K. ŻORAWSKI.

NOTIZEN AUS DEM GEBIETE DER DIFFERENTIAL-GEOMETRIE.

I. BEMERKUNG ÜBER TRANSLATIONSFLÄCHEN.

In den früheren Aufsätzen: „Notiz über Translationsflächen“ [1]) und „Über Krümmungseigenschaften der Scharen von Linienelementen[2]),“ haben wir unter anderem Bedingungen für den Fall aufgestellt, wenn zwei Curvenscharen auf einer Fläche die miteinander conjugierten Scharen von congruenten und gleichgestellten Curven bilden. Im folgenden wollen wir die Bedingungen dieser Tatsache direkt aus dem Umstande ableiten, dass man alsdann die Gleichungen der Fläche durch zweckmässige Einführung neuer Parameter auf die den Translationsflächen charakteristische Form bringen kann.

Eine Fläche:

$$x = x(u,v),\ \ y = y(u,v),\ \ z = z(u,v) \tag{1}$$

ist dann und nur dann eine Translationsfläche, wenn es möglich ist derartige neue Parameter:

$$u' = u'(u,v),\ \ v' = v'(u,v) \tag{2}$$

einzuführen, dass die Gleichungen der Fläche die einfache Form:

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(u') + \varphi_2(v'), \\ y &= \psi_1(u') + \psi_2(v'), \\ z &= \sigma_1(u') + \sigma_2(v'), \end{aligned} \tag{3}$$

[1]) Leipziger Berichte, Band LVII, 1905, S. 233—45.
[2]) Prace mat.-fiz., T. XVII, 1906, str. 55—6.

annehmen, d. h. dass die Coordinaten x, y, z sämtlich die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u' \partial v'} = 0 \tag{4}$$

befriedigen.

Um die Gleichungen zu bestimmen, denen u', v' genügen müssen, bemerke man zunächst, dass die Formeln:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial u'} &= \frac{1}{D}\frac{\partial v'}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial u'} = -\frac{1}{D}\frac{\partial v'}{\partial u}, \\ \frac{\partial u}{\partial v'} &= -\frac{1}{D}\frac{\partial u'}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial v'} = \frac{1}{D}\frac{\partial u'}{\partial u} \end{aligned} \tag{5}$$

stattfinden, in welchen mit D die Functionaldeterminante:

$$D = \frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} - \frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u}$$

bezeichnet worden ist. Auf Grund der Formeln (5) ergeben sich sogleich die Formeln:

$$\frac{\partial f}{\partial u'} = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial v'}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial v'} = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u}\right)$$

und aus jeder derselben erhält man durch Differentiation die Formel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial u' \partial v'} = -\frac{1}{D^2}\left[\frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial v}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \left(\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} + \frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right] \\ + \alpha\frac{\partial f}{\partial u} + \beta\frac{\partial f}{\partial v}, \end{aligned} \tag{6}$$

wobei statt der Berechnung der Coefficienten α und β, die definitive Formel für $\frac{\partial^2 f}{\partial u' \partial v'}$ in folgender Weise erhalten werden kann. Man führe die kürzere Bezeichnung:

$$\Omega f = \frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial v}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \left(\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} + \frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \tag{7}$$

ein und man bemerke, dass die Identität (6) insbesondere für $f = u', v'$ bestehen muss. Auf diese Weise kommt man auf das System von Gleichungen:

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial u' \partial v'} - \frac{\Omega f}{D^2} + \alpha\frac{\partial f}{\partial u} + \beta\frac{\partial f}{\partial v} = 0,$$

$$-\frac{\Omega u'}{D^2} + \alpha\frac{\partial u'}{\partial u} + \beta\frac{\partial u'}{\partial v} = 0,$$

$$-\frac{\Omega v'}{D^2} + \alpha\frac{\partial v'}{\partial u} + \beta\frac{\partial v'}{\partial v} = 0,$$

aus denen durch Elimination von α und β ergibt sich die Formel:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u' \partial v'} = -\frac{1}{D^3}\begin{vmatrix} \Omega f, & \frac{\partial f}{\partial u}, & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \Omega u', & \frac{\partial u'}{\partial u}, & \frac{\partial u'}{\partial v} \\ \Omega v', & \frac{\partial v'}{\partial u}, & \frac{\partial v'}{\partial v} \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Es muss die Determinante in (8) für $f = x, y, z$ verschwinden. Man erhält also ein System von drei Gleichungen, welches wir sogleich durch ein äquivalentes System ersetzen werden. Wenn man nämlich mit X, Y, Z die Richtungscosinus der positiven Normalen der Fläche bezeichnet und für die Summation in bezug auf drei Achsen des Coordinatensystems das Zeichen Σ in Anwendung bringt, so wird man unser System von Gleichungen durch drei Gleichungen von der Form:

$$\begin{vmatrix} p, & q, & r \\ \Omega u', & \frac{\partial u'}{\partial u}, & \frac{\partial u'}{\partial v} \\ \Omega v', & \frac{\partial v'}{\partial u}, & \frac{\partial v'}{\partial v} \end{vmatrix} = 0$$

ersetzen können, wo die Zeile p, q, r der Reihe nach die folgende ist:

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\Omega x, \quad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v},$$

$$\sum \frac{\partial x}{\partial v}\Omega x, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2,$$

$$\sum X\Omega x, \quad \sum X\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \sum X\frac{\partial x}{\partial v}.$$

Die zwei letzten Glieder der dritten Zeile sind gleich Null. Die zwei letzten Glieder der ersten und der zweiten Zeile sind die Fundamentalgrössen erster Ordnung, die wir der Reihe nach mir E, F, G bezeichnen. Alsdann sieht man mit Leichtigkeit ein, dass man unser System von drei Gleichungen folgendermassen darstellen kann:

$$D\sum\frac{\partial x}{\partial u}\Omega x+E\left(\frac{\partial u'}{\partial v}\Omega v'-\frac{\partial v'}{\partial v}\Omega u'\right)+F\left(\frac{\partial v'}{\partial u}\Omega u'-\frac{\partial u'}{\partial u}\Omega v'\right)=0,$$

$$D\sum\frac{\partial x}{\partial v}\Omega x+F\left(\frac{\partial u'}{\partial v}\Omega v'-\frac{\partial v'}{\partial v}\Omega u'\right)+G\left(\frac{\partial v'}{\partial u}\Omega u'-\frac{\partial u'}{\partial u}\Omega v'\right)=0,$$

$$\sum X\Omega x=0.$$

Die zwei ersten Gleichungen dieses Systems können in bezug auf $\Omega u'$ und $\Omega v'$ aufgelöst werden und man erhält:

$$\Omega u'=\frac{1}{EG-F^2}\left\{\frac{\partial u'}{\partial u}\sum\left(G\frac{\partial x}{\partial u}-F\frac{\partial x}{\partial v}\right)\Omega x+\frac{\partial u'}{\partial v}\sum\left(E\frac{\partial x}{\partial v}-F\frac{\partial x}{\partial u}\right)\Omega x\right\},$$

$$\Omega v'=\frac{1}{EG-F^2}\left\{\frac{\partial v'}{\partial u}\sum\left(G\frac{\partial x}{\partial u}-F\frac{\partial x}{\partial v}\right)\Omega x+\frac{\partial v'}{\partial v}\sum\left(E\frac{\partial x}{\partial v}-F\frac{\partial x}{\partial u}\right)\Omega x\right\}.$$

Um diese Gleichungen noch anders darzustellen, bemerke man, dass:

$$\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u},\quad \sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}=\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v},\quad \sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u},$$

$$\sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v},\quad \sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u},\quad \sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v},$$

und führe die Christoffel'schen Symbole:

