Z. KRYGOWSKI.

SUR LE DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS HYPERELLIPTIQUES EN SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES.

(O ROZWINIĘCIU FUNKCYJ HYPERELIPTYCZNYCH NA SZEREGI TRYGONOMETRYCZNE).

L'étude des développements des fonctions hyperelliptiques du premier ordre en séries trigonométriques a été l'objet d'un Mémoire très étendu de M. P. Appell publié dans les Acta Mathematica (t. XIII, 1890) et intitulé: „Sur les intégrales des fonctions à multiplicateurs et leur application au développement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques". Ce mémoire contient le développement des cinq premières fonctions de Rosenhain (voir l. c. p. 122):

$$\frac{\varphi^2_{10}(v,w)}{\varphi^2_{00}(v,w)}, \quad \frac{\varphi^2_{20}(v,w)}{\varphi^2_{00}(v,w)}, \quad \frac{\varphi^2_{31}(v,w)}{\varphi^2_{00}(v,w)}; \quad \frac{\varphi^2_{32}(v,w)}{\varphi^2_{00}(v,w)}, \quad \frac{\varphi^2_{33}(v,w)}{\varphi^2_{00}(v,w)},$$

où, en employant les formules de Weierstrass, des fonctions

$$\frac{\vartheta^2_{\mu}(v_1,v_2)}{\vartheta^2_5(v_1,v_2)}; \quad (\mu = 0, 1, 2, 3, 4), \tag{1}$$

qui avec le système des fonctions:

$$\frac{\vartheta^2_{\mu\nu}(v_1,v_2)}{\vartheta^2_5(v_1,v_2)}; \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4, \ \mu < \nu) \tag{2}$$

forment le système complet des quinze fonctions hyperelliptiques fondamentales du premier ordre.

Toutes ces fonctions (1) et (2) s'expriment à l'aide des fonctions symétriques et rationnelles de deux points $(x_1, \sqrt{R(x_1)})$, $(x_2, \sqrt{R(x_2)})$ de la courbe hyperelliptique

$$y^2 = R(x) = \prod_{k=0}^{k=4}(x-a_k); \quad a_0 > a_1 > a_2 > a_3 > a_4,$$

aux paramètres réels $a_0, \ldots, a_4$. Ces formules sont les suivantes:

$$(3)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\vartheta^2_{2\mu}(v_1, v_2)}{\vartheta^2_5(v_1, v_2)} = \frac{(-1)^\mu}{\sqrt{R'(a_{2\mu})}}(a_{2\mu}-x_1)(a_{2\mu}-x_2) = c_{2\mu}(a_{2\mu}-x_1)(a_{2\mu}-x_2); \quad (\mu=0,1,2),\\
&\frac{\vartheta^2_{2\mu-1}(v_1, v_2)}{\vartheta_5^2(v_1, v_2)} = \frac{(-1)^{\mu-1}}{\sqrt{-R'(a_{2\mu-1})}}(a_{2\mu-1}-x_1)(a_{2\mu-1}-x_2) = c_{2\mu-1}(a_{2\mu-1}-x_1)(a_{2\mu-1}-x_2); \quad (\mu=1,2),\\
&\frac{\vartheta^2_5(v_1, v_2)\vartheta^2_{\mu\nu}(v_1, v_2)}{\vartheta^2_\mu(v_1, v_2)\,\vartheta^2_\nu(v_1, v_2)} = \frac{a_\mu-a_\nu}{(x_1-x_2)^2}\left\{\frac{\sqrt{R(x_1)}}{(x_1-a_\mu)(x_1-a_\nu)} - \frac{\sqrt{R(x_2)}}{(x_2-a_\mu)(x_2-a_\nu)}\right\}^2; \quad (\mu, \nu=0,1,2,3,4; \mu<\nu)
\end{aligned}\right.$$

d'où il est aisé de voir que les dix fonctions (2) ont la forme suivante: [1])

$$(4)\qquad \frac{\vartheta^2_{\mu\nu}(v_1, v_2)}{\vartheta_5^2(v_1, v_2)} = c_{\mu\nu}\frac{(a_\mu-x_1)(a_\mu-x_2)(a_\nu-x_1)(a_\nu-x_2)}{(x_1-x_2)^2}\left\{\frac{\sqrt{R(x_1)}}{(a_\mu-x_1)(a_\nu-x_1)} - \frac{\sqrt{R(x_2)}}{(a_\mu-x_2)(a_\nu-x_2)}\right\}^2.$$

Dans cette formule les constantes $c_{\mu\nu}$ se calculent facilement dans chaque cas particulier à l'aide des formules précédentes.

Le développement des fonctions (2) ne peut pas être effectué de la même manière que le développement des fonctions (1). Pour le démontrer, prenons le système des équations hyperelliptiques sous la forme:

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\int_{a_1}^{x_1}\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \int_{a_3}^{x_2}\frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = 2\omega_{11}v_1 + 2\omega_{12}v_2,\\
&\int_{a_1}^{x_1}\frac{x_1dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \int_{a_3}^{x_2}\frac{x_2dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = 2\omega_{21}v_1 + 2\omega_{22}v_2,
\end{aligned}\right.$$

où $2\omega_{ik}$ désignent les périodes des intégrales de première espèce

$$(6)\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad \int\frac{xdx}{\sqrt{R(x)}},$$

[1]) Voir pour ces formules le mémoire de M. Hettner (Journal für reine und angewandte Mathematik, t. 112, p. 90) ainsi que Weierstrass: Mathematische Werke, t. III, p. 289.

et s'expriment par les formules

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\omega_{11} = -\int_{a_1}^{a_2}\frac{dx}{\sqrt{+R(x)}}, \quad \omega_{12} = \int_{a_3}^{a_4}\frac{dx}{\sqrt{+R(x)}}, \quad \omega'_{11} = -i\int_{a_0}^{a_1}\frac{dx}{\sqrt{-R(x)}},\\
&\qquad \omega'_{12} = -i\int_{a_0}^{a_1}\frac{dx}{\sqrt{-R(x)}} + i\int_{a_2}^{a_3}\frac{dx}{\sqrt{-R(x)}},\\
&\omega_{21} = -\int_{a_1}^{a_2}\frac{xdx}{\sqrt{+R(x)}}, \quad \omega_{22} = \int_{a_3}^{a_4}\frac{xdx}{\sqrt{+R(x)}}, \quad \omega'_{21} = -i\int_{a_0}^{a_1}\frac{xdx}{\sqrt{-R(x)}},\\
&\qquad \omega'_{22} = -i\int_{a_0}^{a_1}\frac{xdx}{\sqrt{-R(x)}} + i\int_{a_2}^{a_3}\frac{xdx}{\sqrt{-R(x)}}.
\end{aligned}\right.$$

dans lesquelles la racine carrée $\sqrt{\pm R(x)}$ se calcule arithmétiquement. De plus le déterminant

$$(8)\qquad \omega = \omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}$$

est différent de zéro.

Les intégrales normales de première espèce ont la forme:

$$(9)\qquad \int d\omega_1 = \int\frac{\omega_{22}-\omega_{12}x}{2\omega\sqrt{R(x)}}dx, \quad \int d\omega_2 = -\int\frac{\omega_{21}-\omega_{11}x}{2\omega\sqrt{R(x)}}dx,$$

et le tableau des périodes correspondantes s'écrit:

$$\begin{matrix} 1, & 0, & \tau_{11}, & \tau_{12}, \\ 0, & 1, & \tau_{21}, & \tau_{22}, \end{matrix}$$

où

$$\omega\tau_{11} = \omega_{22}\omega'_{11} - \omega_{12}\omega'_{21}, \quad \omega\tau_{22} = \omega_{11}\omega'_{22} - \omega_{21}\omega'_{12},$$
$$\omega\tau_{12} = \omega\tau_{21} = \omega_{22}\omega'_{12} - \omega_{12}\omega'_{22} = \omega_{11}\omega'_{21} - \omega_{21}\omega'_{11}.$$

Les périodes $\tau_{\alpha\beta}$ ont des valeurs purement imaginaires, c'est à dire $\tau_{\alpha\beta} = i\tau'_{\alpha\beta}$, où $\tau'_{\alpha\beta}$ est réel, de plus on a les inégalités

$$(10)\qquad \tau'_{11} > 0, \quad \tau'_{12} > 0, \quad \tau'_{11}\tau'_{22} - \tau'^2_{12} > 0,$$

qui assurent la convergence de la série générale représentant la fonction thêta.

En posant pour les valeurs réelles de v_1, v_2:

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta^2{}_{\mu}(v_1,v_2)}{\vartheta_5{}^2(v_1,v_2)} = \displaystyle\sum_{(n_1,n_2)=-\infty}^{+\infty} P^{(\mu)}_{n_1 n_2}\, e^{2\pi i n_1 v_1 + 2\pi i n_2 v_2}, \\[2ex] \dfrac{\vartheta^2{}_{\mu\nu}(v_1,v_2)}{\vartheta_5{}^2(v_1,v_2)} = \displaystyle\sum_{(n_1,n_2)=-\infty}^{+\infty} P^{(\mu\nu)}_{n_1 n_2}\, e^{2\pi i n_1 v_1 + 2\pi i n_2 v_2}, \end{cases}$$

on aura à cause de la relation

$$\frac{\partial(v_1,v_2)}{\partial(x_1,x_2)} = -\frac{1}{4\omega}\cdot\frac{x_1-x_2}{\sqrt{R(x_1)}\,\sqrt{R(x_2)}}$$

les formules

$$(12)\quad \begin{cases} P^{(\mu)}_{n_1 n_2} = -\dfrac{c_\mu}{4\omega}\displaystyle\int_{L_1}\int_{L_2}\frac{x_1-x_2}{\sqrt{R(x_1)}\,\sqrt{R(x_2)}}\,(a_\mu-x_1)\,(a_\mu-x_2)\,e^{-A}\,dx_1\,dx_2, \\[2ex] P^{(\mu\nu)}_{n_1 n_2} = -\dfrac{c_{\mu\nu}}{4\omega}\displaystyle\int_{L_1}\int_{L_2}\frac{(a_\mu-x_1)(a_\mu-x_2)(a_\nu-x_1)(a_\nu-x_2)}{(x_1-x_2)\sqrt{R(x_1)}\,\sqrt{R(x_2)}}\cdot P^2(x_1,x_2)\,e^{-A}dx_1\,dx_2 \end{cases}$$

où

$$A = 2n_1\pi i\left[\int_{a_1}^{x_1} dw_1 + \int_{a_3}^{x_2} dw_1\right] + 2n_2\pi i\left[\int_{a_1}^{x_1} dw_2 + \int_{a_3}^{x_2} dw_2\right],$$

$$P(x_1,x_2) = \frac{\sqrt{R(x_1)}}{(a_\mu-x_1)\,(a_\nu-x_1)} - \frac{\sqrt{R(x_2)}}{(a_\mu-x_2)\,(a_\nu-x_2)},$$

et L_1, L_2 désignent certaines courbes fermées.

Or il est aisé de voir, que dans l'intégrale double de la seconde des formules (12) les intégrales ne se séparent pas, ce qui arrive au contraire dans le cas de l'intégrale double de la première formule (12) et en général dans tous les cas étudiés par M. Appell.[1] En effet toutes les fonctions développées par M. Appell se réduisent aux deux types:

$$f\left(x_1,\sqrt{R(x_1)};\,x_2,\sqrt{R(x_2)}\right),\ \frac{f\left(x_1,\sqrt{R(x_1)};\,x_2,\sqrt{R(x_2)}\right)}{x_1-x_2},$$

où la fonction $f\left(x_1,\sqrt{R(x_1)};\,x_2,\sqrt{R(x_2)}\right)$ désigne une fonction symétrique entière de $(x_1,\sqrt{R(x)})$ et $(x_2,\sqrt{R(x_2)})$, tandis que la fonction (4) contient au dénominateur $(x_1-x_2)^2$ et par conséquent est du type différent.

[1]) voir l. c: p. 122.

J'ai montré dans une Note, présentée par M. E. Picard à l'Académie des sciences de Paris (Comptes rendus du 29 avril, 1907), comment l'introduction des intégrales de seconde espèce permet d'éviter cette difficulté. Depuis, en généralisant certaines formules de M. Weber (J. de Crelle, t. 74), j'ai réussi à montrer (Wiadomości matematyczne, t. XII, Varsovie, 1908), que la même méthode s'applique encore aux cas des fonctions hyperelliptiques d'ordres supérieurs.

Dans la première partie du présent travail nous obtenons pour les intégrales canoniques de seconde espèce dont la tableau des périodes se présente sous la forme

$$\begin{array}{lccccc} & \overset{(1)}{0},\ldots, & \overset{(\varrho)}{0}, & \overset{(\varrho+1)}{-2\pi i}, & 0,\ldots, & \overset{(2\varrho)}{0}, \\ (1) & 0,\ldots, & 0, & -2\pi i, & 0,\ldots, & 0, \\ (2) & 0,\ldots, & 0, & 0,\;-2\pi i,\ldots, & & 0, \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ (\varrho) & 0,\ldots, & 0, & 0, & 0,\ldots, & -2\pi i, \end{array}$$

une forme nouvelle et en particulier nous poussons les calculs jusqu'à $\varrho=4$, ensuite nous passons aux formules, qui lient les sommes des intégrales canoniques aux fonctions thêta. Dans la deuxième partie on démontre, comment ces formules peuvent être utilisées pour le développement des fonctions

$$\frac{\partial \log \vartheta\,(v_1,\ldots,v_\varrho)}{\partial v_\alpha};\ (\alpha = 1, 2, \ldots, \varrho),$$

au moyen desquelles on passe ensuite aux fonctions

$$\frac{\vartheta^2{}_{\mu\nu}\,(v_1,\ldots,v_\varrho)}{\vartheta^2\,(v_1,\ldots,v_\varrho)}.$$

Ce dernier passage peut être effectué à l'aide d'une formule de M. M. Bolza-Baker:

$$(13)\quad \frac{\vartheta^2{}_{\mu\nu}\,(v_1,\ldots,v_\varrho)}{\vartheta^2\,(v_1,\ldots,v_\varrho)} = c^{(\mu\nu)} + \sum_{(\alpha,\beta)} c^{(\mu\nu)}_{\alpha\beta}\,\frac{\partial^2 \log \vartheta\,(v_1,\ldots,v_\varrho)}{\partial v_\alpha \partial v_\beta}$$

dans laquelle $c^{(\mu\nu)}$, $c^{(\mu,\nu)}_{\alpha\beta}$ désignent certaines constantes (voir Baker: Abel's theorem and the allied theory ..., Cambridge, 1907, p. 329). Cette formule (13) se trouve là sous la forme

$$\sum_i\sum_j \wp_{ij}(u)\,b_1^{\,i-1}\,b_2^{\,j-1} = \frac{f\,(b_1,b_2)}{4\,(b_1-b_2)^2} + E\,\frac{\vartheta^2(u\,|\,u^{b_1,a}+u^{b_2,a})}{\vartheta^2\,(u)},$$

où E est une certaine constante.

PREMIÈRE PARTIE.

1. Intégrales normales de première espèce.

Soit

(1) $y^2 = R(x) = x^{2\varrho+1} + p_1 x^{2\varrho} + p_2 x^{2\varrho-1} + \ldots + p_{2\varrho} x + p_{2\varrho+1} = \prod_{k=0}^{k=2\varrho} (x - a_k)$

l'équation d'une courbe hyperelliptique du genre ϱ, dans laquelle les polynôme $R(x)$ a les racines a_k réelles et satisfaisant aux inégalités

$$a_0 > a_1 > \ldots > a_{2\varrho-1} > a_{2\varrho}.$$

Considérons ϱ intégrales de première espèce:

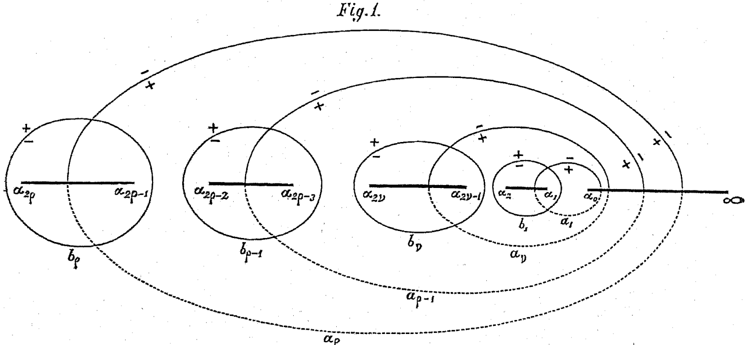
(2) $$\int \frac{a_{k1} + a_{k2} x + \ldots + a_{k\varrho} x^{\varrho-1}}{\sqrt{R(x)}} dx; \quad (k = 1, 2, \ldots, \varrho),$$

où les coefficients $a_{k1}, \ldots, a_{k\varrho}$, sont réels et de plus le déterminant:

(3) $$\begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1\varrho} \\ \ldots\ldots \\ a_{\varrho 1} \ldots a_{\varrho\varrho} \end{vmatrix} = | a_{ik} |;$$

est différent de zéro. La surface de Riemann, correspondante à l'équation (1), est rendue simplement connexe au moyen des coupures $a_1, a_2, \ldots a_\varrho, b_1, b_2, \ldots, b_\varrho$:

Fig. 1.



