A. AXER.

O UKŁADACH SIŁ WEWNĘTRZNYCH Z SIŁOŚRODEM[1].

1.

P. *Delaunay* udowodnił na trzecim międzynarodowym Kongresie matematyków w Heidelbergu w r. 1904, że „*przy ruchu trzech ciał, przyciągających się wzajemnie podług prawa Newtona, istnieje siłośród*"[2],—przyczem przez trzy ciała rozumiał trzy punkty materyalne, nie leżące w jednej prostej, a przez siłośród („centre des forces") istniejący w danym przypadku *wspólny* punkt przecięcia trzech sił wypadkowych, jakie działają na wspomniane trzy punkty.

Na wstępie niniejszych rozważań chciałbym podać i udowodnić pewne prawo ogólne, w którem zawiera się, jako jeden z jego szczególnych przypadków, również twierdzenie powyższe.

Prawo to brzmi:

I. *Jeżeli między trzema punktami materyalnemi, nie leżącemi w jednej prostej, działają dowolne siły*

---

[1]) Rzecz, przedstawiona na posiedzeniu Wydziału matematyczno-przyrodniczego Towarzystwa naukowego Warszawskiego d. 9 marca 1908 r.

[2]) Por.: Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses. Hgg. v. A. *Krazer*. Leipzig 1904.—Str. 398: „Sur le problème des trois corps". Von N. *Delaunay*.

w e w n ę t r z n e, z k t ó r y c h c o n a j m n i e j d w i e p a r y n i e z n i k a j ą, t o d l a u k ł a d u s i ł t y c h i s t n i e j e s i ł o ś r ó d.

Dla dowodu oznaczmy wspomniane trzy punkty przez A_0, A_1, A_2, a odcinki

$$\overline{A_1A_2},\quad \overline{A_2A_0},\quad \overline{A_0A_1}=-\overline{A_1A_2}-\overline{A_2A_0} \tag{1}$$

pomyślmy sobie jako wektory. Wówczas tę składową układu, która zaczepia w punkcie A_0 a zwraca się ku punktowi A_1 lub w stronę wprost przeciwną, możemy przedstawić przez $h_{01}.\overline{A_0A_1}$, rozumiejąc przez h_{01} pewien spółczynnik liczbowy ($\gtrless 0$); składowa, zaczepiająca w A_1 a skierowana ku A_0, względnie w stronę przeciwną, będzie $=-h_{01}.\overline{A_0A_1}$. Analogicznie i w analogicznym porządku niechaj $h_{12}.\overline{A_1A_2}$ i $-h_{12}.\overline{A_1A_2}$ oznaczają składowe, działające między punktami A_1, A_2, a $h_{20}.\overline{A_2A_0}$ i $-h_{20}.\overline{A_2A_0}$ składowe, działające między punktami A_2, A_0, przyczem co najmniej dwa ze spółczynników h_{01}, h_{12}, h_{20} mają być $\neq 0$.

Jeżeli jeden ze wspomnianych spółczynników znika, twierdzenie I rozumie się samo przez się. Załóżmy tedy, że wszystkie trzy spółczynniki są $\neq 0$. W punktach A_0, A_1, A_2 działają natenczas następujące, różne od zera wypadkowe:

$$\begin{aligned}
R_0 &= h_{01}.\overline{A_0A_1}-h_{20}.\overline{A_2A_0} = -h_{01}.\overline{A_1A_2}-(h_{20}+h_{01}).\overline{A_2A_0}\,,\\
R_1 &= h_{12}.\overline{A_1A_2}-h_{01}.\overline{A_0A_1}=(h_{12}+h_{01}).\overline{A_1A_2}+h_{01}.\overline{A_2A_0}\,,\\
R_2 &= -h_{12}.\overline{A_1A_2}+h_{20}.\overline{A_2A_0}\,.
\end{aligned}$$

Jeżeli M_2 jest punktem przecięcia wypadkowych R_0, R_1, a M_0 punktem przecięcia wypadkowych R_1, R_2, wówczas mamy naprzód dla M_2:

$$\begin{aligned}
\overline{A_0M_2} &= xR_0 = -x[h_{01}.\overline{A_1A_2}+(h_{20}+h_{01}).\overline{A_2A_0}]\,,\\
\overline{A_1M_2} &= yR_1 = y[(h_{12}+h_{01}).\overline{A_1A_2}+h_{01}.\overline{A_2A_0}]\,,
\end{aligned} \tag{2}$$

przyczem spółczynniki x, y winny być obliczone z równania:

$$\overline{A_0A_1}+\overline{A_1M_2}-\overline{A_0M_2}=0\,,$$

które, po wstawieniu wartości z pod (1) i (2), rozpada się na następujący układ równań:

$$\begin{cases}(h_{20}+h_{01})x+h_{01}y=1\,,\\ h_{01}x+(h_{12}+h_{01})y=1\,.\end{cases}$$

Założywszy, że wyznacznik tego układu,

$$H=h_{01}h_{12}+h_{12}h_{20}+h_{20}h_{01}\,,$$

jest $\neq 0$, otrzymujemy:

$$x=\frac{h_{12}}{H}\,,\quad y=\frac{h_{20}}{H}\,,$$

zatem:

$$\overline{A_0M_2}=\frac{h_{12}}{H}R_0,\quad \overline{A_1M_2}=\frac{h_{20}}{H}R_1\,; \tag{3}$$

stąd zaś wynika analogicznie dla M_0 (przez kołowe przesunięcie wskaźników):

$$\overline{A_1M_0}=\frac{h_{20}}{H}R_1,\quad \overline{A_2M_0}=\frac{h_{01}}{H}R_2. \tag{4}$$

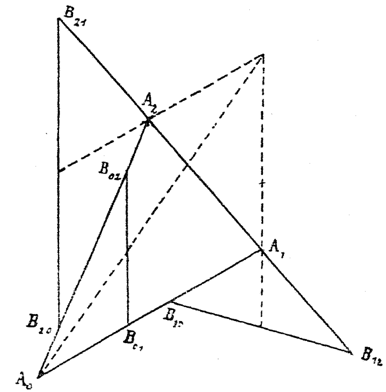

Fig. 1.

Z drugiej równości pod (3) i z pierwszej pod (4) wynika tożsamość punktów M_2, M_0, a więc i trafność twierdzenia I w przypadku $H\neq 0$. Ale i przypadek $H=0$, w którym, jak widać, wszystkie trzy wypadkowe biegną równolegle, da się podporządkować pod nasze twierdzenie, gdyż siłośród przenosi się w nim tylko w nieskończoność.

Twierdzenie I da się bezpośrednio ująć w następującą formę geometryczną:

I*. J e ś l i w d o w o l n y m t r ó j k ą c i e $A_0A_1A_2$ o b i e r z e m y n a k a ż d y m b o k u (j a k o p r o s t e j n i e o g r a n i c z o n e j) p o d w a p u k t y, s y m e t r y c z n e z e w z g l ę d u n a ś r o d e k b o k u, -np. j a k n a f i g. 1, p u n k t y B_{01} i B_{10} n a b o k u A_0A_1, B_{12} i B_{21} n a A_1A_2, B_{20} i B_{02}

A_2A_0,—i to (dla uniknięcia przypadków trywialnych) każdy punkt B_{ik} poza odnośnym A_i $(i, k=0, 1, 2; i\neq k)$,—wówczas trzy środkowe, wyprowadzone w trzech nowo utworzonych trójkątach $A_0B_{01}B_{02}$, $A_1B_{12}B_{10}$, $A_2B_{20}B_{21}$ odpowiednio z wierzchołków A_0, A_1, A_2, albo przetną się w jednym punkcie, albo będą do siebie wzajem równoległe,—w zależności mianowicie od tego, czy wyrażenie:

$$\frac{\overline{A_0B_{01}}}{\overline{A_0A_1}}\cdot\frac{\overline{A_1B_{12}}}{\overline{A_1A_2}}+\frac{\overline{A_1B_{12}}}{\overline{A_1A_2}}\cdot\frac{\overline{A_2B_{20}}}{\overline{A_2A_0}}+\frac{\overline{A_2B_{20}}}{\overline{A_2A_0}}\cdot\frac{\overline{A_0B_{01}}}{\overline{A_0A_1}},$$

w którem występujące odcinki pomyślane są jako wektory, będzie $\neq 0$ czy $=0$.

Do twierdzenia I* nawiązać można pytanie, czy wymienione w niem trzy środkowe będą posiadały wspólny punkt przecięcia, względnie biedz będą równolegle, także wtedy, gdy warunek symetryczności każdej pary punktów B ze względu na środek odnośnego boku odrzucimy. Fizykalnie rzecz biorąc, zapytywalibyśmy tem samem o siłośród w takim przypadku, gdyby pomienione w twierdzeniu I siły wewnętrzne przestały podlegać trzeciemu prawu Newtona (o równości działania i przeciwdziałania).

Siły wewnętrzne wspomnianego właśnie rodzaju będziemy poniżej nazywali ogólnemi siłami wewnętrznemi[1],—pospolitemi natomiast te, które się do rzeczonego prawa stosują.

Ponadto możnaby poszukiwać korelatów do twierdzeń I, I* dla przestrzeni,—zarówno dla trójwymiarowej, jak wogóle dla n-wymiarowej przestrzeni.

Oba te zadania ujmę poniżej w jedno, rozpatrując następującą kwestyę ogólną, właściwy przedmiot niniejszego artykułu:

Przy jakich warunkach koniecznych i dostatecznych układ ogólnych sił wewnętrznych, działających w przestrzeni n-wymiarowej pomiędzy $n+1$ zupełnie tę przestrzeń wyznaczającemi punktami materyalnemi, posiada siłośród?

2.

