

G. MITTAG-LEFFLER.

O PRZEDSTAWIENIU ANALITYCZNEJ JEDNOZNACZNEJ GAŁĘZI FUNKCYI ANALITYCZNEJ.¹⁾

NOTA PIĄTA.²⁾

Poświęciłem § 2 mojej Noty czwartej²⁾ szczegółowemu badaniu całki Laplace'a-Abela; wyniki tego badania streściłem w twierdzeniu 7b. W Nocie niniejszej dochodzę inną drogą do nowego uogólnienia, prowadzącego do ostatecznego wyniku tej samej doniosłości, co poprzednio; droga ta wyróżnia się nadzwyczajną prostotą i rzuca nowe światło na mój problemat.

¹⁾ Patrz Prace mat.-fiz. t. XVI i XVII.

²⁾ Po ogłoszeniu Noty czwartej ukazały się następujące prace, związane z przedmiotem niniejszej rozprawy: E. A. Fouët, Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques, Paris 1902, Prem. partie, Chap. V. A. Pringsheim, Jacques Hadamard, La série de Taylor et son prolongement analytique, Arch. d. Math. u. Phys. (3), 3, 1902, pp. 289, 290, 294, 296. E. Lindelöf, Une application de la théorie des résidus au prolongement analytique des séries de Taylor. C. R. 135. 29. XII 1902, pp. 1315—1318. F. C. Radelfinger Analytical representation of complex functions. Phil. Mag. Soc. of Washington, Vol. 14, 1902 pp. 227—232; Bull. of the Amer. Math. Soc. 8, 1901—1902, pp. 15, 16. F. R. Moutton, Bull. of the Amer. Math. Soc. 9, pp. 98, 99. L. Hanni, Zur Einführung der allgemeinen Mittelbildung Borel's auf Mittag-Lefflers „fach unendliche Reihe Monath. für Math. u. Phys. 14, 1903, p. 105—124; S. Pincherle Di una nuova operazione funzionale e di qualche sua applicazione. Rend. R. Accad. delle scienze dell' Ist. di Bologna, S. III. 1903. pp. 4. G. Faber, Ueber die Fortsetzbarkeit gewisser Taylorschen Reihen. Math. Ann. 57, 1900. p. 383; Ueber polynomische Entwicklungen, Ib. ib. p. 406—408. E. Lindelöf, Sur l'application de la théorie des résidus au prolongement analytique des séries de Taylor. Journ. de Math. pures et appl. (5), 9. 1903. p. 213—221. J. Malinquist, Sur le calcul des intégrales d'un système d'équations différentielles par la méthode de

Przypomnijmy najprzód definicyę całki Laplace'a-Abela. Niechaj $k_0, k_1, k_2, \dots$ będzie ciąg stałych, poddanych warunkowi, by granica wyższa wartości granicznych liczb $|\sqrt[k_r]{k_r}|$ była skończona.¹⁾ Wiemy, że odwrotność r tej granicy wyższej jest promieniem zbieżności szeregu.

Idąc za Pringsheimem,²⁾ wyrażam tę własność stałych $k_0, k_1, k_2, \dots$ wzorem:

$$(1) \quad \overline{\lim}_{v \rightarrow \infty} |\sqrt[k_v]{k_v}| = \frac{1}{r},$$

i oznaczam przez $F(x)$ funkcję analityczną, określoną przez stałe $k_0, k_1, k_2, \dots$

Wiemy, że:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt[v]{\frac{1}{|k_v|}} = 0.$$

Szereg

$$(2) \quad \overline{F}(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{k_v}{|k_v|} x^v$$

Cauchy-Lipschitz. Arkiv für Mat. Astr. och Fysik. Stockholm, 1. 13. V. 1903. pp. 149—156. Helge von Koch, Sur une classe remarquable de fonctions entières et transcendentes, Arkiv. für Math 1, 9 IX, 1903. p. 205—208. G. Faber, Ueber Reihenentwicklungen analytischer Functionen. Inaug. Diss. München, 1903. pp. 61—66. E. Lindelöf, Sur la détermination de la croissance des fonctions entières définies par un développement de Taylor. Bull. des sciences math. (2), 27. pp. 224—225. L. Fejer, Untersuchungen über Fouriersche Reihen, Math. Ann. 58, p. 51. S. Pincherle, Sulla sviluppabilità di una funzione in serie di fattoriali. R. Acc. Lincei 12, (5), 8. XI. 1903; Sulla funzioni meromorfe. Ib. 12, (5), 23 XI. 1903. E. Phragmén, Sur une extension d'un théorème classique de la théorie des fonctions. Acta math 28. p. 351—368. E. Picard, Sur certains développements en séries déduits de la méthode de Cauchy dans la théorie des équations différentielles ordinaires, Ann. Ec. Norm. 21, 1902 p. 141—151. W druku w Act. Math., 20, były następujące prace: L. H a n n i, Ueber die Beziehungen zwischen der Darstellung eines eindeutigen Zweiges einer monogenen Function durch Herrn Mittag-Leffler, der Methode der Mittelwerthe des Herrn Borel und der Transformation des Herrn Lindelöf. A. Wiman, Ueber den Fundamentalsatz in der Theorie der Functionen $E_a(x)$. A. Wiman, Ueber die Nullstellen der Functionen $E_a(x)$. J. Malmquist, Étude d'une fonction entière — Patrz jeszcze artykuły Mittag-Lefflera: Sur l'intégrale de Laplace-Abel, C. R. 135, 1. XII. 1902, pp. 937—939; Une généralisation de l'intégrale de Laplace-Abel. Ib. 136, 2. III. 1903, p. 537—539; Sur la nouvelle fonction $E_a(x)$. Ibid 137, 12. X, 1903. p. 554—558; Sopra la funzione $E_a(x)$, R. Acc. dei Lincei. Atti (5), 13, 3. I. 1904. p. 3—5; Un nouveau théorème général de la théorie des fonctions analytiques. C. R. 138, 11. IV. 1904. p. 881—884; Une nouvelle fonction entière, Ibid 138, 18. IV. p. 941—942.

¹⁾ Patrz Notę pierwszą, Prace mat.-fiz. XVI.

²⁾ A. Pringsheim, Zur Theorie des Doppel-Integrals. München Sitzungsber. 28, 1878. p. 62.

jest więc szeregiem zawsze zbieżnym. Całka

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega} \overline{F}(\omega x) d\omega,$$

gdzie całkowanie rozciąga się na wszystkie wartości dodatnie ω , jest sławną całką Laplace'a-Abela.

Borel w szeregu prac¹⁾ bardzo ważnych doszedł pierwszy do ustalenia obszaru zmiennej x , dla którego całka ta jest zbieżna.

Obszar ten jest gwiazdą o środku w punkcie zero, wpisaną w gwiazdę główną, określoną przez stałe $k_0, k_1, k_2, \dots$ i opisaną na kole zbieżności szeregu $k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots$ ²⁾ W nocie niniejszej gwiazdę tę oznaczać będę przez $B^{(1)}$. Otrzymujemy ją w sposób następujący. Ograniczamy każdy z wektorów l , wychodzących ze środka do długości q , będącej granicą wyższą innej długości d , ograniczającej wektor l , i taką, że koło o średnicy, równej d , stanowi część gwiazdy głównej A .

Borel dowiódł zbieżności całki Laplace'a-Abela dla wnętrza gwiazdy $B^{(1)}$. Phragmén³⁾ wykazał, że całka ta nie może być zbieżna zewnątrz $B^{(1)}$. Gwiazda $B^{(1)}$ jest tedy co do zmiennej x prawdziwą gwiazdą zbieżności dla całki Laplace'a-Abela, podobnie jak koło C o środku w punkcie zero i promieniu r jest kołem zbieżności szeregu $k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots$. Równość

$$(3) \quad F B^{(1)}(x) = \int_0^{\infty} e^{-\omega} \overline{F}(\omega x) d\omega$$

zachodzi dla obszaru jakiegokolwiek wewnątrz $B^{(1)}$ zupełnie tak samo, jak równość Taylora

$$(4) \quad F C(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^n k_v x^v = \sum_{v=0}^{\infty} k_v x^v$$

zachodzi dla każdego obszaru wewnątrz C .

¹⁾ E. Borel, Mémoire sur les séries divergentes Ann. Ecole Norm. (3), 16, 1899; Leçons sur les séries divergentes, Paris, 1901.

²⁾ Co do definicyi „gwiazdy“, gwiazdy „głównej“, gwiazdy „wpisanej“, gwiazdy „opisaney“ (patrz Noty I, II, III); oznaczałem poprzednio gwiazdę A , jako gwiazdę główną stałych $k_0, k_1, k_2, k_3, \dots$

³⁾ E. Phragmén, Sur le domaine de convergence de l'intégrale infinie $\int_0^{\infty} F(ax) e^{-ada}$.

Podamy teraz bardzo prosty sposób uogólnienia całki Laplace'a-A bel'a, pozwalający otrzymać gwiazdę zbieżności, rozleglejszą od $B^{(1)}$ i zbliżającą się wraz ze zmianą pewnego parametru nieograniczenie do gwiazdy głównej A . Zamiast „funkcji tworzącej” A bel'a $\overline{F}(x)$ wprowadźmy nową funkcję nieco ogólniejszą, określoną przez równość:

$$(5) \quad F_a(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{k_v}{|a v|} x^v,$$

gdzie

$$(6) \quad |a v| = \Gamma(av + 1),$$

a zaś oznacza daną wielkość dodatnią. Mamy:

$$(7) \quad F_1(x) = \overline{F}(x),$$

i widzimy, że $F_a(x)$ jest szeregiem zawsze zbieżnym, podobnie jak $\overline{F}(x)$.

Zamiast całki Laplace'a-A bel'a, wprowadzam całkę nową ogólniejszą:

$$(8) \quad f(x) = \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}} = \int_0^{\infty} e^{-\omega} F_a(\omega^a x) d\omega,$$

dla której udowodnię twierdzenie:

„Całka $f(x)$ posiada względem x gwiazdę zbieżności $B^{(a)}$, która jest wpisana w gwiazdę A i dąży do niej nieograniczenie, gdy a zmierza do zera. Równość

$$FB^{(a)}(x) = f(x)$$

zachodzi wszędzie wewnątrz $B^{(a)}$.”

Dowód tego twierdzenia dzieli się na trzy różne części:

1-o. Gdy całka $f(x_0)$ jest zbieżna, to całka $f(x)$ jest jedностajnie zbieżna dla obszaru θx_0 ($\theta_0 \leq \theta \leq 1$), gdzie θ oznacza wielkość dodatnią.

2-o. Gdy całka $f(x_0)$ jest zbieżna, to całka $f(x)$ przedstawia na wektorze $(0x_0)$ funkcję $FC(x)$ oraz jej przedłużenie analityczne wzdłuż tego wektora.

Niechaj x_0 przebiega wewnątrz gwiazdy A przez wszystkie punkty, dla których obszar¹⁾

¹⁾ Przez $R(z)$ oznaczam część rzeczywistą, przez $\arg. (z)$ argument wielkości z .

$$R\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{a}}\right] > 1, \quad -a \frac{\pi}{2} < \arg\left(\frac{x_0}{x}\right) < a \frac{\pi}{2}, \quad (\text{jeżeli } 0 < a < 2) \\ -\pi < \arg\left(\frac{x_0}{x}\right) < \pi, \quad (\text{jeżeli } a \geq 2)$$

jest położony wewnątrz A , i oznaczmy przez $B^{(a)}$ gwiazdę, w ten sposób otrzymaną. Całka $f(x)$ nigdy nie jest zbieżna zewnątrz $B^{(a)}$.

3-o. Całka $f(x)$ jest zbieżna jednostajnie dla wszelkiego obszaru zewnątrz $B^{(1)}$.

Twierdzenia 1-o i 2-o udowodnimy w § 1. Co się tyczy twierdzenia 3-o, to dowód jego wymaga wprowadzenia nowej funkcji przestępnej, którą otrzymujemy, upraszczając funkcję $F_a(x)$, kładąc mianowicie $k_0 = k_1 = k_2 = k, \dots = 1$; tę nową funkcję oznaczam przez

$$(9) \quad E_a(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^v}{|a v|}.$$

Różne jej własności rozwijam w §§ 2 i 3. Dowód zupełny twierdzenia 3-o podaję w § 4.

W przypadku $a=1$ całka Laplace'a-A bel'a, t. j.:

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega} F_1(\omega x) d\omega$$

może być przekształcona na wyrażenie, podane przez Borela:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\omega} \sum_{v=0}^n (k_0 + k_1 x + \dots + k_n x^n) \frac{\omega^{n+1}}{|n+1|},$$

posiadające ten sam obszar zbieżności $B^{(1)}$, co całka. W § 4 otrzymuję dla jakiegokolwiek a nowe wyrażenie tej samej formy, co wyrażenie Borela. Otrzymuję tam także dwa nowe wyrażenia ciekawej postaci. W § 5 odrzucam warunek, że gwiazda wyrażenia ma być gwiazdą zbieżności, i otrzymuję nowe wyrażenia.

§ 1.

Rozpaczynam od uzasadnienia następującego twierdzenia:

A. Jeżeli przyjmiemy, że całka

$$f(x_0) = \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{a}}$$

jest zbieżna, to całka

$$f(\theta x_0) = \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega \theta x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

jest koniecznie zbieżna dla obszaru θx_0 ($\theta_0 \leq \theta \leq 1$), gdzie θ_0 oznacza wielkość dodatnią¹⁾.

Widzimy tu analogię zupełną ze sławnym twierdzeniem A b e l a dla szeregu potęgowego¹⁾. Dowodzenie jest zupełnie takie, jak twierdzenia P h r a g m é n a dla przypadku $\alpha = 1$.²⁾

Położmy:

$$F_{\alpha}(\omega x_0) = \varphi(\omega) + \psi(\omega),$$

gdzie $\varphi(\omega)$ i $\psi(\omega)$ są wielkości rzeczywiste. Dwie całki

$$\int_0^{\infty} \varphi(\omega) e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} d\omega^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \int_0^{\infty} \psi(\omega) e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

są zbieżne i należy dowieść, że całki:

$$\int_0^{\infty} \varphi(\theta \omega) e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} d\omega^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \int_0^{\infty} \psi(\theta \omega) e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

są jednostajnie zbieżne w obszarze $\theta_0 \leq \theta \leq 1$, gdzie θ_0 jest dodatnie. Rozpatrzmy naprzykład pierwszą z nich. Mamy:

$$\begin{aligned} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \varphi(\theta \omega) e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} &= \frac{1}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}} \int_{(\theta \omega_1)^{\frac{1}{\alpha}}}^{(\theta \omega_2)^{\frac{1}{\alpha}}} \varphi(\omega) e^{-\left(\frac{\omega}{\theta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\ &= \frac{1}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}} \int_{(\theta \omega_1)^{\frac{1}{\alpha}}}^{(\theta \omega_2)^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{1}{\theta} - 1\right)} \varphi(\omega) e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} d\omega^{\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned}$$

¹⁾ Recherches sur la série $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$
Théorème 4, Oeuvres. Nouv. éd. 1, p. 223.

²⁾ E. P h r a g m é n, Sur le domaine de convergence de l'intégrale infinie $\int_0^{\infty} F(x\alpha) e^{-\alpha} d\alpha$.

Zastosujmy teraz twierdzenie drugie o średniej dla całek określonych, będziemy mieli:

$$\int_{(\theta \omega_1)^{\frac{1}{\alpha}}}^{(\theta \omega_2)^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{1}{\theta} - 1\right)} \varphi(\omega) e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} = e^{-\omega_1^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{1}{\theta} - 1\right)} \int_{(\theta \omega_1)^{\frac{1}{\alpha}}}^{(\theta \omega_2)^{\frac{1}{\alpha}}} \varphi(\omega) e^{-\frac{1}{\omega^{\frac{1}{\alpha}}}} d\omega^{\frac{1}{\alpha}},$$

gdzie ω oznacza pewną wartość pomiędzy ω_1 i ω_2 . Wypływa stąd bezpośrednio, że całka $\int_0^{\infty} \varphi(\theta \omega) e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$ jest zbieżna jednostajnie dla $\theta_0 \leq \theta \leq 1$, gdzie θ_0 jest dodatnie.

Twierdzenie **A** więc jest dowiedzione. Co się tyczy funkcji $F_{\alpha}(\omega x_0)$, to jedyny warunek, jakiemu jest poddana w tem twierdzeniu, jest, jak widzimy, ten, aby wyrażenie $e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$ było całkowalne. Ważność tej uwagi, uczynionej już przez P h r a g m é n a, wykazemy naocznie przy innej sposobności.

Całkę $f(\theta x_0)$ można przekształcić w sposób następujący:

$$(10) \quad f(\theta x_0) = \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega \theta x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{\omega}{\theta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Położmy jeszcze:

$$(11) \quad \Phi_{\alpha}(\omega) = \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Gdy całka $f(x_0)$ jest zbieżna, granica całki $\Phi_{\alpha}(\omega)$ będzie oczywiście skończona. Mamy:

$$(12) \quad f(\theta x_0) = \frac{1}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{1}{\theta} - 1\right)} \frac{d\Phi_{\alpha}(\omega)}{d\omega^{\frac{1}{\alpha}}} d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Otrzymujemy przeto, całkując przez części:

$$(13) \quad f(\theta x_0) = \frac{1}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{1}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}} - 1 \right) \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{1}{\theta} - 1\right)} \Phi_{\alpha}(\omega) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Strona druga tej nierówności jest zbieżna oczywiście dla $R\left(\frac{1}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}}\right) > 1$, gdzie

θ jest wielkością rzeczywistą lub zespoloną, czyli jest zbieżna dla $R\left(\left(\frac{x_0}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) > 1$, a zatem:

B. Gdy całka:

$$f(x_0) = \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

jest zbieżna, całka przekształcona:

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}},$$

t. j. całka:

$$(14) \quad \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right) \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right) \Phi_a(\omega) d\omega^{\frac{1}{\alpha}},$$

gdzie:

$$\Phi_a(\omega) = \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_a(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

jest zbieżna, o ile $R\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right] > 1$.

