W. STOŻEK.

O CAŁKOWANIU PEWNYCH RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH ZWYCZAJNYCH RZĘDU DRUGIEGO.

(SUR L'INTÉGRATION DE CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE).

Zadanie, któreni zajmiemy się w tym artykule, można sformułować w sposób następujący:

Dane jest zwyczajne równanie różniczkowe rzędu drugiego:

$$\frac{d^2v}{du^2} = 0.$$

Przypuśćmy, że w równaniu tem zamiast zmiennych u i v wprowadzamy nowe zmienne x i y. Dzięki tej przemianie zmiennych, otrzymujemy nowe równanie różniczkowe, zwyczajne, rzędu drugiego, którego kształt zależy od równań przekształcenia. Zadanie polega na wyznaczeniu mnogości tych równań, a zarazem na wyznaczeniu funkcyj $u(x, y)$, $v(x, y)$, które, przyjęte, jako nowe zmienne, redukują pewne szczególne równanie tej mnogości do powyższej prostej postaci. Rozwiązanie tego zadania podał S. Lie[1]), nie doprowadzając jednak do końca wszystkich rachunków. A Tresse[2]),

---

[1]) S. Lie. Classification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen xy, die eine Gruppe von Transformationen gestatten. Separataftryk af Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Kristiania 1883.

[2]) A. Trese. Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations. Acta Math. 1894. T. 18.

traktując pewne zadanie ogólniejsze, znalazł także warunki konieczne i wystarczające na to, aby redukcya do formy $\frac{d^2v}{du^2}=0$, o której wyżej była mowa, była możliwą. Zadanie to traktował także R. Liouville[1]) metodą odmienną od metody Liego. My w artykule niniejszym podajemy takie przedstawienie rzeczy, które jest w części reprodukcyą, w części zaś bezpośredniem rozwinięciem w szczegółach wywodów Liego. W końcu nadmieniamy, że korzystaliśmy ze wskazówek prof. K. Żórawskiego, jako też z jego rozprawy[2]), traktującej analogiczny problem ze względu na równania różniczkowe rzędu trzeciego.

I. Wprowadzamy do równania:

$$\frac{d^2v}{du^2}=0 \tag{1}$$

nowe zmienne x i y zapomocą równań:

$$\begin{cases} v=v(x,y) \\ u=u(x,y), \end{cases} \tag{2}$$

o których zakładamy, że ich wyznacznik funkcyjny $u_{10}v_{01}-v_{10}u_{01}$ *) jest odmienny od zera; o samych funkcyach u i v przypuszczamy, że są analityczne.

Z równań (2) wynika:

$$\left(u_{10}+u_{01}\frac{dy}{dx}\right)\frac{dv}{du}=v_{10}+v_{01}\frac{dy}{dx}$$

$$\left(u_{10}+u_{01}\frac{dy}{dx}\right)^3\cdot\frac{d^2v}{du^2}=\left[v_{20}+2v_{11}\frac{dy}{dx}+v_{02}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+v_{01}\frac{d^2y}{dx^2}\right]\left(u_{10}+u_{01}\frac{dy}{dx}\right)$$
$$-\left[u_{20}+2u_{11}\frac{dy}{dx}+u_{02}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+u_{11}\frac{d^2y}{dx^2}\right]\left(v_{10}+v_{01}\frac{dy}{dx}\right).$$

[1]) R. Liouville. Sur quelques équations différentielles non linéaires. Journal de l'école polytechnique 1887. Cah. 58.

[2]) K. Żórawski. O całkowaniu pewnej kategoryi równań różniczkowych zwyczajnych rzędu trzeciego. Rozprawy Wydz. Mat.-przyr. Akad. w Krakowie. T. XXXIV.

*) $\frac{\partial^{i+k}\varphi}{\partial x^i\partial y^k}=\varphi_{ik}$

Oznaczmy:

$$\begin{cases} \qquad\qquad u_{10}v_{01}-v_{10}u_{01}=a \\ v_{02}u_{01}-u_{02}v_{01}=a, \qquad v_{20}u_{10}-u_{20}v_{10}=a' \\ v_{02}u_{10}-u_{02}v_{10}=b, \qquad v_{20}u_{01}-u_{20}v_{01}=b' \\ v_{11}u_{01}-u_{11}v_{01}=c, \qquad v_{11}u_{10}-u_{11}v_{10}=c'. \end{cases} \tag{3}$$

Korzystając z tych oznaczeń, przekształcamy ostatnie równanie. Znajdziemy:

$$\left(u_{10}+u_{01}\frac{dy}{dx}\right)^3\cdot\frac{d^2v}{du^2}=a\frac{d^2y}{dx^2}+a\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+(b+2c)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(b'+2c')\frac{dy}{dx}+a'.$$

Jeżeli nadto zwrócimy uwagę na równanie (1) i na tę okoliczność, że wyznacznik a jest odmienny od zera, otrzymamy:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+A\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+(B+2C)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(B'+2C')\frac{dy}{dx}+A'=0, \tag{4}$$

gdzie:

$$\begin{cases} \frac{a}{a}=A, \qquad \frac{a'}{a}=A'; \\ \frac{b}{a}=B, \qquad \frac{b'}{a}=B'; \\ \frac{c}{a}=C, \qquad \frac{c'}{a}=C'. \end{cases} \tag{5}$$

W dalszym ciągu podamy warunki konieczne i wystarczające na to, aby równanie kształtu (4) zapomocą przekształceń (2) przechodziło w równanie (1) i, przypuszczając, że warunki te są spełnione, wskażemy sposób wyznaczenia tego przekształcenia, a tem samem całkowania równania (4).