Niechaj $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n\geqq 2)$ będą wspomnianemi ostatnio punktami, leżącemi w przestrzeni nie niższej, jak n-wymiarowej. Wektor

[1]) „Wewnętrznemi" więc tylko przez wzgląd na to, że każdą z tych sił wywiera jakiś punkt danego układu na inny punkt tegoż układu.

$\overline{A_iA_k}$ $(i, k=0, 1, 2, \ldots, n; i\neq k)$ niech się zowie krótko a_{ik}, a $P_{ik}=h_{ik}\,a_{ik}$ niechaj oznacza naogół tę składową danego między punktami A układu ogólnych sił wewnętrznych, która zaczepia w punkcie A_i, a działa w kierunku ku punktowi A_k lub we wprost przeciwnym,—przyczem spółczynnik h_{ik} ma być każdorazowo dany. Wówczas

$$R_i=\sum_{\substack{k=0\\(k\neq i)}}^{n} h_{ik}\,a_{ik}$$

będzie zaczepiającą w punkcie A_i $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$ wypadkową układu.

Przez i' będziemy poniżej rozumieli każdy taki ze skaźników $i=0, 1, 2, \ldots, n$, któremu odpowiada nieznikająca wypadkowa R_i, czyli, do którego należą spółczynniki h_{ik} $(k=0, 1, 2, \ldots, n; k\neq i)$, które nie wszystkie znikają.

Załóżmy, że układ nasz posiada siłośród M. Przyjmiemy najprzód, że M znajduje się poza punktami A, później, że leży w jednym z tych punktów.

(A). W pierwszym przypadku jasnem jest przedewszystkiem, iż wśród wypadkowych $R_{i'}$ znajdzie się wówczas tylko albo jedna, albo żadna taka, którąby przechodziła (ewentualnie w przedłużeniu) przez dwa zpośród punktów A (t. j. przez $A_{i'}$ i przez jeszcze jeden). Gdyby bowiem dwie podobne $R_{i'}$ znajdowały się w układzie, wówczas aby istnieć mógł siłośród poza punktami A, musiałyby koniecznie pewne cztery (co najmniej) punkty A leżeć w jednej płaszczyźnie, co sprzeciwiałoby się założeniu. Że zaś—byśmy o siłośrodzie wogóle mówić mogli—co najmniej dwie $R_{i'}$ istnieć muszą w układzie, przeto dozwolone tu będzie dalsze założenie, że wypadkowa

$$R_0=\sum_{k=1}^{n} h_{0k}\,a_{0k}$$

jest $\neq 0$ i że nie przechodzi przez żaden z punktów $A_1, A_2, \ldots, A_n$,—czyli, że co najmniej dwa ze spółczynników h_{0k} $(k=1, 2, \ldots, n)$ są $\neq 0$.

Przyjęty siłośród może tu leżeć w odległości skończonej lub w nieskończonej. Każdą z tych dwu ewentualności rozpatrzymy oddzielnie.

W razie pierwszej należą do wypadkowych $R_{i'}$, w szczególności do R_0, takie różne od zera liczby $x_{i'}$, względnie x_0, iż jest:

$$\overline{A_0M}=x_0R_0=x_0\sum_{k=1}^{n} h_{0k}\,a_{0k}, \tag{5}$$

a dla każdego $i' \neq 0$:

$$\overline{A_{i'}M} = x_{i'}R_{i'} = x_{i'}\sum_{\substack{k=0\\(k\neq i')}}^{n} h_{i'k}\alpha_{i'k},$$

$$= x_{i'}\Big[h_{i'0}\alpha_{i'0} + \sum_{\substack{k=1\\(k\neq i')}}^{n} h_{i'k}(\alpha_{0k}-\alpha_{0i'})\Big],$$

(5') $$= x_{i'}\sum_{\substack{k=1\\(k\neq i')}}^{n} h_{i'k}\alpha_{0k} - x_{i'}\alpha_{0i'}\sum_{\substack{k=0\\(k\neq i')}}^{n} h_{i'k}.$$

Zarazem stosuje się wówczas dla każdego $i' \neq 0$ równanie wektoryalne:

(6) $$\alpha_{0i'} + \overline{A_{i'}M} - \overline{A_0M} = 0,$$

które, po uwzględnieniu równości (5), (5') i po odpowiedniem przekształceniu, przybiera postać następującą:

$$\Big[1 - x_0h_{0i'} - x_{i'}\sum_{\substack{k=0\\(k\neq i')}}^{n} h_{i'k}\Big]\alpha_{0i'} + \sum_{\substack{k=1\\(k\neq i')}}^{n}(x_{i'}h_{i'k} - x_0h_{0k})\alpha_{0k} = 0.$$

Stąd zaś wynika, dla każdego $i' \neq 0$, układ n równań:

(7) $$x_0h_{0i'} + x_{i'}\sum_{\substack{k=0\\(k\neq i')}}^{n} h_{i'k} = 1,$$

(7') $$x_0h_{0k} - x_{i'}h_{i'k} = 0, \quad (k=1, 2, \dots, n;\ k\neq i')$$

czyli, po wprowadzeniu różnych od 0 wielkości $c_{i'} = \dfrac{x_0}{x_{i'}}$:

(8) $$c_{i'}h_{0i'} + \sum_{\substack{k=0\\(k\neq i')}}^{n} h_{i'k} = \frac{c_{i'}}{x_0},$$

(8') $$h_{i'k} = c_{i'}h_{0k}, \quad (k=1, 2, \dots, n;\ k\neq i').$$

Przy pomocy $n-1$ równań (8') otrzymujemy z równania (8) na $h_{i'0}$ wartość:

$$h_{i'0} = c_{i'}\left(\frac{1}{x_0} - \sum_{k=1}^{n} h_{0k}\right),$$

albo też, oznaczywszy przez h_{00} wielkość $\dfrac{1}{x_0} - \sum\limits_{k=1}^{n} h_{0k}$, która tu mieć może wartość skończoną dowolną, lecz różną od $-\sum\limits_{k=1}^{n} h_{0k}$:

(9) $$h_{i'0} = c_{i'}h_{00}.$$

Dla każdego $i' \neq 0$ musi tedy w niniejszym przypadku zachodzić układ związków (8'), (9), czyli układ:

(10) $$h_{i'k} = c_{i'}h_{0k}, \quad (k=0, 1, 2, \dots, n;\ k\neq i').$$

Ale też dla każdego i, różnego od wszelkich i' (o ile takie i tu się jeszcze znajdą), sprawdzać się będzie analogiczny do (10) układ związków sam przez się, po przyjęciu $c_i = 0$. W układzie

(11) $$h_{ik} = c_ih_{0k}, \quad \left(\begin{smallmatrix}k=0,\,1,\,2,\,\dots,\,n;\ k\neq i\\ i=1,\,2,\,\dots,\,n\end{smallmatrix}\right)$$

mamy przeto układ warunków, koniecznych na to, aby rozważony tu przypadek zachodził; warunki te uzupełnić jeszcze należy zastrzeżeniami tej treści, żeby suma dowolnych zresztą wielkości $h_{00}, h_{01}, h_{02}, \dots, h_{0n}$ nie znikała, a co najmniej dwie z wielkości $h_{01}, h_{02}, \dots, h_{0n}$ były $\neq 0$ i żeby co najmniej jedna z dowolnych zresztą wielkości $c_1, c_2, \dots, c_n$ była $\neq 0$.

Lecz warunki powyższe są tu i dostatecznemi. Albowiem w razie spełnienia ich będzie przedewszystkiem zarówno wypadkowa

$$R_0 = \sum_{k=1}^{n} h_{0k}\alpha_{0k},$$

jak i każda taka wypadkowa

$$R_i = \sum_{\substack{k=0\\(k\neq i)}}^{n} h_{ik}\alpha_{ik} = c_i\sum_{\substack{k=0\\(k\neq i)}}^{n} h_{0k}\alpha_{ik}$$