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned}
&\begin{Bmatrix}1&1\\&1\end{Bmatrix}=\frac{G\dfrac{\partial E}{\partial u}+F\dfrac{\partial E}{\partial v}-2F\dfrac{\partial F}{\partial u}}{2(EG-F^2)},\quad \begin{Bmatrix}1&1\\&2\end{Bmatrix}=\frac{-F\dfrac{\partial E}{\partial u}+2E\dfrac{\partial F}{\partial u}-E\dfrac{\partial E}{\partial v}}{2(EG-F^2)},\\
&\begin{Bmatrix}1&2\\&1\end{Bmatrix}=\frac{G\dfrac{\partial E}{\partial v}-F\dfrac{\partial G}{\partial u}}{2(EG-F^2)},\quad \begin{Bmatrix}1&2\\&2\end{Bmatrix}=\frac{E\dfrac{\partial G}{\partial u}-F\dfrac{\partial E}{\partial v}}{2(EG-F^2)},\\
&\begin{Bmatrix}2&2\\&1\end{Bmatrix}=\frac{-F\dfrac{\partial G}{\partial v}+2G\dfrac{\partial F}{\partial v}-G\dfrac{\partial G}{\partial u}}{2(EG-F^2)},\quad \begin{Bmatrix}2&2\\&2\end{Bmatrix}=\frac{E\dfrac{\partial G}{\partial v}+F\dfrac{\partial G}{\partial u}-2F\dfrac{\partial F}{\partial v}}{2(EG-F^2)}
\end{aligned}\right.$$

ein. Wenn man sich nun der Bedeutung des Symbols Ωf erinnert und die folgenden Verkürzungen benutzt:

$$(10)\quad\left\{\begin{aligned}
Af&=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-\begin{Bmatrix}1&1\\&1\end{Bmatrix}\frac{\partial f}{\partial u}-\begin{Bmatrix}1&1\\&2\end{Bmatrix}\frac{\partial f}{\partial v},\\
Bf&=\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}-\begin{Bmatrix}1&2\\&1\end{Bmatrix}\frac{\partial f}{\partial u}-\begin{Bmatrix}1&2\\&2\end{Bmatrix}\frac{\partial f}{\partial v},\\
Cf&=\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}-\begin{Bmatrix}2&2\\&1\end{Bmatrix}\frac{\partial f}{\partial u}-\begin{Bmatrix}2&2\\&2\end{Bmatrix}\frac{\partial f}{\partial v}
\end{aligned}\right.$$

und zuletzt noch die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung einführt:

$$\sum X\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=L,\qquad \sum X\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}=M,\qquad \sum X\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=N,$$

so wird man unser System von Gleichungen in der Form:

$$(11)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial v}Au'-\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v}+\frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u}\right)Bu'+\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial u}Cu'=0,\\
&\frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial v}Av'-\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v}+\frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u}\right)Bv'+\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial u}Cv'=0,\\
&\frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial v}L-\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v}+\frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u}\right)M+\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial u}N=0
\end{aligned}\right.$$

ausdrücken können.

Dies sind die Bedingungen, die aufgestellt werden sollten, und wir gehen hier nicht näher darauf ein, wie aus ihnen die in den genannten Arbeiten befindlichen Bedingungen abgeleitet werden können.

II. ÜBER DIFFERENTIALINVARIANTEN DER FLÄCHE IN BEZUG AUF DIE LINEARE GRUPPE.

In der Abhandlung „Über die Differentialinvarianten der Fläche in bezug auf die lineare Gruppe und über Translationsflächen“ [1]) haben wir das Gesamtsystem der Differentialinvarianten der Haupttangentencurven in zwei Formen dargestellt. Die zweite dieser Formen ist auf Grund der ersten abgeleitet worden. In dieser Notiz wollen wir die zweite Form ohne

[1]) Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie. Classe des Sciences math. et natur. Decembre 1906. p. 865--901.

Benutzung der ersten aufstellen und werden dabei die Bezeichnungen der erwähnten Abhandlung in Anwendung bringen ohne dieselben hier zu besprechen.

Es handelt sich also darum, zu beweisen, dass das genannte Gesamtsystem von Differentialinvarianten in bezug auf die spezielle lineare Gruppe durch die Grössen T, P, Q und die Grössen gebildet wird, welche aus den letzteren durch Ausübung der Operationen Uf und Vf erhalten werden können und dass alle diese Grössen nur durch Relationen (53) der erwähnten Abhandlung und durch diejenigen, welche aus denselben durch Differentiationen und Eliminationen abgeleitet werden können, miteinander verbünden sind. Das analoge Resultat für die allgemeine lineare Gruppe unterscheidet sich von dem soeben erörtertem Resultate nur dadurch, dass die Grösse T selbst keine Differentialinvariante der allgemeinen linearen Gruppe ist.

Zum Zwecke unseres direkten Beweises wollen wir noch zwei Grössen einführen, nämlich:

$$a = \log(h^{\frac{1}{3}} k^{\frac{2}{3}}), \quad b = \log(h^{\frac{2}{3}} k^{\frac{1}{3}}).$$

Alsdann hat man:

$$h = e^{2b-a}, \quad k = e^{2a-b}$$

und ferner:

$$\omega = T + 2a + 2b.$$

Die Operationen Uf und Vf wird man in der Form:

$$Uf = e^{-a}\frac{\partial f}{\partial u}, \quad Vf = e^{-b}\frac{\partial f}{\partial v}$$

darstellen können und es ist leicht zu sehen, dass für P und Q die Ausdrücke:

$$P = U(b), \quad Q = V(a)$$

gelten.

Wir beschäftigen uns zunächst damit, die Relationen (29) der erwähnten Abhandlung in der Weise zu transformieren, dass man statt der Grössen k, h, ω die Grössen a, b, T einführt und statt der Differentiationen nach u und v die Operationen Uf und Vf benutzt. Die Relationen (29) sind aus (27) durch die Annahme entstanden worden, dass u, v Parameter der Haupttangentencurven sind. Man hat nämlich zwei Relationen:

$$\frac{\partial\beta'}{\partial u} - \frac{\partial\alpha'}{\partial v} + \left(\frac{\partial I_{11}}{\partial v} - I''_{02}\right)\alpha' - \left(\frac{\partial I_{11}}{\partial u} - 2I'_{20}\right)\beta' = 0,$$

$$\frac{\partial\beta''}{\partial v} - \frac{\partial\alpha''}{\partial u} + \left(\frac{\partial I_{11}}{\partial u} - I'_{20}\right)\alpha'' - \left(\frac{\partial I_{11}}{\partial v} - 2I''_{02}\right)\beta'' = 0,$$

in denen

$$I_{11} = \omega, \quad I'_{20} = \frac{1}{2}\omega_{10}, \quad I''_{02} = \frac{1}{2}\omega_{01},$$

$$\alpha' = \alpha'' = \frac{1}{2}\omega_{11} + hk,$$

$$\beta' = h_{10} + \frac{1}{2}h\omega_{10}, \quad \beta'' = k_{01} + \frac{1}{2}k\omega_{01}$$

zu setzen ist. Wir wollen in diese Grössen sogleich a, b und T einführen und auf diese Weise die fragliche Form der Relationen (29) ableiten.

Man hat zunächst die Formel:

$$I_{11} = \omega = T + 2a + 2b,$$

und es ergeben sich ferner die Ausdrücke:

$$I'_{20} = \frac{1}{2}\omega_{10} = \frac{1}{2}e^{a}[U(T) + 2U(a) + 2U(b)],$$

$$I''_{02} = \frac{1}{2}\omega_{01} = \frac{1}{2}e^{b}[V(T) + 2V(a) + 2V(b)].$$

Aus diesen Ausdrücken folgen nun leicht die Formeln:

$$\omega_{11} = e^{a+b}[VU(T) + 2VU(a) + 2VU(b) + V(a)U(T) + 2V(a)U(a) + 2V(a)U(b)],$$

$$\omega_{11} = e^{a+b}[UV(T) + 2UV(b) + 2UV(a) + U(b)V(T) + 2U(b)V(b) + 2U(b)V(a)],$$

denen man noch eine andere Form ertheilen kann. Wenn man nämlich die Beziehung (46) der erwähnten Abhandlung auf die Functionen a und b in Anwendung bringt, so ergeben sich die Relationen:

$$VU(a) + QU(a) = U(Q) + PQ,$$
$$UV(b) + PV(b) = V(P) + QP$$

und man erhält für ω_{11} leicht die Ausdrücke:

$$\omega_{11} = e^{a+b}\,[VU(T) + QU(T) + 2U(Q) + 2V(P) + 4PQ]\,,$$
$$\omega_{11} = e^{a+b}\,[UV(T) + PV(T) + 2V(P) + 2U(Q) + 4PQ]\,,$$

d. h. man bekommt für die Grösse:

$$\Omega = \frac{\omega_{11}}{hk}$$

die Formeln (52) der erwähnten Abhandlung, nähmlich:

$$\begin{aligned}\Omega &= VU(T) + QU(T) + 2U(Q) + 2V(P) + 4PQ\\ &= UV(T) + PV(T) + 2V(P) + 2U(Q) + 4PQ\,,\end{aligned}$$

wobei

$$\alpha' = \alpha'' = \left(\frac{1}{2}\,\Omega + 1\right) e^{a+b}.$$

Es ergibt sich ferner leicht:

$$\beta' = \frac{1}{2}\,e^{2b}\,[U(T) + 6P]\,,$$

$$\beta'' = \frac{1}{2}\,e^{2a}\,[V(T) + 6Q].$$

Alle erhaltenen Formeln erlauben nun die gewünschte Gestalt der Relationen (29) zu erhalten, man bekommt nämlich die Relationen:

$$\frac{1}{2}\,UU(T) + 3U(P) + P\,[U(T) + 6P] = \frac{1}{2}\,V(\Omega) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\,\Omega\right) V(T)\,,$$
$$\frac{1}{2}\,VV(T) + 3V(Q) + Q\,[V(T) + 6Q] = \frac{1}{2}\,U(\Omega) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\,\Omega\right) U(T)\,,$$

d. h. eben die Relationen (53), die am Anfang dieser Notiz erwähnt wurden.