II. Wyznaczmy grupę przekształceń, która pozostawia bez zmiany równanie $\frac{d^2v}{du^2}=0$. Oznaczmy jej ogólne, nieskończenie małe przekształcenie, symbolem:

$$Wf=\xi\frac{\partial f}{\partial u}+\eta\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby równanie $\frac{d^2v}{du^2}=0$, dopuszczało to nieskończenie małe przekształcenie, jest następujący tożsamościowy związek:

$$\eta_{20}+\left[2\eta_{11}-\xi_{20}\right]\frac{dv}{du}+\left[\eta_{02}-2\xi_{11}\right]\left(\frac{dv}{du}\right)^2-\xi_{02}\left(\frac{dv}{du}\right)^3$$
$$+\left[\eta_{01}-2\xi_{10}-3\xi_{01}\frac{dv}{du}\right]\cdot\frac{d^2v}{du^2}=0$$

przy jakichkolwiek wartościach u, v, $\frac{dv}{du}$, a przy $\frac{d^2v}{du^2}$ równem zeru. Stąd otrzymujemy układ równań cząstkowych, które określają ξ i η:

$$\eta_{20}=0;\quad 2\eta_{11}-\xi_{20}=0;\quad \eta_{02}-2\xi_{11}=0;\quad \xi_{02}=0.$$

Najogólniejsze rozwiązania tych równań są:

$$\xi=e_1+e_3u+e_4v+e_7u^2+e_8uv$$
$$\eta=e_2+e_5u+e_6v+e_7uv+e_8v^2,$$

gdzie wielkości e przedstawiają stałe dowolne. Symbol zatem na nieskończenie małe przekształcenie grupy, przedstawi się w formie:

$$Wf=e_1\frac{\partial f}{\partial u}+e_2\frac{\partial f}{\partial v}+e_3u\frac{\partial f}{\partial u}+e_4v\frac{\partial f}{\partial u}+e_5u\frac{\partial f}{\partial v}+e_6v\frac{\partial f}{\partial v}+e_7\left(u^2\frac{\partial f}{\partial u}+uv\frac{\partial f}{\partial v}\right)+e_8\left(uv\frac{\partial f}{\partial u}+v^2\frac{\partial f}{\partial v}\right). \tag{6}$$

Jeżeli na oznaczenie parametrów dowolnych wprowadzimy literę C, to skończone równania tejże grupy otrzymają postać:

$$u'=\frac{c_1u+c_2v+c_3}{c_4u+c_5v+c_6};\quad v'=\frac{c_7u+c_8v+c}{c_4u+c_5v+c_6}. \tag{7}$$

Zwróćmy się do wyznaczenia niezmienników różniczkowych. W tym celu uzupełniamy grupę co do pochodnych pierwszego i drugiego rzędu funkcyj u i v względem zmiennych x i y, zakładając, że zmienne te nie podlegają żadnym przekształceniom, i znajdujemy następujący układ równań różniczkowych, którym czynią zadość niezmienniki:

$$W_1=\frac{\partial f}{\partial u}=0,\quad W_2=\frac{\partial f}{\partial v}=0,$$

$$W_3=u_{10}\frac{\partial f}{\partial u_{10}}+u_{01}\frac{\partial f}{\partial u_{01}}+u_{20}\frac{\partial f}{\partial u_{20}}+u_{11}\frac{\partial f}{\partial u_{11}}+u_{02}\frac{\partial f}{\partial u_{02}}=0,$$

$$W_4=v_{10}\frac{\partial f}{\partial u_{10}}+v_{01}\frac{\partial f}{\partial u_{01}}+v_{20}\frac{\partial f}{\partial u_{20}}+v_{11}\frac{\partial f}{\partial u_{11}}+v_{02}\frac{\partial f}{\partial u_{02}}=0$$

$$W_5=u_{10}\frac{\partial f}{\partial v_{10}}+u_{01}\frac{\partial f}{\partial v_{01}}+u_{20}\frac{\partial f}{\partial v_{20}}+u_{11}\frac{\partial f}{\partial v_{11}}+u_{02}\frac{\partial f}{\partial v_{02}}=0,$$

$$W_6=v_{10}\frac{\partial f}{\partial v_{10}}+v_{01}\frac{\partial f}{\partial v_{01}}+v_{20}\frac{\partial f}{\partial v_{20}}+v_{11}\frac{\partial f}{\partial v_{11}}+v_{02}\frac{\partial f}{\partial v_{02}}=0,$$

$$W_7=2u^2_{10}\frac{\partial f}{\partial u_{20}}+2u_{10}u_{01}\frac{\partial f}{\partial u_{11}}+2u^2_{01}\frac{\partial f}{\partial u_{02}}+2u_{10}v_{10}\frac{\partial f}{\partial v_{20}}$$
$$+(u_{10}v_{01}+v_{10}u_{01})\frac{\partial f}{\partial v_{11}}+2u_{01}v_{01}\frac{\partial f}{\partial v_{02}}=0,$$

$$W_8=2v^2_{10}\frac{\partial f}{\partial v_{20}}+2v_{10}v_{01}\frac{\partial f}{\partial v_{11}}+2v^2_{01}\frac{\partial f}{\partial v_{02}}+2u_{10}v_{10}\frac{\partial f}{\partial u_{20}}$$
$$+(u_{10}v_{01}+v_{10}u_{01})\frac{\partial f}{\partial u_{11}}+2u_{01}v_{01}\frac{\partial f}{\partial u_{02}}=0.$$

Równanie W mają własności:

a) tworzą układ zupełny,

b) są niezależne, gdyż W_3 i W_4 są niezależne względem $\frac{\partial f}{\partial u_{10}}$, $\frac{\partial f}{\partial u_{01}}$, W_5 i W_6 względem $\frac{\partial f}{\partial v_{10}}$, $\frac{\partial f}{\partial v_{01}}$, a W_7 i W_8 względem $\frac{\partial f}{\partial u_{11}}$, $\frac{\partial f}{\partial v_{11}}$.