Kolumny	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1[illegible]	[illegible]
1828	27.8	—	—	—	10.9	—	15.1	9.5	—	—	[illegible]
29	27.2	**28.9**	25.3	—	**22.4**	—	**32.6**	**29.0**	—	—	[illegible]
30	**33.3**	26.1	21.2	—	20.2	—	22.6	16.1	—	—	—
31	22.2	23.9	23.3	—	15.4	—	17.4	16.4	—	—	—
32	14.4	21.3	13.9	—	13.[illegible]	—	16.0	24.4	—	—	—
*33	11.1	22.0	15.7	—	**20.7**	—	**24.2**	17.7	—	—	—
34	**30.5**	**25.6**	16.1	—	19.8	—	**25.4**	16.5	—	—	—
35	21.1	22.4	20.9	—	20.1	—	24.2	20.4	—	—	—
36	12.8	22.7	26.1	—	18.4	—	27.5	17.6	—	—	—
37	22.8	25.8	19.8	—	**26.2**	—	16.9	17.7	—	—	—
38	**33.8**	**31.2**	**25.3**	—	20.4	—	**25.5**	25.0	—	—	—
39	18.3	26.8	18.9	—	18.9	—	23.1	25.1	—	—	—
1840	14.5	16.8	21.5	19.7	21.5	—	23.8	17.5	—	—	—
41	15.3	14.3	14.7	25.2	19.7	—	24.2	18.0	22.5	—	—
42	**24.7**	**28.7**	**23.6**	20.9	19.1	—	25.1	25.3	19.4	—	—
*43	**27.2**	**29.6**	**24.2**	**34.6**	11.7	—	**27.3**	28.8	**28.1**	—	—
44	12.0	24.2	13.9	27.0	15.7	—	20.7	31.0	20.2	—	—
45	21.4	23.4	16.9	21.7	22.5	—	29.2	24.1	16.9	—	—
46	15.8	31.1	16.5	21.8	21.9	—	24.4	22.1	20.9	—	—
47	20.8	15.8	12.8	**60.1**	17.5	**23.4**	15.0	**25.4**	**23.7**	—	—
48	**21.7**	19.9	**18.9**	24.9	15.0	15.6	**28.8**	**24.5**	21.4	—	—
49	15.3	21.3	16.5	27.1	10.9	10.9	18.8	17.3	21.7	—	—
1850	15.3	18.9	15.0	18.6	17.3	14.1	22.1	21.4	24.6	—	—
51	17.0	17.0	16.3	—	15.3	14.7	17.7	23.1	24.3	—	—
52	23.0	17.8	16.7	—	21.0	14.1	21.6	19.3	21.6	—	—
53	13.4	14.6	12.2	—	18.4	13.3	17.7	23.3	22.1	—	—
54	17.4	22.0	16.8	—	11.9	9.0	14.9	23.9	24.3	—	—
55	16.9	19.8	16.0	—	**18.2**	**14.5**	**27.2**	**26.1**	**25.6**	—	—
*56	**20.6**	**29.5**	**25.1**	—	16.6	11.8	18.9	23.7	23.6	—	—
57	14.3	**31.3**	**26.9**	19.1	12.7	13.8	14.6	22.1	21.9	—	12.9
58	18.4	24.4	18.6	20.0	20.5	14.1	21.9	.0.7	20.5	—	11.0
59	**20.4**	21.7	17.6	**30.7**	16.5	12.9	21.0	20.8	**25.2**	—	6.6
1860	18.2	**25.6**	13.7	**29.3**	**18.7**	**15.3**	14.8	18.0	**26.7**	—	11.8
61	17.8	15.4	15.2	20.0	16.5	12.7	25.0	25.9	24.2	10.8	**16.4**
62	14.1	19.3	10.9	36.0	15.9	11.4	19.7	29.1	24.3	7.4	**16.7**
63	13.2	21.9	16.1	63.1	16.6	12.1	25.9	23.4	20.4	6.6	9.1
64	15.0	23.4	12.7	26.4	15.9	13.6	26.3	27.3	22.8	10.4	12.9
65	15.7	19.8	19.1	21.4	24.7	13.5	26.5	24.5	21.0	9.2	11.2
66	14.4	20.3	15.3	24.8	19.7	12.2	25.4	21.3	24.3	12.2	6.5
*67	14.8	**27.7**	**21.3**	21.0	13.3	**14.4**	19.3	**30.5**	**26.2**	7.9	8.7
68	7.5	23.4	20.0	**27.1**	**22.7**	12.8	17.7	17.5	20.3	8.9	**11.9**
69	12.9	21.2	18.3	19.5	20.0	11.9	18.5	24.0	27.7	11.9	7.4
1870	16.6	**26.7**	18.9	**30.1**	17.2	**14.0**	**26.8**	**25.2**	21.0	**12.3**	8.8
71	18.3	**26.7**	**20.3**	25.0	**21.6**	11.8	**28.1**	**26.6**	21.5	11.7	**9.9**
72	13.3	20.0	19.5	27.4	18.5	11.6	24.7	23.0	22.5	10.7	**14.8**
73	17.4	22.1	15.1	18.0	16.1	11.5	21.3	18.2	22.0	9.1	9.6
74	16.7	21.2	16.5	24.5	15.4	11.8	17.8	20.5	20.2	9.6	14.0
75	**19.5**	**33.5**	**21.9**	34.3	17.6	**14.0**	**27.1**	**26.0**	21.0	**10.5**	8.3
76	12.3	22.6	19.8	19.1	18.0	12.2	23.5	24.5	20.0	9.4	9.7
77	18.5	26.6	15.8	30.6	20.2	10.4	20.5	22.7	22.2	12.8	8.7
*78	15.9	**35.8**	17.7	**43.6**	10.4	10.0	17.2	**23.9**	**23.6**	**13.1**	**10.6**
79	18.2	24.5	16.8	20.5	**23.9**	**14.9**	18.3	18.7	20.6	12.1	6.5
1880	23.1	28.1	22.5	21.4	18.5	13.1	12.2	19.5	21.5	9.0	9.4
81	20.7	**29.8**	**29.3**	**25.6**	17.7	10.6	17.7	20.5	19.0	**10.2**	**10.6**
82	12.9	25.0	16.4	22.0	14.7	11.2	**24.5**	**24.5**	**24.0**	8.2	10.4
83	16.0	20.8	18.5	24.5	12.5	9.9	23.2	22.4	18.2	10.2	8.5
84	15.5	23.2	17.8	**29.6**	**18.5**	**12.7**	**23.5**	**24.7**	**24.7**	**14.3**	**10.0**
85	13.4	23.6	17.2	24.3	14.8	10.0	14.4	19.3	17.6	11.0	**11.6**
86	20.2	21.6	15.8	20.0	15.3	9.7	18.9	18.0	20.8	8.4	9.1
87	16.3	24.1	15.1	24.8	16.2	10.4	14.8	23.1	20.6	8.2	8.4
88	15.9	22.4	12.5	21.4	15.3	12.4	15.9	23.1	22.4	9.5	10.2
*89	**16.6**	**22.8**	**18.9**	24.6	16.3	9.9	22.0	22.4	19.6	9.2	**11.9**
1890	12.9	13.2	16.9	**32.8**	**19.6**	**11.5**	**25.3**	**26.1**	**23.3**	**14.5**	**11.4**
91	12.7	24.3	14.8	30.6	14.6	10.9	15.1	22.8	17.6	8.6	7.7
92	10.3	17.4	11.1	21.0	10.7	9.4	14.8	17.3	20.2	10.1	8.9
93	13.6	18.4	11.7	**29.9**	**18.7**	**13.2**	**21.9**	**23.1**	**23.5**	9.3	**12.5**
94	**14.6**	**19.1**	12.5	20.9	16.1	9.3	17.9	**23.3**	19.7	**12.0**	8.7
95	11.5	17.1	15.6	18.5	17.[illegible]	11.7	14.0	20.6	19.8	10.4	9.2
96	12.8	21.1	12.9	21.6	13.2	12.4	18.5	20.0	17.5	9.0	11.2
97	9.6	16.8	9.9	18.4	13.2	15.4	14.2	19.5	16.6	8.5	11.1
98	11.7	18.9	13.9	17.0	**18.8**	11.1	**21.3**	**26.3**	**31.8**	11.3	**15.7**
99	12.7	22.5	12.6	23.5	17.4	10.2	19.3	23.8	22.3	12.1	10.4
1900	13.4	23.8	13.9	32.3	17.3	11.0	16.2	17.5	19.0	9.7	8.1
*01	12.9	19.6	14.0	22.9	16.3	**13.8**	14.6	**24.8**	**23.4**	8.8	9.5
02	9.0	18.3	**15.6**	**34.2**	**19.7**	**15.4**	**27.3**	**28.2**	**22.8**	**11.0**	**14.2**
03	11.2	17.3	14.9	23.9	18.8	9.4	19.6	24.6	21.5	—	8.6
04	10.3	17.4	13.6	22.4	14.4	—	14.1	19.3	21.1	—	8.3
05	**12.9**	**19.1**	**15.8**	27.4	**20.6**	—	18.2	22.3	**23.0**	—	9.4
06	11.3	18.1	12.3	**33.1**	13.1	—	19.6	23.8	22.2	—	—
07	**14.3**	**22.2**	**20.2**	**33.7**	15.6	—	19.6	**28.2**	21.6	—	—