En nommant les modules de périodicité de l'intégrale (2) respectivement

$$2\omega_{k1}, 2\omega_{k2}, \ldots, 2\omega_{k\varrho}, 2\omega'_{k1}, 2\omega'_{k2}, \ldots, 2\omega'_{k\varrho}; \ (k = 1, 2, \ldots \varrho)$$

posons:

(4) $$\sum_{i=1}^{i=\varrho} \int_{a_{2i-1}}^{x_i} \frac{a_{k1} + a_{k2} x + \ldots + a_{k\varrho} x^{\varrho-1}}{\sqrt{R(x)}} dx = u_k = \sum_{i=1}^{i=\varrho} 2\omega_{ki} v_i; \ (k = 1, 2 \ldots \varrho).$$

On en déduit

(5) $$v_\beta = \frac{1}{2\omega} \sum_{\gamma=1}^{\gamma=\varrho} (\omega)_{\gamma\beta} u_\gamma; \ (\beta = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

$(\omega)_{\gamma\beta}$ désignant le déterminant mineur relatif à l'élément $\omega_{\gamma\beta}$ dans le déterminant

(6) $$\omega = \begin{vmatrix} \omega_{11} \ldots \omega_{1\varrho} \\ \ldots\ldots \\ \omega_{\varrho 1} \ldots \omega_{\varrho\varrho} \end{vmatrix}$$

dont la valeur est finie et différente de zéro.[1] On a de plus entre les modules $2\omega_{\alpha\beta}$, $2\omega'_{\alpha\beta}$ les relations bien connues

(7) $$\sum_{\gamma=1}^{\gamma=\varrho} (\omega_{\alpha\gamma} \omega'_{\beta\gamma} - \omega'_{\alpha\gamma} \omega_{\beta\gamma}) = 0; \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, \varrho).$$

En posant

(8) $$\sum_{\gamma=1}^{\gamma=\varrho} \int_{a_{2\gamma-1}}^{x_\gamma} \frac{A_{\beta 1} + A_{\beta 2} x + \ldots + A_{\beta\varrho} x^{\varrho-1}}{\sqrt{R(x)}} dx = v_\beta; \quad (\beta = 1, 2, \ldots, \varrho),$$

on aura pour $A_{\beta 1}, \ldots, A_{\beta\varrho}$, l'expression suivante:

(9) $$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\omega} \sum_{\gamma=1}^{\gamma=\varrho} (\omega)_{\gamma\alpha} a_{\gamma\beta}; \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, \varrho),$$

---

[1]) La démonstration de Weierstrass (Mathematische Werke, t. IV, Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transcendenten, p. 555 et suiv.) s'applique à un autre système des intégrales que le système (2); le déterminant (9) diffère de $|\omega_{\alpha\beta}|$ de Weierstrass par un facteur constant différent de zéro.

et les intégrales

$$\int \frac{A_{\alpha 1}+A_{\alpha 2}x+\ldots+A_{\alpha\varrho}x^{\varrho-1}}{\sqrt{R(x)}}dx;\quad (\alpha=1,2,\ldots,\varrho) \tag{10}$$

sont normales. Le tableau des périodes des intégrales (10) s'écrit:

$$\begin{array}{cccccccc}
(a_1) & (a_2) & & (a_\varrho) & (b_1) & (b_2) & & (b_\varrho) \\
1, & 0, & \ldots, & 0, & \tau_{11}, & \tau_{12}, & \ldots, & \tau_{1\varrho}, \\
0, & 1, & \ldots, & 0, & \tau_{21}, & \tau_{22}, & \ldots, & \tau_{2\varrho}, \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0, & 0, & \ldots, & 1, & \tau_{\varrho 1}, & \tau_{\varrho 2}, & \ldots, & \tau_{\varrho\varrho},
\end{array}$$

où on a en général

$$\tau_{\alpha\varrho}=\tau_{\beta\alpha}=\frac{1}{\omega}\sum_{\gamma=1}^{\gamma=\varrho}(\omega)_{\gamma\alpha}\,\omega'_{\gamma\beta}. \tag{11}$$

On aura de plus

$$\begin{vmatrix} A_{11}\ldots A_{1\varrho} \\ \\ A_{\varrho 1}\ldots A_{\varrho\varrho}\end{vmatrix}=\frac{1}{(2\omega)^\varrho}\begin{vmatrix}(\omega)_{11}\ldots(\omega)_{1\varrho} \\ \\ (\omega)_{\varrho 1}\ldots(\omega)_{\varrho\varrho}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a_{11}\ldots a_{1\varrho} \\ \\ a_{\varrho 1}\ldots a_{\varrho\varrho}\end{vmatrix},$$

et comme

$$\begin{vmatrix}(\omega)_{11}\ldots(\omega)_{1\varrho} \\ \\ (\omega)_{\varrho 1}\ldots(\omega)_{\varrho\varrho}\end{vmatrix}=\omega^{\varrho-1},$$

le déterminant

$$\begin{vmatrix} A_{11}\ldots A_{1\varrho} \\ \\ A_{\varrho 1}\ldots A_{\varrho\varrho}\end{vmatrix}=\frac{1}{2^\varrho\omega}\begin{vmatrix}a_{11}\ldots a_{1\varrho} \\ \\ a_{\varrho 1}\ldots a_{\varrho\varrho}\end{vmatrix} \tag{12}$$

est fini et différent de zéro.

2. Développement de $\frac{1}{\sqrt{R(x)}}$ au voisinage du point $x=\infty$

Le développement

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{\sqrt{R(x)}}=x^{-\frac{2\varrho+1}{2}}\left(1+\frac{\beta_1}{x}+\frac{\beta_2}{x^2}+\ldots+\frac{\beta_n}{x^n}+\ldots\right) \tag{1}$$

donne

$$\frac{1}{y(x-\xi)}=x^{-\frac{2\varrho+1}{2}}\left(1+\frac{f_1(\xi)}{x}+\frac{f_2(\xi)}{x^2}+\ldots+\frac{f_n(\xi)}{x^n}+\ldots\right), \tag{2}$$

où $f_n(x)$ est le polynôme

$$f_n(x)=x^n+\beta_1x^{n-1}+\ldots+\beta_{n-1}x+\beta_n. \tag{3}$$

En différentiant (1) par rapport à x on aura

$$\frac{d\frac{1}{y}}{dx}=-\frac{1}{2}\left(\frac{2\varrho+1}{x^{\frac{2\varrho+3}{2}}}+\frac{(2\varrho+3)\beta_1}{x^{\frac{2\varrho+5}{2}}}+\ldots+\frac{(2\varrho+2n+1)\beta_n}{x^{\frac{2\varrho+2n+3}{2}}}+\ldots\right), \tag{4}$$

mais, en vertu de $y=\prod_{i=0}^{i=2\varrho}(x-a_i)$, on obtient

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d\frac{1}{y}}{dx}&=-\frac{1}{y}\frac{d\log y}{dx}=-\frac{1}{2y}\sum_{i=0}^{i=2\varrho}\frac{1}{x-a_i}=-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{i=2\varrho}\left(\frac{1}{x^{\frac{2\varrho+3}{2}}}\right.\\ &\left.+\frac{f_1(a_i)}{x^{\frac{2\varrho+5}{2}}}+\ldots+\frac{f_n(a_i)}{x^{\frac{2\varrho+2n+3}{2}}}+\ldots\right),\end{aligned}\right. \tag{5}$$

En comparant les équations (4) et (5) on aura:

$$(2\varrho+2n+1)\,\beta_n=\sum_{i=0}^{i=2\varrho}f_n(a_i), \tag{6}$$

d'où à cause de l'identité

$$f_n(x)=xf_{n-1}(x)+\beta_n, \tag{7}$$

on obtient

$$2n\beta_n=\sum_{i=0}^{i=2\varrho}a_if_{n-1}(a_i), \tag{8}$$

Comme on a

$$\frac{\partial\frac{1}{y}}{\partial a_i}=\frac{1}{x^{\frac{2\varrho+1}{2}}}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial\beta_1}{\partial a_i}+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial\beta_2}{\partial a_i}+\ldots+\frac{1}{x^n}\cdot\frac{\partial\beta_n}{\partial a_i}+\ldots\right) \tag{9}$$

et en même temps

$$(10)\qquad \frac{\partial\frac{1}{y}}{\partial\alpha_i}=\frac{1}{2(x-\alpha_i)y}=\frac{1}{2x^{\frac{2\rho+3}{2}}}\left(1+\frac{f_1(\alpha_i)}{x}+\ldots+\frac{f_n(\alpha_i)}{x^n}+\ldots\right),$$

on aura, en égalant ces deux équations (9) et (10),

$$(11)\qquad \frac{\partial\beta_n}{\partial\alpha_i}=\frac{1}{2}f_{n-1}(\alpha_i).$$

En portant cette valeur de $f_{n-1}(\alpha_i)$ dans le second membre de l'équation (8) on arrive à la formule

$$(12)\qquad n\beta_n=\sum_{i=0}^{i=2\rho}\alpha_i\frac{\partial\beta_n}{\partial\alpha_i},$$

d'où l'on voit que l'expression β_n est un polynôme homogène en $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2\rho}$, du degré n.

Pour trouver la valeur de β_n, introduisons dans le second membre de l'équation (8) la valeur de $f_{n-1}(\alpha_i)$, on aura

$$2n\beta_n=\sum_{i=0}^{i=2\rho}(\alpha_i^n+\beta_1\alpha_i^{n-1}+\ldots+\beta_{n-1}\alpha_i)$$

ou, en posant

$$\sum_{i=0}^{i=2\rho}\alpha_i^k=s_k,$$

on obtient:

$$(13)\qquad 2n\beta_n=s_n+\beta_1s_{n-1}+\ldots+\beta_{n-2}s_2+\beta_{n-1}s_1.$$

En posant $n=1, 2, \ldots, n$, on arrive au système des équations

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} 2\beta_1&=s_1,\\ 2\,.\,2\beta_2-s_1\beta_1&=s_2,\\ 2\,.\,3\beta_3-\beta_2s_1-s_2\beta_1&=s_3,\\ \ldots\ldots\ldots&\ldots\\ 2(n-1)\beta_{n-1}-s_1\beta_{n-2}-\ldots-s_{n-2}\beta_1&=s_{n-1},\\ 2n\beta_n-s_1\beta_{n-1}-s_2\beta_{n-2}-\ldots-s_{n-1}\beta_1&=s_n,\end{aligned}\right.$$

dont le déterminant

$$\begin{vmatrix} 2\,.\,1, & 0, & \ldots\ldots\ldots & 0\\ -s_1, & 2\,.\,2, & \ldots\ldots\ldots, & 0\\ -s_2, & -s_1, & 2\,.\,3, \ldots\ldots, & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -s_{n-1}, & -s_{n-2}, & \ldots, & 2(n-1)s_1, 2n\end{vmatrix}=n!2^n$$

est différent de zéro. On aura donc

$$(15)\qquad \beta_n=\frac{1}{n!2^n}\begin{vmatrix} 2\,.\,1, & 0, & \ldots\ldots\ldots, & s_1\\ -s_1, & 2\,.\,2, & 0, \ldots\ldots, & s_2\\ -s_2, & -s_1, & 2\,.\,3, 0, \ldots, & s_3\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -s_{n-1}, & -s_{n-2}, & \ldots -s_1, & s_n\end{vmatrix}$$

et, en particulier, en se servant des formules pour les fonctions symétriques

$s_1=-p_1,$

$s_2=p_1^2-2p_2,$

$s_3=-p_1^3+3p_1p_2-3p_3,$

$s_4=p_1^4-4p_1^2p_2+4p_1p_3+2p_2^2-4p_4,$

$s_5=-p_1^5+5p_1^3p_2-5p_1^2p_3-5p_1p_2^2+5p_1p_4+5p_2p_3-5p_5,$

$s_6=p_1^6-6p_1^4p_2+6p_1^3p_3+9p_1^2p_2^2-6p_1^2p_4+3p_3^2-2p_2^3+6p_2p_4-12p_1p_2p_3+6p_1p_5-6p_6,$

on arrive aux formules

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \beta_1&=-\frac{p_1}{2},\\ \beta_2&=\frac{1}{2!2^2}(3p_1^2-4p_2),\\ \beta_3&=\frac{1}{3!2^3}(-15p_1^3+36p_1p_2-24p_3),\\ \beta_4&=\frac{1}{4!2^4}(105p_1^4-360p_1^2p_2+144p_2^2+288p_1p_3-192p_4),\\ \beta_5&=\frac{1}{5!2^5}(-945p_1^5+4200p_1^3p_2-3600p_1p_2^2-3600p_1^3p_3+2880p_2p_3\\ &\qquad+2880p_1p_4-1920p_5),\\ \beta_6&=\frac{1}{6!2^6}(10395p_1^6-56700p_1^4p_2+50400p_1^3p_3+75600p_1^2p_2^2-43200p_1^2p_4\\ &\qquad+17280p_3^2-14400p_2^3+34560p_2p_4-86400p_1p_2p_3+34560p_1p_5-23040p_6),\end{aligned}\right.$$

qui nous seront très utiles dans la suite.

3. Relations bilinéaires entre les périodes.

En posant

$$(1)\qquad w_k = \int \frac{A_{k1} + A_{k2}\,x + \ldots + A_{k\rho}\,x^{\rho-1}}{\sqrt{R(x)}}\,dx;\quad (k=1, 2, \ldots, \varrho)$$

on aura pour $x = \infty$ le développement

$$(2)\qquad \frac{dw_k}{dx} = \sum_{n=-(\rho+1)}^{n=+\infty} (\beta_{\rho+n-1} A_{k,\rho} + \beta_{\rho+n-2} A_{k\,\rho-1} + \ldots + \beta_{n+1} A_{k2} + \beta_n A_{k1})\, x^{-\frac{2\rho+2\nu+1}{2}}$$

où il faudra prendre $\beta_0 = 1$, $\beta_{-1} = \beta_{-2} = \ldots = 0$.

Considérons maintenant ϱ intégrales de seconde espéce

$$(3)\qquad e_a = \int \frac{x^{\rho+a-1}\,dx}{\sqrt{R(x)}};\quad (a = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

et appelons leurs périodes respectivement

$$(4)\qquad 2\eta_{a1},\ 2\eta_{a2}, \ldots, 2\eta_{a\rho},\ 2\eta'_{a1},\ 2\eta'_{a2}, \ldots, 2\eta'_{a\rho};\ (a=1, 2, \ldots, \varrho).$$

On aura d'abord pour $x = \infty$ le développement

$$(5)\qquad \begin{cases} e_a = 2x^{\frac{2a-1}{2}} \left(\dfrac{1}{2a-1} + \dfrac{\beta_1}{2a-3}\cdot\dfrac{1}{x} + \dfrac{\beta_2}{2a-5}\cdot\dfrac{1}{x^2} + \ldots + \dfrac{\beta_n}{2a-2n-1}\cdot\dfrac{1}{x^n} + \ldots \right); \\ \qquad (a=1, 2, \ldots, \varrho) \end{cases}$$

et l'intégrale $\int e_a dw_k$ prise le long du bord de la surface de Riemann, rendue simplement connexe, donne

$$(6)\qquad \eta_{a1}\tau_{k1} + \eta_{a2}\tau_{k2} + \ldots + \eta_{a\rho}\tau_{k\rho} - \eta'_{ak} = -2\pi i m_{ak};\ (a, k=1, 2, \ldots, \varrho)$$

où

$$(7)\qquad \begin{cases} m_{ak} = 2\displaystyle\sum_{l=0}^{l=a-1} \frac{\beta_l A_{k\rho} + \beta_{l-1} A_{k,\rho-1} + \ldots + \beta_1 A_{k,\rho-l+1} + A_{k,\rho-l}}{2l+1}\,\beta_{a-1-l} \\ \qquad (a, k=1, 2, \ldots, \varrho). \end{cases}$$

Nous aurons besoin dans la suite des relations entre les périodes des intégrales e_a; évaluons dans ce but l'intégrale

$$\int e_a de_k;\quad a > k;\ \left(\begin{smallmatrix} k = 1, 2, \ldots, (\rho-1) \\ a = k+1, k+2, \ldots, \rho \end{smallmatrix}\right)$$

en appliquant le même procédé que plus haut, on aura

$$(8)\qquad \sum_{l=1}^{l=\rho} (\eta_{al}\eta'_{kl} - \eta'_{al}\eta_{kl}) = -2\pi i \sum_{l=0}^{l=a+k-1} \frac{\beta_l \beta_{a+k-l-1}}{2a-2l-1}.$$

En substituant les valeurs des η'_{kl}, η'_{al} des équations (6), on aura après la réduction:

$$(9)\qquad \sum_{l=1}^{l=\rho} (\eta_{al} m_{kl} - \eta_{kl} m_{al}) = -\sum_{l=0}^{l=a+k-1} \frac{\beta_l \beta_{a+k-l-1}}{2a-2l-1}.\quad \left(\begin{smallmatrix} k=1, 2, \ldots, (\rho-1) \\ a=k+1, k+2, \ldots, \rho \end{smallmatrix}\right)$$