Całka

$$\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right) \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right) \Phi_a(\omega) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

przedstawia oczywiście dla każdego obszaru:

$$R\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right] > 1; \quad 2k\pi - a \frac{\pi}{2} < \arg\left(\frac{x_0}{x}\right) < 2k\pi + a \frac{\pi}{2} \text{ (jeżeli } 0 < \alpha < 2), \\ 2k\pi - \pi < \arg\left(\frac{x_0}{x}\right) < 2k\pi + \pi \text{ (jeżeli } \alpha > 2).$$

$$k = -\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \infty$$

gałąź funkcijną. Ta gałąź jest w ogólności dla każdego różnego obszaru gałęzią różnej funkcji. Jedynie ciekawem w tej chwili jest rozpatrzenie obszaru, odpowiadającego wartości $k=0$. Obszar ten obejmuje w sobie wektor $(0x_0)$, a równość:

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_a(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{1}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}} - 1\right) \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{1}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}} - 1\right) \Phi_a(\omega) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

zachodzi dla wartości dodatnich θ , $\theta_0 \leq \theta \leq 1$. Przeto:

C. „Gdy całka

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_a(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

jest zbieżna, całka

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

przedstawia na wektorze (θ, x_0, x_0) — gdzie θ jest wielkością dodatnią, jakkolwiek małą — funkcję analityczną zmiennej x .

Twierdzenia B i C utrzymują się jeszcze, podobnie jak poprzednio twierdzenie A, i wtedy, gdy jedynym warunkiem, któremu podlega fun-

kcyj $F_a(\omega x)$, jest, by wyrażenie $e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$ było całkowalne.

W naszym przypadku, w którym funkcja $F_a(x)$ jest określona równością (5), wykażemy, że funkcja analityczna, którą wzdłuż wektora $(0x)$ przedstawia całka

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}},$$

jest tożsama z funkcją $FC(x)$ i z przedłużeniem analitycznem funkcji $FC(x)$ wzdłuż wektora.

W samej rzeczy, wiemy, że:

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^{\alpha} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} = \int_0^{\infty} e^{-\omega} \omega^{\alpha} d\omega = \Gamma(\alpha+1) = |\alpha|.$$

Na podstawie założenia (1) można zawsze, dając sobie liczbę dodatnią ϵ tak małą, jak chcemy, znaleźć liczbę dodatnią n taką, aby było:

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} |k_{\nu}| \cdot |x|^{\nu} < \frac{\varepsilon}{2},$$

jeżeli tylko $|x| \leq r' < r$. Dla tego obszaru zmiennej x , jeżeli ω' i ω'' są dwie wielkości dodatnie takie, że $\omega' < \omega''$, będzie tedy:

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{|k_{\nu}|}{|\underline{a}^{\nu}|} \int_{\frac{1}{\omega'}}^{\frac{1}{\omega''}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \omega^{\nu} d\omega^{\frac{1}{a}} |x|^{\nu} < \frac{\varepsilon}{2},$$

Z drugiej strony dla tego samego obszaru zmiennej x , jeżeli obierzemy ω' dostatecznie wielkie, będzie:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{|k_{\nu}|}{|\underline{a}^{\nu}|} \int_{\frac{1}{\omega'}}^{\frac{1}{\omega''}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \omega^{\nu} d\omega^{\frac{1}{a}} |x|^{\nu} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

A zatem, przy dowolnych ε i r' , można zawsze znaleźć liczbę dodatnią ω' dostatecznie wielką, aby było:

$$(16) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{|k_{\nu}|}{|\underline{a}^{\nu}|} \int_{\frac{1}{\omega'}}^{\frac{1}{\omega''}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \omega^{\nu} d\omega^{\frac{1}{a}} |x|^{\nu} < \varepsilon,$$

jeżeli tylko $|x| \leq r' < r$.

Szereg potęgowy (5) jest zawsze zbieżny; to samo ma się z szeregiem:

$$e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_{\nu} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \omega^{\nu}}{|\underline{a}^{\nu}|} x^{\nu},$$

uważanym względem $\omega^{\frac{1}{a}}$. Otrzymujemy więc całkę $\int e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}}$, całkując każdy wyraz oddzielnie, i mamy prawo napisać:

$$(17) \quad \int_{\frac{1}{\omega'}}^{\frac{1}{\omega''}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_{\nu}}{|\underline{a}^{\nu}|} \int_{\frac{1}{\omega'}}^{\frac{1}{\omega''}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \omega^{\nu} x^{\nu} d\omega^{\frac{1}{a}}.$$

Będzie więc na mocy wzoru (16):

$$(18) \quad \left| \int_{\frac{1}{\omega'}}^{\frac{1}{\omega''}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}} \right| < \varepsilon,$$

jeżeli tylko $|x| \leq r' < r$.

Całka:

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}}$$

uważana, jako funkcja zmiennej x , jest więc jednostajnie zbieżna w każdym obszarze $|x| \leq r' < r$.

Jeżeli przez $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ oznaczymy ciąg stałych dodatnich, nieograniczenie rosnących, będzie:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}} &= \int_0^{\omega_1^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{\omega_{\nu-1}^{\frac{1}{a}}}^{\omega_{\nu}^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}} \\ &= k_0 + \frac{k_1}{|\underline{a}.1|} \int_0^{\omega_1^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \omega d\omega^{\frac{1}{a}} \cdot x + \frac{k_2}{|\underline{a}.2|} \int_0^{\omega_1^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \omega^2 d\omega^{\frac{1}{a}} \cdot x^2 + \dots \\ &+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ k_0 + \frac{k_1}{|\underline{a}.1|} \int_{\omega_{\nu-1}^{\frac{1}{a}}}^{\omega_{\nu}^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \omega d\omega^{\frac{1}{a}} \cdot x + \frac{k_2}{|\underline{a}.2|} \int_{\omega_{\nu-1}^{\frac{1}{a}}}^{\omega_{\nu}^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \omega^2 d\omega^{\frac{1}{a}} \cdot x^2 + \dots \right\}; \end{aligned}$$

równość ta zachodzi dla obszaru $|x| \leq r' < r$.

Na mocy twierdzenia zasadniczego Weierstrassa (Zur Functionentheorie, Werke, Bd. 2. p. 205) jest więc:

$$(19) \quad \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} k_{\nu} x^{\nu} = FC(x)$$

przynajmniej dla każdego obszaru wewnątrz koła zbieżności C szeregu

$$\sum_{v=0}^{\infty} k_v x^v.$$

Gdy całka $\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{a}}$ jest zbieżna, funkcja analityczna,

przedstawiona przez całkę $\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}}$ wzdłuż wektora $(0, x_0)$, zlewa

się w punktach $|x| < r$ na tym wektorze z funkcją $FC(x)$. A zatem:

D. „Gdy całka

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{a}}$$

jest zbieżna, całka

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}}$$

przedstawia na wektorze $(0, x_0)$ gałąź funkcyjną, która jest tożsamą z funkcją $FC(x)$ i z przedłużeniem analitycznym jej wzdłuż wektora”.

Niechaj teraz $B^{(a)}$ będzie gwiazdą określoną, jak wyżej. Całka

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{a}}$$

nie może być zbieżna zewnątrz $B^{(a)}$. W samej rzeczy, gdybyśmy przyjęli, że jest zbieżna, to, wprowadzając oznaczenie (11), mielibyśmy równość

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}} = \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{a}} \left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{a}} - 1\right) \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \left(\left(\frac{x_0}{\omega}\right)^{\frac{1}{a}} - 1\right) \Phi_a(\omega) d\omega^{\frac{1}{a}}.$$

Pierwsza i druga strona przedstawiają obie tę samą funkcję analityczną na wektorze $(0, x_0)$. Strona druga wskazuje, że ta funkcja jest regularna wszędzie w obszarze:

$$R\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{a}}\right] > 1, \quad -\alpha \frac{\pi}{2} < \arg\left(\frac{x_0}{x}\right) < \alpha \frac{\pi}{2} \text{ (jeżeli } 0 < \alpha < 2), \\ -\pi < \arg\left(\frac{x_0}{x}\right) < \pi \text{ (jeżeli } \alpha \geq 2).$$

Widzimy więc, na zasadzie twierdzenia D i definicji gwiazdy $B^{(a)}$, że punkt x_0 nie może leżeć zewnątrz $B^{(a)}$. A zatem:

E. „Niechaj x_0 przebiega przez wszystkie punkty wewnątrz gwiazdy głównej A , określonej przez stałe $k_0, k_1, \dots, k_{\mu}$, dla których obszar:

$$R\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{a}}\right] > 1, \quad -\alpha \frac{\pi}{2} < \arg\left(\frac{x_0}{x}\right) < \alpha \frac{\pi}{2} \text{ (jeżeli } 0 < \alpha < 2), \\ -\pi < \arg\left(\frac{x_0}{x}\right) < \pi \text{ (jeżeli } \alpha \geq 2)$$

jest położony wewnątrz A , i oznaczmy przez $B^{(a)}$ gwiazdę, która w ten sposób powstaje. Całka $\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}}$ nigdy nie może być zbieżna zewnątrz $B^{(a)}$.

Należy teraz zbadać, czy całka ta, która nie może być zbieżna zewnątrz $B^{(a)}$, jest zbieżna wszędzie wewnątrz $B^{(a)}$. Bo tylko wtedy i gdy zbieżność jest jednostajna dla każdego obszaru wewnątrz $B^{(a)}$, jest $B^{(a)}$ w samej rzeczy gwiazdą zbieżności dla naszej całki.

Nie widać na pierwszy rzut oka możliwości uogólnienia dowodu, podanego w § 2 Noty czwartej dla $\alpha=1$, na przypadek, gdy α jest jakiegokolwiek. Należy więc szukać innej drogi.

Uproszczę zagadnienie, wprowadzając, zamiast $F(x)$, funkcję elementarną $\frac{1}{1-x}$. Dowiodę później, że przypadek ogólny da się do tego prostego sprowadzić.

Phragmén i Borel¹⁾ udowodnili, że gdy umiemy rozwinąć $\frac{1}{1-x}$ na szereg, którego różne wyrazy są funkcjami wymiernymi zmiennej x , to otrzymujemy bezpośrednio rozwinięcie funkcji $F(x)$ na taki szereg. Ogłaszając swoje wyniki, nie zauważyli, że dowiodłem tego samego twierdzenia już przed 21 laty.²⁾

¹⁾ E. Borel Addition au mémoire sur les séries divergentes. Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 16. 1899, p. 132—134.

E. Phragmén Sur une extension d'un théorème de G. Mittag-Leffler. Comptes rendus, 12 czerwca 1899.

²⁾ Fullständig analytisk framställning of hvarje entydig monogen funktion, hvars singulära ställen utgöra en värdeändring of första slaget. Öfversigt of K. Vet. Ak. Förhandl. 8 ltego 1882.

W pracy tej (str. 25, 26) dowiodłem wzoru

$$F(x) = B_0 k_0 + B_1 k_1 x + \dots + B_{\mu} k_{\mu} x^{\mu} \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{(S)} F(z) \left[\frac{1}{z-x} - \frac{1}{z} \left(B_0 + B_1 \frac{x}{z} + \dots + B_{\mu} \left(\frac{x}{z}\right)^{\mu} \right) \right] dz,$$

Jeżeli w rozprawie tej nie posługiwałem się poprzednią metodą, polegającą na sprowadzeniu badania funkcji $F(x)$ do badania funkcji $\frac{1}{1-x}$, to miałem do tego dwa powody następujące:

gdzie $B_0, B_1, \dots, B_n$ są stałymi względem z , lecz nie względem x , i gdzie S jest konturem ograniczającym powierzchnię jednospójną, dla której $F(z)$ jest funkcją regularną. Podaję jeszcze ten wzór w postaci ogólniejszej:

$$F(x) = B_0 k_0 + B_1 k_1 x + \dots + B_n k_n x^n + \sum_{\nu=0}^n \left[G_{\nu} \left(\frac{1}{x-a_{\nu}} \right) - \sum_{\mu=0}^{n-1} B_{\mu} A_{\mu}^{(\nu)} \left(\frac{x}{a_{\nu}} \right)^{\mu} \right] + \frac{1}{2\pi i} \int_{(S)} F(z) \left[\frac{1}{z-x} - \frac{1}{z} \left(B_0 + B_1 \frac{x}{z} + \dots + B_n \left(\frac{x}{z} \right)^n \right) \right] dz,$$

gdzie funkcja, jednokształtna dla powierzchni, ograniczonej przez kontur S i regularna na tym konturze, posiada ograniczoną liczbę punktów osobliwych $a_1, a_2, \dots, a_m$ wewnątrz S , i gdzie $G_i(z)$, $G_m(z)$ są funkcje całkowane, określone przez równość

$$F(x) = G_{\nu} \left(\frac{1}{x-a_{\nu}} \right) + \mathfrak{P}(x-a_{\nu}),$$

zachodzącą w sąsiedztwie punktu a_{ν} , równość zaś

$$G_{\nu} \left(\frac{1}{x-a_{\nu}} \right) = \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{\mu}^{(\nu)} \left(\frac{x}{a_{\nu}} \right)^{\mu}$$

zachodzi w sąsiedztwie punktu $x=0$. Wzór mój wskazuje bezpośrednio, że gdy jest

$$\frac{1}{z-x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z} \left(B_0 + B_1 \frac{x}{z} + \dots + B_n \left(\frac{x}{z} \right)^n \right)$$

wewnątrz figury tworzącej (patrz Notę trzecią), przechodzącej przez punkty $0, x$ i obwiedzącej linię $(0x)$, wtedy równość

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (B_0 k_0 + B_1 k_1 x + \dots + B_n k_n x^n)$$

zachodzi dla gwiazdy E , którą otrzymujemy, kreśląc naokoło każdego wektora, wychodzącego z początku, największą z figur tworzących, która nie obejmuje żadnego punktu osobliwego funkcji $F(x)$, i dołączając do E część wektora pomiędzy początkiem a punktem x .

Jest to właśnie twierdzenie, dowiedzione przez Borela i Phragmén'a.

Rozwinięcia moje byłyby w obu przypadkach w gruncie absolutnie te same i byłbym otrzymał przeto uproszczenie raczej formalne, niż istotne.¹⁾

Po drugie—i to jest powód, który kierował mną w tych pierwszych Notach—chciałem dojść do celu przy pomocy rozważań bezpośrednich, czysto elementarnych, a więc bez posługiwania się całką Cauchy'ego. Metoda zaś, polegająca na sprowadzeniu rozwinięcia funkcji $F(x)$ do rozwinięcia funkcji $\frac{1}{1-x}$, zakłada zasadniczo przejście przez całkę Cauchy'ego. Otóż w Nocie niniejszej już to nie zachodzi, a uproszczenie, do którego dochodzimy, badając najprzód funkcję $F(x) = \frac{1}{1-x}$, ma wagę pierwszorzędą.

§ 2.

Kładąc

$$(20) \quad F(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

otrzymujemy na $F_0(x)$ szereg (9), t. j.

$$E_a(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{\nu}}{a^{\nu}}.$$

W tym paragrafie zajmę się badaniem funkcji $E_0(x)$ przy pomocy wzoru sumacyjnego Maclaurina, wyjaśnionego metodami Abela i Cauchy'ego.²⁾

Liczbę dodatnią a poddam nierówności:

$$(21) \quad 2 \geq a > 0.$$

Niechaj ϵ będzie wielkością dodatnią mniejszą od 1, n zaś liczbą całkowitą dodatnią. Niechaj R będzie prostokątem, którego dwa boki rów-

¹⁾ Autorowie, którzy mówili o uproszczeniu mojego pierwszego dowodzenia, do którego inni autorowie doszli po mnie (patrz np. Pringsheim, J. Hadamard, La série de Taylor et son prolongement analytique, Archiv. d. Math. und Physik (3), 3, p. 289) nie uchwycili—zdaje się—podstawy moich myśli.

²⁾ Patrz na przykład: J. Petersen, Vorlesungen über Functionstheorie, Kopenhaga 1898, Rozdz. 8, §§ 78. 79. H. Meinel, Die Dirichlet'schen Reihen die zahlentheoretischen Functionen und die unendlichen Produkte von endlichem Geschlecht, Acta Soc. Fennicae 31, 602. E. Lindelöf, Quelques applications d'une formule sommatoire générale, Acta Soc. Fennicae 31, 603.

noległe od osi rzeczywistej są położone po jednej i drugiej stronie tej osi w odległości n , drugie zaś dwa boki, prostopadłe do tej osi, przechodzą jeden przez punkt ε , drugi przez punkt $n+1-\varepsilon$.

Będzie:

$$(22) \quad \sum_{\nu=0}^n \frac{x^\nu}{\alpha \nu} = \int_{-\varepsilon+i n}^{n+1-\varepsilon+i n} \frac{1}{e^{2\pi i z}-1} \frac{x^z}{\alpha z} dz.$$

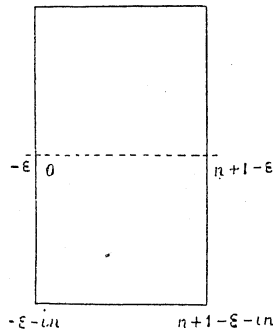


Fig. 15.