	Liczby W[illegible]	a_p+a_n [illegible]	[illegible]	[a a]	a_p+a_n	a_p+a_n [illegible]
	62.5	15.8	—	—	—	25.2
	67.0	**27.3**	—	18.2	12.0	29.9
1830	**71.0**	**23.3**	—	**42.0**	**24.1**	**31.8**
31	47.8	19.8	—	40.3	16.9	21.3
32	27.5	17.2	—	8.2	7.3	29.4
*33	*8.5	18.6	—	**24.4**	**13.5**	**33.1**
34	13.2	**22.6**	—	7.5	7.3	**38.1**
35	56.9	21.5	—	13.3	8.9	26.2
36	121.5	20.8	—	12.9	10.7	20.1
37	**138.3**	21.5	—	17.0	11.2	22.8
38	103.2	**26.9**	—	**24.8**	**15.7**	**24.9**
39	85.7	20.8	—	9.1	8.1	21.3
1840	63.2	19.3	—	34.8	16.7	19.7
41	36.8	19.1	—	26.8	15.2	28.2
42	24.2	**23.4**	—	9.0	9.1	**33.8**
*43	*10.7	**26.4**	—	**20.8**	**12.9**	28.2
44	15.0	20.6	—	15.5	12.1	33.4
45	40.1	22.0	—	15.8	11.9	25.6
46	61.5	21.8	—	14.3	9.9	25.7
47	98.5	**23.7**	—	13.5	9.1	27.5
48	**124.3**	21.2	—	**24.3**	**12.3**	**31.0**
49	95.9	17.8	—	20.4	12.4	23.1
1850	66.5	18.6	—	9.1	8.8	30.4
51	64.5	18.2	—	14.7	11.8	24.3
52	54.2	19.4	—	17.9	12.6	25.1
53	39.0	16.9	—	13.0	11.1	34.3
54	20.6	17.5	—	10.1	9.2	30.1
55	6.7	20.5	—	17.5	11.5	30.4
*56	*4.3	**21.2**	—	18.1	11.1	**32.3**
57	22.8	19.6	—	**41.6**	15.1	**31.4**
58	54.8	19.3	—	16.9	11.5	25.7
59	93.8	**20.8**	—	8.0	8.1	**29.6**
1860	**95.7**	**20.0**	—	**2.04**	**12.5**	**29.4**
61	77.2	19.2	—	11.6	10.7	27.3
62	59.1	20.1	—	23.7	10.5	29.6
63	44.0	23.6	—	15.3	11.7	30.0
64	47.0	20.4	—	6.7	6.7	28.4
65	30.5	20.7	—	11.7	9.5	32.4
66	16.3	19.8	—	17.0	10.6	25.1
*67	*7.3	**20.9**	—	**24.6**	**15.1**	**34.0**
68	37.3	18.6	—	13.6	10.4	32.5
69	73.9	19.3	—	14.0	11.5	30.2
1870	**139.1**	21.8	**—29**	**20.2**	**12.4**	29.8
71	111.2	**22.2**	**—09**	**22.2**	**13.2**	26.1
72	101.7	20.1	—08	20.1	10.2	23.9
73	66.3	18.0	—04	19.1	12.4	23.9
74	44.7	18.2	**—22**	**32.2**	**15.4**	24.4
75	17.1	**23.9**	—06	20.2	13.4	25.5
76	11.3	19.1	—13	18.1	11.8	28.8
77	12.3	20.8	+13	8.7	8.5	27.5
*78	*3.4	22.0	**+20**	**25.7**	**13.8**	28.6
79	6.0	19.6	+00	24.1	14.4	28.1
1880	32.3	20.0	+05	13.4	10.8	30.4
81	54.3	**21.7**	**+33**	**40.1**	**15.6**	**34.7**
82	59.7	19.4	+03	19.1	12.4	31.5
83	**63.7**	17.3	—09	18.0	10.9	26.5
84	63.5	**21.1**	**—27**	**39.1**	**16.9**	27.2
85	52.2	17.2	—20	8.6	8.4	26.6
86	25.4	17.8	—16	13.1	10.1	30.2
87	13.1	18.4	—16	6.3	7.3	29.1
88	6.8	17.9	**+27**	11.5	9.1	33.6
*89	*6.3	**19.2**	+18	**17.0**	**12.8**	**34.7**
1890	7.1	**20.2**	—01	**22.2**	**13.0**	32.2
91	35.6	18.2	+10	13.5	10.9	29.4
92	73.0	14.7	—01	12.8	9.6	27.8
93	**84.9**	**19.3**	**—27**	**27.3**	**12.1**	28.9
94	78.0	17.0	+02	23.2	9.4	**32.2**
95	64.0	16.3	+07	67.7	14.6	31.3
96	41.8	16.7	+25	15.5	11.4	28.9
97	26.2	14.8	**+28**	**23.5**	13.6	**32.4**
98	26.7	**19.0**	—10	19.9	13.1	27.7
99	13.1	18.4	+10	26.0	13.9	27.7
1900	9.5	18.4	+33	15.8	11.8	—
*01	*2.7	17.9	(+45)	**40.2**	**15.3**	—
02	5.0	**21.2**	—	15.7	11.6	—
03	24.4	17.9	—	16.1	12.0	—
04	41.9	16.6	—	—	—	—
05	62.8	**19.9**	—	—	—	—
06	52.9	19.2	—	—	—	—
07	65.5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

której odpowiada nieznikające c_i, różną od zera,—z tego powodu, iż w R_0 co najmniej dwa ze spółczynników h_{0k}, w każdem zaś wspomnianem R_i co najmniej jeden taki spółczynnik będzie podług założenia $\neq 0$. Stosując tedy wskaźniki i' w określonem poprzednio znaczeniu i kładąc dla każdego $i' \neq 0$

$$\frac{1}{c_{i'} \sum_{k=0}^{n} h_{0k}} = x_{i'} ,$$

a osobno:

$$\frac{1}{\sum_{k=0}^{n} h_{0k}} = x_0 ,$$

które to wielkości będą według założenia skończone, a $\neq 0$, znajdziemy, że każda powyższa wielkość $x_{i'}$ sprawdza wraz z wielkością x_0 układ równań (7), (7′), a tem samem stwierdza stosowalność odnośnej równości wektoryalnej (6); ogół zaś równości (6) dowodzi istnienia wspólnego punktu przecięcia M wszystkich wypadkowych $R_{i'}$. Dany jest przytem punkt M za pomocą równości

$$A_0 M = x_0 \sum_{k=1}^{n} h_{0k} a_{0k} \, (\neq 0) ,$$

leży więc poza punktami A, w odległości skończonej.

Przypuśćmy teraz, że siłośród układu naszego leży w odległości nieskończonej, czyli, że wszystkie $R_{i'}$ są do siebie równoległe. Dla każdego $i' \neq 0$ istnieje wówczas taki różny od 0 spółczynnik $c_{i'}$, iż

$$R_{i'} = c_{i'} R_0 , \tag{12}$$

czyli (por. (5), (5′)) iż

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i'}}^{n} h_{i'k} a_{0k} - a_{0i'} \sum_{\substack{k=0 \\ (k \neq i')}}^{n} h_{i'k} = c_{i'} \sum_{k=1}^{n} h_{0k} a_{0k} .$$

Ostatnie równanie rozpada się na układ n równań:

$$c_{i'} h_{0i'} + \sum_{\substack{k=0 \\ (k \neq i')}}^{n} h_{i'k} = 0, \tag{13}$$

$$h_{i'k} = c_{i'} h_{0k} , \quad (k=1, 2, \ldots , n; \; k \neq i'), \tag{13′}$$

z których pierwsze, po uwzględnieniu $n-1$ dalszych, daje:

$$h_{i'0} = - c_{i'} \sum_{k=1}^{n} h_{0k} ,$$

lub po wprowadzeniu wielkości $h_{00} = - \sum_{k=1}^{n} h_{0k}$:

$$h_{i'0} = c_{i'} h_{00}. \tag{14}$$

Połączmy z równaniami (13′), (14) jeszcze brzmiące analogicznie równania dla tych (ewentualnych) i, które różne są od wszystkich i',—równania, sprawdzające się same przez się po przyjęciu $c_i = 0$: wówczas układ równań

$$h_{ik} = c_i h_{0k} , \quad \left(\begin{smallmatrix} k=0, \, 1, \, 2, \, \ldots , \, n; \; k \neq i; \\ i=1, \, 2, \, \ldots , \, n \end{smallmatrix} \right)$$

będzie układem warunków, koniecznych dla istnienia przyjętego tu, nieskończenie odległego siłośrodu (przy pewnem, formalnem tylko, wyszczególnieniu punktu A_0); do nich dodać jeszcze należy zastrzeżenia, podobne do poczynionych w przypadku poprzednim, różne tylko od nich tem, że $\sum_{k=0}^{n} h_{0k}$ ma tu być $=0$. I znów przekonamy się z łatwością, że ów konieczny układ warunków będzie tu również dostatecznym.

(B). Niech teraz siłośród danego układu leży w którymś z punktów A, np. w A_0. Jasnem jest, że przypadek ten zajdzie tylko wtedy, jeśli wszelkie składowe, zaczepiające w różnych od A_0 punktach, poznikają, z wyjątkiem tylko pewnych (dowolnych) takich składowych, które skierowane są ku A_0 lub w stronę przeciwną; natomiast zaczepiające w A_0 składowe mogą być przytem dowolne. Czyli będzie wówczas:

$$h_{ik}=0 \text{ dla } k=1, 2, \dots, n;\ k \neq i;\ i=1, 2, \dots, n;$$
$$h_{0k} \text{ dowolne dla } k=1, 2, \dots, n;$$
$$h_{k0} \text{ dowolne dla } k=1, 2, \dots, n,$$

z tem, rzecz prosta, zastrzeżeniem, żeby co najmniej dwie z pośród $2n$ wielkości h_{0k}, h_{k0} $(k=1, 2, \dots, n)$, i to dwie o niejednakowych wskaźnikach k, były $\neq 0$.

Wyniki powyższego rozbioru możemy ująć w następujące prawidło, przyczem w miejsce spółczynników h_{ik} wprowadzimy równoznaczne z niemi stosunki wektorów $\dfrac{P_{ik}}{\overline{A_i A_k}}$:

II. Aby między $n+1$ punktami $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$, danemi w n-wymiarowej przestrzeni i wyznaczającemi ją w zupełności, zbudować układ ogólnych sił wewnętrznych, posiadający siłośród, wystarczy albo:

(A) obrać dowolnie zaczepiające w jednym z danych punktów, np. w A_0, składowe P_{0k} $(k=1, 2, \dots, n)$, lecz co najmniej dwie z nich $\neq 0$, natomiast wszelkie inne składowe układu, P_{ik} $(k=0, 1, 2, \dots, n;\ k \neq i;\ i=1, 2, \dots, n)$, obrać w myśl równań:

$$P_{ik}=c_i \frac{\overline{A_i A_k}}{A_0 A_k} \cdot P_{0k}, \quad \left({k=0, 1, 2, \dots, n;\ k \neq i; \atop i=1, 2, \dots, n}\right), \tag{15}$$

przyczem spółczynnikom $c_1, c_2, \dots, c_n$ i wielkości $\dfrac{1}{A_0 A_0} . P_{00}$ nadać należy wartości dowolne, lecz co najmniej jednemu c wartość $\neq 0$;—albo też wystarczy:

(B) obrać dowolnie składowe P_{0k} oraz wszelkie ku A_0 lub w przeciwną stronę kierujące się składowe P_{k0}, przytem jednak nadać co najmniej dwom z rzeczonych $2n$ składowych, i to dwom o krzyżujących się kierunkach i różnych punktach zaczepienia, wartości $\neq 0$,—natomiast wszelkie inne składowe przyjąć $=0$.[1])

[1]) Jeśli utworzony tak układ ma się przytem przedstawiać istotnie jako układ pomiędzy nie mniej, jak n punktami, wówczas do każdego z danych punktów należeć musi w układzie bodaj jedna nieznikająca składowa, zaczepiająca w nim lub zwrócona bądź ku niemu, bądź w stronę wprost przeciwną,—czyli dla każdego i $(=0, 1. 2, \dots, n)$ musi co najmniej jedna z $2n$ składowych P_{ik}, P_{ki} $(k=0, 1, 2, \dots, n;\ k \neq i)$ być $\neq 0$. Wobec tego trzeba do podanych wyżej warunków dodać wówczas ten jeszcze, aby dla żadnego i nie znikały w przypadku (A) równocześnie c_i, P_{0i},—w przypadku (B) równocześnie P_{i0}, P_{0i}. Jeżeli przeciwnie jedno względnie drugie zdarzy się dla r $(\leqq n-2)$ wartości wskaźnika i, natenczas zbudowany układ sił będzie w rzeczywistości układem tylko między $n-r+1$ punktami, wyznaczającemi przestrzeń $n-r$-wymiarową.