Um nun den verlangten Beweis zu erhalten, wollen wir bemerken, dass die Differentialinvarianten der Haupttangentencurven nur von h, k, ω und deren Differentialquotienten verschiedener Ordnungen nach u und v abhängen können. Wenn man ferner beachtet, dass die Grössen a, b, T durch h, k, ω und umgekehrt die Grössen h, k, ω durch a, b, T ausdrückbar sind und dass Differentiationen nach u, v durch die Operationen Uf, Vf ersetzt werden können, so kann man sagen, dass die Differentialinvarianten der Haupttangentencurven jedenfalls durch a, b, T und Grössen ausgedrückt

werden können, welche aus den letzteren durch Ausführung der Operationen Uf, Vf sich ergeben. Man bemerke nun, dass Uf, Vf invariante Operationen gegenüber allen Transformationen der allgemeinen linearen Gruppe sind, dass die Grössen:

$$P = U(b), \quad Q = V(a), \quad U(T), \quad V(T)$$

Differentialinvarianten in bezug auf die allgemeine lineare Gruppe sind und dass die Grösse T Differentialinvariante in Bezug auf die spezielle, nicht aber in Bezug auf die allgemeine lineare Gruppe ist. Die in dem letzteren Satze angeführten Thatsachen können leicht unmittelbar constatiert werden und darauf brauchen wir nicht näher einzugehen. Wenn man nun auf die Grössen P, Q, T die Operationen Uf, Vf auf alle mögliche Weisen ausführt, so erhält man auch lauter Differentialinvarianten. Man kommt also zu dem am Anfang des gegenwärtigen Aufsatzes angegebenen System von Differentialinvarianten, welche die Relationen (53) der früheren Abhandlung und alle diejenigen Relationen erfüllen, die aus denselben durch alle möglichen Differentiationen und Eliminationen erhalten werden können. Es ist klar, dass die Differentialinvarianten dieses Systems keine weiteren Relationen erfüllen, da die Relationen (53) den Relationen (29) äquivalent sind und diese letzteren nothwendige und hinreichende Bedingungen für unsere Grössen h, k, ω sind

Es bleibt noch die Frage zu beantworten, ob dieses System von Differentialinvarianten das Gesamtsystem derselben bildet. Zu dem Zwecke bemerke man, dass von den Grössen a, b, T und Grössen, die durch Ausführung auf denselben der Operationen Uf, Vf entstehen, kommen in dem aufgestellten Systeme von Differentialinvarianten nur diejenigen nicht vor, welche in den Reihen:

$$\begin{aligned}&a,\ U(a),\ UU(a),\ UUU(a), \ldots \\ &b,\ V(b),\ VV(b),\ VVV(b), \ldots\end{aligned}$$

enthalten sind. Aber auf Grund der Formeln (32) der oben zitierten Abhandlung ergibt sich:

$$a = \log \sqrt{E} + \log\left(-g_1^{\frac{2}{3}}\, g_2^{\frac{1}{3}} \operatorname{cosec} \theta\right),$$
$$b = \log \sqrt{G} + \log\left(g_1^{\frac{1}{3}}\, g_2^{\frac{2}{3}} \operatorname{cosec} \theta\right)$$

und wir schliessen daraus, dass die zwei angeführten Reihen von Grössen beziehungsweise die Grössen:

$$\sqrt{E},\ r_1,\ r_1',\ r_1'', \ldots$$
$$\sqrt{G},\ r_2,\ r_2',\ r_2'', \ldots$$

enthalten. Wenn man daher die Eigenschaften der letzteren Grössen in Erinnerung bringt, so kommt man leicht zum Schlusse, dass die Grössen der zwei früheren Reihen in den Differentialinvarianten nicht vorkommen können. Auf diese Weise ist also bewiesen worden, dass das aufgestellte System von Differentialinvarianten das Gesamtsystem von Differentialinvarianten ausmacht.

III. ÜBER GEWISSE CURVENSCHAREN AUF FLÄCHEN DIE AUF ROTATIONSFLÄCHEN ABWICKELBAR SIND.

In dieser Notiz beschäftigen wir uns mit der Aufstellung solcher infinitesimaler Transformationen, die alle Linienelemente der Fläche und eine auf der Fläche gegebene Curvenschar invariant lassen, und mit Aufstellung der Bedingungen, unter welchen dies möglich ist. Es ist klar, dass dies jedenfalls nur auf Flächen, die auf Rotationsflächen abwickelbar sind, stattfinden kann. Der eigentliche Zweck dieser Notiz besteht also hauptsächlich in der Bestimmung der Bedingungen, welchen eine Curvenschar auf einer derartigen Fläche genügen muss, damit die genannten infinitesimalen Transformationen möglich seien. In dieser Darstellung gehen wir aber nicht von vornherein von der Voraussetzung aus, dass die Fläche auf eine Rotationsfläche abwickelbar ist, sondern gelangen dazu infolge unserer Entwickelungen, weil es uns für die betrachtete Aufgabe bequem zu sein scheint, nicht das für diese Kategorie von Flächen charakteristische Linienelement zu benutzten, sondern die vorgelegte Curvenschar und deren orthogonale Trajektorien als Parameterlinien zu wählen. Am Schlusse des Aufsatzes werden einige Bemerkungen über Curvenscharen auf allgemeinen Flächen angegeben.

1. Es sei auf einer Fläche ein krummliniges orthogonales Coordinatensystem u, v gegeben. Das Quadrat des Linienelementes dieser Fläche besitzt alsdann die Form:

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2.$$

Man betrachte ferner auf dieser Fläche eine infinitesimale Transformation:

$$\Omega f = p\frac{\partial f}{\partial u} + q\frac{\partial f}{\partial v}$$

und stelle zunächst die Bedingungen auf, dass diese infinitesimale Transformation alle Linienelemente der Fläche invariant lasse. Diese lauten:

$$2E\frac{\partial p}{\partial u} + \Omega(E) = 0,$$

$$E\frac{\partial p}{\partial v} + G\frac{\partial q}{\partial u} = 0,$$

$$2G\frac{\partial q}{\partial v} + \Omega(G) = 0.$$

Man stelle ausserdem die Bedingung auf, dass die infinitesimale Transformation Ωf die Curvenschar $v = \text{const.}$ invariant lasse. Diese Bedingung ist:

$$\frac{\partial q}{\partial u} = 0.$$

Es sind also die Bedingungen, unter welchen die infinitesimale Transformation Ωf alle Linienelemente der Fläche und die Curvenschar $v = \text{const.}$ invariant lässt, die folgenden:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &2E\frac{\partial p}{\partial u} + \Omega(E) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial v} = 0, \\ &\frac{\partial q}{\partial u} = 0, \quad 2G\frac{\partial q}{\partial v} + \Omega(G) = 0. \end{aligned}$$

Aus denselben folgt, dass auch die Curvenschar $u = \text{const.}$ eine invariante Curvenschar von Ωf ist, was im übrigen ohne weiteres klar ist.