Położmy:

$$(23) \quad \int_{-\varepsilon+i n}^{n+1-\varepsilon+i n} \frac{1}{e^{2\pi i z}-1} \frac{x^z}{\alpha z} dz = \int_{-\varepsilon+i n}^{n+1-\varepsilon+i n} \frac{1}{e^{2\pi i z}-1} \frac{x^z}{\alpha z} dz + \int_{n+1-\varepsilon+i n}^{n+1-\varepsilon-i n} \frac{1}{e^{2\pi i z}-1} \frac{x^z}{\alpha z} dz,$$

gdzie R_1 oznacza linię $(n+1-\varepsilon, n+1-in, -\varepsilon+in, -\varepsilon)$, R_2 linię $(-\varepsilon, -\varepsilon+in, n+1-\varepsilon-in, n+1-\varepsilon)$. Kładąc:

$$(24) \quad z = \tau + it, \quad (25) \quad x = r^{it},$$

gdzie τ, t, φ są wielkościami rzeczywistymi, r zaś jest modułem $|x|$, znajdziemy:

$$(26) \quad \int_{-\varepsilon+i n}^{n+1-\varepsilon+i n} \frac{1}{e^{2\pi i z}-1} \frac{x^z}{\alpha z} dz = i \int_0^n \frac{1}{e^{-2\pi i \varepsilon + 2\pi i t}-1} \frac{r^{it} e^{i\varphi(n+1-\varepsilon+it)}}{\alpha(n+1-\varepsilon+it)} dt - \int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon} \frac{1}{e^{2\pi i \tau - 2\pi i n}-1} \frac{r^\tau e^{-i\varphi n}}{\alpha(\tau-in)} r^{it} e^{i\varphi(n+1-\varepsilon)} d\tau - i \int_0^n \frac{1}{e^{-2\pi i \varepsilon + 2\pi i t}-1} \frac{r^{-\varepsilon} e^{-i\varphi t}}{\alpha(-\varepsilon-it)} r^{it} e^{-i\varphi \varepsilon} dt.$$

(96)

$$(27) \quad \int_{-\varepsilon+i n}^{n+1-\varepsilon+i n} \frac{1}{e^{2\pi i z}-1} \frac{x^z}{\alpha z} dz = i \int_0^n \frac{1}{e^{-2\pi i \varepsilon + 2\pi i t}-1} \frac{r^{it} e^{i\varphi(n+1-\varepsilon+it)}}{\alpha(n+1-\varepsilon+it)} r^{-it} e^{i\varphi(n+1-\varepsilon)} dt + \int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon} \frac{1}{e^{2\pi i \tau - 2\pi i n}-1} \frac{r^\tau e^{-i\varphi n}}{\alpha(\tau-in)} r^{-in} e^{i\varphi t} d\tau - i \int_0^n \frac{1}{e^{-2\pi i \varepsilon + 2\pi i t}-1} \frac{r^{-\varepsilon} e^{-i\varphi t}}{\alpha(-\varepsilon-it)} r^{-it} e^{-i\varphi \varepsilon} dt.$$

A zatem:

$$(28) \quad \int_{-\varepsilon+i n}^{n+1-\varepsilon+i n} \frac{1}{e^{2\pi i z}-1} \frac{x^z}{\alpha z} dz = i \int_0^n \left[\frac{r^{it}}{e^{-2\pi i \varepsilon + 2\pi i t}-1} \frac{r^{n+1-\varepsilon} e^{-i\varphi t}}{\alpha(n+1-\varepsilon+it)} + \frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i \varepsilon + 2\pi i t}-1} \frac{r^{n+1-\varepsilon} e^{i\varphi t}}{\alpha(n+1-\varepsilon-it)} \right] e^{i\varphi(n+1-\varepsilon)} dt + i \int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon} \left[\frac{r^{-in}}{e^{2\pi i \tau - 2\pi i n}-1} \frac{r^\tau e^{i\varphi n}}{\alpha(\tau-in)} - \frac{r^{in}}{e^{2\pi i \tau - 2\pi i n}-1} \frac{r^\tau e^{-i\varphi n}}{\alpha(\tau+in)} \right] e^{i\varphi \tau} d\tau - i \int_0^n \left[\frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i \varepsilon + 2\pi i t}-1} \frac{r^{-\varepsilon} e^{i\varphi t}}{\alpha(-\varepsilon-it)} + \frac{r^{it}}{e^{-2\pi i \varepsilon + 2\pi i t}-1} \frac{r^{-\varepsilon} e^{-i\varphi t}}{\alpha(-\varepsilon+it)} \right] e^{-i\varphi \varepsilon} dt.$$

Aby roztrząsnąć wzór (28), musimy znać moduł wielkości $\frac{1}{\alpha z}$. Wyrażenie Weierstrassa (patrz np. Schlämilch, Compendium der höheren Analysis, 2, 3-e wyd. str. 248) daje:

$$\frac{1}{\tau+it} \cdot \frac{1}{\tau-it} = e^{i\varphi(\tau+n)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\tau+it}{n}\right)^{-\frac{\tau+it}{n}} \cdot e^{i\varphi(\tau-n)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\tau-it}{n}\right)^{-\frac{\tau-it}{n}} = e^{2i\varphi\tau} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2\tau}{n} + \frac{\tau^2+t^2}{n^2}\right)^{-\frac{2\tau}{n}} = \left[e^{i\varphi} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\tau}{n}\right) e^{-\frac{\tau}{n}} \right]^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{t^2}{(\tau+n)^2}\right) = \frac{1}{(\tau)^2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{t^2}{(\tau+n)^2}\right).$$

A zatem:

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\tau+it} \leq \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}{2\pi t}}; \quad \tau \geq 0, +\infty > t > -\infty \\ \frac{1}{-\varepsilon+it} \leq \frac{1}{-\varepsilon} \sqrt{\frac{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}{2\pi t}} \sqrt{1+\frac{t^2}{(1-\varepsilon)^2}}; \quad 0 < \varepsilon < 1. \end{array} \right.$$

Rozpatrzmy teraz pierwszą całkę po stronie drugiej wzoru (28). Na zasadzie pierwszego z wzorów (29) i ponieważ minimum dwóch modułów $|e^{-2\pi i\varepsilon}-2\pi i-1|$ i $|e^{-2\pi i\varepsilon}-e^{-2\pi t}|$, ($0 \leq t$) jest wielkością h , różną od zera, będzie:

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \int_0^n \left[\frac{\tau^{it}}{e^{-2\pi i\varepsilon}-2\pi i-1} \cdot \frac{\tau^{n+1-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\alpha(n+1-\varepsilon+it)} + \frac{\tau^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon}-2\pi i-1} \cdot \frac{\tau^{n+1-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\alpha(n+1-\varepsilon-it)} \right] e^{i\varphi(n+1-\varepsilon)t} dt \right| \\ \leq \frac{\tau^{n+1-\varepsilon}}{\alpha(n+1-\varepsilon)} \frac{1}{h} \int_0^\infty (e^{-\varphi t} + e^{-(2\pi-\varphi)t}) \sqrt{\frac{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}{2\pi t}} dt. \end{array} \right.$$

Całka po stronie drugiej jest zbieżna, jeżeli φ spełnia warunek:

$$(31) \quad 2\pi - a \frac{\pi}{2} \geq \varphi \geq a \frac{\pi}{2}.$$

Wyrażenie $\frac{\tau^{n+1-\varepsilon}}{\alpha(n+1-\varepsilon)}$ dąży nieograniczenie do zera wraz z $\frac{1}{n}$. Moduł całki po stronie pierwszej wzoru (30) zbliża się tedy nieograniczenie do zera wraz z $\frac{1}{n}$, gdy φ spełnia warunek (31).

Rozpatrzmy teraz drugą całkę po stronie drugiej wzoru (28). Na zasadzie drugiego z wzorów (29) będzie:

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon} \frac{\tau^{-in}}{e^{i\pi i\varepsilon+2\pi n}-1} \cdot \frac{\tau^\tau e^{\varphi n}}{\alpha(\tau-in)} - \frac{\tau^{-in}}{e^{2\pi i\varepsilon-2\pi n}-1} \cdot \frac{\tau^\tau e^{-\varphi n}}{\alpha(\tau+in)} e^{i\varphi \tau} d\tau \right| \\ < \frac{e^{-(2\pi-\varphi)n} + e^{-\varphi n}}{1-e^{-2\pi n}} \sqrt{1+\frac{n^2}{(1-\varepsilon)^2}} \sqrt{\frac{e^{a\pi n}-e^{-a\pi n}}{2a\pi n}} \int_{-\varepsilon}^\infty \frac{\tau^\tau}{\alpha\tau} d\tau, \end{array} \right.$$

gdzie całka $\int_{-\varepsilon}^\infty \frac{\tau^\tau}{\alpha\tau} d\tau$ ma wartość skończoną. Strona druga wzoru (32)

dąży nieograniczenie do zera wraz z $\frac{1}{n}$, o ile φ spełnia warunek:

$$(33) \quad 2\pi - a \frac{\pi}{2} > \varphi > a \frac{\pi}{2},$$

który wymaga, aby było:

$$(34) \quad 2 > a > 0.$$

Dodając do warunku (21) ten nowy warunek (34) i zakładając, że φ spełnia warunek (33), widzimy, że moduł każdej z dwóch całek po stronie drugiej wzoru (27) dąży nieograniczenie do zera wraz z $\frac{1}{n}$.

Otrzymujemy tedy wzór podstawowy:

$$(35) \quad \begin{aligned} E_\bullet(x) &= \sum_{\nu=0}^\infty \frac{x^\nu}{\alpha\nu} \\ &= -i \int_0^\infty \frac{\tau^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi i}-1} \cdot \frac{\tau^{-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\alpha(-\varepsilon-it)} + \frac{\tau^{it}}{e^{-2\pi i\varepsilon-2\pi i}-1} \cdot \frac{\tau^{-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\alpha(-\varepsilon+it)} e^{-i\varphi\varepsilon} dt. \end{aligned}$$

Mamy:

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \int_0^\infty \left[\frac{\tau^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi i}-1} \cdot \frac{\tau^{-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\alpha(-\varepsilon-it)} + \frac{\tau^{it}}{e^{-2\pi i\varepsilon-2\pi i}-1} \cdot \frac{\tau^{-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\alpha(-\varepsilon+it)} \right] e^{-i\varphi\varepsilon} dt \right| \\ < \frac{1}{h} \frac{\tau^{-\varepsilon}}{\alpha\varepsilon} \int_0^\infty (e^{-(2\pi-\varphi)t} + e^{-\varphi t}) \sqrt{1+\frac{t^2}{(1-\varepsilon)^2}} \sqrt{\frac{e^{a\pi t}-e^{-a\pi t}}{2a\pi t}} dt. \end{array} \right.$$

Całka po stronie drugiej jest zbieżna, skoro φ spełnia warunek (33). Gdy spełniają się tedy warunki (34) i (33), całka po stronie drugiej wzoru (35) jest zbieżna. Lecz wzór (36) daje nam jeszcze inną cenną wskazówkę.

Mamy:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\tau^{-\varepsilon}}{\alpha\varepsilon} = 0,$$

całka zaś po drugiej stronie wzoru (36) jest niezależna od r . Docho-
dzimy więc do twierdzenia:

F. „Zakładamy, że $2 > \alpha > 0$. Moduł funkcji $E_\alpha(x)$ dąży nieogranici-
czenie do zera wraz z $\frac{1}{r}$, gdy x dąży do nieskończoności wewnątrz kąta φ ,

spełniającego warunek $2\pi - \alpha \frac{\pi}{2} > \varphi > \alpha \frac{\pi}{2}$.

Kładąc $\alpha = 1$, otrzymujemy znaną własność funkcji wykładniczej $E_1(x) = e^x$. Twierdzenie to rozwiązuje też ważne pytanie, podniesione przed kilku laty przez Borela (L'Intermédiaire des mathématiciens, 6, Nr. 4, kwiecień 1899): „czy można znaleźć funkcję całkowitą, której moduł przekracza jedność tylko wewnątrz pewnego kąta, tak małego, jak zgóry chcemy; a jeżeli nie, czy można dowieść ściśle, że na pytanie to należy dać odpowiedź przeczącą?”

Na pytanie to należy dać odpowiedź twierdzącą, a funkcja $E_\alpha(x)$ jest funkcją żądaną, jeżeli tylko nadamy wielkości α wartość dostatecznie małą. Nietrudno też utworzyć inne funkcje, mające tę samą własność, jaką ma funkcja $E_\alpha(x)$. Taką jest na przykład funkcja:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{|a_1\nu| |a_2\nu| \dots |a_m\nu|}; \quad a_1 + a_2 + \dots + a_m = \alpha,$$

albo funkcja:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{(|a_1\nu|^{\beta_1} |a_2\nu|^{\beta_2} \dots |a_m\nu|^{\beta_m})}; \quad a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_m\beta_m = \alpha.$$

Rozumowanie, stosowane wyżej do funkcji $E_\alpha(x)$, okaże, że moduł każ-
dej z tych funkcji dąży nieograniczenie do zera, gdy $|x|$ rośnie nieogranici-
czenie wzdłuż wektora, położonego w kącie $2\pi - \alpha \frac{\pi}{2} > \varphi > \alpha \frac{\pi}{2}$. Zna-
my przeto wzrastanie funkcji $E_\alpha(x)$ w tym kącie. Zbadajmy teraz pyta-
nie o wzrastaniu tej funkcji w innej części płaszczyzny, t. j. w kącie:

$$(37) \quad \alpha \frac{\pi}{2} \geq \varphi \geq -\alpha \frac{\pi}{2}.$$

Wróćmy do wzoru (23), w którym poddamy niewielkiej odmianie pierw-
szą z całek po stronie drugiej.

Mamy:

$$(38) \quad \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} = -1 - \frac{1}{e^{-2\pi i z} - 1},$$

przeto:

$$(39) \quad \int_{(R_1)} \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} \frac{z^\tau}{az} dz = - \int_{(R_1)} \frac{z^\tau}{az} dz - \int_{(R_1)} \frac{1}{e^{-2\pi i z} - 1} \frac{z^\tau}{az} dz.$$

Funkcja $\frac{z^\tau}{az}$ zachowuje się regularnie wewnątrz i na obwodzie pro-
stokąta $(-\varepsilon, n+1-\varepsilon, n+1-\varepsilon+in, -\varepsilon+in, -\varepsilon)$, przeto:

$$- \int_{(R_1)} \frac{z^\tau}{az} dz = \int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon} \frac{z^\tau}{a\tau} d\tau.$$

Z drugiej strony jest:

$$(41) \quad \left. \begin{aligned} & - \int_{(R_1)} \frac{1}{e^{-2\pi i z} - 1} \frac{z^\tau}{az} dz \\ & = -i \int_0^n \frac{1}{e^{2\pi i t + 2\pi i t} - 1} \frac{\tau^{n+1-\varepsilon} e^{-\tau i t}}{a(n+1-\varepsilon+it)} \tau^{it} e^{i\varphi(n+1-\varepsilon+it)} dt \\ & \quad + \int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon} \frac{1}{e^{-2\pi i \tau + 2\pi i \tau} - 1} \frac{\tau^\tau e^{-\tau n}}{a(\tau+in)} \tau^{in} e^{i\varphi \tau} d\tau \\ & \quad + i \int_0^n \frac{1}{e^{2\pi i t + 2\pi i t} - 1} \frac{\tau^{-\varepsilon} e^{-\tau n}}{a(-\varepsilon-it)} \tau^{it} e^{-i\varphi \tau} dt. \end{aligned} \right\}$$

Mamy zatem na mocy wzorów (23), (39), (40), (41), (27):

$$(42) \quad \left. \begin{aligned} & \int_{(R_1)} \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} \frac{z^\tau}{az} dz = \int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon} \frac{z^\tau}{a\tau} d\tau \\ & + i \int_0^n \left[\frac{\tau^{-it}}{e^{-2\pi i t + 2\pi i t} - 1} \frac{\tau^{n+1-\varepsilon} e^{i\varphi t}}{a(n+1-\varepsilon-it)} - \frac{\tau^{it}}{e^{2\pi i t + 2\pi i t} - 1} \frac{\tau^{n+1-\varepsilon} e^{-i\varphi t}}{a(n+1-\varepsilon+it)} \right] e^{i\varphi(n+1-\varepsilon)} dt \\ & + \int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon} \left[\frac{\tau^{-in}}{e^{-2\pi i \tau + 2\pi i \tau} - 1} \frac{\tau^\tau e^{i\varphi n}}{a(\tau-in)} + \frac{\tau^{in}}{e^{-2\pi i \tau + 2\pi i \tau} - 1} \frac{\tau^\tau e^{-i\varphi n}}{a(\tau+in)} \right] e^{i\varphi \tau} d\tau \\ & - i \int_0^n \left[\frac{\tau^{-it}}{e^{-2\pi i t + 2\pi i t} - 1} \frac{\tau^{-\varepsilon} e^{i\varphi t}}{a(-\varepsilon-it)} - \frac{\tau^{it}}{e^{2\pi i t + 2\pi i t} - 1} \frac{\tau^{-\varepsilon} e^{-i\varphi t}}{a(-\varepsilon+it)} \right] e^{-i\varphi \varepsilon} dt; \end{aligned} \right\}$$

jest to wzór, odpowiadający wzorowi (28).

Całka $\int_{-\varepsilon}^{\infty} \frac{x^r}{|ax|} dx$ jest zbieżna dla wszelkich wartości na r i na φ . Dla

drugiej całki po stronie drugiej mamy:

$$(43) \quad \left| \int_0^n \left[\frac{r^{n+1-\varepsilon} e^{\varphi t}}{e^{-2\pi i \varepsilon + 2\pi i t} - 1} \frac{r^{n+1-\varepsilon} e^{\varphi t}}{a(n+1-\varepsilon - it)} - \frac{r^{it}}{e^{2\pi i \varepsilon + 2\pi i t} - 1} \frac{r^{n+1-\varepsilon} e^{-\varphi t}}{a(n+1-\varepsilon - it)} \right] e^{i\varphi(n+1-\varepsilon - t)} dt \right|$$

$$\leq \frac{r^{n+1-\varepsilon}}{a(n+1-\varepsilon)} \frac{1}{h} \int_0^{\infty} (e^{-(2\pi-\varphi)t} + e^{-(2\pi+\varphi)t}) \sqrt{\frac{e^{a\pi t} - e^{-a\pi t}}{2a\pi t}} dt,$$

a więc moduł tej całki dąży nieograniczenie do zera wraz z $\frac{1}{n}$, jeżeli φ spełnia warunek:

$$(44) \quad 2\pi - \alpha \frac{\pi}{2} \geq \varphi \geq -\left(2\pi - \alpha \frac{\pi}{2}\right).$$

Co się tyczy trzeciej całki po stronie drugiej wzoru (42), mamy:

$$(45) \quad \left| \int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon} \frac{r^{n+1-\varepsilon} e^{-i\alpha u}}{e^{2\pi i \varepsilon + 2\pi i u} - 1} \frac{r^{\varepsilon} e^{\varphi u}}{a(\varepsilon - iu)} + \frac{r^{i\alpha}}{e^{-2\pi i \varepsilon + 2\pi i u} - 1} \frac{r^{\varepsilon} e^{-\varphi u}}{a(\varepsilon + iu)} \right| e^{i\varphi \varepsilon} d\varepsilon$$

$$< (e^{-(2\pi-\varphi)n} + e^{-(2\pi+\varphi)n}) \sqrt{1 + \frac{n^2}{(1-\varepsilon)^2}} \sqrt{\frac{e^{a\pi n} - e^{-a\pi n}}{2a\pi n}} \int_{-\varepsilon}^{\infty} \frac{r^{\varepsilon}}{|a\varepsilon|} d\varepsilon$$

Moduł zatem tej całki dąży zatem nieograniczenie do zera wraz z $\frac{1}{n}$, skoro tylko φ spełnia warunek:

$$(46) \quad 2\pi - \alpha \frac{\pi}{2} > \varphi > -\left(2\pi - \alpha \frac{\pi}{2}\right);$$

otrzymujemy tedy:

$$(47) \quad E_a(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{|ar|}$$

$$= \int_{-\varepsilon}^{\infty} \frac{x^r}{|ar|} dr + i \int_0^{\infty} \left(\frac{r^{it}}{e^{2\pi i \varepsilon + 2\pi i t} - 1} \frac{r^{-\varepsilon} e^{-\varphi t}}{a(-\varepsilon + it)} - \frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i \varepsilon + 2\pi i t} - 1} \frac{r^{-\varepsilon} e^{\varphi t}}{a(-\varepsilon - it)} \right) e^{-i\varphi \varepsilon} dt$$

wzór, który należy postawić obok wzoru (35) i w którym całka druga po stronie drugiej jest zbieżna, gdy spełnia się warunek (46). Ponieważ moduł tej całki jest mniejszy od $Kr^{-\varepsilon}$, gdzie K jest stała niezależna od r (porównaj rozumowanie, przeprowadzone przy całce (36)), więc dąży nieograniczenie do zera, gdy r rośnie nieograniczenie wzdłuż wektora, położonego w kącie (46). Co się tyczy wielkości dodatniej α , to warunek (46) prowadzi się wprost do warunku $4 > \alpha > 0$, a zbieżność drugiej całki po stronie drugiej wzoru (47) zachodzi przy ostatnio podanym warunku i warunku (46).