Uwzględniając te okoliczności, dochodzimy do wniosku:

Dla wyznaczenia niezmienników pierwszego rzędu otrzymujemy, po skreśleniu drugich pochodnych, układ zupełny czterech równań różniczkowych niezależnych, a zatem niezmienniki pierwszego rzędu wcale nie istnieją. Dla wyznaczenia zaś niezmienników drugiego rzędu, otrzymujemy układ zupełny sześciu równań różniczkowych niezależnych o dziesięciu zmiennych. Mamy zatem cztery niezależne niezmienniki drugiego rzędu. Wyrażenia na nie podajemy bez całkowania:

$$\left\{\begin{array}{ll} I=\dfrac{a}{\alpha}=A; & G=\dfrac{b'+2c'}{\alpha}=B'+2C' \\ K=\dfrac{b+2c}{\alpha}=B+2C; & H=\dfrac{a'}{\alpha}=A'. \end{array}\right. \tag{9}$$

Niezależność wielkości I, K, G, H wypływa stąd, że zależą one odpowiednio od następujących pochodnych drugiego rzędu:

$$u_{02}v_{02};\quad u_{02}v_{02}u_{11}v_{11};\quad u_{20}v_{20};\quad u_{20}v_{20}u_{11}v_{11}.$$

III. Uważajmy grupę, która jest podgrupą grupy W, z najogólniejszem przekształceniem nieskończenie małem:

$$W^{(1)}f=e^{(1)}_1\frac{\partial f}{\partial u}+e^{(1)}_2\frac{\partial f}{\partial u}+e^{(3)}_3u\frac{\partial f}{\partial u}+e^{(1)}_4v\frac{\partial f}{\partial u}+e^{(1)}_5u\frac{\partial f}{\partial v}+e^{(1)}_6v\frac{\partial f}{\partial v}. \tag{10}$$

Jeśli uzupełnimy ją co do pochodnych pierwszego i drugiego rzędu funkcyj u i v względem zmiennych x i y, które nie podlegają żadnym przekształceniom, to dla wyznaczenia niezmienników różniczkowych pierwszego i drugiego rzędu, otrzymamy równania:

$$
(11)\quad \left\{\begin{aligned}
&W_1^{(1)}=\frac{\partial f}{\partial u}=0; \quad W_2^{(1)}f=\frac{\partial f}{\partial v}=0,\\
&W_3^{(1)}=u_{10}\frac{\partial f}{\partial u_{10}}+u_{01}\frac{\partial f}{\partial u_{01}}+u_{20}\frac{\partial f}{\partial u_{20}}+u_{11}\frac{\partial f}{\partial u_{11}}+u_{02}\frac{\partial f}{\partial u_{02}}=0,\\
&W_4^{(1)}=v_{10}\frac{\partial f}{\partial u_{10}}+v_{01}\frac{\partial f}{\partial u_{01}}+v_{20}\frac{\partial f}{\partial u_{20}}+v_{11}\frac{\partial f}{\partial u_{11}}+v_{02}\frac{\partial f}{\partial u_{02}}=0,\\
&W_5^{(1)}=u_{10}\frac{\partial f}{\partial v_{10}}+u_{01}\frac{\partial f}{\partial v_{01}}+u_{20}\frac{\partial f}{\partial v_{20}}+u_{11}\frac{\partial f}{\partial v_{11}}+u_{02}\frac{\partial f}{\partial v_{02}}=0\\
&W_6^{(1)}=v_{10}\frac{\partial f}{\partial v_{10}}+v_{01}\frac{\partial f}{\partial v_{01}}+v_{20}\frac{\partial f}{\partial v_{20}}+v_{11}\frac{\partial f}{\partial v_{11}}+v_{02}\frac{\partial f}{\partial v_{02}}=0.
\end{aligned}\right.
$$

Z równań powyższych wynika, iż niema niezmienników pierwszego rzędu, a natomiast istnieje sześć niezależnych niezmienników drugiego rzędu:

$$
(12)\quad A^{(1)}=A;\quad B^{(1)}=B;\quad C^{(1)}=C;\quad A'^{(1)}=A';\quad B'^{(1)}=B';\quad C'^{(1)}=C'.
$$

Aby obliczyć niezmienniki trzeciego rzędu, weźmy cząstkowe pochodne wyrażeń (12) względem x i y.

Otrzymamy:

$$
(13)\quad \left\{\begin{aligned}
&A_{10}=\frac{v_{12}u_{01}-u_{12}v_{01}}{a}+AB'-CB; \quad A_{01}=\frac{v_{03}u_{01}-u_{03}v_{01}}{a}-A(B-C),\\
&B_{10}=\frac{v_{12}u_{10}-u_{12}v_{10}}{a}+AA'-BC'; \quad B_{01}=\frac{v_{03}u_{10}-u_{03}v_{10}}{a}+AC'-B^2,\\
&C_{10}=\frac{v_{21}u_{01}-u_{21}v_{01}}{a}+C(B'-C'); \quad C_{01}=\frac{v_{12}u_{01}-u_{12}v_{01}}{a}+C^2-AC',\\
&A'_{10}=\frac{v_{30}u_{10}-u_{30}v_{10}}{a}+A'(B'-C'); \quad A'_{01}=\frac{v_{21}u_{10}-u_{21}v_{10}}{a}+B'C'-BA',\\
&B'_{10}=\frac{v_{30}u_{01}-u_{30}v_{01}}{a}+B'^2-A'C; \quad B'_{01}=\frac{v_{21}u_{01}-u_{21}v_{01}}{a}+CB'-AA',\\
&C'_{10}=\frac{v_{21}u_{10}-u_{21}u_{10}}{a}+CA'-C'^2; \quad C'_{01}=\frac{v_{12}u_{10}-u_{12}v_{10}}{a}-C'(B-C).
\end{aligned}\right.
$$