Siłośród będzie przytem leżał w przypadku (B) w jednym z punktów A,—tu w A_0,—w przypadku (A) zaś poza temi punktami, a to w odległości skończonej lub w nieskończonej, zależnie od tego, czy suma $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{P_{0k}}{A_0 A_k}$ będzie $\neq 0$ czy $=0$.

Zarazem wynika z powyższego wywodu, iż nadając (w abstrakcyi) występującym w twierdzeniu II stałym dowolnym wszelkie możliwe dopuszczalne wartości i zastępując niezależnie od tego wyszczególniony tam formalnie punkt A_0 kolejno każdym innym z danych punktów A, tem samem wyczerpiemy konstrukcyą powyżej podaną w zupełności ogół wszystkich żądanych układów sił z siłośrodem. Inaczej miałaby się rzecz, gdyby wszystkie dane tu w liczbie $n+1$ punkty leżały w przestrzeni o mniej, niż n wymiarach. W takim razie zachodziłby między wektorami a_{0k} $(k=1, 2, \dots, n)$ co najmniej jeden związek liniowy, a wskutek tego byłyby układy równań (7), (7′) i (13), (13′), na których opierały się w przypadku (A) wnioski nasze, równoznaczne tylko z pewnemi szczególnemi przypadkami równości (6), wzgl. (12), z których wyszliśmy byli, lecz nie z temiż (ogólnie pojętemi) równościami: zaczem podana w tw. II konstrukcya wiodłaby wówczas tylko do pewnych żądanych układów sił z siłośrodem, nie zaś do pełnego tychże ogółu[1]).

3.

Uzyskane w ustępie 2. wyniki zastosujemy naprzód do układu pospolitych sił wewnętrznych, danego w przestrzeni n-wymiarowej między $n+1$ punktami, wyznaczającemi przestrzeń taką w zupełności.

W układzie takim jest:

$$P_{ik}=-P_{ki}, \quad \left({k=0, 1, 2, \dots, n;\ k \neq i; \atop i=0, 1, 2, \dots, n}\right). \tag{16}$$

W szczególności na zasadzie:

$$P_{i0}=-P_{0i}, \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

[1]) Możnaby oczywiście poszukiwać ogólnie warunków dostatecznych i koniecznych istnienia siłośrodu w układzie sił wewnętrznych, danym między dowolną ilością punktów w przestrzeni dowolnej. Poszukiwania wiodą wówczas do związków, znacznie zawilszych, niż powyższe.

mamy tu. naprzód w razie istnienia siłośrodu w rodzaju (A), podług (15):

$$c_i \frac{P_{00}}{\overline{A_0A_0}} \cdot \overline{A_iA_0} = - P_{0i}, \quad (i=1, 2, \ldots, n); \tag{17}$$

stąd zaś i z zastrzeżonego w twierdzeniu II dla przypadku (A) nieznikania co najmniej dwóch składowych P_{0i} wynika tu konieczność wykluczenia wartości 0 dla dowolnej poza tem stałej skończonej $\frac{P_{00}}{\overline{A_0A_0}}$. Kładąc teraz zamiast tejże $\frac{1}{K}$, otrzymamy z (17):

$$c_i = K \frac{P_{0i}}{\overline{A_0A_i}}, \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

tak, że równania warunkowe (15) przybiorą w niniejszym przypadku następującą postać szczególną:

$$P_{ik} = K \frac{P_{0i} P_{0k}}{\overline{A_0A_i} \cdot \overline{A_0A_k}} \cdot \overline{A_iA_k}, \quad \left(\begin{smallmatrix} k=0, 1, 2, \ldots, n; & k \neq i; \\ i=0, 1, 2, \ldots, n \end{smallmatrix}\right). \tag{18}$$ [1])

Z niemi łączyć się tu jeszcze muszą dodatkowe postulaty tej treści (por. str. 10), aby co najmniej dwie z dowolnych składowych P_{0k} nie znikały, aby dowolna stała skończona K była $\neq 0$, a wielkość $\frac{P_{00}}{\overline{A_0A_0}}$ była równoznaczną z $\frac{1}{K}$. Konieczne te warunki będą dla niniejszego przypadku również dostatecznemi: albowiem dostatecznemi są dla analogicznego przypadku w układzie ogólnych sił wewnętrznych, a ponadto z (18) wynikają bezpośrednio charakterystyczne równości (16).

Natomiast dla przypadku (B) zmienią się tym razem podane na str. 10 warunki o tyle tylko, że każde P_{k0} trzeba będzie przyjąć $= - P_{0k}$. Przypadek ten da się tu zresztą zjednoczyć z przypadkiem (A), gdyż sprawdza się dlań zarówno układ równań (18), a to po przyjęciu $K=0$, $K \cdot \frac{P_{00}}{\overline{A_0A_0}} \left(= 0 \cdot \frac{1}{0}\right) = 1$, jak też spełnia się podany wyżej postulat dodatkowy, dotyczący składowych P_{0k}.

1) Równanie (18) będzie tu stosowało się również dla $i=0$, — inaczej, niż (15).

Tak więc otrzymujemy tu twierdzenie:

III. Aby między $n+1$ punktami $A_0, A_1, \ldots, A_n$, danemi w przestrzeni n-wymiarowej i wyznaczającemi ją w zupełności, zbudować układ pospolitych sił wewnętrznych, posiadający siłośród, wystarczy przyjąć dowolnie zaczepiające w jednym z danych punktów, np. w A_0, składowe P_{0k} $(k=1, 2, \ldots, n)$, lecz co najmniej dwie z nich obrać $\neq 0$, pozatem zaś wszelkie składowe P_{ik} $(k=0, 1, \ldots, n;\ k \neq i;\ i=0, 1, 2, \ldots, n)$ obrać w myśl równań:

$$P_{ik} = K \frac{P_{i0} P_{0k}}{\overline{A_iA_0} \cdot \overline{A_0A_k}} \cdot \overline{A_iA_k}, \quad \left(\begin{smallmatrix} k=0, 1, 2, \ldots, n; & k \neq i; \\ i=0, 1, 2, \ldots, n \end{smallmatrix}\right),$$

przyczem K ma być dowolną stałą skończoną, a $\frac{P_{00}}{\overline{A_0A_0}}$ oznaczać $\frac{1}{K}$ [1]).

Siłośród będzie przytem leżał w jednym z punktów A (tu w A_0), jeśli $K=0$, — w odległości nieskończonej, jeśli $K = - \sum_{k=1}^{n} \frac{P_{0k}}{\overline{A_0A_k}}$, a poza punktami A w odległości skończonej, jeśli K różne jest od obu wymienionych wartości.

Konstrukcya powyższa wyczerpie znów, przy wszelkich możliwych kombinacyach wchodzących w grę wartości dowolnych, pełny ogół żądanych tu układów sił.

4.

W ustępach **4.** i **5.** zastosujemy jeszcze twierdzenia II, III do układów sił wewnętrznych, danych między trzema punktami, nie leżącemi w jednej prostej, względnie między czterema punktami, nie leżącemi w jednej płaszczyźnie.

By układ pierwszego rodzaju, dany między punktami A_0, A_1, A_2, posiadał siłośród naprzód poza temi punktami, musi on, o ile punkt A_0 formalnie

1) Układ taki będzie w istocie układem tylko między $n-r$ punktami, o ile r $(\leq n-2)$ składowych P_{0k} poznika.

wyszczególnimy, zadość czynić następującym koniecznym i wystarczającym równaniom warunkowym (por. (15)):

$$(19),\ (19')\qquad P_{10}=c_1\frac{P_{00}}{\overline{A_0A_0}}.\overline{A_1A_0},\quad P_{12}=c_1\frac{P_{02}}{\overline{A_0A_2}}.\overline{A_1A_2},$$

$$(20),\ (20')\qquad P_{20}=c_2\frac{P_{00}}{\overline{A_0A_0}}.\overline{A_2A_0},\quad P_{21}=c_2\frac{P_{01}}{\overline{A_0A_1}}.\overline{A_2A_1},$$

gdzie z dowolnych wielkości P_{01}, P_{02}, $\frac{P_{00}}{\overline{A_0A_0}}$, c_1, c_2 obie pierwsze i przynajmniej jedna z dwóch ostatnich winny być $\neq 0$.