Wzór (47) daje nam:

$$(48) \quad E_1(x) = x^x = e^{x^x} = \int_{-\varepsilon}^{\infty} \frac{x^r}{|ar|} dr + \delta_r^{(1)}.$$

W tym wzorze argument φ zmiennej x spełnia, według przyjęcia, warunek:

$$(49) \quad \frac{3\pi}{2} > \varphi > -\frac{3\pi}{2},$$

który wypływa z warunku (46). Moduł wielkości $\delta_r^{(1)}$ zmniejsza się nieograniczenie wraz z $\frac{1}{|x|} = \frac{1}{r}$, gdy x dąży do nieskończoności wzdłuż wektora, położonego w kącie (49).

Mamy:

$$\int_{-\varepsilon}^{\infty} \frac{x^r}{|ar|} dr = \frac{1}{a} \int_{-\varepsilon}^{\infty} \frac{x^{\frac{r}{a}}}{|r|} dr.$$

Na zasadzie wzoru (48), wprowadzając $a\varepsilon$ zamiast ε i oznaczając przez $\delta_r^{(a)}$ to na co przechodzi $\delta_r^{(1)}$ przy tem podstawieniu, będziemy mieli:

$$\int_{-\varepsilon}^{\infty} \frac{x^r}{|ar|} dr = \frac{1}{a} e^{r^{\frac{1}{a}}} \frac{r^{\frac{1}{a}}}{a} - \frac{1}{a} \delta_r^{(a)},$$

a ta równość wymaga warunku:

$$(50) \quad a \frac{3\pi}{2} > \varphi > -a \frac{3\pi}{2}.$$

Wracając do wzoru (47), otrzymujemy następujące twierdzenie:

G. „Dajmy, że $4 > \alpha > 0$. W przypadku, gdy x jest położone wewnątrz kąta, określonego przez nierówności:

$$2\pi - \alpha \frac{\pi}{2} > \varphi > -\left(2\pi - \alpha \frac{\pi}{2}\right), \quad \alpha \frac{3\pi}{2} > \varphi > -\alpha \frac{3\pi}{2},$$

mamy:

$$(51) \quad E_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} e^{\frac{1}{\alpha} e^{i\frac{\pi}{\alpha}}} + e^{i\alpha},$$

gdzie moduł wielkości $e^{i\alpha}$ zmniejsza się nieograniczenie, gdy $|x|$ rośnie nieograniczenie“.

Dwa twierdzenia F i G, wzięte razem, pouczają nas w zupełności co do wzrastania funkcji $E_\alpha(x)$ we wszelkich różnych kierunkach, byleby było $2 > \alpha > 0$.

Można tedy wypowiedzieć następujące twierdzenie:

Twierdzenie 8a. „Funkcja $E_\alpha(x)$, gdzie α oznacza stałą dodatnią, spełniającą warunek $2 > \alpha > 0$, zachowuje się co do swego wzrastania w różnych kierunkach w sposób następujący:

Należy rozróżnić trzy przypadki. 1) Moduł wielkości x zwiększa się nieograniczenie wewnątrz kąta $2\pi - \alpha \frac{\pi}{2} > \varphi > \alpha \frac{\pi}{2}$; wtedy $|E_\alpha(x)|$ dąży nieograniczenie do zera; 2) moduł wielkości x zwiększa się nieograniczenie wzdłuż jednego z dwóch wektorów $\varphi = \pm \alpha \frac{\pi}{2}$; wtedy $|E_\alpha(x)|$ dąży nieograniczenie do $\frac{1}{\alpha}$; 3) moduł wielkości x zmienia się nieograniczenie wewnątrz kąta $\alpha \frac{\pi}{2} > \varphi > -\alpha \frac{\pi}{2}$; wtedy $|E_\alpha(x)|$ zwiększa się nieograniczenie, równocześnie zaś wyrażenie $|E_\alpha(x) - \frac{1}{\alpha} e^{\frac{1}{\alpha} e^{i\frac{\pi}{\alpha}}}|$ zmniejsza się nieograniczenie“.

Dla $\alpha = 1$ otrzymujemy znaną charakterystyczną własność funkcji wykładniczej $E_1(x) = e^x$.

Twierdzenie G poucza nas nadto o wzrastaniu funkcji $E_\alpha(x)$ w przypadku $\alpha = 2$, gdy $\pi > \varphi > -\pi$. Widzimy, że $|E_2(x)|$ zwiększa się nieograniczenie, gdy $|x|$ dąży do nieskończoności w kącie, zawartym wewnątrz kąta $\pi > \varphi > -\pi$, równocześnie zaś $|E_2(x) - \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}}}|$ zmniejsza się nieograniczenie.

Lecz ani twierdzenie F, ani twierdzenie G nie dają nam wzrastania funkcji $|E_\alpha(x)|$ w przypadku $\varphi = \pm \pi$; przeciwnie, otrzymujemy je bezpośrednio z równości:

$$E_2(x) = \frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{2} = e^{\frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}}} + e^{-\frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}}},$$

z której wyprowadzamy:

$$E_2(e^{i\pi}) = E_2(-r) = \cos \sqrt{r}.$$

W tym paragrafie wyczerpaliśmy więc całkowicie pytanie o wzrastaniu funkcji $E_\alpha(x)$ w przypadku $2 \geq \alpha > 0$; w następnym paragrafie pokażę, w jaki sposób zbadać można zupełnie wzrastanie tej funkcji w przypadku $\alpha > 2$.

§ 3.

W § poprzednim badałem wzrastanie funkcji $E_\alpha(x)$ przy pomocy wzoru sumacyjnego Mac l a u r i n a; przytem stała α poddana była warunkowi $2 \geq \alpha > 0$. W § niniejszym użyję innej drogi, prowadzącej do poznania wzrastania nie tylko funkcji $E_\alpha(x)$ dla wartości α , poddanej pomienionemu warunkowi, lecz i funkcji $F_\alpha(x)$ dla wszelkiej wartości rzeczywistej na α .

W krótkim czasie po ogłoszeniu rozprawy R i e m a n n a o liczbach pierwszych („Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, Berl. Monatsber. Nov. 1859. Ges.; Werke 2e Aufl. p. 149), H a n k e l ogłosił godną uwagi rozprawę (Die Eulerschen Integrale bei unbeschränkter Variabilität des Argumentes, Leipzig. Voss 1863; Zeitschr. f. Math. u.

Phys. 9. p. 1—21), w której otrzymał na $\frac{1}{z}$ wyrażenie przy pomocy całki określonej, analogicznej do całki, podanej przedtem przez R i e m a n n a dla funkcji $\zeta(z)$ (Werke, p. 146); wyrażenie to jest:

$$(52) \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{t-z} \frac{dt}{t},$$

gdzie kontur S jest konturem otwartym, po którego lewej stronie znajduje się początek, a po którym przebieg odbywa się w zwrocie dodatnim. Kontur ten można zdefiniować w sposób następujący:

Wprowadzamy dwie wielkości dodatnie ϱ i ε , z których ε jest mniejsza od 2. Kontur składa się z trzech części różnych. Najprzód idzie część wektora, wychodzącego z początku, o argumentie $-i(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}$, pomiędzy nieskończonością a punktem $\varrho e^{-i(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$. Następnie idzie łuk koła, zatoczonego

końcem wektora długości ϱ , obracającego się około początku w zwrocie prostym, od $\varrho e^{-i(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ do $\varrho e^{i(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$. Wreszcie mamy część nowego wektora, wychodzącego z początku, o argumentie $i(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}$, pomiędzy punktem $\varrho e^{i(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ a nieskończonością. (Fig. 16).

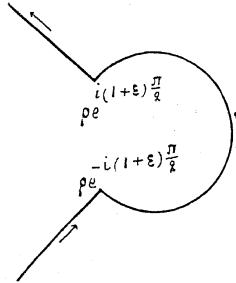


Fig. 16.

Położmy $|x| < \varrho^a$; będzie:

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^v}{|a|^v} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{S}} e^t \left(\sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{x}{t^a} \right)^v \right) \frac{dt}{t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{S}} \frac{1}{a} e^t \frac{dt}{t^a - x}.$$

Niechaj będzie $t^a = \omega$, $\bar{S}$ zaś niechaj oznacza nowy kontur w płaszczyźnie zmiennej ω , pozostawiający początek po lewej stronie i utworzony: z części, pomiędzy nieskończonością a $\varrho^a e^{-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$, wektora, wychodzącego z początku i mającego argument $-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}$; z łuku koła, zakreślonego przez koniec wektora o długości ϱ^a , obracającego się naokoło początku w zwrocie prostym od $\varrho^a e^{-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ do $\varrho^a e^{i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$; wreszcie z części, pomiędzy $\varrho^a e^{i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ a nieskończonością, wektora, wychodzącego z początku i mającego za argument $i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}$. (Fig. 17).

Będzie:

$$(53) \quad E_a(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^v}{|a|^v} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{S}} \frac{1}{a} e^{\omega^{\frac{1}{a}}} \frac{d\omega}{\omega - x},$$

gdzie całka jest wzięta w zwrocie dodatnim. Całka ta przedstawia jedną i tę samą funkcję zmiennej x , jeżeli x jest położone z tej samej strony konturu $\bar{S}$, co początek.

Rozpatrzmy przypadek $2 > a > 0$. Ponieważ ε jest tak małe, jak chcemy, wzór (53) wskazuje, że $|E_a(x)|$ zmniejsza się nieograniczenie wraz z $\frac{1}{r}$ ($x = re^{i\varphi}$), gdy x dąży do nieskończoności w kącie, znajdującym się wewnątrz kąta $2\pi - a\frac{\pi}{2} > \varphi > a\frac{\pi}{2}$. Jest to twierdzenie F § 2. Ale wzór ten wskazuje nadto wzrastanie funkcji $E_a(x)$ w kącie $a\frac{\pi}{2} \cong \varphi \cong -a\frac{\pi}{2}$ w przypadku $2 > a > 0$, w przypadku zaś $a \geq 2$ daje nam wzrastanie funkcji $E_a(x)$ w różnych kierunkach.

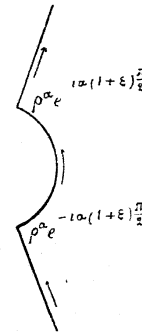


Fig. 17.

Dajmy, że przy jakimkolwiek a wielkość x znajduje się w kącie $a\frac{\pi}{2} \cong \varphi \cong -a\frac{\pi}{2}$. Wprowadźmy dwa kontury różne, a mianowicie $\bar{S}_1$, odpowiadający promieniowi $\varrho = \varrho_1$, i $\bar{S}_2$, odpowiadający promieniowi $\varrho = \varrho_2$, gdzie $\varrho_2 < |x| < \varrho_1$. Mamy:

$$(54) \quad E_a(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\bar{S}_1)} \frac{1}{a} e^{\omega^{\frac{1}{a}}} \frac{d\omega}{\omega - x}.$$

Oznaczmy przez R czworobok, utworzony z następujących czterech linii: łuku kołowego, opisanego przez końce wektora o długości ϱ_1^a , obracającego się naokoło początku w zwrocie prostym od $\varrho_1^a e^{-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ do $\varrho_1^a e^{i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$; z zawartej pomiędzy $\varrho_1^{i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ a $\varrho_2^{i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ części wektora o argumentie $i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}$,

wychodzącego z początku; z łuku kołowego, opisanego przez koniec wektora o długości ρ_2^a , obracającego się w zwrocie odwrotnym około początku od $\rho_2^a e^{i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ do $\rho_2^a e^{-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$; wreszcie z zawartej pomiędzy $\rho_2^a e^{-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ a $\rho_1^a e^{-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ części wektora o argumentcie $-\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}$, wychodzącego z początku. (Fig. 18).

Mamy:

$$(55) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{(\bar{S}_2)} \frac{1}{a} e^{\omega^{\frac{1}{a}}} \frac{d\omega}{\omega-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\bar{S}_2)} \frac{1}{a} e^{\omega^{\frac{1}{a}}} \frac{d\omega}{\omega-x} + \frac{1}{\omega-x} \int_{(\bar{R})} \frac{1}{a} e^{\omega^{\frac{1}{a}}} \frac{d\omega}{\omega-x}.$$

Strona druga wzoru (54), która przedstawiała jedną i tę samą funkcję, gdy x znajdowało się po tej samej stronie konturu $\bar{S}_2$, co początek, przedstawia inną znów, jedną i tę samą, funkcję, gdy x znajduje się po przeciwległej stronie początku. Całka ta dąży nieograniczenie do zera, gdy x zmierza do nieskończoności w kącie:

$$(56) \quad \rho_1^a e^{i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}} \quad \alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2} > \varphi > -\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}.$$

Kładziemy więc:

$$(57) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{(\bar{S}_2)} \frac{1}{a} e^{\omega^{\frac{1}{a}}} \frac{d\omega}{\omega-x} = \varepsilon_r^{(\alpha)}.$$

Wynika stąd, że w kącie (56) będzie:

$$(58) \quad E_a(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\bar{R})} \frac{1}{a} e^{\omega^{\frac{1}{a}}} \frac{d\omega}{x-a} + \varepsilon_r^{(\alpha)},$$

Fig. 18.

gdzie moduł wielkości $\varepsilon_r^{(\alpha)}$ zmniejsza się nieograniczenie wraz z $\frac{1}{|x|} = \frac{1}{r}$.

W przypadku $2 > \alpha > 0$, obierając ε dostatecznie małym, mamy:

$$(59) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{(\bar{R})} \frac{1}{a} e^{\omega^{\frac{1}{a}}} \frac{d\omega}{\omega-x} = \frac{1}{a} e^{x^{\frac{1}{a}}};$$

otrzymujemy więc w tym przypadku:

$$(60) \quad E_a(x) = \frac{1}{a} e^{x^{\frac{1}{a}}} + \varepsilon_r^{(\alpha)} = \frac{1}{a} e^{x^{\frac{1}{a}}} + \varepsilon_r^{(\alpha)};$$

równość ta zachodzi w kącie (56); twierdzenie więc 8a jest dowiedzione.

Wzór (58) daje nam jeszcze sposób zupełnego zbadania wzrastania funkcji $E_a(x)$, gdy $a \geq 2$. Ta funkcja jest innej natury, niż funkcja $E_a(x)$, $2 > \alpha > 0$, i zdaje się być mniej ważną; ale jest rzeczą ciekawą poznanie własności charakterystycznych dwóch funkcji, pochodzących z tego samego źródła.

Dla uproszczenia sprawy, aby w całce (54) części nieskończone drogi całkowania zwały się obie z osią rzeczywistą dodatnią (albo w przypadku szczególnym z wektorem bliskim tej osi. Jest to możliwe dla tego, że w przypadku $a \geq 2$ istnieje zawsze liczba parzysta taka, że $\frac{\alpha}{2} < 2m < \frac{3\alpha}{2}$. Jeżeli obierzemy taką liczbę m , droga całkowania $\bar{S}$ składać się będzie z części następujących: 1-o z części osi rzeczywistej, znajdującej się zewnątrz okręgu koła o pewnym promieniu ρ^a , przyczem oś ta jest przebiegana w zwrocie ujemnym; 2-o z okręgu koła o promieniu ρ^a , przebieganym $2m$ razy w zwrocie dodatnim; 3-o z części osi rzeczywistej, wymienionej pod 1-o i przebieganej w zwrocie dodatnim. Wyznaczymy funk-

cję $\omega^{\frac{1}{a}}$ w ten sposób, że w punkcie osi rzeczywistej, w którym kończy się okrąg m -ty, a zaczyna okrąg $(m+1)$ -y, miała ona wartość rzeczywistą i dodatnią. Dzięki temu wyznaczeniu, na częściach drogi, położonych w odległości skończonej, będzie $\omega^{\frac{1}{a}} = |\omega^{\frac{1}{a}}| e^{\pm \frac{2\pi i}{a}}$, co na zasadzie nierówności $\frac{\alpha}{2} < 2m < \frac{3\alpha}{2}$ stwierdza nam zbieżność całki (53).

Powróćmy teraz do wzoru (58); całka $\frac{1}{2\pi i} \int_{(\bar{R})} \frac{1}{a} e^{\omega^{\frac{1}{a}}} \frac{d\omega}{\omega-x}$ sprowadza się do sumy $2m$ całek $\frac{1}{2\pi i} \int_{(\bar{R})} \frac{1}{a} e^{\omega^{\frac{1}{a}}} \frac{d\omega}{\omega-x}$; drogę całkowania we wszystkich tych całkach wskazuje figura 19.

Różnem w tych całkach jest wyznaczenie funkcji $\omega^{\frac{1}{a}}$. W samej rzeczy, kładąc $\omega = \rho^{it}$, powinniśmy wziąć w $(m+1)$ -ej całce: $\omega^{\frac{1}{a}} = \rho^{\frac{1}{a}} e^{it^{\frac{1}{a}}}$, w $(m+1+\nu)$ -ej całce: $\omega^{\frac{1}{a}} = \rho^{\frac{1}{a}} e^{it^{\frac{1}{a}}}$ ($\nu=0, \dots, m-1$), w m -tej całce: $\omega^{\frac{1}{a}}$

$= e^{\frac{1}{a} e^{i \frac{\varphi - 2\pi}{a}}}$, w $(m+1-\nu)$ -ej całce, $\omega^{\frac{1}{a}} = e^{\frac{1}{a} e^{i \frac{\theta - 2\nu\pi}{a}}}$ ($\nu=1, \dots, m$). Pisząc zatem $\alpha = r e^{i\varphi}$ i zakładając $0 < \varphi < 2\pi$, otrzymujemy dla $(m+1-\nu)$ -ej całki:

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{1}{\alpha} e^{\frac{\omega}{\alpha}} \frac{d\omega}{\omega - x} = \frac{1}{\alpha} e^{\frac{1}{\alpha} e^{i \frac{\varphi + 2\nu\pi}{a}}} \quad (\nu = -m, \dots, (m-1))$$

Dowiedliśmy zatem wzoru:

$$(61) \quad E_\alpha(x) = \sum_{\nu=-m}^{m-1} \frac{1}{\alpha} e^{\frac{1}{\alpha} e^{i \frac{\varphi + 2\nu\pi}{a}}} + \varepsilon_r(\alpha),$$

zachodzącego przy założeniach $a \geq 2$, $\frac{a}{2} < 2m < \frac{3a}{2}$ dla $0 < \varphi < 2\pi$.