Ponieważ niezależnych od siebie niezmienników trzeciego rzędu jest ośm, przeto cztery z powyższych wyrażeń powinny dać się przedstawić zapomocą innych. Łatwo sprawdzić, iż rzeczywiście mamy:

$$
(14)\quad \left\{\begin{aligned}
&A_{10}-C_{01}=A(B'+C')-C(B+C),\\
&C_{10}-B'_{01}=AA'-CC',\\
&A'_{01}-C'_{10}=C'(B'+C')-A'(B+C),\\
&B_{10}-C'_{01}=AA'-CC'.
\end{aligned}\right.
$$

Przypuśćmy, że do wyrażenia (10) chcemy wprowadzić nowe zmienne u', v', określone zapomocą równań:

$$
(15)\quad u'=\frac{l_1u+m_1v+n_1}{lu+mv+n}; \quad v'=\frac{l_2u+m_2v+n_2}{lu+mv+n},
$$

gdzie przez l, m, n oznaczyliśmy wielkości stałe, spełniające warunek:

$$
\begin{vmatrix} l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \neq 0.
$$

Rozwiązania tych równań względem u i v są:

$$
(16)\quad u=\frac{\alpha_1u'+\beta_1v'+\gamma_1}{\alpha u'+\beta v'+\gamma}; \quad v=\frac{\alpha_2u'+\beta_2v'+\gamma_2}{\alpha u'+\beta v'+\gamma},
$$

przyczem na α, β, γ mamy wzory następujące:

$$
\begin{aligned}
&\alpha=l_2m-m_2l; \quad \beta=lm_1-ml_1; \quad \gamma=l_1m_2-m_1l_2,\\
&\alpha_1=m_2n-n_2m; \quad \beta_1=mn_1-nm_1; \quad \gamma_1=m_1n_2-n_1m_2,\\
&\alpha_2=n_2l-l_2n; \quad \beta_2=nl_1-ln_1; \quad \gamma_2=n_1l_2-l_1n_2.
\end{aligned}
$$

Wstawmy do symbolu (10) wartości na zmienne u i v, dane przez równości (16). Jeśli wszędzie pisać będziemy zamiast zmiennych u', v', zmienne u i v, to znajdziemy wyrażenie formy:

$$
(17)\quad \begin{aligned}
W^{(2)}f=\;&e_1^{(2)}\frac{\partial f}{\partial u}+e_2^{(2)}\frac{\partial f}{\partial v}+e_3^{(2)}u\frac{\partial f}{\partial u}+e_4^{(2)}v\frac{\partial f}{\partial u}+e_5^{(2)}u\frac{\partial f}{\partial v}+e_6^{(2)}v\frac{\partial f}{\partial v}\\
&+e_7^{(2)}\left(u^2\frac{\partial f}{\partial u}+uv\frac{\partial f}{\partial v}\right)+e_8^{(2)}\left(uv\frac{\partial f}{\partial u}+v^2\frac{\partial f}{\partial v}\right),
\end{aligned}
$$

gdzie stałe $e_1^{(2)}, e_2^{(2)} \ldots e_8^{(2)}$ zależą od sześciu stałych dowolnych. Aby otrzymać niezmienniki tej grupy, wystarczy wykonać tę samą zmianę zmiennych w niezmiennikach (12). Rachunki znacznie się uproszczą, jeżeli zauważymy, że wyrażenia A, $B+2C$, A', $B'+2C'$ są niezmienne względem przekształceń, określonych przez równania (16). Wyrażenia przekształcone oznaczać będziemy temi samemi literami z dodaniem dwójki w nawiasie, co pozwala napisać następujące równości:

$$
(18)\quad \left\{\begin{aligned}
A^{(2)} &= \frac{v'_{02}u'_{01}-u'_{02}v'_{01}}{u'_{10}v'_{01}-v'_{10}u'_{01}}; \quad A'^{(2)} = \frac{v'_{20}u'_{10}-u'_{20}v'_{10}}{u'_{10}v'_{01}-v'_{10}u'_{01}},\\
B^{(2)}+2C'^{(2)} &= \frac{v'_{02}u'_{10}-u'_{02}v'_{10}}{u'_{10}v'_{01}-v'_{10}u'_{01}} + 2\,\frac{v'_{11}u'_{01}-u'_{11}v'_{01}}{u'_{10}v'_{01}-v'_{10}u'_{01}},\\
B'^{(2)}+2C'^{(2)} &= \frac{v'_{20}u'_{01}-u'_{20}v'_{01}}{u'_{10}v'_{01}-v'_{10}u'_{01}} + 2\,\frac{v'_{11}u'_{10}-u'_{11}v'_{10}}{u'_{10}v'_{01}-v'_{10}u'_{01}}.
\end{aligned}\right.
$$