En posant

$$(10)\qquad p_{ak} = -p_{ka} = \sum_{l=1}^{l=\rho} (\eta_{al} m_{kl} - \eta_{kl} m_{al})$$

on aura en particulier

$$(11)\qquad \begin{cases} p_{12} = \beta_1^2 - \dfrac{2\beta_2}{3}, \\ p_{23} = \beta_2^2 - \dfrac{2}{3}\beta_1\beta_3 - \dfrac{2}{15}\beta_4, \\ p_{13} = \dfrac{4}{3}\beta_1\beta_2 - \dfrac{4}{5}\beta_3, \\ p_{14} = \dfrac{\beta_2^2}{3} - \dfrac{6}{5}\beta_1\beta_3 + \dfrac{6}{7}\beta_4, \\ p_{24} = \dfrac{4}{3}\beta_2\beta_3 - \dfrac{4}{21}\beta_5 - \dfrac{4}{5}\beta_1\beta_4, \\ p_{34} = \beta_3^2 - \dfrac{2}{3}\beta_2\beta_4 - \dfrac{2}{15}\beta_1\beta_5 - \dfrac{2}{35}\beta_6, \end{cases}$$

ou, en substituant les valeurs β_k données au numéro (2), équations (16), on arrive aux formules:

$$
(12)\left\{\begin{aligned}
p_{12} &= \frac{p_2}{3}\,,\\
p_{13} &= -\frac{4}{3.5}p_1p_2+\frac{2}{5}p_3\,,\\
p_{14} &= \frac{8}{5.7}p_1^{\,2}p_2-\frac{5}{3.7}p_2^{\,2}-\frac{12}{5.7}p_1p_3+\frac{3}{7}p_4\,,\\
p_{23} &= \frac{p_2^{\,2}}{5}-\frac{4}{3.5}p_1p_3+\frac{p_4}{3.5}\,,\\
p_{24} &= -\frac{6}{5.7}p_1p_2^{\,2}+\frac{8}{5.7}p_1^{\,2}p_3+\frac{4}{3.7}p_2p_3-\frac{12}{5.7}p_1p_4+\frac{2}{3.7}p_5\,,\\
p_{34} &= \frac{8}{5.7}p_3^{\,2}+\frac{p_2^{\,3}}{7}+\frac{8}{5.7}p_1^{\,2}p_4-\frac{12}{5.7}p_1p_2p_3-\frac{8}{3.5.7}p_1p_5-\frac{22}{3.5.7}p_2p_4\\
&\qquad +\frac{p_6}{5.7}\,.
\end{aligned}\right.
$$

4. Forme générale des intégrales canoniques de seconde espèce.

Passons maintenant à la formation des intégrales canoniques de seconde espèce. Dans ce but essayons de déterminer les constantes $c_{\alpha 1}, c_{\alpha 2}, \ldots, c_{\alpha,2\rho}$, dans l'expression

$$(1)\quad I_\alpha = c_{\alpha 1}w_1+c_{\alpha 2}w_2+\ldots\, c_{\alpha\rho}w_\rho+c_{\alpha,\rho+1}\,b_1+c_{\alpha,\rho+2}\,e_2+\ldots+c_{\alpha,2\rho};\ (\alpha=1,2,\ldots\varrho)$$

de façon à obtenir ϱ intégrales de seconde espèce, pour lesquelles le tableau des périodes se réduit au suivant:

$$
\begin{array}{lcccccccc}
 & (a_1) & (a_2) & & (a_\rho) & (b_1) & (b_2) & & (b_\rho)\\
(I_1) & 0, & 0, & \ldots, & 0, & -2\pi i, & 0, & \ldots, & 0,\\
(I_2) & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & -2\pi i, & \ldots, & 0,\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
(I_\rho) & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & -2\pi i.
\end{array}
$$

Comme $w_1, w_2, \ldots, w_\rho$, sont les intégrales normales de premiére espèce, les équations, qui déterminent les constantes $c_{\alpha 1}, c_{\alpha 2}, \ldots, c_{\alpha,2\rho}$, se présentent sous la formé:

$$
(2)\left\{\begin{aligned}
&c_{\alpha 1}+2c_{\alpha,\rho+1}\,\eta_{11}+2c_{\alpha,\rho+2}\,\eta_{21}+\ldots+2c_{\alpha,2\rho}\,\eta_{\rho 1}=0\,,\\
&c_{\alpha 2}+2c_{\alpha,\rho+1}\,\eta_{21}+2c_{\alpha,\rho+2}\,\eta_{22}+\ldots+2c_{\alpha,2\rho}\,\eta_{\rho 2}=0\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&c_{\alpha\rho}+2c_{\alpha,\rho+1}\,\eta_{1\rho}+2c_{\alpha,\rho+2}\,\eta_{2\rho}+\ldots+2c_{\alpha,2\rho}\eta_{\rho\rho}=0\,, \qquad (\alpha=1,2,\ldots\rho)\\
&c_{\alpha 1}\tau_{11}+c_{\alpha 2}\tau_{21}+\ldots+c_{\alpha\rho}\tau_{\rho 1}+2c_{\alpha,\rho+1}\,\eta'_{11}+2c_{\alpha,\rho+2}\,\eta'_{21}+\ldots+2c_{\alpha,2\rho}\eta'_{\rho 1}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&c_{\alpha 1}\tau_{1\alpha}+c_{\alpha 2}\tau_{2\alpha}+\ldots+c_{\alpha\rho}\tau_{\rho\alpha}+2c_{\alpha,\rho+1}\eta'_{1\alpha}+2c_{\alpha,\rho+2}\eta'_{2\alpha}+\ldots+2c_{\alpha,2\rho}\eta'_{\rho\alpha}=-2\pi i,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&c_{\alpha 1}\tau_{1\rho}+c_{\alpha 2}\tau_{2\rho}+\ldots+c_{\alpha\rho}\tau_{\rho\rho}+2c_{\alpha,\rho+1}\,\eta'_{1\rho}+2c_{\alpha,\rho+2}\,\eta'_{2\rho}+\ldots+2c_{\alpha,2\rho}\eta'_{\rho\rho}=0.
\end{aligned}\right.
$$

Le déterminant D de ces équations

$$
(3)\qquad D=\begin{vmatrix}
1 & 0\ldots 0 & 2\eta_{11} & 2\eta_{21}\ldots 2\eta_{\rho 1}\\
0 & 1\ldots 0 & 2\eta_{12} & 2\eta_{22}\ldots 2\eta_{\rho 2}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
0 & 0\ldots 1 & 2\eta_{1\rho} & 2\eta_{2\rho}\ldots 2\eta_{\rho\rho}\\
\tau_{11} & \tau_{21}\ldots\tau_{\rho 1} & 2\eta'_{11} & 2\eta'_{21}\ldots 2\eta'_{\rho 1}\\
\tau_{12} & \tau_{22}\ldots\tau_{\rho 2} & 2\eta'_{12} & 2\eta'_{22}\ldots 2\eta'_{\rho 2}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\tau_{1\rho} & \tau_{2\rho}\ldots\tau_{\rho\rho} & 2\eta'_{1\rho} & 2\eta'_{2\rho}\ldots 2\eta'_{\rho\rho}
\end{vmatrix}
$$

peut être transformé à l'aide des relations (6) du numéro (3)

$$
(4)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\eta'_{\alpha 1}-(\eta_{\alpha 1}\tau_{11}+\eta_{\alpha 2}\tau_{12}+\ldots+\eta_{\alpha\rho}\tau_{1\rho})=2\pi i m_{\alpha 1}\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (\alpha=1,2,\ldots,\rho)\\
&\eta'_{\alpha\rho}-(\eta_{\alpha 1}\tau_{\rho 1}+\eta_{\alpha 2}\tau_{\rho 2}+\ldots+\eta_{\alpha\rho}\tau_{\rho\rho})=2\pi i m_{\alpha\rho}\,,
\end{aligned}\right.
$$

et de la relation $\tau_{\alpha\beta}=\tau_{\beta\alpha}$ en le déterminant

$$
D=2^\rho\begin{vmatrix}
1\ldots 0 & \eta_{11} & \ldots\eta_{\rho 1}\\
\cdot & \cdot & \cdot\\
0\ldots 1 & \eta_{1\rho} & \ldots\eta_{\rho\rho}\\
0\ldots 0 & 2\pi i m_{11} & \ldots 2\pi i m_{\rho 1}\\
\cdot & \cdot & \cdot\\
0\ldots 0 & 2\pi i m_{1\rho} & \ldots 2\pi i m_{\rho\rho}
\end{vmatrix}
=2^{2\rho}.(\pi i)^\rho\begin{vmatrix}
m_{11} & \ldots & m_{\rho 1}\\
\cdot & \cdot & \cdot\\
m_{1\rho} & \ldots & m_{\rho\rho}
\end{vmatrix},
$$

qui de nouveau, en faisant l'usage des relations (7) du numéro (3):

$$(5) \quad m_{\alpha k} = 2 \sum_{l=0}^{l=\alpha-1} \frac{\beta_l A_{k\rho} + \beta_{l-1} A_{k,\rho-1} + \dots + \beta_1 A_{k,\rho-l+1} + A_{k,\rho-l}}{2l+1} \beta_{\alpha-l-1},$$

se rèduit au déterminant

$$(6) \qquad D = \frac{(-1)^{\frac{\rho(\rho-1)}{2}} \cdot 2^{3\rho} \cdot (\pi i)^\rho}{1.3.5 \dots (2\varrho-1)} \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1\rho} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{\rho 1} & \dots & A_{\rho\rho} \end{vmatrix}$$

ou encore à cause de la relation (12) au numéro (1):

$$|A_{\alpha\beta}| = \frac{|a_{\alpha\beta}|}{2^\rho \omega}$$

à l'expression

$$(7) \qquad D = (-1)^{\frac{\rho(\rho-1)}{2}} \frac{(\pi i)^\rho . 2^{2\rho}}{1.3.5 \dots (2\varrho-1)} \cdot \frac{|a_{\alpha\beta}|}{\omega}.$$

Passons maintenant au calcul des numérateurs des constantes $c_{\alpha,\beta}$; $c_{\alpha,\rho+\beta}$, $(\beta=1, 2, \dots, \varrho)$.

Le numérateur de $c_{\alpha,\beta}$ est le déterminant

$$(8) \quad 2^\rho . \begin{vmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \eta_{11} & \eta_{21} & \dots & \eta_{\rho 1} \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \eta_{12} & \eta_{22} & \dots & \eta_{\rho 2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \eta_{1,\beta-1} & \eta_{2,\beta-1} & \dots & \eta_{\rho,\beta-1} \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \eta_{1\beta} & \eta_{2\beta} & \dots & \eta_{\rho\beta} \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \eta_{1,\beta+1} & \eta_{2,\beta+1} & \dots & \eta_{\rho,\beta+1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \eta_{1\rho} & \eta_{2\rho} & \dots & \eta_{\rho\rho} \\
\tau_{11} & \tau_{21} & \dots & \tau_{\beta-1,1} & 0 & \tau_{\beta+1,1} & \dots & \tau_{\rho 1} & \eta'_{11} & \eta'_{21} & \dots & \eta'_{\rho 1} \\
\tau_{12} & \tau_{22} & \dots & \tau_{\beta-1,2} & 0 & \tau_{\beta+1,2} & \dots & \tau_{\rho 2} & \eta'_{12} & \eta'_{22} & \dots & \eta'_{\rho 2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\tau_{1,\alpha-1} & \tau_{2,\alpha-1} & \dots & \tau_{\beta-1,\alpha-1} & 0 & \tau_{\beta+1,\alpha-1} & \dots & \tau_{\rho,\alpha-1} & \eta'_{1,\alpha-1} & \eta'_{2,\alpha-1} & \dots & \eta'_{\rho,\alpha-1} \\
\tau_{1\alpha} & \tau_{2\alpha} & \dots & \tau_{\beta-1,\alpha} & -2\pi i & \tau_{\beta+1,\alpha} & \dots & \tau_{\rho\alpha} & \eta'_{1\alpha} & \eta'_{2\alpha} & \dots & \eta'_{\rho\alpha} \\
\tau_{1,\alpha+1} & \tau_{2,\alpha+1} & \dots & \tau_{\beta-1,\alpha+1} & 0 & \tau_{\beta+1,\alpha+1} & \dots & \tau_{\rho,\alpha+1} & \eta'_{1,\alpha+1} & \eta'_{2,\alpha+1} & \dots & \eta'_{\rho,\alpha+1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\tau_{1\rho} & \tau_{2\rho} & \dots & \tau_{\beta-1,\rho} & 0 & \tau_{\beta+1,\rho} & \dots & \tau_{\rho\rho} & \eta'_{1\rho} & \eta'_{2\rho} & \dots & \eta'_{\rho\rho}
\end{vmatrix}$$

qui, en se servant des relations (4), se réduit au déterminant

$$(9) \qquad 2^\rho (2\pi i)^\rho \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc} & & & (\beta-1) & (\beta) & (\beta+1) & & & & & & \end{array} \\
\begin{vmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \eta_{11} & \eta_{21} & \dots & \eta_{\rho 1} \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \eta_{12} & \eta_{22} & \dots & \eta_{\rho 2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \eta_{1,\beta-1} & \eta_{2,\beta-1} & \dots & \eta_{\rho,\beta-1} \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \eta_{1\beta} & \eta_{2\beta} & \dots & \eta_{\rho\beta} \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \eta_{1,\beta+1} & \eta_{2,\beta+1} & \dots & \eta_{\rho,\beta+1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \eta_{1\rho} & \eta_{2\rho} & \dots & \eta_{\rho\rho} \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m_{11} & m_{21} & \dots & m_{\rho 1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & m_{1\alpha} & m_{2\alpha} & \dots & m_{\rho\alpha} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m_{1\rho} & m_{2\rho} & \dots & m_{\rho\rho}
\end{vmatrix}
\end{array}$$

Ce déterminant est de nouveau égal au suivant

$$-1)^{\rho-\beta+\alpha+1} . (4\pi i)^\rho \begin{vmatrix}
0 & 0 & \dots & 0 & \eta_{1\beta} & \dots & \eta_{\rho\beta} \\
1 & 0 & \dots & 0 & \eta_{1,\beta+1} & \dots & \eta_{\rho,\beta+1} \\
0 & 1 & \dots & 0 & \eta_{1\beta+2} & \dots & \eta_{\rho,\beta+2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \dots & 1 & \eta_{1\rho} & \dots & \eta_{\rho\rho} \\
0 & 0 & \dots & 0 & m_{11} & \dots & m_{\rho 1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \dots & 0 & m_{1,\alpha-1} & \dots & m_{\rho,\alpha-1} \\
0 & 0 & \dots & 0 & m_{1,\alpha+1} & \dots & m_{\rho,\alpha+1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \dots & 0 & m_{1\rho} & \dots & m_{\rho\rho}
\end{vmatrix} = (-1)^{\alpha+1} . 2^{3\rho-1} (\pi i)^\rho \begin{vmatrix}
\eta_{1\beta} & \dots & \eta_{1\rho} \\
m'_{11} & \dots & m'_{\rho 1} \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
m'_{1,\alpha-1} & \dots & m'_{\rho,\alpha-1} \\
m'_{1,\alpha+1} & \dots & m'_{\rho,\alpha+1} \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
m'_{1\rho} & \dots & m'_{\rho\rho}
\end{vmatrix}$$

où on a posé $m'_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} m_{\alpha\beta}$.

On aura donc

$$(10)\qquad c_{\alpha\beta}=\frac{(-1)^{\alpha+1}.2^{3\rho-1}.(\pi i)^{\rho}}{D}\begin{vmatrix} \eta_{1\beta} & \dots & \eta_{\rho\beta} \\ m'_{11} & \dots & m'_{\rho 1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ m'_{1,\alpha-1} & \dots & m'_{\rho,\alpha-1} \\ m'_{1,\alpha+1} & \dots & m'_{\rho,\alpha+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ m'_{1\rho} & \dots & m'_{\rho\rho} \end{vmatrix};\quad (\alpha,\beta=1,2,\dots,\varrho)$$

donc, en substituant la valeur (7) de D, on obtient

$$(11)\qquad c_{\alpha\beta}=(-1)^{\frac{\rho(\rho-1)}{2}+\alpha+1}.1.3.5\dots(2\varrho-1)2^{\rho-1}.\frac{\omega}{|a_{\alpha\beta}|}.\begin{vmatrix} \eta_{1\beta} & \dots & \eta_{\rho\beta} \\ m'_{11} & \dots & m'_{\rho 1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ m'_{1,\alpha-1} & \dots & m'_{\rho,\alpha-1} \\ m'_{1,\alpha+1} & \dots & m'_{\rho,\alpha+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ m'_{1\rho} & \dots & m'_{\rho\rho} \end{vmatrix};\quad (\alpha,\beta=1,2,\dots,\varrho)$$

où

$$(12)\qquad m'_{\alpha k}=\sum_{l=0}^{l=\alpha-1}\frac{\beta_l A_{k\rho}+\beta_{l-1}A_{k,\rho-1}+\dots+\beta_1 A_{k,\rho-l+1}+A_{k,\rho-l}}{2l+1}\,\beta_{\alpha-l-1}.$$

Dans cette dernière formule il faudra prendre $\beta_0=1$, $\beta_{-1}=\beta_{-2}=\dots=0$.