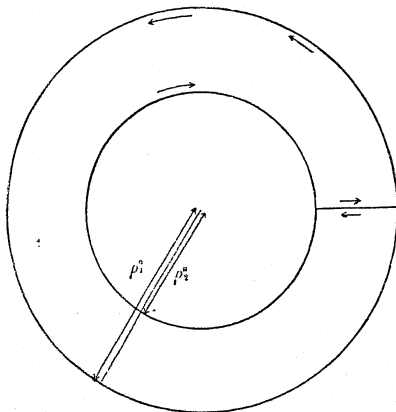


Fig. 19.

Przypadek $\varphi=0$ został dotąd wyłączony, ale łatwo odmienić dowodzenie tak, aby i ten przypadek był niem objęty. W samej rzeczy, obróciwszy drogę całkowania $\bar{S}$ na mały kąt η w zwrocie ujemnym, dowodzi się, w sposób podobny do powyższego, że zachodzi zawsze wzór (61), z tą tylko zmianą, że być winno $-\varepsilon < \varphi < 2\pi - \varepsilon$; a więc wzór (61) zachodzi także dla $\varphi = 0$. W tenże sam sposób dowodzi się, że wzór ten stosuje się także w przypadku $\varphi = 2\pi$. Dowiedliśmy zatem, że wzór (61) zachodzi dla $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Jest widoczne, że można w tym wzorze pominąć wszystkie wyrazy, dla których jest

$$\left| \frac{\varphi + 2\nu\pi}{a} \right| > \frac{\pi}{2}.$$

W samej rzeczy, ponieważ we wszystkich tych wyrazach, na mocy nierówności $\frac{a}{2} < 2m < \frac{3a}{2}$, jest:

$$\left| \frac{\varphi + 2\nu\pi}{a} \right| \leq \frac{2m\pi}{a} < \frac{3\pi}{2};$$

więc każdy z nich dąży do zera, gdy r dąży do nieskończoności. Doszliśmy więc do wzoru ostatecznego:

$$(62) \quad E_\alpha(x) = \sum_{(\nu)} \frac{1}{\alpha} e^{\frac{1}{\alpha} e^{i \frac{\varphi + 2\nu\pi}{a}}} + \varepsilon_r(\alpha),$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie liczby $\nu = -m, \dots, m-1$, dla których:

$$\left| \frac{\varphi + 2\nu\pi}{a} \right| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Ten wynik można streścić w następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 8b. „Funkcja $E_\alpha(x)$, w której a jest stałą dodatnią, spełniającą warunek $a \geq 2$, zachowuje się co do swego wzrastania w różnych kierunkach w sposób następujący:

Wybermy liczbę m , poddaną warunkowi $\frac{a}{2} < 2m < \frac{3a}{2}$. Gdy $|x|$ zwiększa się nieograniczenie wzdłuż jakiegokolwiek wektora ($x = r e^{i\varphi}$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$), moduł

$$\left| E_\alpha(x) - \sum_{(\nu)} \frac{1}{\alpha} e^{\frac{1}{\alpha} e^{i \frac{\varphi + 2\nu\pi}{a}}} \right|,$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie liczby całkowite $\nu = -m, \dots, -(m-1), \dots, m-1$, spełniające warunek $\left| \frac{\varphi + 2\nu\pi}{a} \right| \leq \frac{\pi}{2}$, maleje nieograniczenie.

Widzimy, że $E_\alpha(x)$ dąży do nieskończoności wraz z $|x|$ dla wszystkich wektorów prócz osi rzeczywistej ujemnej. Mamy jeszcze:

$$(63) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} e^{-r^{\frac{1}{\alpha}}} |E_a(r)| = \frac{1}{\alpha}; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} e^{-r^{\frac{1}{\alpha}}} |E_a(x)|; \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

Dla osi rzeczywistej ujemnej otrzymujemy:

$$(64) \quad E_a(-r) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{2}{\alpha} e^{\frac{1}{\alpha} \cos \frac{2\nu+1}{\alpha} \pi} \cos \left(r^{\frac{1}{\alpha}} \sin \frac{2\nu+1}{\alpha} \pi \right).$$

Funkcja $E_a(x)$ ($\alpha \geq 2$) posiada tedy własność wspólną z funkcją $\sin x$, że moduł jej rośnie bez granic wraz z $|x|$, gdy x dąży do nieskończoności wzdłuż wektora wyjąwszy jeden wektor. Z drugiej strony moduł funkcji wymiernej całkowitej $G(x)$ rośnie bez granic wraz z $|x|$, gdy x dąży do nieskończoności wzdłuż jakiegokolwiek wektora.

Stąd wypływa naturalnie pytanie: czy istnieją funkcje całkowite przestępne, których moduł podobnie, jak moduł funkcji $G(x)$, rośnie wraz z $|x|$ bez granic, gdy x dąży do nieskończoności wzdłuż jakiegokolwiek wektora.

Helge von Koch odpowiedział twierdząc na to pytanie,¹⁾ dając przykład funkcji $\bar{G}(x) = x \sin(x+i)$, która widocznie posiada tę własność. Inną funkcją tej natury jest $G(x) = \bar{G}(x) + E_a(x)$. Różnicę pomiędzy sposobami dążenia do nieskończoności funkcji $G(x)$ i $\bar{G}(x)$ można wyrazić, mówiąc, że $G(x)$ zmierza do nieskończoności jednostajnie dla wszystkich kierunków, gdy tymczasem $\bar{G}(x)$ zdąża do nieskończoności niejednostajnie. Funkcję $G(x)$ można określić przez tę własność zdążania do nieskończoności w sposób jednostajny.

Ale powstaje tu pytanie głębsze. Funkcja $E_a(x)$, $0 < \alpha < 2$, zdąża do nieskończoności jedynie wewnątrz kąta $-\alpha \frac{\pi}{2} < \varphi < \alpha \frac{\pi}{2}$. Zmniejszając α , można uczynić ten kąt tak małym, jak chcemy. Czy można utworzyć funkcję całkowitą, która staje się nieskończoną wtedy tylko, gdy $|x|$ rośnie wzdłuż jednego tylko wektora, a maleje nieograniczenie, gdy $|x|$ rośnie wzdłuż wszystkich innych wektorów? Jeden z mých uczniów, J. Malmquist, podał na to taki przykład.²⁾ Funkcja

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{x^{\nu-2}}{\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{(\log \nu)^{\alpha}}\right)}; \quad 0 < \alpha < 1.$$

¹⁾ Helge von Koch, Sur une classe remarquable de fonctions entières et transcendentes. Arkiv f. Mat. Astr. o. Fysik, Stockholm 1, 9 września 1903.

²⁾ J. Malmquist, Étude d'une fonction entière. Acta math. 29.

posiada tę własność. Istotnie, dąży ona nieograniczenie do zera, gdy $|x|$ zwiększa się nieograniczenie wzdłuż określonego wektora, położonego w kącie $0 < \varphi < 2\pi$, rośnie zaś nieograniczenie, gdy x dąży do nieskończoności wzdłuż osi rzeczywistej dodatniej. Dowodzimy tego z łatwością na drodze prawie tożsamej z drogą, wskazaną w § 2.

E. Lindelöf, nawiązując rzecz do mojej Noty tymczasowej z „Comptes rendus“¹⁾ i opierając się na pewnym ciekawym, znalezionem przez siebie twierdzeniu,²⁾ utworzył funkcję³⁾:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\log\left(\nu + \frac{1}{\alpha}\right)} \right)^{\nu}; \quad 0 < \alpha < 1,$$

która posiada wszystkie własności funkcji Malmquista.⁴⁾ Taką jest też funkcja

$$(65) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\nu(\log \nu)^{\alpha}} x^{\nu}; \quad 0 < \alpha < 1.$$

Wprowadzając do całki (53) zamiast $e^{\frac{1}{\alpha}}$ nową funkcję zmiennej ω , spotkamy w Nocie następnej nową klasę funkcji tego gatunku.⁴⁾

Oznaczmy przez $G_a(x)$ funkcję tej natury. Za pomocą takiej funkcji można odpowiedzieć na inną kwestję interesującą. Czy istnieją funkcje całkowite, które dążą nieograniczenie do zera, gdy $|x|$ rośnie nieograniczenie wzdłuż jakiegokolwiek określonego wektora?

Funkcja

$$(66) \quad e^{-\Gamma_{a'}(x)} - e^{-\Gamma_a(x)}; \quad a' \geq a''$$

posiada oczywiście tę własność. Widzimy bez trudności, że wyjaśnienie tego zjawiska, na pozór dość paradoksalnego, polega na tem, że moduł funkcji maleje niejednostajnie, gdy x dąży do nieskończoności w różnych kierunkach.

Łatwo widzieć, że we wszystkich naszych przykładach funkcja $G_a(x)$ nie jest rodzaju skończonego. Czy istnieją podobne funkcje rodzaju skoń-

¹⁾ 2 marca 1903.

²⁾ Acta Soc. Sc. Fenn. 31 No. 3. p. 29.

³⁾ Bull. des Sc. math. sierpień 1903 p. 224—225.

⁴⁾ Por. Phragmén, Sur une extension etc. Acta math. 28. p. 357, 358 oraz Mittag-Leffler, Un nouveau théorème etc. (C. R. II. IV. 1904) i Une nouvelle fonction etc. (tamże 18 IV. 1904).

czego? Odpowiedź na to jest przecząca, co wynika z twierdzenia wielkiej wagi, dowiedzonego przez P h r a g m é n a,¹⁾ a które nie jest bez związku z własnościami charakterystycznymi, podanymi przezemnie dla funkcji $E_a(x)$. Twierdzenie to tak brzmi w wysłowieniu własnym autora:²⁾

„Niechaj a i ϱ będą dwie wielkości, czyniące zadość nierównościom:

$$0 < a < 2, \quad 0 < \varrho < \frac{1}{a},$$

i dajmy, że funkcja całkowita $E(x)$ czyni zadość dwóm warunkom następującym:

$$1-0. \quad |E(x)| e^{-r^\varrho} \leq A \text{ dla } -a \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq a \frac{\pi}{2};$$

$$2-0. \quad |E(x)| \leq B \text{ dla } a \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 2\pi - a \frac{\pi}{2},$$

gdzie $x = re^{i\varphi}$, A i B zaś są dwiema stałymi. Powiadamy, że funkcja $E(x)$ jest koniecznie wielkością stałą“.

Nie będę tym razem wchodził w bardziej szczegółowe rozpatrywanie innych własności funkcji $E_a(x)$. Wspomnę, że A. W i m a n ukończył pracę bardzo ciekawą³⁾ o rozmieszczeniu zer tej funkcji; przypomnę także, że P h r a g m é n wykazał, iż funkcja $E_a(x)$ jest z pewnego punktu widzenia najprostszą swojego gatunku. Należy wszakże jeszcze zastanowić się nad tem, czy własność funkcji $E_1(x) = e^x$ czynienia zadość równemu różniczkowaniu liniowemu o współczynnikach wymiernych względem x może być uogólniona dla $E_a(x)$, gdy a ma wartości różne od jedności. Zobaczymy, że istotnie tak jest, gdy a jest wymierne.

Położmy $a = \frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczby całkowite dodatnie. Znajdujemy bezpośrednio, stosując formę symboliczną:

$$(67) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{d}{d\xi} \right)^m E_m \left(\xi^{\frac{m}{n}} \right) &= \sum_{\nu=1}^{n-1} \xi^{\frac{-m}{n}\nu} = E_m \left(\xi^{\frac{m}{n}} \right) \\ \left(\frac{d}{d\xi} \right)^m E_m (\xi^m) &= E_m (\xi^m) \end{aligned} \right.$$

¹⁾ Phragmén, Sur une extension etc.

²⁾ Porówn. Mittag-Leffler, Comptes rendus, 12 paźdz. 1903.

³⁾ A. Wiman, Ueber die Nullstellen der Functionen $E_a(x)$, Acta math. 29.

⁴⁾ Phragmén, Sur une extension etc.

lub

$$(68) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(m x^{1-\frac{m}{n}} \frac{d}{dx} \right)^m E_m(x) &= \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{x^{\nu-n}}{\frac{m}{n}(\nu-n)} + E_m(x); \quad n > 1 \\ \left(m x^{1-\frac{1}{m}} \frac{d}{dx} \right)^m E_m(x) &= E_m(x). \end{aligned} \right.$$

Jest naprzykład:

$$(69) \quad \left\{ \begin{aligned} E_1'(x) &= \frac{1}{\frac{1}{2}} + 2x E_1\left(\frac{x}{2}\right) \\ E_1'\left(\frac{x}{n}\right) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{\frac{1}{n}} + \frac{x^2}{\frac{2}{n}} + \dots + \frac{x^{n-1}}{\frac{n-1}{n}} \right) + n x^{n-1} E_1\left(\frac{x}{n}\right) \\ E_2''(x) + \frac{1}{2x} E_2'(x) - \frac{1}{4x} E_2(x) &= 0. \end{aligned} \right.$$

§ 4.

Przy pomocy twierdzenia 8 podejmuję na nowo badanie całki

$$(8) \quad \int_0^\infty e^{-\omega^a} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}}$$

i upraszczam ją, kładąc $F_a(x) = E_a(x)$. Weźmy, jak poprzednio, $x = re^{i\varphi}$ i rozpatrzmy najprzód przypadek $2 > a > 0$.

Na podstawie twierdzenia 8a, oznaczwszy przez δ wielkość dodatnią, która może być tak mała, jak chcemy, będziemy mieli dla dostatecznie rosnących wartości ω :

$$(70) \quad \left\{ \begin{aligned} \left| e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} |E_a(\omega x)| - e^{-\omega^{\frac{1}{a}} \left(1 - r^{\frac{1}{a}} \cos \frac{\varphi}{a} \right)} \right| &< \delta e^{-\omega^{\frac{1}{a}}}; \quad -a \frac{\pi}{2} < \varphi < a \frac{\pi}{2} \\ e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} |E_a(\omega x)| &< \delta e^{-\omega^{\frac{1}{a}}}; \quad a \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 2\pi - a \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right.$$

Wynika stąd, że całka

$$(71) \quad \int_0^{\infty} e^{-\omega} \frac{1}{\omega^a} E_a(\omega x) d\omega \frac{1}{\omega^a}$$

jest zbieżna, o ile zmienna x znajduje się po tej samej stronie linii

$$(72) \quad r^{\frac{1}{a}} \cos \frac{\varphi}{a} = 1; \quad -a \frac{\pi}{2} < \varphi < a \frac{\pi}{2},$$

co początek, t. j. wewnątrz gwiazdy o środku w punkcie zero, ograniczonej linią (72). Linia ta, przechodząca zawsze przez punkt $x=1$, ma w przypadku $1 > a > 0$ postać zbliżoną do hyperboli i posiada dwie asymptoty:

$$re^{ia\frac{\pi}{2}} \text{ i } re^{-ia\frac{\pi}{2}}; \quad 0 < r < \infty.$$

Gdy a zbliża się do zera, krzywa spłaszcza się coraz bardziej aż do zlania z prostą $(1, +\infty)$. W przypadku $a=1$ jest ona prostopadła do osi rzeczywistej w punkcie $x=1$. W przypadku $2 > a > 1$ ma znów postać zbliżoną do paraboli i, gdy φ zbliża się do kątów $a\frac{\pi}{2}$ i $-a\frac{\pi}{2}$, od-

dala się nieograniczenie od dwóch linii $re^{ia\frac{\pi}{2}}$ i $re^{-ia\frac{\pi}{2}}$, $0 \leq r < +\infty$. W przypadku $a=2$ staje się parabolą (Patrz fig. 20).

Gwiazda o środku zero, ograniczona linią (72), jest dla całki (71) gwiazdą, którą w § 1 (twierdzenie B) oznaczyliśmy przez $B^{(a)}$. Twierdzenie B uczy, że zbieżność całki nie może zachodzić przy $B^{(a)}$, gwiazda $B^{(a)}$ jest tedy gwiazdą zbieżności dla całki (72). Z drugiej strony z twierdzenia D wypływa, że równość

$$(73) \quad \frac{1}{1-x} = \int_0^{\infty} e^{-\omega} \frac{1}{\omega^a} E_a(\omega x) d\omega \frac{1}{\omega^a}$$

zachodzi wszędzie wewnątrz $B^{(a)}$.

Zbadajmy teraz całkę w przypadku $a \geq 2$. Z twierdzenia 8b wynika, że gdy wielkość dodatnia ω rośnie dostatecznie, δ zaś jest wielkością dodatnią tak małą, jak chcemy, jest:

$$(74) \quad \left| e^{-\omega} |E_a(\omega x)| - \frac{1}{a} e^{-\omega} \frac{1}{(1-r^{\frac{1}{a}} \cos \frac{\varphi}{a})} \right| < \delta e^{-\omega} \frac{1}{(1-r^{\frac{1}{a}} \cos \frac{\varphi}{a})}; \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

Całka przeto (72) w założeniu $a \geq 2$ jest zbieżna wewnątrz gwiazdy o środku zero, ograniczonej linią

$$(75) \quad r^{\frac{1}{a}} \cos \frac{\varphi}{a} = 1, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

Linia ta, jak już zauważyliśmy, jest parabolą dla $a=2$. Dla $a > 2$ staje się linią zamkniętą symetryczną względem osi rzeczywistej (fig. 21) i przeci-

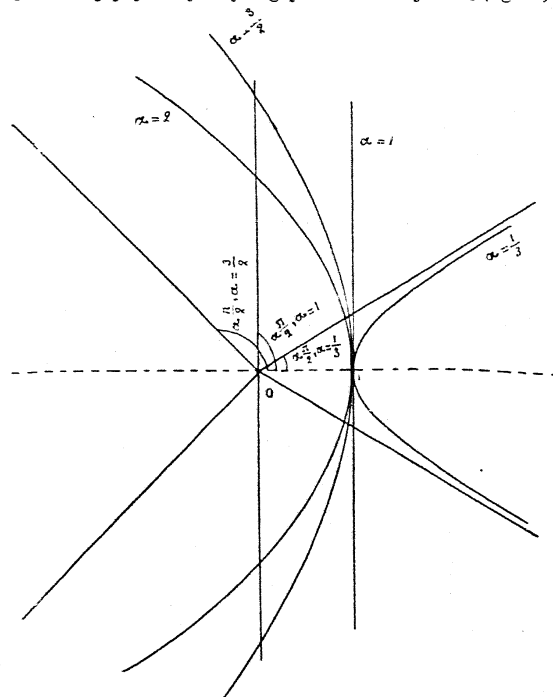


Fig. 20.

nającej tę oś w dwóch punktach: $r=1, \varphi=0, r=\left(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{2a}}\right)^a, \varphi=\pm\pi$.