Mnożąc równania (19′), (20) stronami, otrzymujemy:

$$(21)\qquad P_{12}P_{20}=-c_1c_2\frac{P_{00}}{\overline{A_0A_0}}P_{02}.\overline{A_1A_2},$$

mnożąc zaś równania (19), (20′):

$$(21')\qquad P_{21}P_{10}=-c_1c_2\frac{P_{00}}{\overline{A_0A_0}}P_{01}.\overline{A_2A_1};$$

z (21) i (21′) wynika dalej równanie:

$$(22)\qquad P_{01}P_{12}P_{20}=-P_{02}P_{21}P_{10},$$

stanowiące tu zatem również warunek konieczny istnienia siłośrodu w rodzaju (A),—warunek, niezależny już od roli punktu A_0. Owóż warunek ten okazuje się tu również dostatecznym, jeśli go tylko uzupełnimy rozumiejącemi się przez się zastrzeżeniami dodatkowemi tej treści, aby co najmniej dwie składowe układu, zaczepiające w tym samym punkcie, oraz przynajmniej jedna ze składowych, działających pomiędzy pozostałemi dwoma punktami, były $\neq 0$. Albowiem jeżeli zgodnie z tem będą np. P_{01}, P_{02}, $P_{12}\neq 0$ i sprawdzać się będzie równanie (22), natenczas wystarczy położyć:

$$(23)\qquad c_1=\frac{P_{12}.\overline{A_0A_2}}{P_{02}.\overline{A_1A_2}},\qquad c_2=\frac{P_{21}.\overline{A_0A_1}}{P_{01}.\overline{A_2A_1}},$$

$$(23')\qquad \frac{P_{00}}{\overline{A_0A_0}}=\frac{P_{10}P_{02}.\overline{A_1A_2}}{P_{12}.\overline{A_1A_0}.\overline{A_0A_2}},$$

zaczem z poprzednich równań warunkowych (19), (19′), (20), (20′) sprawdzą się pierwsze, drugie i czwarte bezpośrednio, trzecie zaś po uwzględnieniu

równania (22). Siłośród będzie przytem leżał w odległości skończonej lub w nieskończonej, zależnie od tego, czy suma (por. str. 11)

$$\frac{P_{00}}{\overline{A_0A_0}}+\frac{P_{01}}{\overline{A_0A_1}}+\frac{P_{02}}{\overline{A_0A_2}}$$

będzie $\neq 0$ lub $=0$, czyli też (ze względu na (23′)), czy wyrażenie

$$\frac{P_{10}P_{02}}{\overline{A_1A_0}.\overline{A_0A_2}}+\left(\frac{P_{01}}{\overline{A_0A_1}}+\frac{P_{02}}{\overline{A_0A_2}}\right)\frac{P_{12}}{\overline{A_1A_2}}$$

będzie $\neq 0$ lub $=0$.

Jeżeli natomiast w układzie naszym istnieje siłośród rodzaju (B), wówczas (22), jak stwierdzić nietrudno, sprawdza się również, a to w formie: $0=0$. Jeżeli naodwrót (22) będzie w rzeczonej formie spełnione, natenczas zajdzie tu przypadek (B), o ile tylko założymy jeszcze, że wśród znikających składowych znajdują się dwie takie, które powinnyby działać w jednej prostej [1]), i że nie znikają co najmniej dwie składowe o krzyżujących się kierunkach i różnych punktach zaczepienia.

Wyniki te wiodą do twierdzenia następującego:

IV. Układ ogólnych sił wewnętrznych, dany między trzema punktami, które nie leżą w jednej prostej, posiada siłośród wtedy i tylko wtedy, jeżeli iloczyn takich trzech (ewentualnie częściowo znikających) składowych układu, które w różnych zaczepiają punktach i w różnych działają prostych, równa się, z uwzględnieniem także kierunków (względnie znaków) składowych, ujemnemu iloczynowi pozostałych trzech składowych,—założywszy przytem oczywiście, że nie znikają co najmniej dwie składowe układu o krzyżujących się kierunkach i różnych punktach zaczepienia.

W postaci geometrycznej, z rozróżnieniem możliwych tu przypadków, lecz z wykluczeniem przypadków najtrywialniejszych, brzmi powyższe twierdzenie, jak następuje:

IV*. Jeżeli w dowolnym trójkącie $A_0A_1A_2$ obierzemy na każdym boku (jako prostej nieograniczonej) po dwa punkty, np.[2]) B_{01} i B_{10} na A_0A_1, B_{12} i B_{21} na A_1A_2, B_{20} i B_{02} na A_2A_0,—tak mianowicie, iżby jeden z trzech nowo

[1]) W przeciwnym razie mielibyśmy tu znów pewną modyfikacyę przypadku (A).

[2]) Do oryentacyi posłużyć może fig. 1.

utworzyć się mających trójkątów $A_0B_{01}B_{02}$, $A_1B_{12}B_{10}$, $A_2B_{20}B_{21}$ nie okazał się poprostu punktem, poza tem zaś dowolnie,—wówczas trzy środkowe, wykreślone w rzeczonych trzech trójkątach odpowiednio z wierzchołków A_0, A_1, A_2, przetną się w jednym punkcie pod tym warunkiem koniecznym i dostatecznym, iż będzie:

$$\overline{A_0B_{01}}\,.\,\overline{A_1B_{12}}\,.\,\overline{A_2B_{20}} = -\,\overline{A_0B_{02}}\,.\,\overline{A_2B_{21}}\,.\,\overline{A_1B_{10}},$$

w którem to równaniu uwzględnione być mają również kierunki (względnie znaki) występujących odcinków. Jeżeliby przytem dwa ze wspomnianych trzech trójkątów okazały się poprostu odcinkami i to nie leżącemi w jednej prostej, wówczas padnie rzeczony punkt przecięcia oczywiście na jeden z wierzchołków trójkąta danego; zresztą będzie on leżał poza temi wierzchołkami w odległości skończonej lub w nieskończonej, zależnie od tego, czy wielkość

$$(24)\quad -\frac{\overline{A_1B_{10}}}{\overline{A_1A_0}}\cdot\frac{\overline{A_0B_{02}}}{\overline{A_0A_2}}+\left(\frac{\overline{A_0B_{01}}}{\overline{A_0A_1}}+\frac{\overline{A_0B_{02}}}{\overline{A_0A_2}}\right).\frac{\overline{A_1B_{12}}}{\overline{A_1A_2}}$$

będzie $\neq 0$ czy $=0$. To ostatnie kryteryum zawarunkować atoli należy tem, żeby żadna z trzech długości $\overline{A_0B_{01}}$, $\overline{A_0B_{02}}$, $\overline{A_1B_{12}}$ nie znikała; lecz warunek ten można zawsze ziścić, przestawiwszy ewentualnie odpowiednio wskaźniki punktów A.—

Jeżeli w twierdzeniu IV przyjmiemy zamiast ogólnych pospolite siły wewnętrzne, względnie w twierdzeniu IV* położymy:

$$\overline{A_0B_{01}}=\overline{B_{10}A_1}\,,\quad \overline{A_1B_{12}}=\overline{B_{21}A_2}\,,\quad \overline{A_2B_{20}}=\overline{B_{02}A_0}$$

(z uwzględnieniem znaków), wówczas twierdzenia te przejdą bezpośrednio na podane pod I i I*.

5.

By układ ogólnych sił wewnętrznych, dany między wierzchołkami A_0, A_1, A_2, A_3 czworokąta przestrzennego, posiadał siłośród rodzaju (A), musi on podług prawidła II, przy formalnem wyszczególnieniu punktu A_0,

zadość czynić następującym dziewięciu koniecznym i dostatecznym równaniom warunkowym (por. (15)):

$$(25), (25'), (25'')\quad P_{10}=c_1K.\overline{A_1A_0}\,,\quad P_{12}=c_1\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_0A_2}}.P_{02},\quad P_{13}=c_1\frac{\overline{A_1A_3}}{\overline{A_0A_3}}.P_{03}\,;$$

$$(26), (26'), (26'')\quad P_{20}=c_2K.\overline{A_2A_0}\,,\quad P_{21}=c_2\frac{\overline{A_2A_1}}{\overline{A_0A_1}}.P_{01},\quad P_{23}=c_2\frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{A_0A_3}}.P_{03}\,;$$

$$(27), (27'), (27'')\quad P_{30}=c_3K.\overline{A_3A_0}\,,\quad P_{31}=c_3\frac{\overline{A_3A_1}}{\overline{A_0A_1}}.P_{01},\quad P_{32}=c_3\frac{\overline{A_3A_2}}{\overline{A_0A_2}}.P_{02}\,,$$

gdzie spółczynniki c_1, c_2, c_3, K i składowe P_{01}, P_{02}, P_{03} mogą mieć wartości dowolne, byleby co najmniej jedno c i dwa z rzeczonych P były $\neq 0$

Z pomnożenia równań (25′), (26) stronami wynika:

$$(28)\qquad P_{12}P_{20}=-\,c_1c_2K.\overline{A_1A_2}\,.\,P_{02}\,,$$

z pomnożenia zaś równań (26′), (25):

$$(28')\qquad P_{21}P_{10}=-\,c_1c_2K.\overline{A_2A_1}\,.\,P_{01}\,;$$

z równań (28), (28′) wynika dalej:

$$(29_1)\qquad P_{01}P_{12}P_{20}=-\,P_{02}P_{21}P_{10}.$$

Analogicznie otrzymujemy z równań (26″), (27), (27″), (26):

$$(29_2)\qquad P_{02}P_{23}P_{30}=-\,P_{03}P_{32}P_{20}\,,$$

a z równań (27′), (25), (25″), (27):

$$(29_3)\qquad P_{03}P_{31}P_{10}=-\,P_{01}P_{13}P_{30}.$$

Wreszcie mnożąc stronami równania (25′), (26″), (27′), względnie (25″), (27″), (26′), otrzymujemy:

$$P_{12}P_{23}P_{31}=c_1c_2c_3\,.\,\frac{\overline{A_1A_2}\,.\,\overline{A_2A_3}\,.\,\overline{A_3A_1}}{\overline{A_0A_1}\,.\,\overline{A_0A_2}\,.\,\overline{A_0A_3}}\,.\,P_{01}P_{02}P_{03}\,,$$

$$P_{13}P_{32}P_{21}=c_1c_2c_3\,.\,\frac{\overline{A_1A_3}\,.\,\overline{A_3A_2}\,.\,\overline{A_2A_1}}{\overline{A_0A_1}\,.\,\overline{A_0A_2}\,.\,\overline{A_0A_3}}\,.\,P_{01}P_{02}P_{03}\,,$$

z czego wynika:

$$(29_4)\qquad P_{12}P_{23}P_{31}=-\,P_{13}P_{32}P_{21}.$$

Cztery równania (29_1), (29_2), (29_3), (29_4), ukształtowane w swym ogóle symetrycznie ze względu na wierzchołki czworokąta, są naogół od siebie wzajem zależne: pomnożywszy dowolne trzy z nich stronami i skróciwszy otrzymane iloczyny przez sześć odpowiednich P, które wówczas nie powinny znikać [1]), otrzymamy tem samem czwarte równanie.