Le calcul de $c_{\alpha,\rho+\beta}$, $(\beta=1,2,\dots,\varrho)$, peut être effectué de la même manière. On aura d'abord

$$(13)\qquad D.c_{\alpha,\rho+\beta}=\begin{vmatrix} 1 & 0\dots 0 & 2\eta_{11} & \dots & 2\eta_{\beta-1,1} & 0 & 2\eta_{\beta+1,1} & \dots & 2\eta_{\rho 1} \\ 0 & 1\dots 0 & 2\eta_{12} & \dots & 2\eta_{\beta-1,2} & 0 & 2\eta_{\beta+1,2} & \dots & 2\eta_{\rho 2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0\dots 1 & 2\eta_{1\rho} & \dots & 2\eta_{\beta-1,\rho} & 0 & 2\eta_{\beta+1,\rho} & \dots & 2\eta_{\rho\rho} \\ \tau_{11} & \tau_{21}\dots\tau_{\rho 1} & 2\eta'_{11} & \dots & 2\eta'_{\beta-1,1} & 0 & 2\eta'_{\beta+1,1} & \dots & 2\eta'_{\rho 1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \tau_{1,\alpha-1} & \dots\tau_{\rho,\alpha-1} & 2\eta'_{1,\alpha-1} & \dots & 2\eta'_{\beta-1,\alpha-1} & 0 & 2\eta'_{\beta+1,\alpha-1} & \dots & 2\eta'_{\rho,\alpha-1} \\ \tau_{1\alpha} & \dots\tau_{\rho\alpha} & 2\eta'_{1\alpha} & \dots & 2\eta'_{\beta-1,\alpha} & -2\pi i & 2\eta'_{\beta+1,\alpha} & \dots & 2\eta'_{\rho,\alpha} \\ \tau_{1,\alpha+1} & \dots\tau_{\rho,\alpha+1} & 2\eta'_{1,\alpha+1} & \dots & 2\eta'_{\beta-1,\alpha+1} & 0 & 2\eta'_{\beta+1,\alpha+1} & \dots & 2\eta'_{\rho,\alpha+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \tau_{1\rho} & \dots\tau_{\rho\rho} & 2\eta'_{1\rho} & \dots & 2\eta'_{\beta-1,\rho} & 0 & 2\eta'_{\beta+1,\rho} & \dots & 2\eta'_{\rho\rho} \end{vmatrix},$$

puis, en employant le même procédé que plus haut, on arrive à l'expression

$$(14)\qquad D.c_{\alpha,\rho+\beta}=2\pi i.(8\pi i)^{\rho-1}\begin{vmatrix} m'_{11} & \dots & m'_{\beta-1,1} & 0 & m'_{\beta+1,1} & \dots & m'_{\rho 1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m'_{1,\alpha-1} & \dots & m'_{\beta-1,\alpha-1} & 0 & m'_{\beta+1,\alpha-1} & \dots & m'_{\rho,\alpha-1} \\ m'_{1\alpha} & \dots & m'_{\beta-1,\alpha} & -1 & m'_{\beta+1,\alpha} & \dots & m'_{\rho\alpha} \\ m'_{1,\alpha+1} & \dots & m'_{\beta-1,\alpha+1} & 0 & m'_{\beta+1,\alpha+1} & \dots & m'_{\rho,\alpha+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m'_{1\rho} & \dots & m'_{\beta-1,\rho} & 0 & m'_{\beta+1,\rho} & \dots & m'_{\rho\rho} \end{vmatrix};\ (\alpha,\beta=1,2,\dots,\varrho)$$

et ensuite

$$Dc_{\alpha,\rho+\beta}=(-1)^{\alpha+\beta-1}.2\pi i.(8\pi i)^{\rho-1}\begin{vmatrix} m'_{11} & \dots & m'_{\beta-1,1} & m'_{\beta+1,1} & \dots & m'_{\rho 1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m'_{1,\alpha-1} & \dots & m'_{\beta-1,\alpha-1} & m'_{\beta+1,\alpha-1} & \dots & m'_{\rho,\alpha-1} \\ m'_{1,\alpha+1} & \dots & m'_{\beta-1,\alpha+1} & m'_{\beta+1,\alpha+1} & \dots & m'_{\rho,\alpha+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m'_{1\rho} & \dots & m'_{\beta-1,\rho} & m'_{\beta+1,\rho} & \dots & m'_{\rho\rho} \end{vmatrix}.$$

En substituant la valeur (7) de D, on aura enfin

$$c_{\alpha,\rho+\beta}=(-1)^{\frac{\rho(\rho-1)}{2}}.2^{\rho-2}.1.3.5\dots(2\varrho-1).\frac{\omega}{|a_{\alpha\beta}|}\begin{vmatrix} m'_{11} & \dots & m'_{\beta-1,1} & m'_{\beta+1,1} & \dots & m'_{\rho 1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m'_{1,\alpha-1} & \dots & m'_{\beta-1,\alpha-1} & m'_{\beta+1,\alpha-1} & \dots & m'_{\rho,\alpha-1} \\ m'_{1,\alpha+1} & \dots & m'_{\beta-1,\alpha+1} & m'_{\beta+1,\alpha+1} & \dots & m'_{\rho,\alpha+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m'_{1\rho} & \dots & m'_{\beta-1,\rho} & m'_{\beta+1,\rho} & \dots & m'_{\rho\rho} \end{vmatrix}$$

$$(\alpha,\beta=1,2,\dots,\varrho).$$

En particulier, si dans le déterminant $|a_{\alpha\beta}|$ nous prenons $a_{\alpha\beta}=0$, $a_{\alpha\alpha}=1$, on aura $|a_{\alpha\beta}|=1$, et de plus

$$A_{\alpha\beta}=\frac{(\omega)_{\beta\alpha}}{2\omega}$$

donc

$$m'_{\alpha k}=\frac{1}{2\omega}\sum_{l=0}^{l=\alpha-1}\frac{\beta_l(\omega)_{\varrho k}+\beta_{l-1}(\omega)_{\varrho-1,k}+\ldots+\beta_1(\omega)_{\varrho-l+1,k}+(\omega)_{\varrho-l,k}}{2l+1}\,\beta_{\alpha-1-l}\,.$$

Dans la suite nous nous occupons de la transformation des expressions (11) et (15) à l'aide des relations bilinéaires (10) du numéro (4).

5. Formes définitives des intégrales canoniques de seconde espèce. Cas du genre $\varrho=2$.

Considérons d'abord le cas du genre $\varrho=2$. On aura dans ce cas particulier

$$I_\alpha=c_{\alpha 1}w_1+c_{\alpha 2}w_2+c_{\alpha 3}e_1+c_{\alpha 4}e_2\,;\quad(\alpha=1,2),$$

c'est à dire

$$(1)\qquad I_\alpha=\int\frac{c_{\alpha 1}(A_{11}+A_{12}x)+c_{\alpha 2}(A_{21}+A_{22}x)+c_{\alpha 3}x^2+c_{\alpha 4}x^3}{\sqrt{R(x)}}\,dx;\quad(\alpha=1,2),$$

où, d'après les formules (11) et (15) de l'article précédent, les coefficients $c_{\alpha\beta}$ ont les valeurs suivantes:

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}
&c_{11}=-1.3.\frac{2\omega}{|a_{\alpha\beta}|}\begin{vmatrix}\eta_{11}&\eta_{21}\\ m'_{12}&m'_{22}\end{vmatrix};\quad c_{21}=1.3.\frac{2\omega}{|a_{\alpha\beta}|}.\begin{vmatrix}\eta_{11}&\eta_{21}\\ m'_{11}&m'_{21}\end{vmatrix}\\
&c_{12}=-1.3.\frac{2\omega}{|a_{\alpha\beta}|}\begin{vmatrix}\eta_{12}&\eta_{22}\\ m'_{12}&m'_{22}\end{vmatrix};\quad c_{22}=1.3.\frac{2\omega}{|a_{\alpha\beta}|}\begin{vmatrix}\eta_{12}&\eta_{22}\\ m'_{11}&m'_{21}\end{vmatrix}\\
&c_{13}=1.3.\frac{\omega}{|a_{\alpha\beta}|}.m'_{22}\,;\qquad c_{23}=-1.3.\frac{\omega}{|a_{\alpha\beta}|}m'_{21}\\
&c_{14}=-1.3.\frac{\omega}{|a_{\alpha\beta}|}.m'_{12}\,;\qquad c_{24}=1.3.\frac{\omega}{|a_{\alpha\beta}|}m'_{11}
\end{aligned}\right.$$

$$|a_{\alpha\beta}|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21};\quad\omega=\omega_{11}\omega_{22}-\omega_{12}\omega_{21}.$$

Dans ces formules $m'_{\alpha\beta}$ ont, d'après la formule (5) du numéro (4), les valeurs:

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}
&m'_{11}=A_{12};\ m'_{21}=A_{12}\beta_1+\frac{\beta_1A_{12}+A_{11}}{3},\\
&m'_{12}=A_{22};\ m'_{22}=A_{22}\beta_1+\frac{\beta_1A_{22}+A_{21}}{3},
\end{aligned}\right.$$

où, l'on a d'après les formules (16) de l'article 2:

$$(4)\qquad\beta_1=-\frac{p_1}{2}\,;\quad\beta_2=\frac{1}{2!2^2}(3p_1{}^2-4p_2).$$

Calculons les expressions

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}
&c_{11}A_{11}+c_{12}A_{21}\,;\quad c_{21}A_{11}+c_{22}A_{21}\,,\\
&c_{11}A_{12}+c_{12}A_{22}\,;\quad c_{21}A_{12}+c_{22}A_{22}\,,
\end{aligned}\right.$$

qui entrent dans le numérateur (1); on aura, en se servant des formules (10) et de l'article (3):

$$\frac{p_{12}}{2}=\frac{p_2}{2.3}=\begin{vmatrix}\eta_{11}&\eta_{21}\\ m'_{11}&m'_{21}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\eta_{12}&\eta_{22}\\ m'_{12}&m'_{22}\end{vmatrix},$$

les valeurs

$$\left.\begin{aligned}
&c_{11}A_{1\gamma}+c_{12}A_{2\gamma}=-1.3.\frac{2\omega}{|a_{\alpha\beta}|}\left[A_{1\gamma}\begin{vmatrix}\eta_{11}&\eta_{21}\\ m'_{12}&m'_{22}\end{vmatrix}-A_{2\gamma}\begin{vmatrix}\eta_{11}&\eta_{21}\\ m'_{11}&m'_{21}\end{vmatrix}+\frac{p_{12}A_{2\gamma}}{2}\right],\\
&c_{21}A_{1\gamma}+c_{22}A_{2\gamma}=-1.3.\frac{2\omega}{|a_{\alpha\beta}|}\left[A_{1\gamma}\begin{vmatrix}\eta_{12}&\eta_{22}\\ m'_{12}&m'_{22}\end{vmatrix}-A_{2\gamma}\begin{vmatrix}\eta_{12}&\eta_{22}\\ m'_{11}&m'_{21}\end{vmatrix}-\frac{p_{12}A_{1\gamma}}{2}\right],
\end{aligned}\right\}(\gamma=1,2)$$

qui se transforment de suite en les suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
&c_{11}A_{1\gamma}+c_{12}A_{2\gamma}=1.3\ \frac{2\omega}{|a_{\alpha\beta}|}\left(\begin{vmatrix}0&A_{1\gamma}&A_{2\gamma}\\ \eta_{11}&m'_{11}&m'_{12}\\ \eta_{21}&m'_{21}&m'_{22}\end{vmatrix}-\frac{p_{12}\ \ {}_{2\gamma}}{2}\right),\\
&c_{21}A_{1\gamma}+c_{22}A_{2\gamma}=1.3.\frac{2\omega}{|a_{\alpha\beta}|}\left(\begin{vmatrix}0&A_{1\gamma}&A_{2\gamma}\\ \eta_{12}&m'_{11}&m'_{12}\\ \eta_{22}&m'_{21}&m'_{22}\end{vmatrix}+\frac{p_{12}A_{1\gamma}}{2}\right).
\end{aligned}\right\}(\gamma=1,2)$$

Mais les déterminants, qui entrent dans ces dernières formules, peuvent être calculés à l'aide des expressions (3); on a en effet successivement

$$\begin{vmatrix}0&A_{11}&A_{21}\\ \eta_{11}&m'_{11}&m'_{12}\\ \eta_{21}&m'_{21}&m'_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&A_{11}&A_{21}\\ \eta_{11}&A_{12}&A_{22}\\ \eta_{21}-\frac{4}{3}\beta_1\eta_{11}&0&0\end{vmatrix}=\left(\eta_{21}-\frac{4}{3}\beta_1\eta_{11}\right)|A_{\alpha\beta}|,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & A_{12} & A_{22} \\ \eta_{11} & m'_{11} & m'_{12} \\ \eta_{21} & m'_{21} & m'_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & A_{12} & A_{22} \\ \eta_{11} & A_{12} & A_{22} \\ \eta_{21} & \frac{4}{3}\beta_1 A_{12} + \frac{A_{11}}{3} & \frac{4}{3}\beta_1 A_{22} + \frac{A_{21}}{3} \end{vmatrix} = \frac{\eta_{11}}{3} \cdot |A_{\alpha\beta}| ,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & A_{11} & A_{21} \\ \eta_{12} & m'_{11} & m'_{12} \\ \eta_{22} & m'_{21} & m''_{22} \end{vmatrix} = \left(\eta_{22} - \frac{4}{3}\beta_1 \eta_{12}\right) \cdot |A_{\alpha\beta}| ; \begin{vmatrix} 0 & A_{12} & A_{22} \\ \eta_{12} & m'_{11} & m'_{12} \\ \eta_{22} & m'_{21} & m'_{22} \end{vmatrix} = \frac{\eta_{12}}{3} \cdot |A_{\alpha\beta}| ,$$

$$|A_{\alpha\beta}| = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = \frac{|a_{\alpha\beta}|}{2^2.\omega} .$$

Si nous prenons

$$|a_{\alpha\beta}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 ,$$

on aura pour les expressions (6) les valeurs:

$$(7) \quad \begin{cases} c_{11} A_{11} + c_{12} A_{21} = \frac{1}{2}(3\eta_{21} + 2p_1\eta_{11} + p_2\omega_{21}) , \\ c_{11} A_{12} + c_{12} A_{22} = \frac{1}{2}(\eta_{11} - p_2\omega_{11}) , \\ c_{21} A_{11} + c_{22} A_{21} = \frac{1}{2}(3\eta_{22} + 2p_1\eta_{12} + p_2\omega_{22}) , \\ c_{21} A_{12} + c_{22} A_{22} = \frac{1}{2}(\eta_{12} - p_2\omega_{12}). \end{cases}$$

De plus on obtient:

$$(8) \quad \begin{cases} c_{13} = -\frac{1}{2}(2p_1\omega_{11} + \omega_{21}); \quad c_{14} = -\frac{3\omega_{11}}{2} ; \quad c_{23} = -\frac{1}{2}(2p_1\omega_{12} + \omega_{22}); \\ c_{24} = -\frac{3\omega_{12}}{2} , \end{cases}$$

donc l'intégrale (1) prend la forme:

$$(9) \quad \begin{cases} I_\alpha = \int \frac{3\eta_{2\alpha} + 2p_1\eta_{1\alpha} + p_2\omega_{2\alpha} + (\eta_{1\alpha} - p_2\omega_{1\alpha})x - (2p_1\omega_{1\alpha} + \omega_{2\alpha})x^2 - 3\omega_{1\alpha}x^3}{2\sqrt{R(x)}} dx; \\ (\alpha = 1, 2). \end{cases}$$

C'est la forme finale des intégrales canoniques de seconde espèce dans le cas du genre $\varrho = 2$, elle correspond aux formules de M. H. Weber,

publiées dans le tome 82 du „Journal für reine und angewandte Mathematik". La forme des expressions de M. H. Weber s'applique au système des formules de Rosenhain, elle ne présente pas la symétrie des formules (9), qui nous a permis de trouver une loi intéressante pour la formation des différents coefficients du numérateur.

Considérons en effet trois suites:

$$(10) \quad \begin{cases} 0,\ \eta_{2\alpha},\ \eta_{1\alpha},\ \omega_{2\alpha},\ \omega_{1\alpha},\ 0,\ 0,\ 0, \\ 0,\ 1,\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5,\ 0, \ldots \Longrightarrow \\ \Longleftarrow \ldots, 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0, -1, -2, -3, \ldots, \end{cases}$$

dont la première et la seconde en déhors des périodes et des coefficients du polynôme

$$R(x) = x^5 + p_1x^4 + p_2x^3 + p_3x^2 + p_4x + p_5$$

sont remplies de zéros et la troisième contient la série des nombres positifs et négatifs, et imprimons un mouvement de translation à la deuxième série à droite, à la troisième série à gauche, en ayant soin chaque fois d'effecteur l'addition des produits des termes situés les uns au dessus des autres. On aura alors les expressions

$$(11) \quad \begin{cases} a_{0\alpha} = 3\eta_{2\alpha} + 2p_1\eta_{1\alpha} + p_2\omega_{2\alpha} , \\ a_{1\alpha} = \eta_{1\alpha} - p_2\omega_{1\alpha} , \\ a_{2\alpha} = -\omega_{2\alpha} - 2p_1\omega_{1\alpha} , \\ a_{3\alpha} = -3\omega_{1\alpha} , \end{cases} \qquad (\alpha = 1, 2)$$

qui, portées dans l'intégrale

$$(12) \quad \int \frac{a_{0\alpha} + a_{1\alpha}x + a_{2\alpha}x^2 + a_{3\alpha}x^3}{2\sqrt{R(x)}} dx; \quad (\alpha = 1, 2),$$

réproduisent les intégrales (9).

Nous rétrouverons la même loi dans le cas des genres supérieurs.