Gdy a dąży do nieskończoności, zbliża się ona coraz bardziej do okręgu koła o środku w punkcie zero i o promieniu równym jednostki.

Za pomocą takich samych rozważań, jak w przypadku $2 \leq a > 0$,

okazać można, że gwiazda o środku zero, ograniczona linią (75), jest gwiazdą zbieżności dla całki (72).

Widzimy także, że równość (73) zachodzi wszędzie wewnątrz tej gwiazdy.

Doszliliśmy tedy do następującego twierdzenia:

Twierdzenie 9. „Całka

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha}(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}},$$

w której α jest stałą, poddaną warunkowi $2 \leq \alpha > 0$, posiada względem $x = re^{i\varphi}$ gwiazdę zbieżności o środku zero ograniczoną linią krzywą:

$$r^{\frac{1}{\alpha}} \cos \frac{\varphi}{\alpha} = 1; \quad -\alpha \frac{\pi}{2} < \varphi < \alpha \frac{\pi}{2}.$$

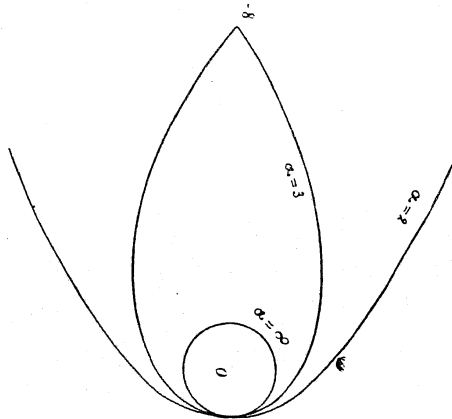


Fig. 21.

Wewnątrz tej gwiazdy jest wszędzie:

$$\frac{1}{1-x} = \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha}(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

(118)

Wyrażenie

$$(76) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha}(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

posiada względem x gwiazdę zbieżności o środku zero, utworzoną z całej płaszczyzny z wyłączeniem prostej $(1, \infty)$. Wewnątrz tej gwiazdy, która jest gwiazdą główną stałych $1, 1, 1, \dots$, zachodzi wszędzie równość:

$$(77) \quad \frac{1}{1-x} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha}(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Gdy $\alpha \geq 2$, całka

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha}(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

posiada gwiazdę zbieżności o środku zero, ograniczoną linią

$$r^{\frac{1}{\alpha}} \cos \frac{\varphi}{\alpha} = 1; \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi,$$

a równość (73) zachodzi wszędzie wewnątrz tej gwiazdy.

Wyrażenie

$$(78) \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha}(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

posiada względem x koło zbieżności o środku zero i promieniu jeden, i wszędzie wewnątrz tego koła jest:

$$(79) \quad \frac{1}{1-x} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha}(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Przy pomocy twierdzenia 9 łatwo teraz dojść do zupełnego poznania całki

$$(80) \quad \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha}(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

(119)

Powracam do mojego twierdzenia z roku 1882 (patrz wyżej § 1) i zamiast całki:

$$\frac{1}{2\pi i} \int^{(s)} F(z) \left[\frac{1}{z-x} - \frac{1}{2} \left(B_0 + B_1 \frac{x}{z} + \dots + B_n \left(\frac{x}{z} \right)^n \right) \right] dz$$

rozważam całkę analogiczną

$$(80) \quad \frac{1}{2\pi i} \int^{(s)} F(xy) \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} \int_0^{\omega} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha} \left(\frac{\omega}{y} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \right) dy.$$

Gwiazda $B^{(\omega)}$ była zbudowana w sposób następujący (twierdzenie B): Na około promienia $re^{i\varphi}$ wykreślamy w przypadku $2 \geq \alpha > 0$ figurę, tworzącą

$$(81) \quad \varrho = r \left(\cos \frac{\psi}{\alpha} \right)^{\alpha}; \quad -\alpha \frac{\pi}{2} < \psi < \alpha \frac{\pi}{2},$$

a w przypadku $\alpha \geq 2$ inną figurę tworzącą

$$\varrho = r \left(\cos \frac{\psi}{\alpha} \right)^{\alpha}; \quad -\pi \leq \psi \leq \pi,$$

gdzie ϱ, ψ są współrzędnymi biegunowymi, odnoszającymi się do wektora, gdzie r jest wyznaczone w ten sposób, że figura należy całkowicie do gwiazdy głównej A stałych $k_0, k_1, k_2, \dots$. Jeżeli R oznacza granicę wyższą wielkości r , kontur graniczny gwiazdy $B^{(\omega)}$ będzie opisany przez $Re^{i\varphi}$, gdzie φ przebiega wartości $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Rozpatrzmy bliżej linię (81). Jest to linia zamknięta symetrycznie względem r, φ i przechodząca przez dwa punkty: $\varrho = 0, \varrho = r$. W przypadku $\alpha = 1$, rozpatrzoną przez Borela, staje się ona kołem, mającym za średnicę $(0, \varphi i r, \varphi)$.

Rzędną punktu (ϱ, ψ) względem linii (r, φ) jest $r \left(\cos \frac{\psi}{\alpha} \right)^{\alpha} \sin \psi$. Wiadomo więc, że linia spłaszcza się coraz bardziej aż do złączenia z linią prostą $(0, \varphi; r, \varphi)$, gdy α dąży do zera. Wypływa stąd, że gwiazda $B^{(\omega)}$ zbliża się nieograniczenie do gwiazdy głównej A , gdy α dąży do zera.

Linia (82) jest, przeciwnie, także linią zamkniętą symetryczną względem linii r, φ , którą przecina w dwóch punktach r i $-r \left(\cos \frac{\pi}{\alpha} \right)^{\alpha}$; obejmuje ona zatem punkt zero. Gdy α dąży do nieskończoności, zbliża się ona nieograniczenie do koła o środku zero i promieniu r . Gwiazda $B^{(\omega)}$ zbliża

się tedy nieograniczenie do koła o środku zero, wpisanego w gwiazdę główną A , gdy α dąży do nieskończoności.

Wróćmy do całki (80), w której x jest wewnątrz $B^{(\omega)}$, S zaś jest konturem zamkniętym, obejmującym linię $(0,1)$ oraz figurę tworzącą względem tej linii, i takim, że odpowiedni kontur, opisany przez xy , będzie równocześnie położony wewnątrz $B^{(\omega)}$.

Mamy:

$$(83) \quad \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int^{(s)} F(xy) \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} \int_0^{\omega} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha} \left(\frac{\omega}{y} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \right) dy \\ = F(x) - \frac{1}{2\pi i} \int^{(0)} \frac{F(xy)}{y} \left(\int_0^{\omega} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha} \left(\frac{\omega}{y} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \right) dy, \end{cases}$$

gdzie całka

$$(84) \quad \frac{1}{2\pi i} \int^{(0)} \frac{F(xy)}{y} \left(\int_0^{\omega} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha} \left(\frac{\omega}{y} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \right) dy$$

jest wzięta wzdłuż małego koła o środku w punkcie zero. Wprowadzimy do całki:

$$(85) \quad \int_0^{\omega} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha} \left(\frac{\omega}{y} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

szereg, przedstawiający funkcję $E_{\alpha} \left(\frac{\omega}{y} \right)$; będzie:

$$(86) \quad \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int^{(0)} \frac{F(xy)}{y} \left(\int_0^{\omega} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha} \left(\frac{\omega}{y} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \right) dy = \int_0^{\omega} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int^{(0)} \frac{F(xy)}{y^{r+1}} dy \frac{\omega^r}{|\alpha|^r} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\ = \int_0^{\omega} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int^{(0)} \frac{F(z)}{z^{r+1}} dz \frac{(\omega x)^r}{|\alpha|^r} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} = \int_0^{\omega} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}. \end{cases}$$

Przeto:

$$(87) \quad \begin{cases} F(x) = \int_0^{\omega} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\ + \frac{1}{2\pi i} \int^{(s)} F(xy) \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} \int_0^{\omega} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha} \left(\frac{\omega}{y} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \right) dy. \end{cases}$$

Dla każdej wartości na y , należącej do S , mamy:

$$(88) \quad \frac{1}{y-1} = \frac{1}{y} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha} \left(\frac{\omega}{y} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}},$$

skąd:

$$(89) \quad F(x) = \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}};$$

równość ta zachodzi dla każdego obszaru X , położonego wewnątrz $B^{(\alpha)}$. Jeżeli przypomnimy sobie teraz twierdzenia **D** i **E**, widzimy, że gwiazda $B^{(\alpha)}$ jest gwiazdą zbieżności całki

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}},$$

a więc twierdzenie, podane na wstępie Noty, jest całkowicie udowodnione.

Zwróć jeszcze uwagę na wzór:

$$(90) \quad FB^{(\alpha)}(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^m \frac{k_{\nu}}{|\underline{a}|^{\nu}} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^{\nu} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} x^{\nu},$$

będący bezpośrednim wynikiem wzoru (86), a w którym $B^{(\alpha)}$ jest gwiazdą zbieżności wyrażenia granicznego po stronie drugiej. Szereg nieskończony, znajdujący się po stronie drugiej, jest funkcją całkowitą zmiennej x , zależną od dwóch parametrów ω i α ; zbliża się on nieograniczenie do $FB^{(\alpha)}(x)$, gdy ω rośnie nieograniczenie, do $FA(x)$ zaś, gdy α zmierza nieograniczenie do zera. Dochodzimy zatem do twierdzenia:

Ga. „Niechaj $FA(x)$ będzie jakąkolwiek gałęzią funkcyjną, należącą do stałych $k_0, k_1, k_2, \dots, k_{\nu}, \dots$, których A jest gwiazdą główną. Można zawsze przy pomocy stałych k utworzyć funkcję całkowitą $G_{\omega, \alpha}(x)$ zmiennej x , zależną, oprócz od x i od stałych k , jeszcze od parametrów dodatnich ω i α , taką, aby:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{\omega \rightarrow \infty} G_{\omega, \alpha}(x) = FA(x)$$

i aby wyrażenie $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{\omega \rightarrow \infty} G_{\omega, \alpha}(x)$ było rozbieżne zewnątrz A .

Można dobrać $G_{\omega, \alpha}(x)$ w ten sposób, aby było równocześnie:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G_{\omega, \alpha}(x) = FB^{(\alpha)}(x),$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{\omega \rightarrow \infty} G_{\omega, \alpha}(x) = FC(x)$$

i aby wyrażenia $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G_{\omega, \alpha}(x)$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{\omega \rightarrow \infty} G_{\omega, \alpha}(x)$ były rozbieżne, pierwsze zewnątrz $B^{(\alpha)}$, drugie zewnątrz C^4 .

Jeżeli usuniemy warunek, że wyrażenie, którego granicą jest $FA(x)$, ma mieć jednocześnie A jako gwiazdę zbieżności, to łatwo będzie wybrać funkcję całkowitą w ten sposób, aby zależała tylko od jednego parametru. Zobaczymy to w dalszym ciągu w § 5. Twierdzenie to jest analityczne do następującego twierdzenia Weierstrassa¹⁾, do którego wielki analista przywiązywał szczególną wagę:

g. „Niechaj będzie funkcja jakakolwiek rzeczywista i ciągła zmiennej x . Można zawsze utworzyć funkcję całkowitą $g_{\omega}(x)$ zmiennej x , zależnej oprócz od x , jeszcze od parametru dodatniego ω , i taką, że równość $\lim_{\omega \rightarrow \infty} g(x) = f(x)$ zachodzi dla wszystkich wartości rzeczywistych zmiennej x^* .

Wzór (90) może być przekształcony w sposób następujący.

Mamy:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^n (k_0 + k_1 x + \dots + k_{\nu} x^{\nu}) & \left(\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^{\nu}}{|\underline{a}|^{\nu}} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} - \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^{\nu+1}}{|\underline{a}|^{\nu+1}} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \right) \\ & = \sum_{\nu=0}^n \frac{k_{\nu}}{|\underline{a}|^{\nu}} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^{\nu} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} x^{\nu} - \left(\sum_{\nu=0}^n k_{\nu} x^{\nu} \right) \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^{\nu+1}}{|\underline{a}|^{\nu+1}} d\omega^{\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Mamy też:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{|\underline{a}|^n} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^n d\omega^{\frac{1}{\alpha}}} = 0;$$

¹⁾ Patrz K. Weierstrass, „O przedstawialności analitycznej tak zwanych dowolnych funkcji argumentów rzeczywistych“, Prace mat.-fiz. 15, str. 162.

a zatem (patrz Notę IV-tą):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{v=0}^n k_v x^v \right| \int_0^{\frac{1}{\omega}} \frac{e^{-\omega \frac{1}{\alpha}} \omega^{n+1}}{|\alpha(n+1)|} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} = 0.$$

Otrzymujemy więc:

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{k_v}{|\alpha v|} \int_0^{\frac{1}{\omega}} e^{-\omega \frac{1}{\alpha}} \omega^v d\omega^{\frac{1}{\alpha}} x^v = \sum_{v=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \dots + k_v x^v) \int_0^{\frac{1}{\omega}} e^{-\omega \frac{1}{\alpha}} \left(\frac{\omega^v}{|\alpha v|} - \frac{\omega^{v+1}}{|\alpha(v+1)|} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}},$$

a stąd:

$$(91) \quad FB^{(a)}(x) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \dots + k_v x^v) \int_0^{\frac{1}{\omega}} e^{-\omega \frac{1}{\alpha}} \left(\frac{\omega^v}{|\alpha v|} - \frac{\omega^{v+1}}{|\alpha(v+1)|} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Przy $\alpha = 1$ wzór ten staje się wzorem Borela:

$$FB^{(1)}(x) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{\infty} k_0 + k_1 x + \dots + k_v x^v \frac{e^{-\omega \omega^{v+1}}}{|v+1|}.$$

Druga strona wzoru jest jednostajnie zbieżna względem x ; można więc napisać:

$$(92) \quad FB^{(a)}(x) = \int_0^{\frac{1}{\omega}} e^{-\omega \frac{1}{\alpha}} \sum_{v=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\omega^v}{|\alpha v|} - \frac{\omega^{v+1}}{|\alpha(v+1)|} \right) \sum_{\mu=0}^v k_{\mu} x^{\mu} \right] d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Wzór (91) poucza nas, że moglibyśmy otrzymać cztery wzory podstawowe (89), (90), (91), (92), poddając całkę (80) przekształceniu:

$$(93) \quad \left\{ \begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi i} \int F(xy) \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} \int_0^{\frac{1}{\omega}} e^{-\omega \frac{1}{\alpha}} E_{\alpha} \left(\frac{\omega}{y} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \right) dy \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{1}{y} \frac{F(xy)}{y-1} \left[\int_0^{\frac{1}{\omega}} e^{-\omega \frac{1}{\alpha}} \left(E_{\alpha} \left(\frac{\omega}{y} \right) - y \left(E_{\alpha} \left(\frac{\omega}{y} \right) - 1 \right) \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \right] dy. \end{aligned} \right.$$

(124)

i stosując do strony drugiej rozważanie zupełnie podobne do rozważań w § 2 Noty czwartej.

Doszliliśmy tedy do równości następujących:

$$(94) \quad \left\{ \begin{aligned} & FB^{(a)}(x) - \sum_{v=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \dots + k_v x^v) \int_0^{\frac{1}{\omega}} e^{-\omega \frac{1}{\alpha}} \left(\frac{\omega^v}{|\alpha v|} - \frac{\omega^{v+1}}{|\alpha(v+1)|} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\ & = FB^{(a)}(x) - \int_0^{\frac{1}{\omega}} e^{-\omega \frac{1}{\alpha}} \sum_{v=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\omega^v}{|\alpha v|} - \frac{\omega^{v+1}}{|\alpha(v+1)|} \right) \sum_{\mu=0}^v k_{\mu} x^{\mu} \right] d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\ & = FB^{(a)}(x) - \sum_{v=0}^{\infty} \frac{k_v}{|\alpha v|} \int_0^{\frac{1}{\omega}} e^{-\omega \frac{1}{\alpha}} \omega^v d\omega^{\frac{1}{\alpha}} x^v \\ & = FB^{(a)}(x) - \int_0^{\frac{1}{\omega}} e^{-\omega \frac{1}{\alpha}} F_{\alpha}(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int^{(s)} F(xy) \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} \int_0^{\frac{1}{\omega}} e^{-\omega \frac{1}{\alpha}} E_{\alpha} \left(\frac{\omega}{y} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \right) dy; \end{aligned} \right.$$

$$(95) \quad \left\{ \begin{aligned} & FB^{(a)}(x) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \dots + k_v x^v) \int_0^{\frac{1}{\omega}} e^{-\omega \frac{1}{\alpha}} \left(\frac{\omega^v}{|\alpha v|} - \frac{\omega^{v+1}}{|\alpha(v+1)|} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\ & = \int_0^{\frac{1}{\omega}} e^{-\omega \frac{1}{\alpha}} \left[\sum_{v=0}^{\infty} \left(\left(\frac{\omega^v}{|\alpha v|} - \frac{\omega^{v+1}}{|\alpha(v+1)|} \right) \sum_{\mu=0}^v k_{\mu} x^{\mu} \right) \right] d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\ & = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{k_v}{|\alpha v|} \int_0^{\frac{1}{\omega}} e^{-\omega \frac{1}{\alpha}} \omega^v d\omega^{\frac{1}{\alpha}} x^v = \int_0^{\frac{1}{\omega}} e^{-\omega \frac{1}{\alpha}} F_{\alpha}(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}; \end{aligned} \right.$$

(125)

$$(96) \quad \left\{ \begin{aligned} FA(x) &= \lim_{a \rightarrow 0} \lim_{\omega = \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \dots + k_\nu x^\nu) \int_0^{\omega^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \left(\frac{\omega^\nu}{|a\nu|} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|a(\nu+1)|} \right) d\omega^{\frac{1}{a}} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\omega^\nu}{|a\nu|} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|a(\nu+1)|} \right) \sum_{\mu=0}^{\nu} k_\mu x^\mu \right] d\omega^{\frac{1}{a}} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \lim_{\omega = \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{|a\nu|} \int_0^{\omega^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \omega^\nu d\omega^{\frac{1}{a}} x^\nu = \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}}. \end{aligned} \right.$$

Otrzymujemy stąd następujące twierdzenie:

Twierdzenie 10. „Oznaczmy przez A gwiazdę o środku a , przez α wielkość dodatnią, przez $B^{(a)}$ gwiazdę spółśrodkową z A , wpisaną w A i utworzoną w przypadku $2 \leq \alpha > 0$ przez figurę tworzącą:

$$\varrho = r \left(\cos \frac{\psi}{\alpha} \right)^\alpha; \quad -\alpha \frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \alpha \frac{\pi}{2},$$

w przypadku zaś $\alpha \geq 2$ przez figurę tworzącą:

$$\varrho = r \left(\cos \frac{\psi}{\alpha} \right)^\alpha; \quad -\pi \leq \psi \leq \pi,$$

gdzie ϱ i ψ są spółrzednymi biegunowymi, odnoszącymi się do wektorów $x - a = re^{i\varphi}$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Gwiazda $B^{(a)}$ zbliża się nieograniczenie do koła o środku a , wpisanego w A , gdy α dąży do nieskończoności. Powiększa się ona w sposób ciągły wraz z $\frac{1}{\alpha}$ i staje się dla $\alpha = 1$ gwiazdą Borela (Twierdzenie 7a). Zawiera ona w swoim wnętrzu każdy obszar położony wewnątrz A , jeżeli tylko α jest dostatecznie małe.