Nie trudno stwierdzić, że te same cztery równania (29) sprawdzają się również w razie istnienia siłośrodu w rodzaju (B) w układzie danym.

W ogólności orzekają tedy te równania, ze względu na twierdzenie IV, co następuje:

V. *Jeżeli dla układu ogólnych sił wewnętrznych danego pomiędzy wierzchołkami czworokąta przestrzennego, istnieje siłośród, wówczas każdy należący do tego układu układ wszystkich sił, działających między dowolnemi trzema wierzchołkami danego czworokąta, posiada również siłośród,—założywszy oczywiście, że z trzech wypadkowych takiego układu składowego conajmniej dwie nie znikają.*—

Inny szereg równości otrzymujemy z układu równań (25) do (27″) w sposób następujący:

Rugując najpierw c_2 z (26′), (26″), wzgl. c_3 z (27′), (27″) i c_1 z (25′), (25″), otrzymujemy równania:

$$(30_1)\qquad \frac{P_{01}P_{23}}{\overline{A_0A_1}\,.\,\overline{A_2A_3}} = \frac{P_{03}P_{21}}{\overline{A_0A_3}\,.\,\overline{A_2A_1}}\,,$$

$$(30_2)\qquad \frac{P_{02}P_{31}}{\overline{A_0A_2}\,.\,\overline{A_3A_1}} = \frac{P_{01}P_{32}}{\overline{A_0A_1}\,.\,\overline{A_3A_2}}\,,$$

$$(30_3)\qquad \frac{P_{03}P_{12}}{\overline{A_0A_3}\,.\,\overline{A_1A_2}} = \frac{P_{02}P_{13}}{\overline{A_0A_2}\,.\,\overline{A_1A_3}}\,.$$

Następnie dostajemy z pomnożenia równań (25), (27″) stronami:

$$P_{10}P_{32} = c_1c_3K\,.\,\frac{\overline{A_1A_0}\,.\,\overline{A_3A_2}}{\overline{A_0A_2}}\,.\,P_{02},$$

a z pomnożenia równań (25′), (27):

[1]) Z równań (25) do (27″) przekonujemy się zresztą, że jeśli tu jedno $P=0$, znikać muszą tem samem trzy P o tych samych pierwszych lub tych samych drugich wskaźnikach, tak że w następstwie nie da się wówczas uskutecznić powyższe skrócenie przy żadnej z możliwych kombinacyj.

$$P_{12}P_{30} = c_1c_3K\,.\,\frac{\overline{A_1A_2}\,.\,\overline{A_3A_0}}{\overline{A_0A_2}}\,.\,P_{02};$$

z obu zaś otrzymanych równań wynika:

$$(30_4)\qquad \frac{P_{10}P_{32}}{\overline{A_1A_0}\,.\,\overline{A_3A_2}} = \frac{P_{12}P_{30}}{\overline{A_1A_2}\,.\,\overline{A_3A_0}}\,.$$

Wreszcie w podobny sposób, jak (30_4), otrzymujemy z równań (26), (25″), (26″), (25):

$$(30_5)\qquad \frac{P_{20}P_{13}}{\overline{A_2A_0}\,.\,\overline{A_1A_3}} = \frac{P_{23}P_{10}}{\overline{A_2A_3}\,.\,\overline{A_1A_0}}\,,$$

a z równań (27), (26′), (27′), (26):

$$(30_6)\qquad \frac{P_{30}P_{21}}{\overline{A_3A_0}\,.\,\overline{A_2A_1}} = \frac{P_{31}P_{20}}{\overline{A_3A_1}\,.\,\overline{A_2A_0}}\,.$$

Równania (30_1) do (30_6), ukształtowane w swym ogóle symetrycznie ze względu na wierzchołki danego czworokąta, są znowu naogół od siebie wzajem zależne: z dowolnych pięciu zpośród nich, lecz i nie mniej, jak z pięciu, otrzymujemy rownanie szóste,—a to po pomnożeniu tychże pięciu stronami i skróceniu otrzymanych iloczynów przez ośm odpowiednich P, założywszy oczywiście, że żadne z tychże P nie znika [1]).

Też same równania (30) sprawdzają się tu również, jak łatwo stwierdzimy, w razie istnienia siłośrodu rodzaju (B), a mianowicie wszystkie przyjmują wtedy postać: $0=0$.

Możemy więc w tych równaniach upatrywać warunki, konieczne dla istnienia siłośrodu w danym układzie sił. Warunki te okażą się tu naogół, ale tylko naogół, również dostatecznemi.

Mianowicie w przypadku (A) będą one dostatecznemi, jeśli je uzupełnimy nie tylko postulatem oczywistym, aby w którymś (przynajmniej w jednym) z wierzchołków czworokąta zaczepiały co najmniej dwie nieznikające składowe, ale też zastrzeżeniem tej treści, aby cztery takie składowe, które względem jednej albo drugiej z pewnych dwóch rzeczonych właśnie nieznikających składowych są wichrowate, nie wszystkie znikały [2]). Jeśli bowiem,

[1]) Warunek ten spełni się, jak stwierdzić nie trudno, tylko wtedy, jeśli wogóle żadna składowa układu nie znika.

[2]) Z dalszego ciągu okazuje się zresztą, że warunek ostatni albo ziszcza się w układzie dla każdej pary nieznikających składowych o tym samym punkcie zaczepienia, albo też dla żadnej takiej pary się nie ziszcza.

zgodnie z temi zastrzeżeniami, będą np. $P_{01}, P_{02}, P_{13} \neq 0$, wówczas przyjąć możemy, przy dowolnych wartościach wszelkich pozostałych składowych, naprzód:

$$(31) \qquad c_1 = \frac{P_{12} \cdot \overline{A_0 A_2}}{P_{02} \cdot \overline{A_1 A_2}}, \quad c_2 = \frac{P_{21} \cdot \overline{A_0 A_1}}{P_{01} \cdot \overline{A_2 A_1}}, \quad c_3 = \frac{P_{31} \cdot \overline{A_0 A_1}}{P_{01} \cdot \overline{A_3 A_1}},$$

zaczem równania (25′), (26′), (27′) sprawdzą się bezpośrednio, równania (25″), (26″), (27″) zaś za pośrednictwem (30_3), (30_1), (30_2); następnie przyjmiemy:

$$(31') \qquad K = \frac{P_{10} P_{03} \overline{A_1 A_3}}{P_{13} \cdot \overline{A_1 A_0} \cdot \overline{A_0 A_3}},$$

przez co sprawdzą się równania (25), (26), (27) za pośrednictwem odpowiednio stosowanych równości (30). Siłośród będzie przytem leżał w odległości skończonej lub w nieskończonej, zależnie od tego, czy (por. str. 11)

$$K + \frac{P_{01}}{\overline{A_0 A_1}} + \frac{P_{02}}{\overline{A_0 A_2}} + \frac{P_{03}}{\overline{A_0 A_3}}$$

będzie $\neq 0$ lub $= 0$, czyli, ze względu na (31′), czy

$$\frac{P_{10} P_{03}}{\overline{A_1 A_0} \cdot \overline{A_0 A_3}} + \frac{P_{13}}{\overline{A_1 A_3}} \left(\frac{P_{01}}{\overline{A_0 A_1}} + \frac{P_{02}}{\overline{A_0 A_2}} + \frac{P_{03}}{\overline{A_0 A_3}} \right)$$

będzie $\neq 0$ lub $= 0$.

Jeżeli natomiast P_{01} i P_{02} będą wprawdzie $\neq 0$, lecz poznikają wszelkie względem P_{01} lub P_{02} wichrowate składowe, wówczas, by siłośród rodzaju (A) tu mógł istnieć, będzie musiała przynajmniej jedna ze składowych P_{12}, P_{21} być $\neq 0$. Ze względu na to i na jedno z równań (30_1), (30_3) musi wówczas $P_{03} = 0$, a z powodu jednego z równań (30_4), (30_6) także $P_{30} = 0$. Wszystkie składowe nieznikające układu leżeć zatem będą w jednej płaszczyźnie,—tu w płaszczyźnie $A_0 A_1 A_2$. Równania warunkowe (30) sprawdzać się będą wówczas wszystkie dla dowolnych wartości składowych nieznikających, a to w formie $0 = 0$, i dlatego nie mogą w tym przypadku charakteryzować dostatecznie siłośrodu rodzaju (A); natomiast warunek konieczny i dostateczny istnienia takiego siłośrodu przedstawi tu, podług twierdzenia IV, równanie:

$$(32) \qquad P_{01} P_{12} P_{20} = - P_{02} P_{21} P_{10},$$

uzupełnione tem jeszcze zastrzeżeniem (przy formalnem wyszczególnieniu odnośnych elementów), aby obok składowych P_{01}, P_{02} jeszcze bodaj jedna ze składowych P_{12}, P_{21} była $\neq 0$.