Wir wollen die Bedingungen (1) umformen, indem wir die Differentiationen nach den Bogenlängen der Curvenscharen $v = \text{const.}$ und $u = \text{const.}$ durch die Formeln:

$$\frac{\partial f}{\partial s_1} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial f}{\partial u}, \qquad \frac{\partial f}{\partial s_2} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial f}{\partial v}$$

einführen und die Bezeichnungen:

$$\xi = p\sqrt{E}, \quad \eta = q\sqrt{G}$$

gebrauchen, wobei Ωf die Form:

$$\Omega f = \xi\frac{\partial f}{\partial s_1} + \eta\frac{\partial f}{\partial s_2}$$

annimmt. Alsdann erhalten die Bedingungen (1) die Form:

$$2E\frac{\partial \xi}{\partial s_1}+\frac{\partial E}{\partial s_2}\eta=0,\quad 2E\frac{\partial \xi}{\partial s_2}-\frac{\partial E}{\partial s_2}\xi=0,$$

$$2G\frac{\partial \eta}{\partial s_1}-\frac{\partial G}{\partial s_1}\eta=0,\quad 2G\frac{\partial \eta}{\partial s_2}+\frac{\partial G}{\partial s_1}\xi=0,$$

und wenn man noch die Bezeichnungen:

(2) $$g_1=\frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial s_2},\quad g_2=\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial s_1}$$

einführt, so ergibt sich für das System von Bedingungen (1) die Form:

(3) $$\begin{aligned}&\frac{\partial \xi}{\partial s_1}+g_1\eta=0,\quad \frac{\partial \xi}{\partial s_2}-g_1\xi=0,\\&\frac{\partial \eta}{\partial s_1}-g_2\eta=0,\quad \frac{\partial \eta}{\partial s_2}+g_2\xi=0.\end{aligned}$$

Die Coefficienten g_1 und g_2 sind geodätische Krümmungen der Curvenscharen $v=\text{const.}$ beziehungweise $u=\text{const.}$

2. Man beachte jetzt, dass wenn man für die Aufeinanderfolge der Differentiationen nach den Bogenlängen die Bezeichnungsweise:

$$\frac{\partial}{\partial s_l}\left(\frac{\partial f}{\partial s_k}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial s_k \partial s_l}$$

wählt, die identische Beziehung:

(4) $$\frac{\partial^2 f}{\partial s_1\partial s_2}-\frac{\partial^2 f}{\partial s_2\partial s_1}=g_2\frac{\partial f}{\partial s_2}-g_1\frac{\partial f}{\partial s_1}$$

stattfindet. Wenn man sie auf die Functionen ξ und η, die dem Systeme (3) genügen sollen, anwendet, so ergibt sich:

(5) $$\begin{aligned}&\frac{\partial g_1}{\partial s_1}\xi+\frac{\partial g_1}{\partial s_2}\eta=0,\\&\frac{\partial g_2}{\partial s_1}\xi+\frac{\partial g_2}{\partial s_2}\eta=0.\end{aligned}$$

Die geometrische Bedeutung dieser Gleichungen ist ohne weiteres klar, da die geodätischen Krümmungen bei der Biegung der Fläche un-

verändert bleiben. Man sieht, dass aus diesen Gleichungen in allen möglichen Fällen die Relation:

(6) $$\frac{\partial g_1}{\partial s_1}\frac{\partial g_2}{\partial s_2}-\frac{\partial g_1}{\partial s_2}\frac{\partial g_2}{\partial s_1}=0$$

folgt.

Wir setzen zuerst voraus, dass nicht alle beide Krümmungen g_1 und g_2 constant sind und es sei beispielsweise g_1 eine Function von u, v, die sich auf keine Constante reduziert. Alsdann kann man ξ und η folgendermassen ausdrücken:

(7) $$\xi=\lambda\frac{\partial g_1}{\partial s_2},\quad \eta=-\lambda\frac{\partial g_1}{\partial s_1},$$

wobei λ eine noch unbestimmte Function von u, v bezeichnet. Um λ zu bestimmen, setze man die Werte (7) in die Gleichungen (3) ein, woraus folgt:

(8) $$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial g_1}{\partial s_2}\frac{\partial \log\lambda}{\partial s_1}=g_1\frac{\partial g_1}{\partial s_1}-\frac{\partial^2 g_1}{\partial s_2\partial s_1},\\&\frac{\partial g_1}{\partial s_2}\frac{\partial \log\lambda}{\partial s_2}=g_1\frac{\partial g_1}{\partial s_2}-\frac{\partial^2 g_1}{\partial s_2^2},\\&\frac{\partial g_1}{\partial s_1}\frac{\partial \log\lambda}{\partial s_1}=g_2\frac{\partial g_1}{\partial s_1}-\frac{\partial^2 g_1}{\partial s_1^2},\\&\frac{\partial g_1}{\partial s_1}\frac{\partial \log\lambda}{\partial s_2}=g_2\frac{\partial g_1}{\partial s_2}-\frac{\partial^2 g_1}{\partial s_1\partial s_2}.\end{aligned}\right.$$

Es müssen also die Relationen:

$$\frac{\partial g_1}{\partial s_2}\left(g_2\frac{\partial g_1}{\partial s_1}-\frac{\partial^2 g_1}{\partial s_1^2}\right)-\frac{\partial g_1}{\partial s_1}\left(g_1\frac{\partial g_1}{\partial s_1}-\frac{\partial^2 g_1}{\partial s_2\partial s_1}\right)=0,$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial s_2}\left(g_2\frac{\partial g_1}{\partial s_2}-\frac{\partial^2 g_1}{\partial s_1\partial s_2}\right)-\frac{\partial g_1}{\partial s_1}\left(g_1\frac{\partial g_1}{\partial s_2}-\frac{\partial^2 g_1}{\partial s_2^2}\right)=0$$

bestehen, die durch die Identität:

$$g_1\frac{\partial g_1}{\partial s_1}-\frac{\partial^2 g_1}{\partial s_2\partial s_1}=g_2\frac{\partial g_1}{\partial s_2}-\frac{\partial^2 g_1}{\partial s_1\partial s_2}$$

auf die Form:

(9) $$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial g_1}{\partial s_2}\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\partial g_1}{\partial s_1}\right)-\frac{\partial g_1}{\partial s_1}\frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{\partial g_1}{\partial s_1}\right)=0,\\&\frac{\partial g_1}{\partial s_2}\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\partial g_1}{\partial s_2}\right)-\frac{\partial g_1}{\partial s_1}\frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{\partial g_1}{\partial s_2}\right)=0\end{aligned}\right.$$

gebracht werden können. Wir werden aber auch beweisen, dass diese Relationen für die Möglichkeit der Bestimmung der Function λ aus den Gleichungen (8) ausreichend sind. Da die Ableitungen $\frac{\partial g_1}{\partial s_1}$ und $\frac{\partial g_1}{\partial s_2}$ nicht alle beide identisch Null sind und die Relationen (9) bestehen, so genügen den Gleichungen (8) vollständig bestimmte Functionen für die Ableitungen $\frac{\partial \log\lambda}{\partial s_1}$ und $\frac{\partial \log\lambda}{\partial s_2}$. Es erübrigt also nur noch nachzuweisen, dass diese Functionen der Integrabilitätsbedingung genügen. Ist zunächst die Ableitung $\frac{\partial g_1}{\partial s_1}$ von Null verschieden, so werden die Differentialquotienten von $\log\lambda$ aus den zwei letzten der Gleichungen (8) zu bestimmen sein. Aus denselben folgt:

$$\frac{\partial \log\left(\lambda \frac{\partial g_1}{\partial s_1}\right)}{\partial s_1} = g_2, \quad \frac{\partial \log\left(\lambda \frac{\partial g_1}{\partial s_1}\right)}{\partial s_2} = g_2 \frac{\frac{\partial g_1}{\partial s_2}}{\frac{\partial g_1}{\partial s_1}},$$

es soll also nach (4) unter Berücksichtigung von (6) die Beziehung:

$$g_2\left[\frac{\partial g_1}{\partial s_1}\frac{\partial^2 g_1}{\partial s_2\,\partial s_1} - \frac{\partial g_1}{\partial s_2}\frac{\partial^2 g_1}{\partial s_1^{\,2}} + \frac{\partial g_1}{\partial s_1}\left(g_2\frac{\partial g_1}{\partial s_2} - g_1\frac{\partial g_1}{\partial s_1}\right)\right] = 0$$

bestehen. Diese Beziehung besteht aber in der That, weil sie mit Hilfe der ersten der Relationen (9) auf die Form:

$$g_2\frac{\partial g_1}{\partial s_1}\left[\frac{\partial^2 g_1}{\partial s_2\,\partial s_1} - \frac{\partial^2 g_1}{\partial s_1\,\partial s_2} - g_1\frac{\partial g_1}{\partial s_1} + g_2\frac{\partial g_1}{\partial s_2}\right] = 0$$

gebracht werden kann. Ist ferner die Ableitung $\frac{\partial g_1}{\partial s_2}$ von Null verschieden, so wird man die Differentialquotienten von $\log\lambda$ aus zwei ersten der Gleichungen (8) zu bestimmen haben, und man überzeugt sich auf dieselbe Weise wie vorhin, dass unter Voraussetzung früherer Relationen die Integrabilitätsbedingung erfüllt wird.