6. Cas du genre $\varrho = 3$.

Dans ce cas nous aurons à calculer les coefficients de l'expression

$$c_{\alpha 1} w_1 + c_{\alpha 2} w_2 + c_{\alpha 3} w_3 + c_{\alpha 4} e_1 + c_{\alpha 5} e_2 + c_{\alpha 6} e_3 ,$$

c'est à dire les coefficients du numérateur sous l'intégrale

$$(1)\qquad I_\alpha=\int\frac{c_{\alpha1}(A_{11}+A_{12}x+A_{13}x^2)+c_{\alpha2}(A_{21}+A_{22}x+A_{23}x^2)+c_{\alpha3}(A_{31}+A_{32}x+A_{33}x^2)+c_{\alpha4}x^3+c_{\alpha5}x^4+c_{\alpha6}x^5}{\sqrt{R(x)}}\,dx$$

où

$$(2)\qquad R(x)=x^7+p_1x^6+p_2x^5+p_3x^4+p_4x^3+p_5x^2+p_6x+p_7.$$

On aura donc à évaluer les sommes

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} c_{\alpha1}A_{11}+c_{\alpha2}A_{21}+c_{\alpha3}A_{31}, \\ c_{\alpha1}A_{12}+c_{\alpha2}A_{22}+c_{\alpha3}A_{32}, \\ c_{\alpha1}A_{13}+c_{\alpha2}A_{23}+c_{\alpha3}A_{33}, \end{array}\right. \qquad (\alpha=1,2,3)$$

et les coefficients

$$(4)\qquad c_{\alpha4},\; c_{\alpha5},\; c_{\alpha6};\quad (\alpha=1,2,3).$$

En se reportant aux formules données au numéro (4) on arrive aux expressions:

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l}
c_{11}A_{1\gamma}+c_{12}A_{2\gamma}+c_{13}A_{3\gamma}=-1.3.5.\dfrac{2^2\omega}{|a_{\alpha\beta}|}\left\{\begin{vmatrix}\eta_{11}&\eta_{21}&\eta_{31}\\ m'_{12}&m'_{22}&m'_{32}\\ m'_{13}&m'_{23}&m'_{33}\end{vmatrix}.A_{1\gamma}\right.\\
\qquad\left.+\begin{vmatrix}\eta_{12}&\eta_{22}&\eta_{32}\\ m'_{12}&m'_{22}&m'_{32}\\ m'_{13}&m'_{23}&m'_{33}\end{vmatrix}.A_{2\gamma}+\begin{vmatrix}\eta_{13}&\eta_{23}&\eta_{33}\\ m'_{12}&m'_{22}&m'_{32}\\ m'_{13}&m'_{23}&m'_{33}\end{vmatrix}.A_{3\gamma}\right\},\\
c_{21}A_{1\gamma}+c_{22}A_{2\gamma}+c_{23}A_{3\gamma}=1.3.5.\dfrac{2^2\omega}{|a_{\alpha\beta}|}\left\{\begin{vmatrix}\eta_{11}&\eta_{21}&\eta_{31}\\ m'_{11}&m'_{21}&m'_{31}\\ m'_{13}&m'_{23}&m'_{33}\end{vmatrix}.A_{1\gamma}\right.\\
\qquad\left.+\begin{vmatrix}\eta_{12}&\eta_{22}&\eta_{32}\\ m'_{11}&m'_{21}&m'_{31}\\ m'_{13}&m'_{23}&m'_{33}\end{vmatrix}.A_{2\gamma}+\begin{vmatrix}\eta_{13}&\eta_{23}&\eta_{33}\\ m'_{11}&m'_{21}&m'_{31}\\ m'_{13}&m'_{23}&m'_{33}\end{vmatrix}.A_{3\gamma}\right\},\\
c_{31}A_{1\gamma}+c_{32}A_{2\gamma}+c_{33}A_{3\gamma}=-1.3.5.\dfrac{2^2\omega}{|a_{\alpha\beta}|}\left\{\begin{vmatrix}\eta_{11}&\eta_{21}&\eta_{31}\\ m'_{11}&m'_{21}&m'_{31}\\ m'_{12}&m'_{22}&m'_{32}\end{vmatrix}.A_{1\gamma}\right.\\
\qquad\left.+\begin{vmatrix}\eta_{12}&\eta_{22}&\eta_{32}\\ m'_{11}&m'_{21}&m'_{31}\\ m'_{12}&m'_{22}&m'_{32}\end{vmatrix}.A_{2\gamma}+\begin{vmatrix}\eta_{13}&\eta_{23}&\eta_{33}\\ m'_{11}&m'_{21}&m'_{31}\\ m'_{12}&m'_{22}&m'_{32}\end{vmatrix}.A_{3\gamma}\right\},
\end{array}\right.$$

qui de nouveau peuvent être transformées à l'aide des relations bilinéaires (10) et (12) au numéro (3):

$$(6)\qquad \left|\begin{array}{l}
p'_{12}=-p'_{21}=\dfrac{p_{12}}{2}=\sum_{k=1}^{k=3}(\eta_{1k}m'_{2k}-\eta_{2k}m'_{1k})=\dfrac{p_2}{2.3};\; p'_{13}=-p_{31}=\dfrac{p_{13}}{2}=\sum_{k=1}^{k=3}(\eta_{1k}m'_{3k}-\eta_{3k}m'_{1k})\\
=-\dfrac{2}{3.5}p_1p_2+\dfrac{p_3}{5};\; p'_{23}=-p'_{32}=\dfrac{p_{23}}{2}=\sum_{k=1}^{k=3}(\eta_{2k}m'_{3k}-\eta_{3k}m'_{2k})=\dfrac{p_2{}^2}{2.5}-\dfrac{2}{3.5}p_1p_3+\dfrac{p_4}{2.3.5}
\end{array}\right.$$

en les autres de la manière suivante.

On aura d'abord

$$A_{2\gamma}\begin{vmatrix}\eta_{12}&\eta_{22}&\eta_{32}\\ m'_{12}&m'_{22}&m'_{32}\\ m'_{13}&m'_{23}&m'_{33}\end{vmatrix}+A_{3\gamma}\begin{vmatrix}\eta_{13}&\eta_{23}&\eta_{33}\\ m'_{12}&m'_{22}&m'_{32}\\ m'_{13}&m'_{23}&m'_{33}\end{vmatrix}=A_{2\gamma}\Bigg(m'_{13}p'_{23}$$

$$-m'_{13}\begin{vmatrix}\eta_{21}&\eta_{31}\\ m'_{21}&m'_{31}\end{vmatrix}-m'_{13}\begin{vmatrix}\eta_{23}&\eta_{33}\\ m'_{23}&m'_{33}\end{vmatrix}-m'_{23}p'_{13}+m'_{23}\begin{vmatrix}\eta_{11}&\eta_{31}\\ m'_{11}&m'_{31}\end{vmatrix}$$

$$+m'_{23}\begin{vmatrix}\eta_{13}&\eta_{33}\\ m'_{13}&m'_{33}\end{vmatrix}+m'_{33}p'_{12}-m'_{33}\begin{vmatrix}\eta_{11}&\eta_{21}\\ m'_{11}&m'_{21}\end{vmatrix}-m'_{33}\begin{vmatrix}\eta_{13}&\eta_{23}\\ m'_{13}&m'_{23}\end{vmatrix}\Bigg)$$

$$+A_{3\gamma}\Bigg(-m'_{12}p'_{23}+m'_{12}\begin{vmatrix}\eta_{21}&\eta_{31}\\ m'_{21}&m'_{31}\end{vmatrix}+m'_{12}\begin{vmatrix}\eta_{22}&\eta_{32}\\ m'_{22}&m'_{32}\end{vmatrix}+m'_{22}p'_{13}$$

$$-m'_{22}\begin{vmatrix}\eta_{11}&\eta_{31}\\ m'_{11}&m'_{31}\end{vmatrix}-m'_{22}\begin{vmatrix}\eta_{12}&\eta_{32}\\ m'_{12}&m'_{32}\end{vmatrix}-m'_{32}p'_{12}+m'_{32}\begin{vmatrix}\eta_{11}&\eta_{21}\\ m'_{11}&m'_{21}\end{vmatrix}$$

$$+m'_{32}\begin{vmatrix}\eta_{12}&\eta_{22}\\ m'_{12}&m'_{22}\end{vmatrix}\Bigg)$$

ou encore

$$A_{2\gamma}\begin{vmatrix}\eta_{12}&\eta_{22}&\eta_{32}\\ m'_{12}&m'_{22}&m'_{32}\\ m'_{13}&m'_{23}&m'_{33}\end{vmatrix}+A_{3\gamma}\begin{vmatrix}\eta_{13}&\eta_{23}&\eta_{33}\\ m'_{12}&m'_{22}&m'_{32}\\ m'_{13}&m'_{23}&m'_{33}\end{vmatrix}=p'_{23}(m'_{13}A_{2\gamma}-m'_{12}A_{3\gamma})$$

$$+p'_{31}(m'_{23}A_{2\gamma}-m'_{22}A_{3\gamma})+p'_{12}(m'_{33}A_{2\gamma}-m'_{32}A_{3\gamma})-A_{2\gamma}\begin{vmatrix}\eta_{11}&m'_{11}&m'_{13}\\ \eta_{21}&m'_{21}&m'_{23}\\ \eta_{31}&m'_{31}&m'_{33}\end{vmatrix}+A_{3\gamma}\begin{vmatrix}\eta_{11}&m'_{11}&m'_{12}\\ \eta_{21}&m'_{21}&m'_{22}\\ \eta_{31}&m'_{31}&m'_{32}\end{vmatrix},$$

donc

$$
(7)\left\{\begin{aligned}
&A_{1\gamma}\begin{vmatrix} \eta_{11} & \eta_{21} & \eta_{31} \\ m'_{12} & m'_{22} & m'_{32} \\ m'_{13} & m'_{23} & m'_{33} \end{vmatrix} + A_{2\gamma}\begin{vmatrix} \eta_{12} & \eta_{22} & \eta_{32} \\ m'_{12} & m'_{22} & m'_{32} \\ m'_{13} & m'_{23} & m'_{33} \end{vmatrix} + A_{3\gamma}\begin{vmatrix} \eta_{13} & \eta_{23} & \eta_{33} \\ m'_{12} & m'_{22} & m'_{32} \\ m'_{13} & m'_{23} & m'_{33} \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 0 & A_{1\gamma} & A_{2\gamma} & A_{3\gamma} \\ \eta_{11} & m'_{11} & m'_{12} & m'_{13} \\ \eta_{21} & m'_{21} & m'_{22} & m'_{23} \\ \eta_{31} & m'_{31} & m'_{32} & m'_{33} \end{vmatrix} + p'_{23}(m'_{13}A_{2\gamma} - m'_{12}A_{3\gamma}) + p'_{31}(m'_{23}A_{2\gamma} \\
&\qquad - m'_{22}A_{3\gamma}) + p'_{12}(m'_{33}A_{2\gamma} - m'_{32}A_{3\gamma}).
\end{aligned}\right.
$$

Mais d'après l'équation (12) de l'article (4)

$$
(8)\left\{\begin{aligned}
m'_{1\alpha} &= A_{\alpha 3}, \\
m'_{2\alpha} &= A_{\alpha 3}\beta_1 + \frac{\beta_1 A_{\alpha 3} + A_{\alpha 2}}{3}, \\
m'_{3\alpha} &= A_{\alpha 3}\beta_2 + \frac{\beta_1^2 A_{\alpha 3} + \beta_1 A_{\alpha 2}}{3} + \frac{\beta_2 A_{\alpha 3} + \beta_1 A_{\alpha 2} + A_{\alpha 1}}{5}; \quad (\alpha = 1, 2, 3)
\end{aligned}\right.
$$

donc

$$
\begin{vmatrix} 0 & A_{1\gamma} & A_{2\gamma} & A_{3\gamma} \\ \eta_{11} & m'_{11} & m'_{12} & m'_{13} \\ \eta_{21} & m'_{21} & m'_{22} & m'_{23} \\ \eta_{31} & m'_{31} & m'_{32} & m'_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{1.3.5}\begin{vmatrix} 0 & A_{1\gamma} & A_{2\gamma} & A_{3\gamma} \\ \eta_{11} & A_{13} & A_{23} & A_{33} \\ 3\eta_{21} - 4\beta_1\eta_{11} & A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ 5\eta_{31} - 8\beta_1\eta_{21} - (6\beta_2 - 9\beta_1^2)\eta_{11} & A_{11} & A_{21} & A_{31} \end{vmatrix},
$$

et, en substituant les valeurs de β_1 et β_2 des équations (16) au numéro (2) on arrive à la formule:

$$
(9)\quad \begin{vmatrix} 0 & A_{1\gamma} & A_{2\gamma} & A_{3\gamma} \\ \eta_{11} & m'_{11} & m'_{12} & m'_{13} \\ \eta_{21} & m'_{21} & m'_{22} & m'_{23} \\ \eta_{31} & m'_{31} & m'_{32} & m'_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{1.3.5}\begin{vmatrix} 0 & A_{1\gamma} & A_{2\gamma} & A_{3\gamma} \\ \eta_{11} & A_{13} & A_{23} & A_{33} \\ 3\eta_{21} + 2p_1\eta_{11} & A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ 5\eta_{31} + 4p_1\eta_{21} + 3p_2\eta_{11} & A_{11} & A_{21} & A_{31} \end{vmatrix},
$$

On pourra donc écrire en utilisant les formules (6) et (8):

$$
(10)\left\{\begin{aligned}
&c_{11}A_{1\gamma} + c_{12}A_{2\gamma} + c_{13}A_{3\gamma} = \frac{2^2\omega}{|a_{\alpha\beta}|}\begin{vmatrix} 0 & A_{1\gamma} & A_{2\gamma} & A_{3\gamma} \\ \eta_{11} & A_{13} & A_{23} & A_{33} \\ 3\eta_{21} + 2p_1\eta_{11} & A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ 5\eta_{31} + 4p_1\eta_{21} + 3p_2\eta_{11} & A_{11} & A_{21} & A_{31} \end{vmatrix} \\
&\quad + \frac{2\omega}{|a_{\alpha\beta}|}\Big\{-p_2(A_{2\gamma}A_{31} - A_{21}A_{3\gamma}) + 2p_3(A_{32}A_{2\gamma} - A_{3\gamma}A_{22}) - p_4(A_{2\gamma}A_{33} \\
&\qquad - A_{3\gamma}A_{23})\Big\}
\end{aligned}\right.
$$

d'où, à cause de $|A_{\alpha\beta}| = \dfrac{|a_{\alpha\beta}|}{2^3\omega}$, on obtient successivement

$$
(11)\left\{\begin{aligned}
&c_{11}A_{11} + c_{12}A_{21} + c_{13}A_{31} = \frac{1}{2}(5\eta_{31} + 4p_1\eta_{21} + 3p_2\eta_{11}) + \frac{2\omega}{|a_{\alpha\beta}|}\Big\{2p_3(A_{32}A_{21} \\
&\qquad - A_{31}A_{22}) - p_4(A_{21}A_{33} - A_{31}A_{23})\Big\}, \\
&c_{11}A_{12} + c_{12}A_{22} + c_{13}A_{32} = \frac{1}{2}(3\eta_{21} + 2p_1\eta_{11}) - \frac{2\omega}{|a_{\alpha\beta}|}\Big\{p_2(A_{22}A_{31} - A_{21}A_{32}) \\
&\qquad + p_4(A_{22}A_{33} - A_{32}A_{23})\Big\}, \\
&c_{11}A_{13} + c_{12}A_{23} + c_{13}A_{33} = \frac{\eta_{11}}{2} + \frac{2\omega}{|a_{\alpha\beta}|}\Big\{2p_3(A_{32}A_{23} - A_{33}A_{22}) - p_2(A_{23}A_{31} \\
&\qquad - A_{21}A_{33})\Big\}.
\end{aligned}\right.
$$

On ne restreint pas la généralité en prenant $a_{\alpha\beta} = 0$, $a_{\alpha\sigma} = 1$, donc $|a_{\alpha\alpha}| = 1$, $A_{\alpha\beta} = \dfrac{(\omega)_{\beta\alpha}}{2\omega}$, on obtient alors:

$$
(12)\left\{\begin{aligned}
&A_{32}A_{21} - A_{22}A_{31} = \frac{\omega_{31}}{4\omega}; \quad A_{22}A_{33} - A_{32}A_{23} = \frac{\omega_{11}}{4\omega}; \quad A_{21}A_{12} - A_{22}A_{11} = -\frac{\omega_{33}}{4\omega}, \\
&A_{21}A_{33} - A_{31}A_{23} = -\frac{\omega_{21}}{4\omega}; \quad A_{13}A_{32} - A_{12}A_{33} = \frac{\omega_{12}}{4\omega}; \quad A_{13}A_{22} - A_{23}A_{12} = -\frac{\omega_{13}}{4\omega}, \\
&A_{13}A_{31} - A_{33}A_{11} = -\frac{\omega_{22}}{4\omega}; \quad A_{21}A_{13} - A_{23}A_{11} = \frac{\omega_{23}}{4\omega}; \quad A_{12}A_{31} - A_{11}A_{32} = \frac{\omega_{32}}{4\omega},
\end{aligned}\right.
$$

donc, en substituant ces expressions (12) dans les équations (11), on aura finalement:

$$
(13)\quad \left\{\begin{aligned}
&c_{11}A_{11}+c_{12}A_{21}+c_{13}A_{31}=\frac{1}{2}\,(5\eta_{31}+4p_1\eta_{21}+3p_2\eta_{11}+2p_3\omega_{31}+p_4\omega_{21})\,,\\
&c_{11}A_{12}+c_{12}A_{22}+c_{13}A_{32}=\frac{1}{2}\,(3\eta_{21}+2p_1\eta_{11}+p_2\omega_{31}-p_4\omega_{11})\,,\\
&c_{11}A_{13}+c_{12}A_{23}+c_{13}A_{33}=\frac{1}{2}\,(\eta_{11}-p_2\omega_{21}-2p_3\omega_{11})\,,
\end{aligned}\right.
$$