Gdy gwiazda A jest gwiazdą główną stałych $F(a), F^{(1)}(a), \dots, F^{(\mu)}(a), \dots$ poddanych warunkowi Cauchy'ego, gwiazda $B^{(a)}$ jest gwiazdą zbieżności dla wyrażenia

$$\begin{aligned} \lim_{\omega = \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{F^{(1)}(a)}{|1|} (x-a) + \dots + \frac{F^{(\nu)}(a)}{|\nu|} (x-a)^\nu \right) \int_0^{\omega^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \left(\frac{\omega^\nu}{|a\nu|} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|a(\nu+1)|} \right) d\omega^{\frac{1}{a}} \\ = \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\omega^\nu}{|a\nu|} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|a(\nu+1)|} \right) \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{F^{(\mu)}(a)}{|\mu|} (x-a)^\mu \right] d\omega^{\frac{1}{a}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\omega = \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(a)}{|\nu|} \frac{1}{|a\nu|} \int_0^{\omega^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \omega^\nu d\omega^{\frac{1}{a}} (x-a)^\nu = \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega(x-a)) d\omega^{\frac{1}{a}}; \\ F_a(x-a) &= F(a) + \frac{F^{(1)}(a)}{|1|} \frac{x-a}{|a.1|} + \frac{F^{(2)}(a)}{|2|} \frac{(x-a)^2}{|a.2|} + \frac{F^{(3)}(a)}{|3|} \frac{(x-a)^3}{|a.3|} + \dots \end{aligned}$$

Dalej mamy równość:

$$\begin{aligned} FB^{(a)}(x) &= \lim_{\omega = \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{F^{(1)}(a)}{|1|} (x-a) + \dots + \frac{F^{(\nu)}(a)}{|\nu|} (x-a)^\nu \right) \int_0^{\omega^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \left(\frac{\omega^\nu}{|a\nu|} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|a(\nu+1)|} \right) d\omega^{\frac{1}{a}} \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\omega^\nu}{|a\nu|} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|a(\nu+1)|} \right) \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{F^{(\mu)}(a)}{|\mu|} (x-a)^\mu \right] d\omega^{\frac{1}{a}} \\ &= \lim_{\omega = \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(a)}{|\nu|} \frac{1}{|a\nu|} \int_0^{\omega^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \omega^\nu d\omega^{\frac{1}{a}} (x-a)^\nu = \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega(x-a)) d\omega^{\frac{1}{a}}. \end{aligned}$$

Wyrażenie graniczne:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \lim_{\omega = \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{F^{(1)}(a)}{|1|} (x-a) + \dots + \frac{F^{(\nu)}(a)}{|\nu|} (x-a)^\nu \right) \int_0^{\omega^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \left(\frac{\omega^\nu}{|a\nu|} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|a(\nu+1)|} \right) d\omega^{\frac{1}{a}} \\ = \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\omega^\nu}{|a\nu|} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|a(\nu+1)|} \right) \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{F^{(\mu)}(a)}{|\mu|} (x-a)^\mu \right] d\omega^{\frac{1}{a}} \\ = \lim_{a \rightarrow 0} \lim_{\omega = \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(a)}{|\nu|} \frac{1}{|a\nu|} \int_0^{\omega^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \omega^\nu d\omega^{\frac{1}{a}} (x-a)^\nu \\ = \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega(x-a)) d\omega^{\frac{1}{a}} \end{aligned}$$

posiada gwiazdę zbieżności tożsamą z gwiazdą A i mamy równość:

$$\begin{aligned} FA(x) &= \lim_{a \rightarrow 0} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{F^{(\nu)}(a)}{1} (x-a) + \dots + \frac{F^{(\nu)}(a)}{\nu!} (x-a)^\nu \right) \int_0^{\omega} e^{-\omega \frac{1}{a}} \left(\frac{\omega^\nu}{a\nu} - \frac{\omega^{\nu+1}}{a(\nu+1)} \right) d\omega \frac{1}{a} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\omega} e^{-\omega \frac{1}{a}} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\omega^\nu}{a\nu} - \frac{\omega^{\nu+1}}{a(\nu+1)} \right) \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{F^{(\mu)}(a)}{\mu!} (x-a)^\mu \right] d\omega \frac{1}{a} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(a)}{\nu!} \frac{1}{a\nu} \int_0^{\omega} e^{-\omega \frac{1}{a}} \omega^\nu d\omega \frac{1}{a} (x-a)^\nu \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\omega} e^{-\omega \frac{1}{a}} F_a(\omega(x-a)) d\omega \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

Z drugiej wyrażenie graniczne:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{F^{(\nu)}(a)}{1} (x-a) + \dots + \frac{F^{(\nu)}(a)}{\nu!} (x-a)^\nu \right) \int_0^{\omega} e^{-\omega \frac{1}{a}} \left(\frac{\omega^\nu}{a\nu} - \frac{\omega^{\nu+1}}{a(\nu+1)} \right) d\omega \frac{1}{a} \\ = \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\omega} e^{-\omega \frac{1}{a}} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\omega^\nu}{a\nu} - \frac{\omega^{\nu+1}}{a(\nu+1)} \right) \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{F^{(\mu)}(a)}{\mu!} (x-a)^\mu \right] d\omega \frac{1}{a} \\ = \lim_{a \rightarrow 0} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(a)}{\nu!} \frac{1}{a\nu} \int_0^{\omega} e^{-\omega \frac{1}{a}} \omega^\nu d\omega \frac{1}{a} (x-a)^\nu = \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\omega} e^{-\omega \frac{1}{a}} F_a(\omega(x-a)) d\omega \frac{1}{a} \end{aligned}$$

posiada koło zbieżności C o środku zero, wpisane w gwiazdę A . Otrzymujemy tedy równość, w której po stronie pierwszej będzie $FC(x)$, a po stronach drugiej i następnych poprzednio wypisane wyrażenia graniczne.

Jeżeli przy całkowaniu zatrzymamy się w przejściu do nieskończoności na liczbie skończonej ω , będziemy mieli równość:

(128)

$$\begin{aligned} FB^{(\omega)}(x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{F^{(\nu)}(a)}{1} (x-a) + \dots + \frac{F^{(\nu)}(a)}{\nu!} (x-a)^\nu \right) \int_0^{\omega} e^{-\omega \frac{1}{a}} \left(\frac{\omega^\nu}{a\nu} - \frac{\omega^{\nu+1}}{a(\nu+1)} \right) d\omega \frac{1}{a} \\ &= FB^{(\omega)}(x) - \int_0^{\omega} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\omega^\nu}{a\nu} - \frac{\omega^{\nu+1}}{a(\nu+1)} \right) \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{F^{(\mu)}(a)}{\mu!} (x-a)^\mu \right] d\omega \frac{1}{a} \\ &= FB^{(\omega)}(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(a)}{\nu!} \frac{1}{a\nu} \int_0^{\omega} e^{-\omega \frac{1}{a}} \omega^\nu d\omega \frac{1}{a} (x-a)^\nu \\ &= FB^{(\omega)}(x) - \int_0^{\omega} e^{-\omega \frac{1}{a}} F_a(\omega(x-a)) d\omega \frac{1}{a} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(S)} F(z) \left(\frac{1}{z-x} - \frac{1}{z} \int_0^{\omega} e^{-\omega \frac{1}{a}} F_a\left(\omega \frac{x}{z}\right) d\omega \frac{1}{a} \right) dz, \end{aligned}$$

zachodzącą wszędzie wewnątrz $B_a^{(\omega)}$, gdzie S oznacza kontur zamknięty, otaczający linię (ax) oraz figurę tworzącą względem tej linii i położoną wewnątrz $B_a^{(\omega)}$.

Można rozmaitemi sposobami, które wskażę w następnym paragrafie, utworzyć wzory analogiczne do wzorów (94), (95), (96); lecz zdaje się być rzeczą trudną utworzyć je tak, aby gwiazda, wewnątrz której są zbieżne, pozostała zawsze gwiazdą zbieżności przy jakiegokolwiek funkcji. Jest to przeważnie, jak tego dowiodłem, własność podstawowa wzorów (95), (96).

§ 5.

Rozpatrzmy całkę:

$$(97) \quad J(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(S)} F(xy) E\left(\omega \left(\frac{1}{y} - 1\right)\right) dy,$$

gdzie $F(x)$ jest określone zawsze przez równość:

$$FC(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots;$$

C jest kołem o środku w punkcie zero i o promieniu r , określonym przez równość $\lim_{v \rightarrow \infty} |\sqrt[v]{k_v}| = \frac{1}{r}$; $E(x)$ zaś oznacza funkcję całkowitą zmiennej x taką, że $E(0)=1$.

Kontur F powinien być granicą powierzchni jednospójnej, dla której funkcja $F(xy)$ pozostaje regularną; przebieg po nim odbywa się w zwrocie prostym i obejmuje on punkty $y=0$, $y=1$.

Mamy:

$$J(x) = F(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(xy)}{y-1} E\left(\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)\right) dy,$$

gdzie:

$$(98) \quad F(x) = \sum_{v=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \dots + k_v x^v) \frac{E^{v+1}(-\omega)}{|v+1|} \omega^{v+1} + J(x).$$

Szereg:

$$E(-\omega + h) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{E^v(-\omega) h^v}{|v|} h^v$$

jest zawsze zbieżny względem h przy wszystkich wartościach na ω , przeto dla każdej wartości ω mamy:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \left| \sqrt[v]{\frac{E^v(-\omega)}{|v|}} \right| = 0.$$

Z drugiej strony, biorąc $r_1 < r$ i oznaczając przez g_1 granicę wyższą wyrażenia $\left| \sum_{v=0}^{\infty} k_v x^v \right|$ dla $|x|=r_1$, mamy według twierdzenia Cauchy'ego — Weierstrassa¹⁾: $|k_v| \leq g_1 r_1^{1-v}$, a stąd:

$$\sum_{u=0}^v |k_u x^u| \leq g_1 \frac{1 - \left(\frac{|x|}{r_1}\right)^{v+1}}{1 - \frac{|x|}{r_1}} = g_1 \left(\frac{|x|}{r_1}\right)^v \frac{1 - \left(\frac{r_1}{|x|}\right)^{v+1}}{1 - \frac{r_1}{|x|}},$$

¹⁾ Weierstrass, Werke Bd. 1. p. 67.

przeto szereg:

$$\sum_{v=0}^{\infty} (|k_0| + |k_1 x| + \dots + |k_v x^v|) \frac{E^{v+1}(-\omega)}{|v+1|} \omega^{v+1}$$

jest szeregiem zawsze zbieżnym względem h dla wszelkich wartości na x i ω . Przy ustaleniu ω i h , jest on nadto jednostajnie zbieżny dla jakiegokolwiek obszaru zmiennej x . Stąd (porówn. wyżej str. 155):

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \left(|k_0| + |k_1 x| + \dots + |k_v x^v| \right) \frac{\int_0^{\omega} E^{v+2}(-\omega) \omega^{v+1} d\omega}{|v+1|} = 0,$$

a kładąc jeszcze

$$\frac{E^{v+1}(-\omega)}{|v+1|} \omega^{v+1} = \int_0^{\omega} \left(\frac{E^{v+1}(-\omega)}{|v|} \omega^v - \frac{E^{v+2}(-\omega)}{|v+1|} \omega^{v+1} \right) d\omega,$$

i na podstawie twierdzenia podstawowego Weierstrassa mamy:¹⁾

$$(99) \quad \sum_{v=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \dots + k_v x^v) \frac{E^{v+1}(-\omega)}{|v+1|} \omega^{v+1} = \sum_{v=0}^{\infty} k_v \left(\int_0^{\omega} \frac{E^{v+1}(-\omega)}{|v|} \omega^v d\omega \right) x^v.$$

Przy ustaleniu wielkości ω , obie strony tej równości są zawsze zbieżne względem x .

Niechaj teraz W będzie obszarem skończonym w rozmaitości ω , o wielkością dodatnią tak wielką, jak chcemy; oznaczmy przez g granicę wyższą wielkości $|E(-\omega + h)|$, gdy ω należy do W , dla h zaś jest $|h| \leq \varrho$. Mamy wtedy:

$$\left| \frac{E^v(-\omega)}{|v|} \right| \leq g \varrho^{-v},$$

a przypominając sobie wzór $|k_v| \leq g_1 r_1^{1-v}$, widzimy, że:

$$\left| k_v \frac{E^{v+1}(-\omega)}{|v|} \right| < (v+1) \frac{g g_1}{(r_1 \varrho)^v} \frac{1}{\varrho},$$

¹⁾ Weierstrass, Zur Functionenlehre, Werke, Bd. 2. p. 205.

a zatem szereg

$$\sum_{v=0}^{\infty} k_v \frac{E^{(v+1)}(-\omega)}{|\underline{v}|} (\omega x)^v,$$

gdy x należy do danego obszaru skończonego, jest względem ω jednostajnie zbieżny dla jakiegokolwiek obszaru skończonego. Mamy więc prawo powiedzieć, że:

$$(100) \quad \int_0^{\omega} \left[\sum_{v=0}^{\infty} k_v \frac{E^{(v+1)}(-\omega)}{|\underline{v}|} (\omega x)^v \right] d\omega = \sum_{v=0}^{\infty} k_v \int_0^{\omega} \frac{E^{(v+1)}(-\omega)}{|\underline{v}|} \omega^v d\omega x^v.$$

Stąd i na mocy wzorów (97), (98), (99), (100) mamy równość następującą:

$$(101) \quad \left\{ \begin{aligned} F(x) - \sum_{v=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \dots + k_v x^v) \frac{E^{v+1}(-\omega)}{|\underline{v}+1|} \omega^{v+1} \\ = F(x) - \sum_{v=0}^{\infty} k_v \left(\int_0^{\omega} \frac{E^{v+1}(-\omega)}{|\underline{v}|} \omega^v d\omega \right) x^v \\ = F(x) - \int_0^{\omega} \left[\sum_{v=0}^{\infty} k_v \frac{E^{v+1}(-\omega)}{|\underline{v}|} (\omega x)^v \right] d\omega \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{(S)} \frac{F(xy)}{y-1} E\left(\omega \left(\frac{1}{y} - 1\right)\right) dy. \end{aligned} \right.$$

Widzimy bezpośrednio, że przez postępowanie zupełnie takie same, jak poprzednio, otrzymujemy jeszcze wzór:

$$(102) \quad \left\{ \begin{aligned} F(x) = \sum_{v=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \dots + k_v x^v) \frac{1}{E(\omega)} \frac{E^{(v+1)}(0)}{|\underline{v}+1|} \omega^{v+1} \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{(S)} \frac{F(xy)}{y-1} \frac{E\left(\frac{\omega}{y}\right)}{E(\omega)} dy. \end{aligned} \right.$$

Aby otrzymać szukane wyrażenia na $F(x)$, należy znaleźć takie funkcje $E(x)$, by ostatnia strona tak w (101), jak i w (102) dążyła do zera wraz z ω , dążącym do nieskończoności.

W drugim z tych wzorów położmy $E(x) = E_a(x)$; niechaj $B^{(a)}$ będzie gwiazdą o środku zero, należącą do stałych $k_0, k_1, k_2, \dots$ (patrz § 4), x zaś punktem wewnątrz tej gwiazdy. Przyjmijmy najprzód $2 > a > 0$. Figurą tworzącą względem linii (01) jest:

$$\varrho^{\frac{1}{a}} = \cos \frac{\psi}{a}; \quad -a \frac{\pi}{2} \leq \psi \leq a \frac{\pi}{2}.$$

Obierzmy na S kontur, obejmujący tę linię, i taki, aby punkt xy znajdował się wewnątrz $B^{(a)}$. Niechaj $\bar{S}$ będzie konturem, opisanym przez $z = \frac{1}{y}$ w tym czasie, gdy zmienna y opisuje kontur S . Linia $\bar{S}$ jest zamknięta, obejmuje początek i pozostaje zawsze wewnątrz linii

$$\varrho^{\frac{1}{a}} \cos \frac{\bar{\psi}}{a} = 1; \quad (z = \bar{\varrho} e^{i\bar{\psi}}),$$

będącej przekształceniem linii $\varrho^{\frac{1}{a}} = \cos \frac{\psi}{a}$ przy pomocy podstawienia $z = \frac{1}{y}$. Wiemy, że $\lim_{\omega \rightarrow \infty} E_a(\omega z)$ zbliża się nieograniczenie do zera dla każdego punktu na $\bar{S}$, położonego w kącie $2\pi - a \frac{\pi}{2} > \bar{\psi} > a \frac{\pi}{2}$, oraz że $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |E_a(\omega z)| = \frac{1}{a}$ dla wszystkich punktów na $\bar{S}$, dla których $\bar{\psi} = \pm a \frac{\pi}{2}$. Wiemy jeszcze, że:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(|E_a(\omega z)| - \frac{1}{a} e^{\omega \frac{1}{a}} e^{\frac{1}{a} \cos \frac{\bar{\psi}}{a}} \right) = 0$$

dla każdego punktu na $\bar{S}$, położonego w kącie $-a \frac{\pi}{2} < \bar{\psi} < a \frac{\pi}{2}$.