Wir haben also bewiesen, dass im Falle, wenn g_1 keine Constante ist, die Relationen (6) und (9) für die Möglichkeit der Bestimmung von ξ und η aus den Gleichungen (3) nothwendig und hinreichend sind. Es wird dabei klar, dass man auf diese Weise zu einer vollständig bestimmten infinitesimalen Transformation Ωf gelangt.

Wenn nun g_2 eine Function ist, die sich nicht auf eine Constante reduziert, so sieht man ein, dass für die Möglichkeit der Bestimmung von ξ und η neben der Bedingung (6) noch die Bedingungen:

$$\frac{\partial g_2}{\partial s_2}\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\partial g_2}{\partial s_1}\right) - \frac{\partial g_2}{\partial s_1}\frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{\partial g_2}{\partial s_1}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial s_2}\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\partial g_2}{\partial s_2}\right) - \frac{\partial g_2}{\partial s_1}\frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{\partial g_2}{\partial s_2}\right) = 0$$

stattfinden, welche in Vereinigung mit (6) nothwendig und hinreichend sind. Falls sie erfüllt sind, bekommt man wieder eine vollständig bestimmte infinitesimale Transformation Ωf.

3. Die in der vorigen Nummer dargelegten Betrachtungen beziehen sich auf Fälle, in welchen die geodätischen Krümmungen g_1 und g_2 nicht alle beide constante Werthe besitzten. Wir wenden uns jetzt zur Betrachtung der Fälle, wo diese Krümmungen constant sind. Es wird dabei bequemer sein direkt das System (1) zu behandeln.

Man bemerke vorerst, dass im Falle, wenn die Constanten g_1 und g_2 nicht beide gleich Null sind, die folgenden Formeln stattfinden:

$$\sqrt{E} = -\frac{\varphi'}{g_2\varphi + g_1\psi}, \quad \sqrt{G} = -\frac{\psi'}{g_2\varphi + g_1\psi}, \tag{10}$$

wo mit φ eine Function, die nur von u und mit ψ eine Function, die nur von v abhängt, bezeichnet worden ist. Diese Formeln können leicht mittels einer Rechnung gefunden werden, die ein Specialfall derjenigen Rechnung ist, welche sich in L. Bianchi's Vorlesungen über Differentialgeometrie[1]) auf S. 176—7 befindet. Im Falle $g_1 = g_2 = 0$ erhält man die Formeln:

$$\sqrt{E} = \varphi', \quad \sqrt{G} = \psi'. \tag{11}$$

Man wende sich nun zu dem Systeme (1), welches in der Form:

$$\begin{aligned} &\frac{dp}{du} + \frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial u}\,p + g_1\sqrt{G}\,q = 0, \\ &\frac{dq}{dv} + \frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial v}\,q + g_2\sqrt{E}\,p = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

dargestellt werden kann, wo p und q Functionen sind, die nur von u beziehungsweise v abhängig sind. Im Falle, wenn g_1 und g_2 nicht beide gleich Null sind, hat man:

[1]) Übersetzung von Max Lukat, Leipzig 1899.

$$(13)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial u} &= \frac{\varphi''}{\varphi'} - \frac{g_2\varphi'}{g_2\varphi + g_1\psi}\,,\\ \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial v} &= \frac{\psi''}{\psi'} - \frac{g_1\psi'}{g_2\varphi + g_1\psi}\,,\end{aligned}$$

und wenn man die Werthe (10) und (13) in die Gleichungen (12) einsetzt, so ergeben sich die Gleichungen:

$$(14)\qquad \begin{aligned}\frac{dp}{du} + \frac{\varphi''}{\varphi'}\,p - \frac{g_2\varphi' p + g_1\psi' q}{g_2\varphi + g_1\psi} &= 0,\\ \frac{dq}{dv} + \frac{\psi''}{\psi'}\,q - \frac{g_2\varphi' p + g_1\psi' q}{g_2\varphi + g_1\psi} &= 0.\end{aligned}$$

Aus denselben folgt:

$$\frac{1}{\varphi'}\frac{d(p\varphi')}{du} = \frac{1}{\psi'}\frac{d(q\psi')}{dv}\,;$$

da aber das Glied linker Hand nur von u und das Glied rechter Hand nur von v abhängen kann, so sind diese beiden Glieder eine und dieselbe Constante. Bezeichnet man diese Constante mit C und zwei weitere Constanten mit α und β, so folgt:

$$(15)\qquad \begin{aligned}p\varphi' &= C\varphi + \alpha,\\ q\psi' &= C\psi + \beta.\end{aligned}$$

Man sieht aber leicht ein, dass die dadurch erhaltenen Ausdrücke für p und q die Gleichungen (12) dann und nur dann befriedigen, wenn die Constanten α und β der Beziehung:

$$g_1\alpha + g_2\beta = 0.$$

genügen. Man erhält also eine Lösung mit zwei willkürlichen Constanten, d. h. eine zweigliedrige continuierliche Transformationsgruppe.

Wenn jetzt g_1 und g_2 beide gleich Null sind, so ergeben sich die Werthe:

$$p = \frac{\alpha}{\varphi'}\,,\qquad q = \frac{\beta}{\psi'}\,,$$

wo α und β zwei willkürliche Constanten bezeichnen.

4. Wir wollen nun fragen, auf welchen Flächen die Bedingungen der Nummer 2 in der That stattfinden können. Es ist leicht zu ersehen, dass die Bedingungen, die wir in der Nummer 2 erhalten haben, folgendermassen formuliert werden können. Es muss eine solche Function $\omega(u, v)$ existieren, die sich nicht auf eine Constante reduziert und die Relationen von der Form:

$$(16)\qquad \begin{aligned}&g_1 = F(\omega)\,,\quad g_2 = Q(\omega),\\ &\frac{\partial\omega}{\partial s_1} = S_1(\omega),\quad \frac{\partial\omega}{\partial s_2} = S_2(\omega)\end{aligned}$$

befriedigt. Man beachte nun, dass das Krümmungsmass K der Fläche bei der gebrauchten Bezeichnungsweise sich folgendermassen darstellen lässt:

$$K = -\left[g_1^2 + g_2^2 + \frac{\partial g_1}{\partial s_2} + \frac{\partial g_2}{\partial s_1}\right]$$

und dass für den ersten und zweiten Differentialparameter die Ausdrücke gelten:

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial s_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial s_2}\right)^2,$$

$$\Delta^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial s_2^2} + g_2\frac{\partial f}{\partial s_1} + g_1\frac{\partial f}{\partial s_2}\,.$$

Man ersieht sofort, dass sobald die Relationen (16) erfüllt sind, die identischen Beziehungen:

$$K = A(\omega),\quad \Delta K = B(\omega),\quad \Delta^2 K = C(\omega)$$

bestehen. Es können dabei zwei Fälle vorkommen. Die Function $A(\omega)$ kann entweder eine Constante sein, in welchem Falle die Fläche eine Fläche vom constanten Krümmungsmasse ist, oder reduziert sich diese Function $A(\omega)$ auf keine Constante und in diesem Falle werden Beziehungen von der Form:

$$\Delta K = \Phi(K)\,,\quad \Delta^2 K = \psi(K)$$

erfüllt, d. h. die Fläche ist auf eine Rotationsfläche abwickelbar.

Die Voraussetzungen der Nummer 3 bestehen darin, dass g_1 und g_2 Constanten sind. Es ist ersichtlich, dass sie nur für Flächen vom constanten Krümmungsmasse $-(g_1^2+g_2^2)$ erfüllt werden können.

