z położeniem punktu M. W tym przypadku warunek (C) można wysłowić w sposób następujący: Jeżeli promień r koła (Σ) nie jest większy od pewnej długości δ, niezależnej od położenia punktu O na ograniczeniu (S) obszaru (D) i od wyboru dziedziny (d') pomiędzy dziedzinami (d), wartości kąta θ, bez względu na to, w jaki sposób przesuwa się punkt M wewnątrz (d'), nie powinny przekraczać przedziału (θ_1, θ_2) takiego, że:

$$|\theta_2 - \theta_1| < 2\alpha,$$

gdzie α jest liczbą dodatnią, skończoną niezależną, podobnie jak δ, ani od położenia punktu O na ograniczeniu obszaru (D), ani od wyboru dziedziny (d') pomiędzy dziedzinami (d).

Nadmieniam jeszcze, że metoda, która posłuży mi do rozwiązania zagadnienia przekształconego, daje sposób bardzo prostego udowodnienia zasadniczych twierdzeń, wysłowionych w tym paragrafie.

§ 4. Dla koła rozwiązanie zagadnienia przekształconego jest bezpośrednie. Oznaczmy, jak poprzednio, przez φ funkcyę daną, przez v funkcyę szukaną. Niechaj r będzie promieniem koła. Odniósłszy płaszczyznę do układu spółrzędnych biegunowych (ϱ, θ), z biegunem w punkcie O, środku koła, mieć będziemy:

$$v = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ X_k B(\varphi, X_k) + Y_k B(\varphi, Y_k) \right\}.$$

gdzie a_0 jest stała dowolna i gdzie:

$$X_k = \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^k \cos k\theta,$$

$$Y_k = \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^k \sin k\theta.$$

§ 5. Rozważmy teraz obszar (D), który możemy określić jako mnogość punktów wewnętrznych przynajmniej jednego z dwóch innych obszarów (D_1) i (D_2), mających wspólne punkty wewnętrzne.

Jeżeli umiemy rozwiązać zagadnienie przekształcone dla każdego z obszarów (D_1) i (D_2), będzie można łatwo rozwiązać je dla obszaru (D) za pomocą postępowania naprzemiennego, analogicznego do dobrze znanej metody Schwarza.

W każdym jednak razie dowód zbieżności ciągów nieskończonych, które tu rozważać trzeba, wypływa z rozważań zasadniczo różnych od używanych w metodzie Schwarza.

§ 6. Oto wreszcie, w jaki sposób zagadnienie przekształcone może być rozwiązane w przypadku ogólnym. Rozważmy, jak w metodzie, zwanej méthode de balayage, ciąg nieskończony kół:

$$(C_1),\ (C_2),\ (C_3),\ \ldots,$$

które wszystkie są wewnątrz obszaru (D) i takie, że każdy punkt tego obszaru znajduje się wewnątrz przynajmniej jednego z tych kół. Oznaczmy przez (D_n) obszar, utworzony przez mnogość punktów, z których każdy znajduje się wewnątrz przynajmniej jednego z n kół:

$$(C_1),\ (C_2),\ (C_3,\ \ldots,\ (C_n).$$

Obszar (D_n) będzie mógł składać się z pewnej liczby dziedzin różnych, lecz to nie stanowi dla nas żadnej przeszkody. Niechaj φ oznacza, jak wyżej, funkcyę daną. Rozważmy ciąg nieskończony, którego pierwszy wyraz φ_0 jest wyznaczony przy pomocy równania:

$$\varphi_0 = \varphi,$$

wyraz zaś φ_n, stojący na miejscu $n+1$, otrzymuje się z wyrazu φ_{n-1} w sposób następujący: wewnątrz obszaru (D_n) funkcya φ_n równa się rozwiązaniu zagadnienia przekształconego dla tej dziedziny odnośnie funkcyi φ_{n-1}, w pozostałej zaś części obszaru (D) jest:

$$\varphi_n = \varphi_{n-1}.$$

Jest widoczne, że metoda naprzemienna pozwala obliczanie wyrazów ciągu:

$$\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,$$

prowadzić tak daleko, jak chcemy.

To mając i posługując się w odpowiedni sposób całkami $B(\varphi_p, \varphi_q)$, stwierdzamy, że równanie:

$$\lim_{n=\infty} A(v-\varphi_n) = 0$$

określa—aż do stałej dodajnej—funkcyę v harmoniczną wewnątrz obszaru (D). Przekonywamy się następnie, że funkcya v jest właśnie żądanem rozwiązaniem zagadnienia przekształconego.

Dowód zasadności poprzedzającej metody polega jedynie na dwóch następujących hypotezach:

1. Obszar (D) nie rozciąga się do nieskończoności i daje się kwadrować.
2. Całka $A(\varphi)$ ma wartość skończoną i zupełnie oznaczoną.