Uważajmy wyznacznik a i utwórzmy jego cząstkowe pochodne względem x i y. Znajdziemy:

$$
B - C = \frac{a_{01}}{a}; \qquad C' - B' = \frac{a_{10}}{a}.
$$

Uwzględniając związki:

$$
\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \frac{D(u'v')}{D(x,y)} \cdot \frac{D(u,v)}{D(u',v')},
$$

$$
\frac{D(u,v)}{D(u'v')} = \frac{1}{(\alpha u'+\beta v'+\gamma)^3},
$$

z łatwością dochodzimy do wzorów:

$$
-B'^{(2)} + C'^{(2)} = \left(\frac{a_{10}}{a}\right)^{(2)} = \frac{u'_{20}v'_{01} - u'_{01}v'_{20}}{u'_{10}v'_{01} - v'_{10}u'_{01}} + \frac{v'_{11}u'_{10} - u'_{11}v'_{10}}{u'_{10}v'_{01} - v'_{10}u'_{01}} - 3\,\frac{\alpha u'_{10} + \beta v'_{10}}{\alpha u' + \beta v' + \gamma}
$$

$$
B^{(2)} - C^{(2)} = \left(\frac{a_{01}}{a}\right)^{(2)} = \frac{u'_{11}v'_{01} - v'_{11}u'_{01}}{u'_{10}v'_{01} - v'_{10}u'_{01}} + \frac{u'_{10}v'_{02} - v'_{10}u'_{02}}{u'_{10}v'_{01} - v'_{10}u'_{01}} - 3\,\frac{\alpha u'_{01} + \beta v'_{01}}{\alpha u' + \beta v' + \gamma},
$$

a stąd, na podstawie związku (18) otrzymujemy następujące wyrażenie na niezmienniki grupy (17), jeśli zamiast $u'v'$ położymy u, v i uwzględnimy wzory (3), (5):

$$
(19)\quad \left\{\begin{aligned}
A^{(2)} &= A; & A'^{(2)} &= A',\\
B^{(2)} &= B - 2\,\frac{\alpha u_{01}+\beta v_{01}}{\alpha u+\beta v+\gamma}; & B'^{(2)} &= B' + 2\,\frac{\alpha u_{10}+\beta v_{10}}{\alpha u+\beta v+\gamma};\\
C^{(2)} &= C + \frac{\alpha u_{01}+\beta v_{01}}{\alpha u+\beta v+\gamma}; & C'^{(2)} &= C' - \frac{\alpha u_{10}+\beta v_{10}}{\alpha u+\beta v+\gamma}.
\end{aligned}\right.
$$

Zastosujemy powyższe wyniki do dwu przypadków szczególnych:

I. $\alpha = 1$; $\beta_2 = 1$; $\gamma_1 = -1$; pozostałe α, β, γ równe zeru.
II. $\alpha_1 = 1$; $\beta = 1$; $\gamma_2 = -1$; pozostałe α, β, γ równe zeru.

Dla przypadku I mamy:

$$
W^{(3)}f = e_2^{(3)}\frac{\partial f}{\partial v} + e_3^{(3)}u\frac{\partial f}{\partial u} + e_5^{(3)}u\frac{\partial f}{\partial v} + e_6^{(3)}v\frac{\partial f}{\partial v} + e_7^{(3)}\left(u^2\frac{\partial f}{\partial u} + uv\frac{\partial f}{\partial v}\right) + e_8^{(3)}\left(uv\frac{\partial f}{\partial u} + v^2\frac{\partial f}{\partial v}\right)
$$

wraz z niezmiennikami:

$$
(20)\quad \left\{\begin{aligned}
A^{(3)} &= A & A'^{(3)} &= A'\\
B^{(3)} &= B - 2\,\frac{u_{01}}{u} & B'^{(3)} &= B' + 2\,\frac{u_{10}}{u}\\
C^{(3)} &= C + \frac{u_{01}}{u} & C'^{(3)} &= C' - \frac{u_{10}}{u}.
\end{aligned}\right.
$$

Dla przypadku II mamy:

$$
W^{(4)}f = e_1^{(4)}\frac{\partial f}{\partial u} + e_3^{(4)}u\frac{\partial f}{\partial u} + e_4^{(4)}v\frac{\partial f}{\partial u} + e_6^{(4)}v\frac{\partial f}{\partial v} + e_7^{(4)}\left(u^2\frac{\partial f}{\partial u} + uv\frac{\partial f}{\partial v}\right) + e_8^{(4)}\left(uv\frac{\partial f}{\partial u} + v^2\frac{\partial f}{\partial v}\right)
$$

wraz z niezmiennikami:

$$
(21)\quad \left\{\begin{aligned}
A^{(4)} &= A & A'^{(4)} &= A'\\
B^{(4)} &= B - 2\,\frac{v_{01}}{v} & B'^{(4)} &= B' + 2\,\frac{v_{10}}{v}\\
C^{(4)} &= C + \frac{v_{01}}{v} & C'^{(4)} &= C' - \frac{v_{10}}{v},
\end{aligned}\right.
$$

gdzie cyfry (3), (4) są dodane dla wyróżnienia grup $W^{(3)}f$ i $W^{(4)}f$ i ich niezmienników.

IV. Postarajmy się wyznaczyć związki, którym czynią zadość spółczynniki równania (4). W tym celu uważajmy następujący układ:

$$
(22)\quad \left\{\begin{aligned}
C_{10} &= CC' - IH - \frac{1}{3} H_{01} + \frac{2}{3} K_{10}, \\
C'_{10} &= C'^2 - HC - GC' + H_{01} + HK, \\
C_{01} &= - C^2 + KC + IC' + I_{10} - IG, \\
C'_{01} &= - CC' + IH - \frac{1}{3} K_{10} + \frac{2}{3} G_{01},
\end{aligned}\right.
$$

który jest następstwem równań (9) i (14). Wyrugujemy z niego wielkości C i C', na mocy oczywistych tożsamości:

$$(C_{10})_{01} = (C_{01})_{10} \text{ i } (C'_{10})_{01} = (C'_{01})_{10}.$$

Znajdziemy:

$$
(23)\quad \left\{\begin{aligned}
& I_{20} - \frac{2}{3}K_{11} + \frac{1}{3}G_{02} + \frac{2}{3}KK_{19} - (IG)_{10} + (IH)_{01} + IH_{01} - \frac{1}{3}KG_{01} = 0, \\
& H_{02} - \frac{2}{3}G_{11} + \frac{1}{3}K_{20} - \frac{2}{3} GG_{01} + (HK)_{01} - (IH)_{10} - HI_{10} + \frac{1}{3}GK_{10} = 0.
\end{aligned}\right.
$$