5. Unter 4 haben wir bewiesen, dass unsere Aufgabe nur auf Flächen möglich ist, welche auf Rotationsflächen abwickelbar sind. Wenn wir nun voraussetzen, dass die Fläche in der That dieser Kategorie von Flächen

angehört, so werden wir die Bedingungen (16) in einfacherer Form darstellen können.

Wir setzen zunächst voraus, dass unsere Fläche eine Fläche vom constanten Krümmungsmasse ist. Nimmt man nun erstens an, dass g_1 keine Constante ist, so ist leicht einzusehen, dass die Bedingungen (16) auf die Form:

$$g_2 = \Phi(g_1)\,, \quad \frac{\partial g_1}{\partial s_1} = \Psi(g_1) \tag{17}$$

gebracht werden können. Unserer Voraussetzung zufolge hat man:

$$K = -\left(g_1^{\,2} + g_2^{\,2} + \frac{\partial g_1}{\partial s_2} + \frac{\partial g_2}{\partial s_1}\right), \tag{18}$$

wo K den constanten Krümmungsmass bezeichnet; da aber aus den Gleichungen (17):

$$\frac{\partial g_2}{\partial s_1} = \Phi'(g_1)\ \Psi(g_1),$$

folgt, so ergibt sich nach (18):

$$\frac{\partial g_1}{\partial s_2} = -[\,g_1^{\,2} + \Phi^2(g_1) + \Phi'(g_1)\ \Psi(g_1) + K\,]$$

d. h. dass $\frac{\partial g_1}{\partial s_2}$ auch eine Function von g_1 ist. Falls also die Bedingungen (17) erfüllt sind, so bestehen auch die Bedingungen (16) d. h. die Gleichungen (17) nothwendige und hinreichende Bedingungen für die in Rede stehenden Curvenscharen auf Flächen vom constanten Krümmungsmasse sind. Wenn ferner g_2 keine Constante ist, kann auf dieselbe Weise bewiesen werden, dass die betreffenden Bedingungen in der Form der Relationen:

$$g_1 = \overline{\Phi}(g_2), \quad \frac{\partial g_2}{\partial s_2} = \overline{\Psi}(g_2) \tag{19}$$

dargestellt werden können.

Wir wollen nun voraussetzen, dass unsere Fläche auf eine Rotationsfläche abwickelbar ist, dass sie aber keine Fläche vom constanten Krümmungsmasse ist. Es ist leicht zu sehen, dass in diesem Falle, die Bedingungen, welche unter 2 abgeleitet wurden, einfach in der Form:

$$g_1 = P(K)\,, \quad g_2 = Q(K) \tag{20}$$

dargestellt werden können, Beachtet man nämlich, dass zufolge der Beziehungen (20) die Relationen:

$$K = -\left[P^2(K) + Q^2(K) + P'(K)\frac{\partial K}{\partial s_2} + Q'(K)\frac{\partial K}{\partial s_1}\right],$$

$$\Phi(K) = \left(\frac{\partial K}{\partial s_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial K}{\partial s_2}\right)^2$$

bestehen und dass die geodätischen Krümmungen g_1, g_2 nicht alle beide constant sind, so wird man aus den angeführten Relationen die Beziehungen von der Form:

$$\frac{\partial K}{\partial s_1} = S_1(K)\,, \quad \frac{\partial K}{\partial s_2} = S_2(K)$$

erhalten können. Daraus folgt, dass die Beziehungen (16) in der That durch die Bedingungen (20) ersetzt werden können.

6. Endlich wollen wir noch die Bemerkung machen, dass im Falle, wenn die betrachtete Fläche eine Ebene ist, die zweite der Gleichungen (17) besagt, dass alle Curven $v =$ const. miteinander congruent sind, und die zweite der Gleichungen (19), dass alle Curven $u =$ const miteinander congruent sind. Wir fragen, welche Bedeutung man diesen Gleichungen für allgemeine Flächen zuschreiben könnte.

Um diese Frage zu beantworten, suche man auf der Fläche solche infinitesimale Transformationen zu bestimmen, welche die Curven der Curvenschar $v =$ const in einander verbiegen und die geodätische Krümmung dieser Curvenschar invariant lassen.

Es lässt sich mit Leichtigkeit einsehen, dass wenn man die Bedingungen benutzt, die wir unter 1 gebraucht haben, die in Frage stehende infinitesimale Transformation aus folgenden Gleichungen zu bestimmen sein wird:

$$\frac{\partial \xi}{\partial s_1} + g_1\eta = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial s_1} - g_2\eta = 0,$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial s_1}\xi + \frac{\partial g_1}{\partial s_2}\eta = 0.$$

Falls g_1 nicht eine Constante ist, so können ξ und η in der Form:

$$\xi = \lambda\frac{\partial g_1}{\partial s_2}\,, \quad \eta = -\lambda\frac{\partial g_1}{\partial s_1}$$

dargestellt werden und für die Bestimmung des Factors λ erhält man die Gleichungen:

$$\frac{\partial g_1}{\partial s_2}\frac{\partial \log\lambda}{\partial s_1}=g_1\frac{\partial g_1}{\partial s_1}-\frac{\partial^2 g_1}{\partial s_2 \partial s_1},$$
$$\frac{\partial g_1}{\partial s_1}\frac{\partial \log\lambda}{\partial s_1}=g_2\frac{\partial g_1}{\partial s_1}-\frac{\partial^2 g_1}{\partial s_1^2},$$

aus welchen die Bedingung:

$$\frac{\partial g_1}{\partial s_2}\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\partial g_1}{\partial s_1}\right)-\frac{\partial g_1}{\partial s_1}\frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{\partial g_1}{\partial s_1}\right)=0,$$

d. h. die Relation von der Form:

(21) $$\frac{\partial g_1}{\partial s_1}=\Phi(g_1)$$

folgt. Falls diese Relation erfüllt ist, so erhält man für λ eine Function, die eine willkürliche Function von v als Factor enthält, im übrigen aber vollständig bestimmt ist. Die Beziehung (21) ist also nothwendig und hinreichend dazu, dass im Falle wenn g_1 keine Constante ist, die fraglichen infinitesimalen Transformationen existieren. Im Falle wenn g_1 eine Constante ist, existieren augenscheinlich immer infinitesimale Transformationen, die den oben angeführten Bedingungen genügen.

Wir wollen aber noch eine analoge Frage berühren. Es sei nämlich wiederum eine allgemeine Fläche und man frage um Bedingungen dafür, dass infinitesimale Transformationen auf der Fläche existieren, welche die Curven einer vorgelegten Curvenschar in einander verbiegen und die geodätische Krümmung ortogonaler Trajectorien dieser Curvenschar invariant lassen.

Wenn für die Curvenschar die Parameterlinien $v=\text{const.}$ gewählt werden, so wird man die fraglichen infinitesimalen Transformationen aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial \xi}{\partial s_1}+g_1\eta=0,\quad \frac{\partial \eta}{\partial s_1}-g_2\eta=0,$$
$$\frac{\partial g_2}{\partial s_1}\xi+\frac{\partial g_2}{\partial s_2}\eta=0$$

zu bestimmen haben. Ist g_2 keine Constante, so ergeben sich für ξ und η die Formeln:

$$\xi=\lambda\frac{\partial g_2}{\partial s_2},\quad \eta=-\lambda\frac{\partial g_2}{\partial s_1},$$

wobei der Factor λ die Gleichungen:

$$\frac{\partial g_2}{\partial s_2}\frac{\partial \log\lambda}{\partial s_1}=g_1\frac{\partial g_2}{\partial s_1}-\frac{\partial^2 g_2}{\partial s_2 \partial s_1}$$
$$\frac{\partial g_2}{\partial s_1}\frac{\partial \log\lambda}{\partial s_1}=g_2\frac{\partial g_2}{\partial s_1}-\frac{\partial^2 g_2}{\partial s_1^2}$$

befriedigen muss. Aus diesen Gleichungen folgt die Bedingung:

$$\frac{\partial g_2}{\partial s_2}\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\partial g_2}{\partial s_1}\right)-\frac{\partial g_2}{\partial s_1}\frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{\partial g_2}{\partial s_1}\right)=0,$$

welche bei der Voraussetzung, dass g_2 keine Constante ist, auch in der Form:

$$\frac{\partial g_2}{\partial s_1}=\Psi(g_2)$$

dargestellt werden kann. Ist dagegen g_2 eine Constante, so ist für die Existenz der in Frage stehenden infinitesimalen Transformationen keine weitere Bedingung nothwendig.