Co się zaś tyczy siłośrodu w rodzaju (B), to dla istnienia jego koniecznem tu będzie przedewszystkiem, rzecz prosta, istnienie co najmniej dwóch nieznikających składowych o różnych punktach zaczepienia i krzyżujących się kierunkach. O ile przytem różne od zera składowe układu nie będą wszystkie leżały w jednej płaszczyźnie, dla istnienia siłośrodu wystarczy wówczas, jeżeli równania (30) wszystkie sprawdzać się będą w formie $0 = 0$: albowiem warunek ten wyklucza, jak stwierdzić nie trudno, istnienie choćby dwóch nieznikających wichrowatych składowych w układzie, wobec czego wszelkie nieznikające składowe biedz muszą wówczas przez jeden wspólny wierzchołek danego czworokąta. Jeżeli jednak wszystkie nieznikające składowe układu leżą w jednej płaszczyźnie, natenczas, podobnie, jak w analogicznej modyfikacyi przypadku (A), wspomniany układ równań i tu nie może dostatecznie charakteryzować siłośrodu; natomiast scharakteryzuje go, jako warunek konieczny i dostateczny, znowu równanie takie, jak (32), uzupełnione odpowiedniem zastrzeżeniem dodatkowem (por. str. 15).

Rozbiór powyższy prowadzi do twierdzenia następującego:

VI. *Dla istnienia siłośrodu w układzie ogólnych sił wewnętrznych, danym między wierzchołkami czworokąta przestrzennego, koniecznemi i dostatecznemi są warunki następujące:*

przedewszystkiem oczywiście, aby w układzie znajdowały się co najmniej dwie nieznikające składowe o różnych punktach zaczepienia i krzyżujących się kierunkach; następnie:

jeśli różne od zera składowe układu nie leżą wszystkie w jednej płaszczyźnie: aby iloczyny dwuczynnikowe z par wichrowatych składowych były proporcyonalne do iloczynów z par krawędzi czworokąta, odpowiadających odnośnym składowym, przyczem jednak do każdej proporcyi wchodzić mają zawsze tylko pary składowych, mające tę samą parę wierzchołków zaczepienia i tę samą parę wierzchołków, wskazujących kierunek sił; w każdej proporcyi uwzględnić ponadto należy kierunki składowych i krawędzi (w znakach tychże), przytem wymierzać krawędzi zawsze od wierzchołka zaczepienia odnośnej składowej ku wierzchołkowi, wskazującemu kierunek tejże;

jeżeli natomiast wszystkie nieznikające składowe układu leżą w jednej płaszczyźnie, wówczas rozstrzyga o istnieniu lub braku siłośrodu kryterym twierdzenia IV.

Stosunki uproszczą się tu znacznie, jeśli w skład układu danego wejdą wyłącznie pospolite siły wewnętrzne. Układ wzorów (30) sprowadzi się wtedy do następujących dwóch równości:

$$\frac{P_{01}P_{23}}{\overline{A_0A_1}\,.\,\overline{A_2A_3}} = \frac{P_{02}P_{13}}{\overline{A_0A_2}\,.\,\overline{A_1A_3}} = \frac{P_{03}P_{12}}{\overline{A_0A_3}\,.\,\overline{A_1A_2}}\,,$$

wobec czego należy wówczas twierdzenie IV o tyle zmodyfikować, że w pierwszym z wyszczególnionych tam przypadków będzie mowa poprostu

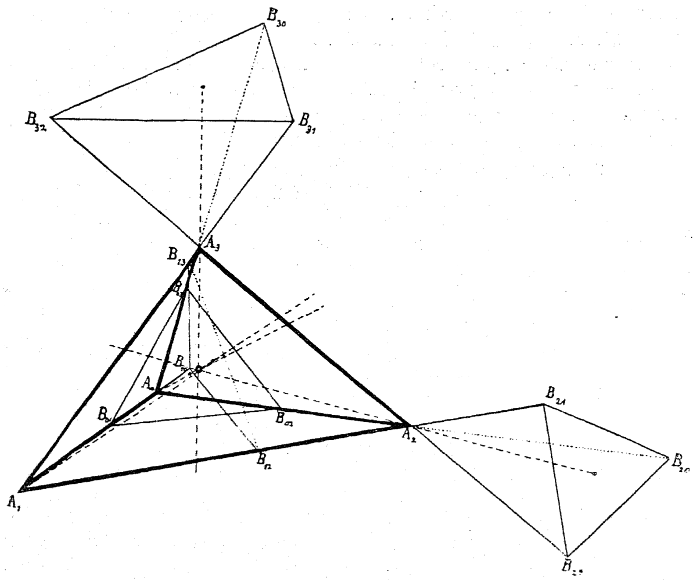

Fig. 2.

o proporcyonalności między trzema iloczynami dwuczynnikowemi ż par wichrowatych składowych, a trzema iloczynami odpowiednich, w odpowiednich kierunkach mierzonych krawędzi, i że w drugim przypadku stosować się będzie twierdzenie I zamiast IV.—

Geometrycznie dadzą się wyrazić powyższe wyniki, jak następuje:

VI*. Jeśli w ostrosłupie trójściennym $A_0A_1A_2A_3$ (fig. 2) przyjmiemy na każdej krawędzi, jako nieograni-

czonej prostej, dowolnie po dwa punkty,—B_{ik}, B_{ki} na A_iA_k ($i, k=0, 1, 2, 3$; $i<k$),—z tem tylko zastrzeżeniem, żeby z czterech nowo utworzyć się mających ostrosłupów:

$$A_0B_{01}B_{02}B_{03}\,,\ A_1B_{10}B_{12}B_{13}\,,\ A_2B_{20}B_{21}B_{23}\,,\ A_3B_{30}B_{31}B_{32}$$

co najmniej dwa nie redukowały się poprostu do punktów, i jeśli w każdym takim z czterech wspomnianych właśnie ostrosłupów, który nie jest poprostu punktem, połączymy prostą odnośny jego wierzchołek A z środkiem ciężkości przeciwległej ściany, to wykreślone tak proste przetną się wśród następujących okoliczności w jednym punkcie:

(A) Gdy cztery wspomniane ostrosłupy nie zredukują się przypadkiem wszystkie do utworów jednej tylko płaszczyzny i do leżącego zewnątrz niej punktu, wspomniany punkt przecięcia istnieć będzie pod tym warunkiem koniecznym i dostatecznym, że dla każdej przemiany (i, k, l, m) wskaźników (0, 1, 2, 3) będzie:

$$\frac{\overline{A_iB_{ik}}}{\overline{A_iA_k}}\cdot\frac{\overline{A_lB_{lm}}}{\overline{A_lA_m}} = \frac{\overline{A_iB_{im}}}{\overline{A_iA_m}}\cdot\frac{\overline{A_lB_{lk}}}{\overline{A_lA_k}}\,.$$

Jeżeli przytem ów punkt przecięcia nie padnie przypadkiem (wśród dających się łatwo rozpoznać okoliczności) na jeden z punktów A, to będzie on leżał w odległości skończonej lub w nieskończone zależnie od tego, czy wyrażenie

$$\frac{\overline{A_1B_{10}}}{\overline{A_1A_0}}\cdot\frac{\overline{A_0B_{03}}}{\overline{A_0A_3}} + \frac{\overline{A_1B_{13}}}{\overline{A_1A_3}}\left(\frac{\overline{A_0B_{01}}}{\overline{A_0A_1}} + \frac{\overline{A_0B_{02}}}{\overline{A_0A_2}} + \frac{\overline{A_0B_{03}}}{\overline{A_0A_3}}\right)$$

będzie $\neq 0$ czy $=0$, założywszy atoli, że w tem wyrażeniu $\overline{A_0B_{01}}$, $\overline{A_0B_{02}}$, $\overline{A_1B_{13}}$ będą $\neq 0$, co tu zresztą można zawsze osiągnąć, przestawiwszy tylko w danym razie odpowiednio wskaźniki 0, 1, 2, 3.

(B) Gdyby natomiast wspomniane cztery ostrosłupy zredukować się miały wszystkie do utworów jednej płaszczyzny i do punktu jednego zewnątrz niej, wówczas o istnieniu lub braku rzeczonego punktu przecięcia rozstrzygnie kryterium z twierdzenia IV*.

Jednym z szczególnych przypadków twierdzenia VI* jest prawo o środku ciężkości ostrosłupa trójściannego.

Zajmującem może zadaniem byłoby zbadanie następstw, jakie z ciągłego lub chwilowego istnienia siłośrodu wynikałyby dla Dynamiki układu punktów, poddanych działaniu sił wewnętrznych [1]).

[1]) Dla układu trzech punktów, przyciągających się wzajem podług prawa Newtona, uczynił p. Delaunay w tym względzie tylko pierwszy krok w przytoczonym powyżej wykładzie, wprowadził mianowicie spółrzędne siłośrodu formalnie w odnośne równania różniczkowe ruchu.

S. ZAREMBA.

O ZASADZIE DIRICHLETA [1]).

§ 1. Rozważania poniższe stosują się z równą łatwością do przestrzeni, jak i do płaszczyzny, tak że jedynie dla ustalenia myśli ograniczymy się do przypadku płaszczyzny.

Uważajmy na płaszczyznie układ spółrzędnych prostokątnych (x, y) oraz obszar (D), nie rozciągający się do nieskończoności i dający się kwadrować.

Z drugiej strony uważajmy funkcyę ciągłą σ, określoną na ograniczeniu (S) obszaru (D), oraz mnogość (E) wszystkich funkcyj f, mających następujące własności:

1-o. Każda z funkcyj f jest ciągła wewnątrz obszaru (D) oraz na ograniczeniu tego obszaru;

2-o. Wartości każdej z tych funkcyj f na ograniczeniu mają zlewać się z wartościami funkcyi σ.

3-o. Wewnątrz obszaru (D) pochodne $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ są ciągłe.

Może się zdarzyć, że dla żadnej z funkcyj f całka:

$$A(f) = \iint_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy \tag{1}$$

[1]) Komunikat, odczytany w Sekcyi Analizy na IV-ym Kongresie międzynarodowym matematyków w Rzymie dnia 11 kwietnia 1908.