Aby wykazać, że wielkości I, K, G, H nie spełniają żadnych innych związków, niezależnych od (23), jak tylko powyższe i wynikające z nich przez branie cząstkowych pochodnych, ustawmy tabelkę, zawierającą wyrażenia, za pośrednictwem których niezmienniki n—go rzędu zależą odpowiednio od pochodnych n-go rzędu.

$$I_{n-2,0}; \qquad I_{n-3,1}; \qquad I_{0,n-2},$$

$$\frac{v_{n-2,2}\, u_{01} - u_{n-2,2}\, v_{01}}{a}; \quad \frac{v_{n-3,3}\, u_{01} - u_{n-3,3}\, v_{01}}{a}; \quad \ldots \quad \frac{v_{0,n}\, u_{01} - u_{0n}\, v_{01}}{a}$$

$$K_{n-2,0}; \qquad K_{n-3,1}; \qquad K_{0,n-2}$$

$$\frac{v_{n-1,1}\, u_{01} - u_{n-1,1}\, v_{01}}{a}; \quad \frac{v_{n-2,2}\, u_{01} - u_{n-2,2}\, v_{01}}{a}; \quad \ldots \quad \frac{v_{1,n-1}\, u_{01} - u_{1,n-1}\, v_{01}}{a}$$

$$\frac{v_{n-2,2}\, u_{10} - u_{n-2}\, v_{10}}{a}; \quad \frac{v_{n-3,3}\, u_{10} - u_{n-3,3}\, v_{10}}{a}; \quad \ldots \quad \frac{v_{0n}\, u_{10} - u_{0n}\, v_{10}}{a}$$

$$G_{n-2,0}; \qquad G_{n-3,1}; \qquad G_{0,n-2}$$

$$\frac{v_{n,0}\, u_{01} - u_{n,0}\, v_{01}}{a}; \quad \frac{v_{n-1,1}\, u_{01} - u_{n-1,1}\, v_{01}}{a}; \quad \ldots \quad \frac{v_{2,n-2}\, u_{01} - u_{2,n-2}\, v_{01}}{a}$$

$$\frac{v_{n-1,1}\, u_{10} - u_{n-1,1}\, v_{10}}{a}; \quad \frac{v_{n-2,2}\, u_{10} - u_{n-2,2}\, v_{10}}{a}; \quad \ldots \quad \frac{v_{1,n-1}\, u_{10} - u_{1,n-1}\, v_{10}}{a}$$

$$H_{n-2,0}; \qquad H_{n-3,1}; \qquad H_{0,n-2}$$

$$\frac{v_{n,0}\, u_{10} - u_{n0}\, v_{10}}{a}; \quad \frac{v_{n-1,1}\, u_{10} - u_{n-1,1}\, v_{10}}{a}; \quad \ldots \quad \frac{v_{2,n-2}\, u_{10} - u_{2,n-2}\, v_{10}}{a}$$

Z tabelki powyższej wynika, jak łatwo sprawdzić, że niezmienniki:

$$
(24)\quad \left\{\begin{aligned}
& I_{n-2,0} \ldots I_{0,n-2}; \quad K_{n-2,0}; \quad K_{1,n-3}; \quad K_{0,n-2} \\
& H_{n-2,0} \ldots H_{0,n-2}; \quad G_{n-2,0}
\end{aligned}\right.
$$

są od siebie niezależne. Ponieważ liczba wszystkich niezależnych niezmienników n-go rzędu równa się podwójnej liczbie pochodnych n-go rzędu funkcyi o dwu zmiennych, przeto, ze względu na to, iż w układzie (24) ilość wielkości I, K, G, H wynosi $2(n-1)+4=2(n+1)$, wnioskujemy, że układ (24) zawiera wszystkie niezmienniki niezależne; a zatem niezmienniki:

$$K_{n-3,1} \ldots K_{2,n-4}; \quad G_{n-3,1} \ldots G_{0,n-2}$$

mogą wyrażać się przez poprzednie i otrzymujemy w ten sposób $2(n-3)$ związków n-go rzędu. Jeśli nadto zwrócimy uwagę na tę okoliczność, że przez branie cząstkowych pochodnych w układzie (23) otrzymujemy również $2(n-3)$ związków n-go rzędu, to dochodzimy do wniosku, iż wielkości I, H, K, G nie spełniają żadnych innych związków, oprócz (23) i tych, które wynikają z nich przez różniczkowanie. Stąd możemy wypowiedzieć twierdzenie następujące:

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby równanie (4) zapomocą przekształcenia (2) przechodziło w równanie (1), jest spełnienie związków (23), gdzie I, G, H, K są spółczynnikami równania (4).

V. Załóżmy, że spółczynniki równania (4) spełniają związki (23) i postarajmy się wyznaczyć wzory na przekształcenie (2). Posłużą nam do tego następujące równania różniczkowe:

$$
(25)\qquad \begin{cases}
C_{10} = CC' - IH - \frac{1}{3} G_{01} + \frac{2}{3} K_{10}, \\
C'_{10} = C'^2 - HC - GC' + H_{01} + HK, \\
C_{01} = - C^2 + KC + IC' + I_{10} - IG, \\
C'_{01} = - CC' + IH - \frac{1}{3} K_{10} + \frac{2}{3} G_{01}.
\end{cases}
$$

Równania powyższe dadzą się sprowadzić do równań liniowych, jednorodnych, zapomocą podstawienia:

$$
(26)\qquad C = \frac{L}{N}; \quad C' = \frac{M}{N},
$$

przyczem na funkcyę N nałożymy warunki:

$$
(27)\qquad \begin{cases}
N_{10} = - M + \frac{1}{3} GN, \\
N_{01} = L - \frac{1}{3} KN.
\end{cases}
$$