IV. ÜBER CONGRUENZKRITERIEN EBENER CURVENSCHAREN.

In dieser Notiz werden Kriterien aufgestellt, die erfüllt werden müssen, damit zwei vorgelegte Curvenscharen in der Ebene miteinander congruent seien.

1. Es sei in der Ebene ein rechtwinkliges Coordinatensystem x, y und die Differentialgleichung:

(1) $$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b},$$

wo a und b Functionen von x, y sind, welche der Bedingung:

$$a^2+b^2 \neq 0$$

genügen. Der durch die Gleichungen:

$$\cos\varphi=\frac{a}{\varepsilon\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\varphi=\frac{b}{\varepsilon\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (\varepsilon=\pm 1)$$

definierte Winkel φ ist bei einer bestimmten Wahl des Vorzeichens ε, derjenige Winkel, welchen eine der beiden Halbtangenten der Integralcurve von (1) mit der positiven x—Axe bildet. Es ist klar, dass wenn dieser Winkel φ als Function von x, y bestimmt ist, zugleich auch die Schar von Integralcurven der Gleichung (1) vollständig bestimmt ist. Der Winkel $\varphi+\frac{\pi}{2}$ bestimmt auf dieselbe Weise die Schar von Curven, die ortogonale Trajectorien der früheren Curvenschar sind. Wenn man die Bogenlängen dieser Carvenscharen mit s_1 und s_2 bezeichnet und die Annahme macht, dass diese Bogenlängen in denjenigen Richtungen wachsen, welche durch φ und $\varphi+\frac{\pi}{2}$ bestimmt sind, so erhält man die Formeln:

$$\frac{\partial f}{\partial s_1}=\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y},$$
$$\frac{\partial f}{\partial s_1}=\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial y}-\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Die Krümmungen unserer beiden Curvenscharen werden durch die Formeln:

$$K_1=\frac{\partial\varphi}{\partial s_1},\quad K_2=\frac{\partial\varphi}{\partial s_2}$$

bestimmt sein. Und wenn man noch darüber einigt die Bezeichnung:

$$\frac{\partial}{\partial s_k}\left(\frac{\partial f}{\partial s_l}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial s_l\partial s_k}$$

zu benutzen, so wird man die bekannte Integrabilitätsbedingung in der Form:

(2) $$\frac{\partial^2 f}{\partial s_1\partial s_2}-\frac{\partial^2 f}{\partial s_2\partial s_1}=K_1\frac{\partial f}{\partial s_1}+K_2\frac{\partial f}{\partial s_2}$$

angeben und als nächste Folge derselben die Beziehung:

$$\frac{\partial K_1}{\partial s_2}-\frac{\partial K_2}{\partial s_1}=K_1^2+K_2^2$$

notieren können.

Man betrachte ferner die Gruppe der euklidischen Bewegungen in der Ebene. Wenn man unsere Curvenschar einer Transformation dieser Gruppe unterwirft und mit φ' den Winkel bezeichnet, welcher mit der positiven x—Axe von demjenigen Linienelemente ds_1 gebildet wird, das ursprünglich unter dem Winkel φ gegen die positive x—Axe geneigt war, so wird:

$$\varphi'=\varphi+c$$

worin c eine Constante bezeichnet. Auf Grund dieser Bemerkung lassen sich sogleich alle Differentialinvarianten der Curvenschar (1) in bezug auf die Gruppe der euklidischen Bewegungen angeben. Es ist nämlich klar, dass die Differentialquotienten von φ nach s_1 und s_2 aller Ordnungen die Gesamtheit der fraglichen Differentialinvarianten bilden. Denn einerseits sind alle diese Grössen Invarianten und anderseits kann es offensichtlich keine Invarianten geben, die von x, y und φ allein abhängig wären und die Anzahl der unabhängigen Differentialinvarianten verschiedener Ordnungen muss gerade der Anzahl der Differentialquotienten dieser Ordnungen von φ nach x und y gleich sein.

2. Wir wollen uns jetzt mit folgender Aufgabe beschäftigen. Es sei eine Curvenschar auf der Ebene d. h. eine Function φ der Veränderlichen x, y vorgelegt. Wir wollen dasjenige System von Differentialgleichungen aufstellen, welches von allen solchen Functionen φ befriedigt wird, die den Curvenscharen angehören, die aus der gegebenen Curvenschar durch euklidische Bewegung erhalten werden können. Mit anderen Worten, soll das fragliche System von Differentialgleichungen alle mit der vorgelegten Curvenschar congruente Curvenscharen und keine weiteren bestimmen.

Die Gleichungen des fraglichen Systems müssen in allen Fällen unserer Aufgabe Relationen zwischen den früher aufgestellten Differentialinvarianten darstellen. Bei der Bestimmung dieser Relationen muss man mehrere Fälle unterscheiden.

Man setze zunächst voraus, dass für die vorgelegte Curvenschar die Invarianten K_1 und K_2 voneinander unabhängig sind, d. h. dass die Determinante:

(4) $$\frac{\partial K_1}{\partial s_1}\frac{\partial K_2}{\partial s_2}-\frac{\partial K_1}{\partial s_2}\frac{\partial K_2}{\partial s_1}$$

nicht identisch gleich Null ist. In diesem Falle lassen sich aus den Gleichungen:

(5) $$K_1=K_1(x,y),\quad K_2=K_2(x,y)$$

die Grössen x und y bestimmen und man kann alle übrigen Differentialinvarianten durch K_1 und K_2 ausdrücken, insbesondere ergibt es sich:

$$(6)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi}{\partial s_1^{\,2}} &= F_{11}(K_1, K_2)\,, & \frac{\partial^2\varphi}{\partial s_1\partial s_2} &= F_{12}(K_1, K_2)\,,\\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial s_2\partial s_1} &= F_{21}(K_1, K_2)\,, & \frac{\partial^2\varphi}{\partial s_2^{\,2}} &= F_{22}(K_1, K_2)\,, \end{aligned}$$

wobei infolge der Relation (3) die Identität:

$$F_{12} - F_{21} = K_1^{\,2} + K_2^{\,2}$$

stattfindet, d. h. von den vier Gleichungen des Systems (6) nur drei Gleichungen berücksichtigt zu werden brauchen. Durch Elimination von x und y zwischen den Gleichungen (5) und den Ausdrücken der Differentialinvarianten von der dritten und höheren Ordnungen lassen sich weitere Relationen aufstellen, welchen jene Curvenscharen genügen, die der vorgelegten Curvenschar congruent sind. Alle diese Relationen ergeben sich durch Differentiation aus dem Systeme (6) d. h. das fragliche System von Differentialgleichungen ist in unserem Falle das System (6), wobei zu bemerken ist, dass entweder die zweite oder die dritte Gleichung dieses Systems weggelassen werden kann. Sollen also zwei Curvenscharen, deren jeder die Eigenschaft zukommt, dass die Determinante (4) nicht identisch gleich Null ist, miteinander congruent sein, so müssen die Functionen φ jeder von diesen Curvenscharen ein und demselben Systeme (6) genüge leisten.