On aura de plus d'après la formule (15) de l'article (4):

$$
c_{14}=1.3.5.\frac{2\omega}{|a_{\alpha\beta}|}\begin{vmatrix}
\frac{4}{3}\beta_1A_{23}+\frac{A_{22}}{3}, & \left(\frac{6}{5}\beta_2+\frac{\beta_1^2}{3}\right)A_{23}+\frac{8}{15}\beta_1A_{22}+\frac{A_{21}}{5}\\
\frac{4}{3}\beta_1A_{33}+\frac{A_{32}}{3}, & \left(\frac{6}{5}\beta_2+\frac{\beta_1^2}{3}\right)A_{33}+\frac{8}{15}\beta_1A_{32}+\frac{A_{31}}{5}
\end{vmatrix},
$$

$$
c_{15}=-1.3.5.\frac{2\omega}{|a_{\alpha\beta}|}\begin{vmatrix}
A_{23}, & \left(\frac{6}{5}\beta_2+\frac{\beta_1^2}{3}\right)A_{23}+\frac{8}{15}\beta_1A_{22}+\frac{A_{21}}{5}\\
A_{33}, & \left(\frac{6}{5}\beta_2+\frac{\beta_1^2}{3}\right)A_{33}+\frac{8}{15}\beta_1A_{32}+\frac{A_{31}}{5}
\end{vmatrix},
$$

$$
c_{16}=1.3.5.\frac{2\omega}{|a_{\alpha\beta}|}\begin{vmatrix}
A_{23}, & \frac{4}{3}\beta_1A_{23}+\frac{A_{22}}{3}\\
A_{33}, & \frac{4}{3}\beta_1A_{33}+\frac{A_{32}}{3}
\end{vmatrix},
$$

d'où, en faisant l'usage des formules (12) et en substituant $|a_{\alpha\beta}|=1$, on arrive aux expressions

$$
\begin{aligned}
c_{14}&=\left(3\beta_2-\frac{9}{2}\beta_1^2\right)\omega_{11}+2\beta_1\omega_{21}-\frac{\omega_{31}}{2}\,,\\
c_{15}&=4\beta_1\omega_{11}-\frac{3}{2}\,\omega_{21}\,,\\
c_{16}&=-\frac{5}{2}\,\omega_{11}\,,
\end{aligned}
$$

qui, après la substitution des valeurs pour les coefficients β_1, β_2, donnent finalement:

$$
(14)\quad \left\{\begin{aligned}
c_{14}&=-\frac{1}{2}\,(\omega_{31}+2p_1\omega_{21}+3p_2\omega_{11})\,,\\
c_{15}&=-\frac{1}{2}\,(3\omega_{21}+4p_1\omega_{11})\,,\\
c_{16}&=-\frac{5}{2}\,\omega_{11}.
\end{aligned}\right.
$$

On voit donc que l'intégrale (1) pour $\alpha=1$ se présente sous la forme

$$
I_1=\int\frac{a_{01}+a_{11}x+a_{21}x^2+a_{31}x^3+a_{41}x^4+a_{51}x^5}{2\sqrt{R(x)}}\,dx\,,
$$

où les coefficients $a_{01},\ldots,a_{51}$ ont les valeurs données par les formules (13) et (14).

En écrivant trois suites

$$
(15)\quad \left\{\begin{array}{l}
\qquad\; 0,\ \eta_{3\alpha},\ \eta_{2\alpha},\ \eta_{1\alpha},\ \omega_{3\alpha},\ \omega_{2\alpha},\ \omega_{1\alpha},\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ldots.\\
\qquad\; 0,\ \ 1,\ \ p_1,\ p_2,\ \ p_3,\ \ p_4,\ \ p_5,\ \ p_6,\ p_7,\ \ 0,\ldots.\ \Longrightarrow\\
\Longleftarrow\ 6,\ \ 5,\ \ \ 4,\ \ \ 3,\ \ \ 2,\ \ \ 1,\ \ 0,\ -1,-2,-3,\ldots
\end{array}\right.
$$

et, en procédant de la même manière comme dans l'article précédent, on arrive aux expressions

$$
(16)\quad \left\{\begin{aligned}
a_{0\alpha}&=5\eta_{3\alpha}+4p_1\eta_{2\alpha}+3p_2\eta_{1\alpha}+2p_3\omega_{3\alpha}+p_4\omega_{2\alpha}\,,\\
a_{1\alpha}&=3\eta_{2\alpha}+2p_1\eta_{1\alpha}+p_2\omega_{3\alpha}-p_4\omega_{1\alpha}\,,\\
a_{2\alpha}&=\eta_{1\alpha}-p_2\omega_{2\alpha}-2p_3\omega_{1\alpha}\,,\\
a_{3\alpha}&=-\omega_{3\alpha}-2p_1\omega_{2\alpha}-3p_2\omega_{1\alpha}\,,\\
a_{4\alpha}&=-3\omega_{2\alpha}-4p_1\omega_{1\alpha}\,,\\
a_{5\alpha}&=-5\omega_{1\alpha}\,,
\end{aligned}\right.\qquad (\alpha=1,2,3)
$$

qui dans le cas de $\alpha=1$ sont identiques avec les expressions (13) et (14). Par un procédé tout à fait analogue on est conduit à vérifier le même résultat dans les autres cas $\alpha=2$ et $\alpha=3$, on pourra donc énoncer le théorème suivant:

Théorème: L'intégrale de seconde espèce

$$
(17)\quad I_\alpha=\int\frac{a_{0\alpha}+a_{1\alpha}x+a_{2\alpha}x^2+a_{3\alpha}x^3+a_{4\alpha}x^4+a_{5\alpha}x^5}{2\sqrt{R(x)}}\,dx;\ (\alpha=1,2,3)\,,
$$

où les coefficients ont les valeurs données par les équations (16) donne successivement pour $\alpha=1,2,3$, trois intégrales canoniques, dont les périodes présente le tableau

$$
\begin{array}{cccccc}
0, & 0, & 0, & -2\pi i, & 0, & 0;\\
0, & 0, & 0, & 0, & -2\pi i, & 0,\\
0, & 0, & 0, & 0, & 0, & -2\pi i.
\end{array}
$$

C'est la généralisation du résultat obtenu à la fin de l'article précédent. Nous retrouvons donc la même loi de formation des coefficients dans le cas $\varrho=3$ que nous avons établie dans le cas du genre $\varrho=2$. En employant une méthode de Vandermonde pour le calcul des déterminants on peut pousser les calculs plus loin et en particulier pour $\varrho=4$ on pourra confirmer la même loi de formation. C'est ce que nous voulons démontrer dans ce cas particulier en donnant une courte esquisse de la méthode à suivre.

7. Cas du genre $\varrho=4$.

Posons comme auparavant:

$$(1)\qquad I_\alpha=\int\frac{\sum\limits_{\gamma=1}^{\gamma=4}(c_{\alpha1}A_{1\gamma}+c_{\alpha2}A_{2\gamma}+c_{\alpha3}A_{3\gamma}+c_{\alpha4}A_{4\gamma})x^{\gamma-1}+c_{\alpha5}x^4+c_{\alpha6}x^5+c_{\alpha7}x^6+c_{\alpha8}x^7}{\sqrt{R(x)}}\,dx;\ (\alpha=1,2,3,4)$$

où $R(x)$ désigne le polynôme

$$(2)\qquad R(x)=x^9+p_1x^8+\ldots+p_8x+p_9.$$

On aura d'abord d'après la formule (11) de l'article (4):

$$(3)\qquad c_{11}A_{1\gamma}+c_{12}A_{2\gamma}+c_{13}A_{3\gamma}+c_{14}A_{4\gamma}=1.3.5.7.\frac{2^3\omega}{|a_{\alpha\beta}|}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=4}A_{\alpha\gamma}\begin{vmatrix}\eta_{1\alpha}&\eta_{2\alpha}&\eta_{3\alpha}&\eta_{4\alpha}\\ m'_{12}&m'_{22}&m'_{32}&m'_{42}\\ m'_{13}&m'_{23}&m'_{33}&m'_{43}\\ m'_{14}&m'_{24}&m'_{34}&m'_{44}\end{vmatrix};\ (\gamma=1,2,3,4)$$

et de plus

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}
p'_{12}&=\sum_{\alpha=1}^{\alpha=4}\begin{vmatrix}\eta_{1\alpha}&\eta_{2\alpha}\\ m'_{1\alpha}&m'_{2\alpha}\end{vmatrix}=\frac{p_2}{2.3}=-p'_{21},\\
p'_{13}&=\sum_{\alpha=1}^{\alpha=4}\begin{vmatrix}\eta_{1\alpha}&\eta_{3\alpha}\\ m'_{1\alpha}&m'_{3\alpha}\end{vmatrix}=-\frac{2}{3.5}p_1p_2+\frac{p_3}{5}=-p'_{31},\\
p'_{14}&=\sum_{\alpha=1}^{\alpha=4}\begin{vmatrix}\eta_{1\alpha}&\eta_{4\alpha}\\ m'_{1\alpha}&m'_{4\alpha}\end{vmatrix}=\frac{4}{5.7}p_1^2p_2-\frac{5}{2.3.7}p_2^2-\frac{6}{5.7}p_1p_3+\frac{3}{2.7}p_4=-p'_{41},\\
p'_{23}&=\sum_{\alpha=1}^{\alpha=4}\begin{vmatrix}\eta_{2\alpha}&\eta_{3\alpha}\\ m'_{2\alpha}&m'_{3\alpha}\end{vmatrix}=\frac{p_2^2}{2.5}-\frac{2}{3.5}p_1p_3+\frac{p_4}{2.3.5}=-p'_{32},\\
p'_{24}&=\sum_{\alpha=1}^{\alpha=4}\begin{vmatrix}\eta_{2\alpha}&\eta_{4\alpha}\\ m'_{2\alpha}&m'_{4\alpha}\end{vmatrix}=-\frac{3}{5.7}p_1p_2^2+\frac{4}{5.7}p_1^2p_3+\frac{2}{3.7}p_2p_3-\frac{6}{5.7}p_1p_4+\frac{1}{3.7}p_5=-p'_{42},\\
p'_{34}&=\sum_{\alpha=1}^{\alpha=4}\begin{vmatrix}\eta_{3\alpha}&\eta_{4\alpha}\\ m'_{3\alpha}&m'_{4\alpha}\end{vmatrix}=\frac{4}{5.7}p_3^2+\frac{p_2^3}{2.7}+\frac{4p_1^2p_4}{5.7}-\frac{6}{5.7}p_1p_2p_3-\frac{4}{3.5.7}p_1p_5-\frac{11}{3.5.7}p_2p_4+\frac{p_6}{2.5.7}=-p'_{43}
\end{aligned}\right.$$

donc, en employant la méthode de Vandermonde[1]) pour la décomposition des déterminants, on pourra écrire:

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}\eta_{12}&\eta_{22}&\eta_{32}&\eta_{42}\\ m'_{12}&m'_{22}&m'_{32}&m'_{42}\\ m'_{13}&m'_{23}&m'_{33}&m'_{43}\\ m'_{14}&m'_{24}&m'_{34}&m'_{44}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\eta_{12}&\eta_{22}\\ m'_{12}&m'_{22}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}m'_{33}&m'_{43}\\ m'_{34}&m'_{44}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\eta_{12}&\eta_{32}\\ m'_{12}&m'_{32}\end{vmatrix}\cdot\\
&\cdot\begin{vmatrix}m'_{23}&m'_{43}\\ m'_{24}&m'_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\eta_{12}&\eta_{42}\\ m'_{12}&m'_{42}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}m'_{23}&m'_{33}\\ m'_{24}&m'_{34}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\eta_{22}&\eta_{32}\\ m'_{22}&m'_{32}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}m'_{13}&m'_{43}\\ m'_{14}&m'_{44}\end{vmatrix}\\
&-\begin{vmatrix}\eta_{22}&\eta_{42}\\ m'_{22}&m'_{42}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}m'_{13}&m'_{33}\\ m'_{14}&m'_{34}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\eta_{32}&\eta_{42}\\ m'_{32}&m'_{42}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}m'_{13}&m'_{23}\\ m'_{14}&m'_{24}\end{vmatrix}.
\end{aligned}\right.$$

En se servant des relations (4) on peut transformer cette dernière expression en la suivante:

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}\eta_{12}&\eta_{22}&\eta_{32}&\eta_{42}\\ m'_{12}&m'_{22}&m'_{32}&m'_{42}\\ m'_{13}&m'_{23}&m'_{33}&m'_{43}\\ m'_{14}&m'_{24}&m'_{34}&m'_{44}\end{vmatrix}=p'_{12}\begin{vmatrix}m'_{33}&m'_{43}\\ m'_{34}&m'_{44}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\eta_{11}&\eta_{21}\\ m'_{11}&m'_{21}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}m'_{33}&m'_{43}\\ m'_{34}&m'_{44}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\eta_{13}&\eta_{23}\\ m'_{13}&m'_{23}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}m'_{33}&m'_{43}\\ m'_{34}&m'_{44}\end{vmatrix}\\
&-\begin{vmatrix}\eta_{14}&\eta_{24}\\ m'_{14}&m'_{24}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}m'_{33}&m'_{43}\\ m'_{34}&m'_{44}\end{vmatrix}-\Bigg\{p'_{13}\begin{vmatrix}m'_{23}&m'_{43}\\ m'_{24}&m'_{44}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\eta_{11}&\eta_{31}\\ m'_{11}&m'_{31}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}m'_{23}&m'_{43}\\ m'_{24}&m'_{44}\end{vmatrix}\\
&-\begin{vmatrix}\eta_{13}&\eta_{33}\\ m'_{13}&m'_{33}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}m'_{23}&m'_{43}\\ m'_{24}&m'_{44}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\eta_{14}&\eta_{34}\\ m'_{14}&m'_{34}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}m'_{23}&m'_{43}\\ m'_{24}&m'_{44}\end{vmatrix}\Bigg\}+\Bigg\{p'_{41}\begin{vmatrix}m'_{23}&m'_{33}\\ m'_{24}&m'_{34}\end{vmatrix}\\
&-\begin{vmatrix}\eta_{11}&\eta_{41}\\ m'_{11}&m'_{41}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}m'_{23}&m'_{33}\\ m'_{24}&m'_{34}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\eta_{13}&\eta_{43}\\ m'_{13}&m'_{43}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}m'_{23}&m'_{33}\\ m'_{24}&m'_{34}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\eta_{14}&\eta_{44}\\ m'_{11}&m'_{44}\end{vmatrix}\cdot\\
&\cdot\begin{vmatrix}m'_{23}&m'_{33}\\ m'_{24}&m'_{34}\end{vmatrix}\Bigg\}+\Bigg\{p'_{23}\begin{vmatrix}m'_{13}&m'_{43}\\ m'_{14}&m'_{44}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\eta_{21}&\eta_{31}\\ m'_{21}&m'_{31}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}m'_{13}&m'_{43}\\ m'_{14}&m'_{44}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\eta_{23}&\eta_{33}\\ m'_{23}&m'_{33}\end{vmatrix}\cdot\\
&\cdot\begin{vmatrix}m'_{13}&m'_{43}\\ m'_{14}&m'_{44}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\eta_{24}&\eta_{34}\\ m'_{24}&m'_{34}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}m'_{13}&m'_{43}\\ m'_{14}&m'_{44}\end{vmatrix}\Bigg\}-\Bigg\{p'_{24}\begin{vmatrix}m'_{13}&m'_{33}\\ m'_{14}&m'_{34}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\eta_{21}&\eta_{41}\\ m'_{21}&m'_{41}\end{vmatrix}\cdot\\
&\cdot\begin{vmatrix}m'_{13}&m'_{33}\\ m'_{14}&m'_{34}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\eta_{23}&\eta_{43}\\ m'_{23}&m'_{43}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}m'_{13}&m'_{33}\\ m'_{14}&m'_{34}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\eta_{24}&\eta_{44}\\ m'_{24}&m'_{44}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}m'_{13}&m'_{33}\\ m'_{14}&m'_{34}\end{vmatrix}\Bigg\}\\
&+\Bigg\{p'_{34}\begin{vmatrix}m'_{13}&m'_{23}\\ m'_{14}&m'_{24}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\eta_{31}&\eta_{41}\\ m'_{31}&m'_{41}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}m'_{13}&m'_{23}\\ m'_{14}&m'_{24}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\eta_{33}&\eta_{43}\\ m'_{33}&m'_{43}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}m'_{13}&m'_{23}\\ m'_{14}&m'_{24}\end{vmatrix}\\
&-\begin{vmatrix}\eta_{34}&\eta_{44}\\ m'_{34}&m'_{44}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}m'_{13}&m'_{23}\\ m'_{14}&m'_{24}\end{vmatrix}\Bigg\},
\end{aligned}$$

[1]) voir p. e.: E. Pascal: Die Determinanten, p. 14 et suiv.

donc

$$
(6)\left\{\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \eta_{12} & \eta_{22} & \eta_{32} & \eta_{42} \\ m'_{12} & m'_{22} & m'_{32} & m'_{42} \\ m'_{13} & m'_{23} & m'_{33} & m'_{43} \\ m'_{14} & m'_{24} & m'_{34} & m'_{44} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \eta_{11} & \eta_{21} & \eta_{31} & \eta_{41} \\ m'_{11} & m'_{21} & m'_{31} & m'_{41} \\ m'_{13} & m'_{23} & m'_{33} & m'_{43} \\ m'_{14} & m'_{24} & m'_{34} & m'_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p'_{12} & p'_{13} & p'_{14} \\ m'_{23} & m'_{33} & m'_{43} \\ m'_{24} & m'_{34} & m'_{44} \end{vmatrix} \\
&\quad + p'_{23} \begin{vmatrix} m'_{13} & m'_{43} \\ m'_{14} & m'_{44} \end{vmatrix} - p'_{24} \begin{vmatrix} m'_{13} & m'_{33} \\ m'_{14} & m'_{34} \end{vmatrix} + p'_{34} \begin{vmatrix} m'_{13} & m'_{23} \\ m'_{14} & m'_{24} \end{vmatrix} .
\end{aligned}\right.
$$