Z równań (25), na podstawie wzorów (26) i (27), otrzymamy:

$$
(28)\qquad \begin{cases}
L_{10} = \frac{1}{3} GL + \left(- IH - \frac{1}{3} G_{01} + \frac{2}{3} K_{10}\right) N, \\
M_{10} = - HL - \frac{2}{3} GM + (H_{01} + HK) N, \\
N_{10} = - M + \frac{1}{3} GN, \\
L_{01} = \frac{2}{3} KL + IM + (I_{10} - IG) N, \\
M_{01} = - \frac{1}{3} KM + \left(IH - \frac{1}{3} K_{10} + \frac{2}{3} G_{01}\right) N, \\
N_{01} = L - \frac{1}{3} KN.
\end{cases}
$$

Wyznaczmy warunki całkowalności tych równań. Wiadomo, że układ (28) można zastąpić układem równań cząstkowych:

$$
X(\varphi) = L_{10} \frac{\partial \varphi}{\partial L} + M_{10} \frac{\partial \varphi}{\partial M} + N_{10} \frac{\partial \varphi}{\partial N} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,
$$

$$
Y(\varphi) = L_{01} \frac{\partial \varphi}{\partial L} + M_{01} \frac{\partial \varphi}{\partial M} + N_{01} \frac{\partial \varphi}{\partial N} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,
$$

gdzie zamiast $L_{10}, M_{10}, N_{10}, L_{01}, M_{01}, N_{01}$ należy wstawić wartości (28). Łatwo dostrzedz, że układ (28) jest całkowalny wtedy i tylko wtedy, gdy ostatni układ dwóch równań jest układem J a c o b i e g o. Lecz po odpowiednich uproszczeniach otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
& X(Y\varphi) - Y(X\varphi) = (XY) \\
& = N \left\{ I_{20} - \frac{2}{3} K_{11} + \frac{1}{3} G_{02} + \frac{2}{3} KK_{10} - (IG)_{10} + (IH)_{01} + IH_{01} - \frac{1}{3} KG_{01} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial L} \\
& + N \left\{ H_{02} - \frac{2}{3} G_{11} + \frac{1}{3} K_{20} - \frac{2}{3} GG_{01} + (HK)_{01} - (IH)_{10} - HI_{10} + \frac{1}{3} GK_{10} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial M} \\
& + N \left\{ - CC' + \frac{1}{3} KC' + \frac{1}{3} CG - \frac{1}{9} KG + CC' - \frac{1}{3} GC - \frac{1}{3} KC' + \frac{1}{9} KG \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial N},
\end{aligned}
$$

a stąd, uwzględniając związki (23):

$$
(XY) = 0.
$$

Całkowanie układu (28) sprowadza się na podstawie znanego przekształcenia A. M a y e r a, do całkowania równania różniczkowego, liniowego, jednorodnego, trzeciego rzędu, o jednej zmiennej niezależnej, w którem figuruje parametr dowolny. Połóżmy:

$$
y = \eta + (x - \varepsilon) t,
$$

przyczem przypuszczamy, że układ:

$$
(29)\qquad \begin{cases}
dL = L_{10}\, dx + L_{01}\, dy, \\
dM = M_{10}\, dx + M_{01}\, dy, \\
dN = N_{10}\, dx + N_{01}\, dy
\end{cases}
$$

w okolicy punktu $x = \varepsilon$, $y = \eta$ zachowuje się regularnie. Jak wiadomo, po wprowadzeniu zmiennej t, wystarczy zająć się układem

$$
(30)\qquad \begin{cases}
\frac{\partial L}{\partial x} = L_{10} + L_{01} t, \\
\frac{\partial M}{\partial x} = M_{10} + M_{01} t, \\
\frac{\partial N}{\partial x} = N_{10} + N_{01} t,
\end{cases}
$$

aby otrzymać całkę ogólną układu (29). Uważajmy równania:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = L_{20} + 2L_{11}t + L_{02}t^2 ,$$

$$\frac{\partial^3 L}{\partial x^3} = L_{30} + 3L_{21}t + 3L_{12}t^2 + L_{03}t^3 .$$

Ze związków (28) wypływa natychmiast, że otrzymujemy równania formy:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \varphi_1(x,t)\, L + \varphi_2(x,t) M + \varphi_3(x,t) N ,$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \psi_1(x,t)\, L + \psi_2(x,t) M + \psi_3(x,t) N ,$$

$$\frac{\partial^3 L}{\partial x^3} = \chi_1(x,t)\, L + \chi_2(x,t) M + \chi_3(x,t) N .$$

Rugując z tych równań M i N, otrzymujemy równanie, o które nam chodzi:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial L}{\partial x} - \varphi_1 L & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \psi_1 L & \psi_2 & \psi_3 \\ \frac{\partial^3 L}{\partial x^3} - \chi_1 L & \chi_2 & \chi_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{31}$$

Z równania tego wynika, że L da się przedstawić w sposób następujący:

$$L = \pi_1 f_1(xy) + \pi_2 f_2(xy) + \pi_3 f_3(x_1 y) ,$$

gdzie $\pi_1 = (L)_{x=\varepsilon}$, $\pi_2 = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x}\right)_{x=\varepsilon}$, $\pi = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\right)_{x=\varepsilon}$, a $f_1 f_2 f_3$ są określone funkcye zmiennych x i y. Na podstawie związków (28) widzimy, że co się tyczy funkcyj M i N, to dadzą się one analogicznie przedstawić zapomocą tychże samych stałych $\pi_1 \pi_2 \pi_3$ i pewnych funkcyj zmiennych x i y, co pociąga za sobą, że C i C', określone równościami (26), zawierają tylko dwie stałe dowolne.