3. Man setze jetzt voraus, dass die Determinante (4) identisch gleich Null ist, und ziehe zunächst denjenigen Fall in Betracht, wo K_1 keine Constante ist. Man hat alsdann:

$$(7)\qquad K_2 = F(K_1)$$

und zuvörderst möge man voraussetzen, dass die Functionen K_1 und

$$(8)\qquad I_1 = \frac{\partial^2\varphi}{\partial s_1^{\,2}}$$

für die vorgelegte Curvenschar voneinander unabhängig sind. Man kann in diesem Falle x und y durch K_1 und I_1 ausdrücken und wenn man diese Ausdrücke in die anderen Differentialinvarianten hineinsetzt, so bekommt man Relationen, denen die der gegebenen Curvenschar congruente Curvenscharen genügen. Es handelt sich nun darum, diejenigen von diesen Relationen aufzustellen, aus welchen alle anderen durch Differentiatio-

nen und Eliminationen abgeleitet werden können. Durch Differentiation der Relation (7) ergibt sich:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial s_2\partial s_1} = F'\frac{\partial^2\varphi}{\partial s_1^{\,2}}\,,\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial s_2^{\,2}} = F'\frac{\partial^2\varphi}{\partial s_1\partial s_2}$$

und mit Hilfe der Relation:

$$(9)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial s_1\partial s_2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial s_2\partial s_1} = K_1^{\,2} + F^2$$

und der Bezeichnung (8) erhält man die Ausdrücke:

$$(10)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi}{\partial s_2\partial s_1} &= I_1F',\\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial s_2^{\,2}} &= F'(I_1F' + K_1^{\,2} + F^2). \end{aligned}$$

Man sieht also, dass mit Hilfe der Relation (7) durch K_1 und I_1 alle übrigen Differentialinvarianten zweiter Ordnung ausgedrückt werden können. Wir wenden uns nun zur Betrachtung der Differentialinvarianten dritter Ordnung. Es gibt vier von einander unabhängige Differentialinvarianten dritter Ordnung. Es können als solche die folgenden angenommen werden:

$$(11)\qquad \frac{\partial^3\varphi}{\partial s_1^{\,3}}\,,\quad \frac{\partial^3\varphi}{\partial s_2\partial s_1^{\,2}}\,,\quad \frac{\partial^3\varphi}{\partial s_2^{\,2}\partial s_1}\,,\quad \frac{\partial^3\varphi}{\partial s_2^{\,3}}\,.$$

Alle anderen Differentialquotienten dritter Ordnung von φ nach s_1 und s_2 können durch diese vier und die Differentialinvarianten niedrigerer Ordnungen ausgedrückt werden, und insbesondere, sobald die Voraussetzungen des betrachteten Falles stattfinden, können sie als Functionen der Grössen (11) und der Grössen K_1 und I_1 dargestellt werden. Es ist auf Grund der Beziehung (7) leicht zu sehen, dass diese Functionen die folgende Form besitzen:

$$(12)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^3\varphi}{\partial s_1\partial s_2\partial s_1} &= \frac{\partial^3\varphi}{\partial s_2\partial s_1^{\,2}} + \alpha\,, & \frac{\partial^3\varphi}{\partial s_1^{\,2}\partial s_2} &= \frac{\partial^3\varphi}{\partial s_2\partial s_1^{\,2}} + \beta\,,\\ \frac{\partial^3\varphi}{\partial s_2\partial s_1\partial s_2} &= \frac{\partial^3\varphi}{\partial s_2^{\,2}\partial s_1} + \gamma\,, & \frac{\partial^3\varphi}{\partial s_1\partial s_2^{\,2}} &= \frac{\partial^3\varphi}{\partial s_2^{\,2}\partial s_1} + \delta\,, \end{aligned}$$

wo α, β, γ, δ nur von K_1 und I_1 abhängig sind.

Die Anzahl der Differentialinvarianten n-ter Ordnung ist gleich $n+1$ und man könnte sogleich für dieselben die den Formeln (11) und (12) analoge Formeln angeben, worauf wir indessen nicht einzugehen brauchen.

Man möge nun beachten, dass sobald man aus einer Relation erster Ordnung im Falle zweier unabhängigen Variablen durch Differentiation

Relationen höherer Ordnungen ableitet, auf diese Weise n und nur n solche Relationen n-ter Ordnung erhalten werden können, die von einander und von den Relationen niedrigerer Ordnungen unabhängig sind. Auf Grund der Bemerkung über die Anzahl der Differentialinvarianten sieht man also, dass weder alle Differentialinvarianten 3-ter Ordnung, noch alle Differentialinvarianten irgend welcher höheren Ordnung mit Hilfe der Relation (7) durch K_1 und I_1 ausgedrückt werden können. Um also das System von Differentialgleichungen aufzustellen, welches alle Curvenscharen, die mit der vorgelegten Curvenschar congruent sind, und keine weiteren definiert, müssen zu der Relation (7) noch weitere Relationen hinzugefügt werden. Um zu ersehen, welche Relationen hier zu wählen sind, sollen Relationen aufgestellt werden, die durch zweimalige Differentiation aus (7) folgen. Aus den Formeln (10) und (12) erhellt, dass diese Relationen dritter Ordnung in der folgenden Form dargestellt werden können:

$$(13)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^3\varphi}{\partial s_2 \partial s_1^2} &= F' \frac{\partial^3\varphi}{\partial s_1^3} + p, \\ \frac{\partial^3\varphi}{\partial s_2^2 \partial s_1} &= F'^2 \frac{\partial^3\varphi}{\partial s_1^3} + q, \\ \frac{\partial^3\varphi}{\partial s_2^3} &= F'^3 \frac{\partial^3\varphi}{\partial s_1^3} + r, \end{aligned}$$

wobei p, q, r Functionen von K_1 und I_1 sind. Man sieht also, dass wenn man x und y zwischen K_1, I_1 und $\frac{\partial^3\varphi}{\partial s_1^3}$ eliminiert und auf diese Weise zur Relation von der Form:

$$(14)\qquad \frac{\partial^3\varphi}{\partial s_1^3} = \Phi(K_1, I_1)$$

gelangt, mit Hilfe der Relationen (7) und (14) alle Differentialinvarianten 3-ter Ordnung durch K_1 und I_1 ausgedrückt werden können. Es leuchtet alsdann ein, dass auch alle Differetialinvarianten höherer Ordnungen durch K_1 und I_1 ausgedrückt werden können. Demnach bilden die Relationen (7) und (14) das gewünschte System von Differentialgleichungen und für zwei Curvenscharen, die zu der eben betrachteten Kategorie gehören, liefern sie Congruenzkriterien, welche aufgestellt werden sollten.

4. Es wird uns nunmehr leicht sein, die Congruenzkriterien für alle übrigen Fälle aufzustellon.

Wir wollen zuerst den Fall in Betrachtung ziehen, wo K_1 keine Constante, jedoch I_1 eine Function von K_1 ist. In diesem Falle hat man zwei Beziehungen von der Form:

$$(15)\qquad K_2 = F(K_1), \quad I_1 = \Phi(K_1)$$

und auf Grund der früheren Betrachtungen lässt sich sogleich einsehen, dass in diesem Falle alle Differentialinvarianten aller Ordnungen als Functionen von K_1 dargestellt werden können. Daraus folgt, dass die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, dass zwei Curvenscharen, die zu der jetzt betrachteten Kategorie gehören congruent seien, darin bestehen, dass diese beiden Curvenscharen demselben Systeme (15) genügen. Vergleicht man diese Betrachtungen mit den Betrachtungen der Notiz III „Über gewisse Curvenscharen auf Flächen etc." so sieht man, dass eine Curvenschar der gegenwärtig erörterten Kategorie eine infinitesimale euklidische Bewegung gestattet. Wenn K_1 eine Constante ist, so kann es vorkommen, dass K_2 keine Constante ist. Dieser Fall wird in jenem allgemeineren Falle inbegriffen sein, für welchen die Determinante (4) gleich Null und K_2 keine Constante ist. Wir können die fraglichen Congruenzkriterien für diesen allgemeineren Fall ohne weiteres auf Grund von Betrachtungen, die unter 3 und am Anfang der gegenwärtigen Nummer angegeben waren, aufstellen.

Falls nämlich K_2 und

$$I_2 = \frac{\partial^2\varphi}{\partial s_2^2}$$

von einander unabhängig sind, so ist das gewünschte System von Relationen

$$K_1 = F(K_2), \quad \frac{\partial^3\varphi}{\partial s_2^3} = \Phi(K_2, I_2)$$

und falls diese Functionen K_2 und I_2 nicht von einander unabhängig sind, so ist dieses System von Relationen das folgende:

$$K_1 = F(K_2), \quad I_2 = \Phi(K_2).$$

In diesem letzten Falle gestattet die betrachtete Curvenschar eine infinitesimale euklidische Bewegung.

Es bleibt noch der Fall, in welchem K_1 und K_2 alle beide Constanten sind. In diesem Falle sind alle Differentialquotienten der höheren Ordnungen von φ gleich Null. Daraus folgt, dass in dem betrachteten Falle zwei Curvenscharen dann und nur dann miteinander congruent sind, wenn jede der Grössen K_1 und K_2 für beide Curvenscharen denselben Werth besitzt. Wie aus der Relation (3) zu ersehen ist, ist in dem soeben erörtertem Falle jede reelle Curvenschar eine Schar von parallelen Geraden.