On aura de même:

$$
(7)\left\{\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \eta_{13} & \eta_{23} & \eta_{33} & \eta_{43} \\ m'_{12} & m'_{22} & m'_{32} & m'_{42} \\ m'_{13} & m'_{23} & m'_{33} & m'_{43} \\ m'_{14} & m'_{24} & m'_{34} & m'_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \eta_{11} & \eta_{21} & \eta_{31} & \eta_{41} \\ m'_{11} & m'_{21} & m'_{31} & m'_{41} \\ m'_{12} & m'_{22} & m'_{32} & m'_{42} \\ m'_{14} & m'_{24} & m'_{34} & m'_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p'_{12} & p'_{13} & p'_{14} \\ m'_{22} & m'_{32} & m'_{42} \\ m'_{24} & m'_{34} & m'_{44} \end{vmatrix} \\
&\quad - p'_{23} \begin{vmatrix} m'_{12} & m'_{42} \\ m'_{14} & m'_{44} \end{vmatrix} + p'_{24} \begin{vmatrix} m'_{12} & m'_{32} \\ m'_{14} & m'_{34} \end{vmatrix} - p'_{34} \begin{vmatrix} m'_{12} & m'_{22} \\ m'_{14} & m'_{24} \end{vmatrix} ,
\end{aligned}\right.
$$

$$
(8)\left\{\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \eta_{24} & \eta_{24} & \eta_{34} & \eta_{44} \\ m'_{12} & m'_{22} & m'_{32} & m'_{42} \\ m'_{13} & m'_{23} & m'_{33} & m'_{43} \\ m'_{14} & m'_{24} & m'_{32} & m'_{44} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \eta_{11} & \eta_{21} & \eta_{31} & \eta_{41} \\ m'_{11} & m'_{21} & m'_{31} & m'_{41} \\ m'_{12} & m'_{22} & m'_{32} & m'_{42} \\ m'_{13} & m'_{23} & m'_{33} & m'_{43} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p'_{12} & p'_{13} & p'_{14} \\ m'_{22} & m'_{32} & m'_{42} \\ m'_{23} & m'_{33} & m'_{43} \end{vmatrix} \\
&\quad + p'_{23} \begin{vmatrix} m'_{12} & m'_{42} \\ m'_{13} & m'_{42} \end{vmatrix} - p'_{24} \begin{vmatrix} m'_{12} & m'_{32} \\ m'_{13} & m'_{33} \end{vmatrix} + p'_{34} \begin{vmatrix} m'_{12} & m'_{22} \\ m'_{13} & m'_{23} \end{vmatrix} ,
\end{aligned}\right.
$$

donc, en substituant les valeurs (6), (7), (8) dans l'expression (3), on obtient:

$$
(9)\left\{\begin{aligned}
&A_{1\gamma} \begin{vmatrix} \eta_{11} & \eta_{21} & \eta_{31} & \eta_{41} \\ m'_{12} & m'_{22} & m'_{32} & m'_{42} \\ m'_{13} & m'_{23} & m'_{33} & m'_{43} \\ m'_{14} & m'_{24} & m'_{34} & m'_{44} \end{vmatrix} + A_{2\gamma} \begin{vmatrix} \eta_{12} & \eta_{22} & \eta_{32} & \eta_{42} \\ m'_{12} & m'_{22} & m'_{32} & m'_{42} \\ m'_{13} & m'_{23} & m'_{33} & m'_{43} \\ m'_{14} & m'_{24} & m'_{34} & m'_{44} \end{vmatrix} \\
&+ A_{3\gamma} \begin{vmatrix} \eta_{13} & \eta_{23} & \eta_{33} & \eta_{43} \\ m'_{12} & m'_{22} & m'_{32} & m'_{42} \\ m'_{13} & m'_{23} & m'_{33} & m'_{43} \\ m'_{14} & m'_{24} & m'_{34} & m'_{44} \end{vmatrix} + A_{4\gamma} \begin{vmatrix} \eta_{14} & \eta_{24} & \eta_{34} & \eta_{44} \\ m'_{12} & m'_{22} & m'_{32} & m'_{42} \\ m'_{13} & m'_{23} & m'_{33} & m'_{43} \\ m'_{14} & m'_{24} & m'_{34} & m'_{44} \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} 0 & \eta_{11} & \eta_{21} & \eta_{31} & \eta_{41} \\ A_{1\gamma} & m'_{11} & m'_{21} & m'_{31} & m'_{41} \\ A_{2\gamma} & m'_{12} & m'_{22} & m'_{32} & m'_{42} \\ A_{3\gamma} & m'_{13} & m'_{23} & m'_{33} & m'_{43} \\ A_{4\gamma} & m'_{14} & m'_{24} & m'_{34} & m'_{44} \end{vmatrix} + p'_{12} \begin{vmatrix} A_{2\gamma} & m'_{32} & m'_{42} \\ A_{3\gamma} & m'_{33} & m'_{43} \\ A_{4\gamma} & m'_{34} & m'_{44} \end{vmatrix} \\
&- p'_{13} \begin{vmatrix} A_{2\gamma} & m'_{22} & m'_{42} \\ A_{3\gamma} & m'_{23} & m'_{43} \\ A_{4\gamma} & m'_{24} & m'_{44} \end{vmatrix} + p'_{14} \begin{vmatrix} A_{2\gamma} & m'_{22} & m'_{32} \\ A_{3\gamma} & m'_{23} & m'_{33} \\ A_{4\gamma} & m'_{24} & m'_{34} \end{vmatrix} + p'_{23} \begin{vmatrix} A_{2\gamma} & m'_{12} & m'_{42} \\ A_{3\gamma} & m'_{13} & m'_{43} \\ A_{4\gamma} & m'_{14} & m'_{44} \end{vmatrix} \\
&- p'_{24} \begin{vmatrix} A_{2\gamma} & m'_{12} & m'_{32} \\ A_{3\gamma} & m'_{13} & m'_{33} \\ A_{4\gamma} & m'_{14} & m'_{44} \end{vmatrix} + p'_{34} \begin{vmatrix} A_{2\gamma} & m'_{12} & m'_{22} \\ A_{3\gamma} & m'_{13} & m'_{23} \\ A_{4\gamma} & m'_{14} & m'_{24} \end{vmatrix} .
\end{aligned}\right.
$$

En substituant

$$
(10)\left\{\begin{aligned}
m'_{1k} &= A_{k4} , \\
m'_{2k} &= \frac{A_{k4}}{1} \cdot \beta_1 + \frac{\beta_1 A_{k4} + A_{k3}}{3} , \\
m'_{3k} &= \frac{A_{k4}}{1} \cdot \beta_2 + \frac{\beta_1 A_{k4} + A_{k3}}{3} \beta_1 + \frac{\beta_2 A_{k4} + \beta_1 A_{k3} + A_{k2}}{5} ; \\
m'_{4k} &= \frac{A_{k4}}{1} \beta_3 + \frac{\beta_1 A_{k4} + A_{k3}}{3} \beta_2 + \frac{\beta_2 A_{k4} + \beta_1 A_{k3} + A_{k2}}{5} \beta_1 \\
&\quad + \frac{\beta_3 A_{k4} + \beta_2 A_{k3} + \beta_1 A_{k2} + A_{k1}}{7} ; \quad (k=1,2,3,4)
\end{aligned}\right.
$$

on aura

$$
(11)\left\{
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}
0 & \eta_{11} & \eta_{21} & \eta_{31} & \eta_{41} \\
A_{1\gamma} & m'_{11} & m'_{21} & m'_{31} & m'_{41} \\
A_{2\gamma} & m'_{12} & m'_{22} & m'_{32} & m'_{42} \\
A_{3\gamma} & m'_{13} & m'_{23} & m'_{33} & m'_{43} \\
A_{4\gamma} & m'_{14} & m'_{24} & m'_{34} & m'_{44}
\end{vmatrix} \\
&=\frac{1}{1.3.5.7}
\begin{vmatrix}
0 & A_{1\gamma} & A_{2\gamma} & A_{3\gamma} & A_{4\gamma} \\
\eta_{11} & A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \\
3\eta_{21}-4\beta_1\eta_{11} & A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\
5\eta_{31}-8\beta_1\eta_{21}-(6\beta_2-9\beta_1{}^2)\eta_{11} & A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\
7\eta_{41}-12\beta_1\eta_{31}-(10\beta_2-15\beta_1{}^2)\eta_{21}-(8\beta_3-24\beta_1\beta_2+16\beta_1{}^2)\eta_{11} & A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41}
\end{vmatrix}
\end{aligned}
\right.
$$

et le déterminant du second membre peut s'écrire

$$
(12)\qquad
\begin{vmatrix}
0 & A_{1\gamma} & A_{2\gamma} & A_{3\gamma} & A_{4\gamma} \\
\eta_{11} & A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \\
2p_1\eta_{11}+3\eta_{21} & A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\
3p_2\eta_{11}+4p_1\eta_{21}+5\eta_{31} & A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\
4p_3\eta_{11}+5p_2\eta_{21}+6p_1\eta_{31}+7\eta_{41} & A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41}
\end{vmatrix}.
$$

On aura donc successivement pour $\gamma=1, 2, 3, 4,$

$$
(13)\left\{
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}
0 & \eta_{11} & \eta_{21} & \eta_{31} & \eta_{41} \\
A_{11} & m'_{11} & m'_{21} & m'_{31} & m'_{41} \\
A_{21} & m'_{12} & m'_{22} & m'_{32} & m'_{42} \\
A_{31} & m'_{13} & m'_{23} & m'_{33} & m'_{43} \\
A_{41} & m'_{14} & m'_{24} & m'_{34} & m'_{44}
\end{vmatrix}=-\frac{|A_{\alpha\beta}|}{1.3.5.7}(7\eta_{41}+6p_1\eta_{31}+5p_2\eta_{21}+4p_3\eta_{11}), \\
&\begin{vmatrix}
0 & \eta_{11} & \eta_{21} & \eta_{31} & \eta_{41} \\
A_{12} & m'_{11} & m'_{21} & m'_{31} & m'_{41} \\
A_{22} & m'_{12} & m'_{22} & m'_{32} & m'_{42} \\
A_{32} & m'_{13} & m'_{23} & m'_{33} & m'_{43} \\
A_{42} & m'_{14} & m'_{24} & m'_{34} & m'_{44}
\end{vmatrix}=-\frac{|A_{\alpha\beta}|}{1.3.5.7}(5\eta_{31}+4p_1\eta_{21}+3p_2\eta_{11}), \\
&\begin{vmatrix}
0 & \eta_{11} & \eta_{21} & \eta_{31} & \eta_{41} \\
A_{13} & m'_{11} & m'_{21} & m'_{31} & m'_{41} \\
A_{23} & m'_{12} & m'_{22} & m'_{32} & m'_{42} \\
A_{33} & m'_{13} & m'_{23} & m'_{33} & m'_{43} \\
A_{43} & m'_{14} & m'_{24} & m'_{34} & m'_{44}
\end{vmatrix}=-\frac{|A_{\alpha\beta}|}{1.3.5.7}(3\eta_{21}+2p_1\eta_{11}), \\
&\begin{vmatrix}
0 & \eta_{11} & \eta_{21} & \eta_{31} & \eta_{41} \\
A_{14} & m'_{11} & m'_{21} & m'_{31} & m'_{41} \\
A_{24} & m'_{12} & m'_{22} & m'_{32} & m'_{42} \\
A_{34} & m'_{13} & m'_{23} & m'_{33} & m'_{43} \\
A_{44} & m'_{14} & m'_{24} & m'_{34} & m'_{44}
\end{vmatrix}=-\frac{|A_{\alpha\beta}|}{1.3.5.7}\cdot\eta_{11}
\end{aligned}
\right.
$$

De même on calcule l'expression du second membre de l'équation (9):

$$
p'_{12}\begin{vmatrix}
A_{2\gamma} & m'_{32} & m'_{42} \\
A_{3\gamma} & m'_{33} & m'_{43} \\
A_{4\gamma} & m'_{34} & m'_{44}
\end{vmatrix}
-p'_{13}\begin{vmatrix}
A_{2\gamma} & m'_{22} & m'_{42} \\
A_{3\gamma} & m'_{23} & m'_{43} \\
A_{4\gamma} & m'_{24} & m'_{44}
\end{vmatrix}
+p'_{14}\begin{vmatrix}
A_{2\gamma} & m'_{22} & m'_{32} \\
A_{3\gamma} & m'_{23} & m'_{33} \\
A_{4\gamma} & m'_{24} & m'_{34}
\end{vmatrix}
$$

$$
+p'_{23}\begin{vmatrix}
A_{2\gamma} & m'_{12} & m'_{42} \\
A_{3\gamma} & m'_{13} & m'_{43} \\
A_{4\gamma} & m'_{14} & m'_{44}
\end{vmatrix}
-p'_{24}\begin{vmatrix}
A_{2\gamma} & m'_{12} & m'_{32} \\
A_{3\gamma} & m'_{13} & m'_{33} \\
A_{4\gamma} & m'_{14} & m'_{44}
\end{vmatrix}
+p'_{34}\begin{vmatrix}
A_{2\gamma} & m'_{12} & m'_{22} \\
A_{3\gamma} & m'_{13} & m'_{23} \\
A_{4\gamma} & m'_{14} & m'_{24}
\end{vmatrix}
$$

pour $\gamma=1, 2, 3, 4$; on obtient après quelques calculs assez longues, que je ne réproduis pas ici, successivement les valeurs suivantes:

$$
(14)\left\{
\begin{aligned}
&-\frac{3p_4}{2.3.5.7}\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} \end{vmatrix}
+\frac{2p_5}{2.3.5.7}\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} \end{vmatrix}
-\frac{p_6}{2.3.5.7}\begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix}; \\
&-\frac{2p_3}{2.3.5.7}\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} \end{vmatrix}
+\frac{p_4}{2.3.5.7}\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} \end{vmatrix}
-\frac{p_6}{2.3.5.7}\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix}; \\
&-\frac{p_2}{2.3.5.7}\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} \end{vmatrix}
+\frac{p_4}{2.3.5.7}\begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix}
-\frac{2p_5}{2.3.5.7}\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix}; \\
&-\frac{p_2}{2.3.5.7}\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} \end{vmatrix}
+\frac{2p_3}{2.3.5.7}\begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix}
-\frac{3p_4}{2.3.5.7}\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
\right.
$$

Mais, en prenant

$$
(15)\qquad |a_{\alpha\beta}|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1,
$$

ou aura, d'après les formules (9) du numéro (1):

$$(16)\qquad A_{\alpha\beta}=\frac{(\omega)_{\beta\alpha}}{2\omega};\quad \omega=\begin{vmatrix}\omega_{11}&\omega_{12}&\omega_{13}&\omega_{14}\\ \omega_{21}&\omega_{22}&\omega_{23}&\omega_{24}\\ \omega_{31}&\omega_{32}&\omega_{33}&\omega_{34}\\ \omega_{41}&\omega_{42}&\omega_{43}&\omega_{44}\end{vmatrix}\neq;\quad |A_{\alpha\beta}|=\frac{1}{2^4\omega};$$

$$(17)\quad\left\{\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}A_{21}&A_{22}&A_{23}\\ A_{31}&A_{32}&A_{33}\\ A_{41}&A_{42}&A_{43}\end{vmatrix}=\frac{1}{2^3\omega^3}\begin{vmatrix}(\omega)_{12}&(\omega)_{22}&(\omega)_{32}\\ (\omega)_{13}&(\omega)_{23}&(\omega)_{33}\\ (\omega)_{14}&(\omega)_{24}&(\omega)_{34}\end{vmatrix}=-\frac{\omega_{41}}{2^3\omega};\\
&\begin{vmatrix}A_{21}&A_{22}&A_{24}\\ A_{31}&A_{32}&A_{34}\\ A_{41}&A_{42}&A_{44}\end{vmatrix}=\frac{\omega_{31}}{2^3\omega};\quad \begin{vmatrix}A_{21}&A_{23}&A_{24}\\ A_{31}&A_{33}&A_{34}\\ A_{41}&A_{43}&A_{44}\end{vmatrix}=-\frac{\omega_{21}}{2^3\omega};\\
&\begin{vmatrix}A_{22}&A_{23}&A_{24}\\ A_{32}&A_{33}&A_{34}\\ A_{42}&A_{43}&A_{44}\end{vmatrix}=\frac{\omega_{11}}{2^3\omega},
\end{aligned}\right.$$

donc au lieu des expressions (14) on pourra écrire les suivantes:

$$(18)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{1.3.5.7}\cdot\frac{1}{2^4\omega}(3p_4\omega_{41}+2p_5\omega_{31}+p_6\omega_{21}),\\
&\frac{1}{1.3.5.7}\cdot\frac{1}{2^4\omega}(2p_3\omega_{41}+p_4\omega_{31}-p_6\omega_{11}),\\
&\frac{1}{1.3.5.7}\cdot\frac{1}{2^4\omega}(p_2\omega_{41}-p_4\omega_{21}-2p_5\omega_{11}),\\
&\frac{1}{1.3.5.7}\cdot\frac{1}{2^4\omega}(-p_2\omega_{31}-2p_3\omega_{21}-3p_4\omega_{11}).
\end{aligned}\right.$$