Zwróćmy się do wyrażeń (20), które są niezmiennikami grupy $W^{(3)}f$. Widoczną jest rzeczą, że $C^{(3)}$ i $C'^{(3)}$ czynią zadość równaniom (25), podobnie jak C i C'; wykonawszy zatem raz całkowanie układu (25) a raczej (28), możemy wypisać wzory na wyrażenia $C^{(3)}$ i $C'^{(3)}$, które podobnie będą zawierać dwie stałe dowolne.

Ponieważ

$$C^{(3)} - C = \frac{u_{01}}{u} ; \quad C' - C'^{(3)} = \frac{u_{10}}{u} ,$$

przeto, wykonawszy kwadraturę, otrzymu'emy na u wyrażenie, które zawiera pięć stałych dowolnych. Z drugiej strony zauważmy, że wyrażenia $C^{(4)}$ i $C'^{(4)}$, należące do niezmienników grupy $W^{(4)}f$, spełniają równości (25). Możemy zatem podać wartości tych niezmienników zapomocą wzorów, w których figurują dwie stałe dowolne.

Na podstawie równań (21), mamy:

$$C^{(4)} - C = \frac{v_{01}}{v} ; \quad C' - C'^{4} = \frac{v_{10}}{v} ,$$

a stąd otrzymujemy już v po wykonaniu jednej kwadratury. W wyrażeniu na v figurować będzie pięć stałych dowolnych, z pomiędzy których dwie są te same, co w wyrażeniu na u. Wogóle więc u i v zawierają ośm różnych stałych dowolnych. Wykażemy, że rozwiązanie, któreśmy otrzymali, jest najogólniejsze. W tym celu zwróćmy się do równań, określających u i v:

$$\frac{v_{02} u_{01} - u_{02} v_{01}}{a} = A,$$

$$\frac{v_{02} u_{10} - u_{02} v_{10} + 2(v_{11} u_{01} - u_{11} v_{01})}{a} = B + 2C,$$

$$\frac{v_{20} u_{01} - u_{20} v_{01} + 2(v_{11} u_{10} - u_{11} v_{10})}{a} = B' + 2C' ,$$

$$\frac{v_{20} u_{10} - u_{20} v_{10}}{a} = A'.$$

Gdybyśmy niewiadome funkcye u i v rozwinęli na szeregi potęgowe, wówczas dla określenia spółczynników w tych rozwinięciach mielibyśmy cztery powyższe równania; widoczną jest zatem rzeczą, że wielkości następujących:

$$u \; u_{10} \; u_{01} \; u_{11} \qquad v \; v_{10} \; v_{01} \; v_{11}$$

określić z nich nie można, a że natomiast można określić wszystkie inne pochodne, jeśli na te przyjmiemy dowolne wartości. Wynika stąd, że najogólniejsze rozwiązanie ma ośm stałych dowolnych, istotnych.

Streszczając otrzymane wyniki, powiemy:

Aby otrzymać wzory na przekształcenie $u(x,y)$, $v(x,y)$, trzeba wykonać całkowanie równania różniczkowego zwyczajnego, trzeciego rzędu, przytem liniowego i jednorodnego, a następnie dwie kwadratury. Co się tyczy tych kwadratur, to można ich nie wykonywać. Aby to okazać, zestawmy następujące równości:

$$C^{(3)}-C=\frac{u_{01}}{u};\quad C'-C'^{(3)}=\frac{u_{10}}{u},$$
$$C^{(4)}-C=\frac{v_{01}}{v};\quad C'-C'^{(4)}=\frac{v_{10}}{v},$$
$$C^{(2)}-C=\frac{\alpha u_{01}+\beta v_{01}}{\alpha u+\beta v+\gamma};\quad C'-C'^{(2)}=\frac{\alpha u_{10}+\beta v_{10}}{\alpha u+\beta v+\gamma}.$$

Ostatnią równość otrzymaliśmy dzięki niezmiennikom (19) grupy $W^{(2)}f$. Ponieważ $C^{(2)}$ i $C'^{(2)}$ spełniają równania (25), przeto zawsze możemy podać wyrażenia na nie, w których będą figurowały dwie stałe dowolne. Znajdujemy w ten sposób układ sześciu równań liniowych względem u, v, u_{10}, u_{01}, v_{10}, v_{01}, na podstawie którego możemy wogóle za pomocą li tylko operacyj algebraicznych podać wyrażenia na u i v, zawierające ośm stałych dowolnych.

G. A. MILLER.

Groups in which the subgroup which involves all the substitutions omitting a given letter is regular.

(GRUPY, W KTÓRYCH PODGRUPA, OBEJMUJĄCA W SOBIE WSZYSTKIE PODSTAWIENIA Z WYŁĄCZENIEM DANEJ LITERY, JEST REGULARNA).

Many of the transitive substitution groups of low degrees have been determined by means of their subgroups involving all the substitutions which omit a given letter. It is customary to represent such a subgroup by G_1 when the entire group is represented by G. If G could be directly determined from G_1 we would have a method of constructing all the transitive groups of degree n whenever all those of the lower degrees are known. A number of theorems along this line have been published, especially for the case when G is a primitive group.[1]) In the present paper we consider the case when G_1 is a regular group.

If the degree of G_1 is $n-1$, n being the degree of G, it follows that G is a doubly transitive group of the smallest possible order. These groups have received considerable attention and have been extended along different lines. In particular, it has been proved that such a group cannot exist unless n is a power of a single prime and that G contains an abelian invariant subgroup of type (1, 1, 1, ...).[2]) Moreover, there is at least one

[1]) Cf. Quarterly Journal of Mathematics, vol. 28 (1896), p. 215.
[2]) Jordan, Liouville's Journal, vol. 17 (1872), p. 355.