Według założenia o konturach S i $\bar{S}$, część konturu $\bar{S}$, położona w kącie $-a \frac{\pi}{2} < \bar{\psi} < a \frac{\pi}{2}$, pozostaje zawsze z linią $\varrho^{\frac{1}{a}} \cos \frac{\bar{\psi}}{a} = 1$ po jednej stronie względem początku. Granica wyższa wyrażenia $\varrho^{\frac{1}{a}} \cos \frac{\bar{\psi}}{a}$ w tym kącie jest więc zawsze mniejsza od jedności.

Widzimy tedy, że jest:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{E_a\left(\frac{\omega}{y}\right)}{E_a(\omega)} = 0, \quad 2 > a > 0,$$

dla każdego punktu na S i także, że $\frac{E_a(\frac{\omega}{y})}{E_a(\omega)}$ zbliża się w sposób jednostajny do zera dla wszystkich punktów na S .

Dochodzimy do tego samego wyniku dla $\alpha \geq 2$. Figurą tworzącą względem linii (01) jest wtedy $\rho^{\frac{1}{\alpha}} = \cos \frac{\psi}{\alpha}$; $-\pi \leq \psi \leq \pi$; jeżeli δ oznacza wielkość dodatnią, która staje się nieskończenie małą wraz z $\frac{1}{\omega}$, będzie wtedy:

$$\left| E_a(\omega z) - \frac{1}{\alpha} e^{\omega \frac{1}{\alpha}} r^{\frac{1}{\alpha} \cos \frac{\psi}{\alpha}} \right| < \delta e^{\omega \frac{1}{\alpha}} r^{\frac{1}{\alpha} \cos \frac{\psi}{\alpha}}; \quad -\pi \leq \psi \leq \pi.$$

Powróćmy do wzoru (102).

Mamy:

$$(103) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int \frac{F(xy)}{y-1} \frac{E_a(\frac{\omega}{y})}{E_a(\alpha)} dy = 0,$$

a zatem:

$$(104) \quad \left\{ \begin{aligned} FB^{\alpha}(x) &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \dots + k_{\nu} x^{\nu}) \frac{1}{E_a(\omega)} \frac{E_a^{\nu+1}(0)}{|\nu+1|} \omega^{\nu+1} \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{E_a(\omega)} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \dots + k_{\nu} x^{\nu}) \frac{\omega^{\nu+1}}{|\alpha(\nu+1)|}; \end{aligned} \right.$$

równość ta zachodzi wszędzie wewnątrz gwiazdy $B^{(\alpha)}$, a wyrażenie po stronie trzeciej tego wzoru jest jednostajnie zbieżne dla całego obszaru wewnętrznego gwiazdy $B^{(\alpha)}$.

Widzimy więc analogię zupełną z wyrażeniem Borela, które otrzymujemy, kładąc $\alpha = 1$.

Uczyńmy jeszcze uwagę, że na $E(x)$ zamiast $E_a(x)$ można wziąć funkcję, którą rozważaliśmy poprzednio, mianowicie funkcję, która zbliża się nieograniczenie do zera, gdy x dąży do nieskończoności wzdłuż jakiegokolwiek wektora różnego od osi rzeczywistej dodatniej, a jest wielkością rzeczywistą dodatnią, rosnącą nieograniczenie, gdy x dąży do nieskończoności wzdłuż osi rzeczywistej dodatniej. O biorając nadto tę funkcję tak, aby stosunek $\frac{E(\omega x)}{E(\omega)}$ zdołał do zera jednostajnie, gdy x należy do obszaru skoń-

zonego, położonego zewnątrz części osi rzeczywistej dodatniej pomiędzy $x=1$ a nieskończonością, otrzymujemy wyrażenie:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{E(\omega)} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \dots + k_{\nu} x^{\nu}) \frac{E^{\nu+1}(0)}{|\nu+1|} \omega^{\nu+1}$$

jednostajnie zbieżne dla każdego obszaru wewnątrz gwiazdy głównej A i przedstawiające gałąź funkcyjną $FA(x)$ wszędzie wewnątrz tej gwiazdy.

Na innym miejscu¹⁾ rozpatrywałem taką funkcję $E(x)$ i powrócę do niej w Nocie następnej.

Wynik, do którego doszliśmy przez zbadanie wzoru (102), można streścić w następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 11. „Oznaczmy przez A gwiazdę o środku w punkcie zero, przez a wielkość dodatnią, przez $B^{(\alpha)}$ gwiazdę spółśrodkową z A , wpisaną w A i utworzoną w przypadku $2 > \alpha > 0$ przez figurę tworzącą $\rho = r \left(\cos \frac{\psi}{\alpha} \right)^{\alpha}$; $-\alpha \frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \alpha \frac{\pi}{2}$, w przypadku zaś $\alpha \geq 2$ przez figurę tworzącą $\rho = r \left(\cos \frac{\psi}{\alpha} \right)^{\alpha}$; $-\pi \leq \psi \leq \pi$, gdzie ρ i ψ są współrzędne biegunowe w odniesieniu do wektora $x = a = r e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Gdy A jest gwiazdą główną, należącą do stałych $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, ..., $F^{(\mu)}(a)$, ..., poddanych warunkowi Cauchy'ego, mamy dwie równości:

$$\begin{aligned} FB^{\alpha}(x) &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{E_a(\omega)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{1}{1!} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{\mu!} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{|\alpha(\mu+1)|}, \\ FA(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{E_a(\omega)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{1}{1!} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{\mu!} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{|\alpha(\mu+1)|}, \end{aligned}$$

gdzie $E_a(x)$ oznacza funkcję:

$$E_a(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{\nu}}{|\alpha \nu|},$$

ω zaś jest zmienną dodatnią. Pierwsza z tych równości zachodzi wszędzie wewnątrz $B^{(\alpha)}$, druga wszędzie wewnątrz A . Druga strona pierwszej równości jest

¹⁾ Mittag-Leffler, Un nouveau théorème général de la théorie des fonctions analytiques, Comptes rendus 138. II. IV. 04. Patrz co do tej funkcji: E. Phragmén, Sur une extension d'un théorème classique de la théorie des fonctions, Acta math. 28. p. 357--359.

jednostajnie zbieżna dla wszelkiego obszaru wewnątrz $B^{(a)}$, druga strona drugiej równości jest jednostajnie zbieżna dla wszelkiego obszaru wewnątrz A .

Jeżeli w przejściu do nieskończoności zatrzymamy się na liczbie skończonej ω , będziemy mieli równość:

$$FB^{(\omega)}(x) - \frac{1}{E_a(\omega)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{1}{1} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{\mu} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{|\mu+1|} \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{(S)} \frac{F(z)}{z-x} \frac{E_a\left(\omega \frac{x-a}{z-a}\right)}{E_a(\omega)} dz,$$

zachodzącą wszędzie wewnątrz $B^{(a)}$, jeżeli (S) oznacza kontur zamknięty, położony wewnątrz $B^{(a)}$ i obejmujący figurę tworzącą w odniesieniu do prostej (ax) .

Jeżeli przez $E(x)$ oznaczymy funkcję taką, że dla każdego obszaru skończonego, położonego zewnątrz części osi rzeczywistej pomiędzy $x=1$ a nieskończonością, wielkość $\frac{E(\omega x)}{E(\omega)}$ zdąży nieograniczenie do zera, gdy ω rośnie nieograniczenie, będzie:

$$FA(x) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{E(\omega)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{1}{1} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{\mu} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \right) \frac{E^{r+1}(0)}{|\mu+1|} \omega^{\mu+1},$$

gdzie strona druga jest jednostajnie zbieżna dla wszelkiego obszaru wewnątrz A .

Jeżeli w przejściu do nieskończoności zatrzymamy się na liczbie skończonej ω , będzie:

$$FA(x) - \frac{1}{E(\omega)} \left(F(a) + \frac{1}{1} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{\mu} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \right) \frac{E^{r+1}(0)}{|\mu+1|} \omega^{\mu+1} \\ = \int_{(S)} \frac{F(z)}{z-x} \frac{E\left(\omega \frac{x-a}{z-a}\right)}{E(\omega)} d\omega,$$

gdzie kontur S jest konturem zamkniętym, położonym wewnątrz A i obejmującym prostą $(ax)^*$.

Powróćmy do wzoru (101) i uczynimy w nim, jak poprzednio we wzorze (102), $E(x) = E_a(x)$; przyjmijmy nadto, że $2 > a > 0$. Niechaj zmienna y opisuje dokoła linii (01) figurę klinową, złożoną z dwóch łuków kołowych symetrycznych względem tej linii i przecinających się w dwóch punktach 0 i 1 pod kątem $\alpha\pi$ (fig. 22).

Oznaczmy przez $V^{(a)}$ gwiazdę o środku w punkcie zero, wpisaną w gwiazdę główną A , utworzoną przez tę figurę klinową jako figurę tworzącą.

Jest to figura niewiele odmienna od tej, którą roztrząsaliśmy razem z prof. Volterra¹⁾.

Obierzmy na S linię, obejmującą figurę tworzącą w odniesieniu do linii (01) i położoną zarazem wewnątrz $V^{(a)}$. Niechaj $\bar{S}$ będzie linią opisaną przez $z = \frac{1}{y}$ w tym czasie, gdy y opisuje linię S . Figurze klinowej

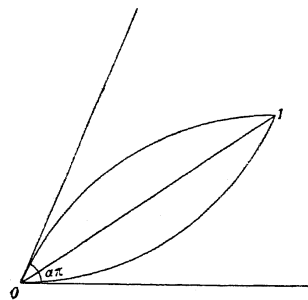


Fig. 22.

w płaszczyźnie y , mającej linię (01) za oś, odpowiadają w płaszczyźnie z dwie półproste symetryczne względem osi rzeczywistej, przechodzącej przez punkt $z=1$ i przecinające się pod kątem $\alpha\pi$.

Linia $\bar{S}$ jest więc linią zamkniętą, otaczającą początek i pozostającą zawsze po tej samej stronie dwóch półprostych, co początek. Na zasadzie znanej własności funkcji $E_a(x)$ widzimy tedy, że $\lim_{\omega \rightarrow \infty} E_a(\omega(z-1))$ zbliża się nieograniczenie do zera w sposób jednostajny dla wszystkich punktów z , które należą do $\bar{S}$. Mamy zatem:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{(S)} \frac{F(xy)}{y-1} E_a\left(\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)\right) dy = 0$$

i przy pomocy wzoru (101) otrzymujemy:

¹⁾ Patrz Notę trzecią str. 61, Prace mat.-fiz. t. 16 str. 217.

$$(105) \left\{ \begin{aligned} FV^{(a)}(x) &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \dots + k_\nu x^\nu) \frac{E_a^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\nu+1|} \omega^{\nu+1} \\ FV^{(a)}(x) &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \left(\int_0^\omega \frac{E_a^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\nu|} \omega^\nu d\omega \right) x^\nu \\ FV^{(a)}(x) &= \int_0^\infty \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \frac{E_a^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\nu|} (\omega x)^\nu \right) d\omega. \end{aligned} \right.$$

Kładąc $a=1$, otrzymamy na $V^{(a)}$ gwiazdę Borela, którą oznaczylem przez $B^{(1)}$. Drugi i trzeci wzór stają się wtedy wzorami Borela, drugi zaś wzorem (37) Noty trzeciej.

Jeżeli zamiast $E_a(x)$ wprowadzimy funkcję $E(x)$ tego gatunku, jaki rozpatrzyłem w moich Notach w Comptes rendus 11 i 18 kwietnia 1904, t. j. funkcję taką, że $E(0)=1$ i że $E(\omega x)$ dla rzeczywistych dodatnich rosnących bez granic wartości ω zbliża się jednostajnie do zera w jakimkolwiek obszarze skończonym zmiennej x , nie zawierającym osi rzeczywistej dodatniej, otrzymamy wzory:

$$(106) \left\{ \begin{aligned} FA(x) &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \dots + k_\nu x^\nu) \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\nu+1|} \omega^{\nu+1} \\ FA(x) &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \left(\int_0^\omega \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\nu|} \omega^\nu d\omega \right) x^\nu \\ FA(x) &= \int_0^\infty \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\nu|} (\omega x)^\nu \right) d\omega, \end{aligned} \right.$$

gdzie strony drugie są jednostajnie zbieżne dla każdego obszaru skończonego, położonego wewnątrz gwiazdy głównej.

Wyniki, osiągnięte przez rozpatrzenie wzoru (101), dadzą się streścić w następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 11b. „Oznaczmy przez A gwiazdę o środku a , przez α wielkość dodatnią mniejszą od 2, przez $V^{(a)}$ gwiazdę spółśrodkową z A , wpisaną w A i utworzoną przez figurę klinową o kącie $\alpha\pi$ i obracającą się około jednego z jej wierzchołków, który winien być w środku a . Ponieważ A jest gwiazdą główną, należącą do stałych $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, ..., $F^{(\omega)}(a)$..., poddanych warunkowi Cauchy'ego, będziemy mieli dwa układy równości:

$$\begin{aligned} FV^{(a)}(x) &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(F(a) + \frac{1}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{|\underline{\nu}|} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu \right) \frac{E_a^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\nu+1|} \omega^{\nu+1}, \\ FV^{(a)}(x) &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\int_0^\omega E_a^{(\nu+1)}(-\omega) \omega^\nu d\omega}{(|\underline{\nu}|)^2} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu, \\ FV^{(a)}(x) &= \int_0^\infty \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{E_a^{(\nu+1)}(-\omega)}{(|\underline{\nu}|)^2} F^{(\nu)}(a)(\omega x)^\nu \right) d\omega; \\ FA(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(F(a) + \frac{1}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{|\underline{\nu}|} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu \right) \frac{E_a^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\nu+1|} \omega^{\nu+1}, \\ FA(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\int_0^\omega E_a^{(\nu+1)}(-\omega) \omega^\nu d\omega}{(|\underline{\nu}|)^2} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu, \\ FA(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^\infty \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{E_a^{(\nu+1)}(-\omega)}{(|\underline{\nu}|)^2} F^{(\nu)}(a)(\omega x)^\nu \right) d\omega, \end{aligned}$$

gdzie $E_a(x)$ oznacza funkcję $E_a(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{|\underline{\alpha \nu}|}$ i gdzie ω jest wielkością

rzeczywistą dodatnią. Pierwszy układ wartości zachodzi wszędzie wewnątrz $V^{(a)}$, drugi wszędzie wewnątrz A . Drugie strony pierwszego układu są jednostajnie zbieżne dla całego obszaru wewnątrz $V^{(a)}$, drugie strony drugiego układu wszędzie wewnątrz A . Jeżeli zatrzymamy się w przejściu do nieskończoności na liczbie skończonej ω , będziemy mieli równość:

$$\begin{aligned} FV^{(a)}(x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{1}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{|\underline{\nu}|} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu \right) \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\nu+1|} \omega^{\nu+1} \\ &= FV^{(a)}(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\int_0^\omega E^{(\nu+1)}(-\omega) \omega^\nu d\omega}{(|\underline{\nu}|)^2} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu \\ &= FV^{(a)}(x) - \int_0^\omega \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{(|\underline{\nu}|)^2} F^{(\nu)}(a)(\omega(x-a))^\nu \right) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-x}^{(s)} \frac{F(z)}{z-x} E_a\left(\frac{x-z}{z-a}\right) dz, \end{aligned}$$

zachodzącą wszędzie wewnątrz $V^{(a)}$, jeżeli S oznacza kontur zamknięty, położony wewnątrz $V^{(a)}$ i obejmujący figurę tworzącą w odniesieniu do prostej (ax) .

Jeżeli zamiast $E_a(x)$ wprowadzimy funkcję $E(x)$ taką, że $E(\omega x)$ zbliża się nieograniczenie do zera, gdy zmienna rzeczywista dodatnia ω rośnie bez granic, x zaś należy do obszaru skończonego, nie zawierającego osi rzeczywistej dodatniej, będziemy mieli wzory:

$$FA(x) = \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{1}{1} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{\nu} F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu} \right) \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{(\nu+1)} \omega^{\nu+1},$$

$$FA(x) = \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\int_0^{\omega} E^{(\nu+1)}(-\omega) \omega^{\nu} d\omega}{(\nu+1)} F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu},$$

$$FA(x) = \int_0^{\infty} \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{(\nu+1)} F^{(\nu)}(a)(\omega(x-a)^{\nu}) d\omega,$$

gdzie strony drugie są jednostajnie zbieżne dla wszelkiego obszaru wewnątrz A .

Jeżeli w przejściu do nieskończoności zatrzymamy się na liczbie skończonej ω , będzie:

$$FA(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{1}{1} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{\nu} F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu} \right) \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{(\nu+1)} \omega^{\nu+1}$$

$$= FA(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\int_0^{\omega} E^{(\nu+1)}(-\omega) \omega^{\nu} d\omega}{(\nu+1)} F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu}$$

$$= FA(x) - \int_0^{\omega} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{(\nu+1)} F^{(\nu)}(a)(\omega(x-a)^{\nu}) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int^{(S)} \frac{F(z)}{z-x} E\left(\omega \frac{x-z}{z-a}\right) dz,$$

gdzie S oznacza kontur zamknięty, otaczający linię (ax) i położony wewnątrz gwiazdy A^a .

Wyrażenie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^{\omega} \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega) \omega^{\nu} d\omega}{(\nu+1)} k_{\nu} x^{\nu}$$

po stronie drugiej równości:

$$(107) \quad FA(x) = \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^{\omega} \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{(\nu+1)} k_{\nu} x^{\nu}$$

jest funkcją całkowitą zmiennej x .

Równość (107) pozwala nam w następujący sposób uzupełnić twierdzenie **Ga**:

Gb. „Niechaj $FA(x)$ będzie jakąkolwiek gałęzią funkcyjną, należącą do stałych $k_0, k_1, \dots, k_{\nu}, \dots$ których A jest gwiazdą główną. Przy pomocy stałych k można utworzyć zawsze funkcję $G_{\omega}(x)$ całkowitą zmiennej x , która, oprócz od x i od stałych k , zależy jeszcze od pewnego parametru rzeczywistego ω i taką, że:

$$\lim_{\omega=\infty} G_{\omega}(x) = FA(x)^a.$$

Jak to zauważyłem już na końcu paragrafu poprzedzającego, pomiędzy wzorami, otrzymanymi tam, a otrzymanymi tu, zachodzi ta różnica, że nie udowodniliśmy, iż te ostatnie posiadają gwiazdę zbieżności.