En substituant les expressions (13), (15), (16), (18) dans les formules (3) et (9), on aura pour $\gamma=1,2,3,4$ les valeurs finales:

$$(19)\quad\left\{\begin{aligned}
&c_{11}A_{11}+c_{12}A_{21}+c_{13}A_{31}+c_{14}A_{41}=\frac{1}{2}(7\eta_{41}+6p_1\eta_{31}+5p_2\eta_{21}+4p_3\eta_{11}\\
&\qquad\qquad+3p_4\omega_{41}+2p_5\omega_{31}+p_6\omega_{21}),\\
&c_{11}A_{12}+c_{12}A_{22}+c_{13}A_{32}+c_{14}A_{42}=\frac{1}{2}(5\eta_{31}+4p_1\eta_{21}+3p_2\eta_{11}+2p_3\omega_{41}\\
&\qquad\qquad+p_4\alpha_{31}-p_6\omega_{11}),\\
&c_{11}A_{13}+c_{12}A_{23}+c_{13}A_{33}+c_{14}A_{43}=\frac{1}{2}(3\eta_{21}+2p_1\eta_{11}+p_2\omega_{41}-p_4\omega_{21}\\
&\qquad\qquad-2p_5\omega_{11}),\\
&c_{11}A_{14}+c_{12}A_{24}+c_{13}A_{34}+c_{14}A_{44}=\frac{1}{2}(\eta_{11}-p_2\omega_{31}-2p_3\omega_{21}-3p_4\omega_{11}).
\end{aligned}\right.$$

De plus on aura

$$c_{15}=-1.3.5.7.2^2\omega\cdot\begin{vmatrix}m'_{22}&m'_{32}&m'_{42}\\ m'_{23}&m'_{33}&m'_{43}\\ m'_{24}&m'_{34}&m'_{44}\end{vmatrix}=2^2\omega\left\{\begin{vmatrix}A_{21}&A_{22}&A_{23}\\ A_{32}&A_{32}&A_{34}\\ A_{41}&A_{42}&A_{43}\end{vmatrix}\right.$$

$$\left.-2\rho_1\begin{vmatrix}A_{21}&A_{22}&A_{24}\\ A_{31}&A_{32}&A_{34}\\ A_{41}&A_{42}&A_{44}\end{vmatrix}+3p_2\begin{vmatrix}A_{21}&A_{23}&A_{24}\\ A_{31}&A_{33}&A_{34}\\ A_{41}&A_{43}&A_{44}\end{vmatrix}-4p_3\begin{vmatrix}A_{22}&A_{23}&A_{24}\\ A_{32}&A_{33}&A_{34}\\ A_{42}&A_{43}&A_{44}\end{vmatrix}\right\},$$

$$c_{16}=1.3.5.6.2^2\omega\cdot\begin{vmatrix}m'_{12}&m'_{32}&m'_{42}\\ m'_{13}&m'_{33}&m'_{43}\\ m'_{14}&m'_{34}&m'_{44}\end{vmatrix}=2^2\omega\left\{-3\begin{vmatrix}A_{21}&A_{22}&A_{24}\\ A_{31}&A_{32}&A_{34}\\ A_{41}&A_{42}&A_{44}\end{vmatrix}\right.$$

$$\left.+4p_1\begin{vmatrix}A_{21}&A_{23}&A_{24}\\ A_{31}&A_{33}&A_{34}\\ A_{41}&A_{43}&A_{44}\end{vmatrix}-5p_2\begin{vmatrix}A_{22}&A_{23}&A_{24}\\ A_{32}&A_{33}&A_{34}\\ A_{42}&A_{43}&A_{44}\end{vmatrix}\right\},$$

$$c_{17}=-1.3.5.7.2^2\omega\cdot\begin{vmatrix}m'_{12}&m'_{22}&m'_{42}\\ m'_{13}&m'_{23}&m'_{24}\\ m'_{14}&m'_{24}&m'_{44}\end{vmatrix}=2^2\omega\left\{5\begin{vmatrix}A_{21}&A_{23}&A_{24}\\ A_{31}&A_{33}&A_{34}\\ A_{41}&A_{43}&A_{44}\end{vmatrix}-6p_1\begin{vmatrix}A_{22}&A_{23}&A_{24}\\ A_{32}&A_{33}&A_{24}\\ A_{42}&A_{43}&A_{44}\end{vmatrix}\right\},$$

$$c_{18}=1.3.5.7.2^2.\omega\begin{vmatrix}m'_{12}&m'_{22}&m'_{32}\\ m'_{13}&m'_{23}&m'_{33}\\ m'_{14}&m'_{24}&m'_{34}\end{vmatrix}=-2^2\omega.7\begin{vmatrix}A_{22}&A_{23}&A_{24}\\ A_{32}&A_{33}&A_{34}\\ A_{42}&A_{43}&A_{44}\end{vmatrix},$$

donc en introduisant les valeurs (17) on obtient:

$$(20)\quad \begin{cases} c_{15} = -\dfrac{1}{2}\Big(\omega_{41} + 2p_1\omega_{31} + 3p_2\omega_{21} + 4p_3\omega_{11}\Big), \\ c_{16} = -\dfrac{1}{2}\Big(3\omega_{31} + 4p_1\omega_{21} + 5p_2\omega_{11}\Big), \\ c_{17} = -\dfrac{1}{2}\Big(5\omega_{21} + 6p_1\omega_{11}\Big), \\ c_{18} = -\dfrac{7}{2}\,\omega_{11}. \end{cases}$$

Écrivons trois suites

$$(21)\quad \begin{cases} 0,\ \eta_{4k},\ \eta_{3k},\ \eta_{2k},\ \eta_{1k},\ \omega_{4k},\ \omega_{3k},\ \omega_{2k},\ \omega_{1k},\ 0,\ 0,\ 0,\ldots \\ 0,\ 1,\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5,\ p_6,\ p_7,\ p_8,\ p_9,\ 0,\ldots \longrightarrow \quad (k=1,2,3,4) \\ \longleftarrow \ldots,8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0,-1,-2,-3,\ldots \end{cases}$$

effectuons l'addition des produits des termes situés les uns au dessus des autres, puis imprimons un mouvement de translation à la deuxième suite à droite, à la troisième à gauche, effectuons de nouveau l'addition des produits des termes comme plus haut et continuons ainsi ce procédé, on aura comme résultat les valeurs:

$$(22)\quad \begin{cases} a_{0k} = \dfrac{1}{2}(7\eta_{4k} + 6p_1\eta_{3k} + 5p_2\eta_{2k} + 4p_3\eta_{1k} + 3p_4\omega_{4k} + 2p_5\omega_{3k} + p_6\omega_{2k}), \\ a_{1k} = \dfrac{1}{2}(5\eta_{3k} + 4p_1\eta_{2k} + 3p_2\eta_{1k} + 2p_3\omega_{4k} + p_4\omega_{3k} - p_6\omega_{1k}), \\ a_{2k} = \dfrac{1}{2}(3\eta_{2k} + 2p_1\eta_{1k} + p_2\omega_{4k} - p_4\omega_{2k} - 2p_5\omega_{1k}), \\ a_{3k} = \dfrac{1}{2}(\eta_{1k} - p_2\omega_{3k} - 2p_3\omega_{2k} - 3p_4\omega_{1k}), \\ a_{4k} = -\dfrac{1}{2}(\omega_{4k} + 2p_1\omega_{3k} + 3p_2\omega_{2k} + 4p_3\omega_{1k}), \\ a_{5k} = -\dfrac{1}{2}(3\omega_{3k} + 4p_1\omega_{2k} + 5p_2\omega_{1k}), \\ a_{6k} = -\dfrac{1}{2}(5\omega_{2k} + 6p_1\omega_{1k}), \\ a_{7k} = -\dfrac{7}{2}\,\omega_{1k}, \end{cases}$$

qui, substituées dans l'intégrale:

$$(23)\quad \begin{cases} I_k = \displaystyle\int \frac{a_{0k} + a_{1k}x + a_{2k}x^2 + a_{3k}x^3 + a_{4k}x^4 + a_{5k}x^5 + a_{6k}x^6 + a_{7k}x^7}{2\sqrt{R(x)}}\,dx; \\ (k=1, 2, 3, 4), \end{cases}$$

reproduisent dans le cas $k=1$ les formules (19) et (20).

On voit donc finalement, que le procédé pour la construction des coefficients des intégrales canoniques de seconde espèce, indiqué dans les cas $\varrho=2$ et $\varrho=3$, se retrouve aussi dans le cas supérieur $\varrho=4$; d'ailleurs la méthode employée dans ce dernier cas peut être facilement étendue aux cas des genres supérieurs; il faut dans ce but appliquer la décomposition de Vandermonde et suivre la même voie que plus haut. En général au lieu des suites (21) on aura trois suivantes:

$$\begin{matrix} 0, & \eta_{\varrho k}, \eta_{\varrho-1,k},\ldots, & \eta_{\varrho-i,k},\ldots, & \eta_{1k}, & \omega_{\varrho k}, \omega_{\varrho-1,k},\ldots, & \omega_{\varrho-i,k},\ldots, & \omega_{1k}, & 0, & 0,\ 0, \\ 0, & 1,\quad p_1,\ldots, & p_i,\ldots,p_{\varrho-1}, & p_\varrho, & p_{\varrho+1},\ldots, & p_{\varrho+i},\ldots,p_{2\varrho-1}, & p_{2\varrho}, p_{2\varrho+1}, & 0, \longrightarrow & \\ \longleftarrow \ldots, 2\varrho, & 2\varrho-1,\ 2\varrho-2,\ldots, & 2\varrho-(i+1),\ldots, & \varrho, & (\varrho-1), (\varrho-2),\ldots, & (\varrho-i-1),\ldots, & 0, -1, & -2, -3,\ldots & \end{matrix}$$

d'où par la translation on passe aux suites:

$$(25)\quad \begin{cases} \eta_{\varrho k},\ \eta_{\varrho-1,k},\ldots,\ \eta_{\varrho-i,k},\ldots,\ \eta_{1k},\ \omega_{\varrho k},\ \omega_{\varrho-1,k},\ldots,\ \omega_{\varrho-i,k},\ldots,\ \omega_{1k}, \\ p_{-s},\ p_{-s+1},\ldots,\ p_{i-s},\ldots,p_{\varrho-s-1},\ p_{\varrho-s}, p_{\varrho-s+1},\ldots,\ p_{\varrho-s+i},\ldots,p_{2\varrho-s-1}, \\ 2\varrho-s-1,\ 2\varrho-s-2,\ldots,\ 2\varrho-s-i-1,\ldots,\ \varrho-s, \varrho-s-1, \varrho-s-2,\ldots, \varrho-i-s-1,\ldots,\ -s, \end{cases}$$

En effectuant l'addition des produits des termes on détermine le coefficient général

$$(26)\quad \begin{cases} a_{sk} = \displaystyle\sum_{i=0}^{i=\varrho-1}\Big[(2\varrho-s-i-1)p_{i-s}\eta_{\varrho-i,k} + (\varrho-i-s-1)p_{\varrho+i-s}\omega_{\varrho-i,k}\Big]; \\ (s=0, 1, \ldots, (2\varrho-1)) \\ (k=1, 2, \ldots, \varrho);\ p_0=1;\ (p_{-s}=0, \text{ quand } s=1, 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

dans l'intégrale canonique de seconde espèce:

$$(27)\quad I_k = \int \frac{a_{0k} + a_{1k}x + \ldots + a_{sk}x^s + \ldots + a_{2\varrho-1,k}x^{2\varrho-1}}{2\sqrt{R(x)}}\,dx;\ (k=1, 2, \ldots \varrho)$$

où $R(x)$ désigne le polynôme

$$(28)\quad R(x) = x^{2\varrho+1} + p_1x^{2\varrho} + \ldots + p_{2\varrho+1}.$$

On peut retrouver ce mode de génération dans les formules de M. Weber (voir J. de Crelle, t. 82, p. 135—137); on a en effet dans le système des notations de cet auteur:

$$r(x)=\sqrt{x+\gamma_2x^2+\gamma_3x^3+\gamma_4x^4+\gamma_5x^5}=\sqrt{x(1-x)(1-k_1{}^2x)(1-k_2{}^2x)(1-k_3{}^2x)}\,,$$

et le tableau des périodes des intégrales de première et seconde espèces:

$$w_k=\int\frac{x^{k-1}}{r(x)}dx\,,\quad e_k=\int\frac{x^{k+1}}{r(x)}dx\,;\ (k=1,2)$$

s'écrit de la manière suivante:

$$\begin{array}{rcccc} & a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ w_1: & 2K_2\,, & 2K_3\,, & 2iK_1\,, & 2iK_4\,, \\ w_2: & 2L_2\,, & 2L_3\,, & 2iL_1\,, & 2iL_4\,, \\ e_1: & 2E_2\,, & 2E_3\,, & 2iE_1\,, & 2iE_4\,, \\ e_2: & 2G_2\,, & 2G_3\,, & 2iG_1\,, & 2iG_4\,. \end{array}$$

Les intégrales canoniques de seconde espèce ξ_1, ξ_2, de M. Weber ont la forme:

$$(29)\quad\left\{\begin{aligned} \xi_1 &= G_2\int\frac{3\gamma_5}{r(x)}dx+E_2\int\frac{2\gamma_4+\gamma_5x}{r(x)}dx+L_2\int\frac{\gamma_3-\gamma_5x^2}{r(x)}dx \\ &\quad -K_2\int\frac{\gamma_3x+2\gamma_4x^2+3\gamma_5x^3}{r(x)}dx \\ \xi_2 &= G_3\int\frac{3\gamma_5}{r(x)}dx+E_3\int\frac{2\gamma_4+\gamma_5x}{r(x)}dx+L_3\int\frac{\gamma_3-\gamma_5x^2}{r(x)}dx \\ &\quad -K_3\int\frac{\gamma_3x+2\gamma_4x^2+3\gamma_5x^3}{r(x)}dx \end{aligned}\right.$$

et leur tableau des périodes est le suivant:

$$\begin{array}{rcccc} & (a_1) & (a_2) & (b_1) & (b_2) \\ \xi_1: & 0\,, & 0\,, & -4\pi i\,, & 0\,, \\ \xi_2: & 0\,, & 0\,, & 0\,, & -4\pi i\,, \end{array}$$

Pour vérifier la loi de formation des coefficients, établie plus haut, écrivons trois suites:

$$(30)\quad\left\{\begin{array}{l} \quad\quad\ \ 0\,,\ G_2\,,\ E_2\,,\ L_2\,,\ K_2\,,\ \ 0\,,\ \ 0\,,\ldots \\ \quad\quad\ \ 0\,,\ \gamma_5\,,\ \gamma_4\,,\ \gamma_3\,,\ \gamma_2\,,\ \ 1\,,\ \ 0\,,\ldots\longrightarrow \\ \longleftarrow\ldots,4\,,\ 3\,,\ 2\,,\ 1\,,\ 0\,,\ -1\,,\ -2\,,\ldots \end{array}\right.$$

et employons nôtre procédé; on aura successivement les coefficients:

$$(31)\quad\left\{\begin{aligned} a_{01} &= 3\gamma_5G_2+2\gamma_4E_2+\gamma_3L_2\,, \\ a_{02} &= \gamma_5E_2-\gamma_3K_2\,, \\ a_{03} &= -\gamma_5L_2-2\gamma_4K_2\,, \\ a_{04} &= -3\gamma_5K_2\,, \end{aligned}\right.$$

qui portés dans l'intégrale

$$(32)\quad\int\frac{a_{01}+a_{02}x+a_{03}x^2+a_{04}x^3}{r(x)}\,dx$$

reproduisent la première équation (29). De même en écrivant trois suites:

$$(33)\quad\left\{\begin{array}{l} \quad\quad\ \ 0\,,\ G_3\,,\ E_3\,,\ L_3\,,\ K_3\,,\ \ 0\,,\ \ 0\,,\ldots \\ \quad\quad\ \ 0\,,\ \gamma_5\,,\ \gamma_4\,,\ \gamma_3\,,\ \gamma_2\,,\ \ 1\,,\ \ 0\,,\ldots\longrightarrow \\ \longleftarrow\ldots,4\,,\ 3\,,\ 2\,,\ 1\,,\ 0\,,\ -1\,,\ -2\,,\ldots \end{array}\right.$$

et procédant comme plus haut on reproduit la seconde formule (29). Les suites (30) et (43) correspondent dans nôtre système des notations symétriques au tableau unique:

$$\begin{array}{l} \quad\quad\ \ \eta_{2k}\,,\ \eta_{1k}\,,\ \omega_{2k}\,,\ \omega_{1k}\,,\ \ 0\,,\ \ 0\,, \\ \quad\quad\ \ 1\,,\ p_1\,,\ p_2\,,\ p_3\,,\ p_4\,,\ p_5\,,\ldots\longrightarrow \qquad (k=1,2) \\ \longleftarrow\ 3\,,\ 2\,,\ 1\,,\ 0\,,\ -1\,,\ -2\,,\ldots \end{array}$$

et les intégrales (29) diffèrent des intégrales I_k, étudiées plus haut, par le facteur 2 au dénominateur, ce qui correspond à un autre tableau des périodes

$$\begin{array}{cccc} 0\,, & 0\,, & -2\pi i\,, & 0\,, \\ 0\,, & 0\,, & 0\,, & -2\pi i \end{array}$$

des intégrales canoniques. Donc le théorème sur la loi de formation des coefficients des intégrales canoniques se trouve complétement vérifié sur les formules mêmes de M. Weber.

(A suivre).