

A. DENIZOT.

## PRZYSZYNEK DO TEORII AKSONOMETRYI.

(CONTRIBUTION À LA THEORIE DE LA PERSPECTIVE  
AXONOMÉTRIQUE).

Wiadomo, że ogólną zasadą skośnej aksonometrii jest twierdzenie Pohlkego<sup>1)</sup>, które orzeka:

„Trzy proste o dowolnych długościach i kierunkach, wyprowadzone z jednego punktu na płaszczyźnie, tworzą rzut równoległy trzech równych odcinków na trzech osiach układu prostokątnego, odmierzonych z początku współrzędnych. Jednakże tylko jedna z owych prostych lub jeden z kątów, zawartych pomiędzy osiami, może się równać zeru“.

Zakres praktycznego zastosowania i wyzyskania tego zagadnienia jest wprawdzie bardzo mały: w znanych perspektywach nie bierze się ani dowolnych wielkości osi, ani dowolnych kątów osi; rozstrzygają tu bądźto względy przeprowadzenia wygodnej i praktycznej konstrukcji, bądźto dążenie do wywołania harmonijnego wrażenia przedmiotu. Nadto zaznaczyć wypada, że perspektywy używane nie są dopiero wpływem rozpoznania

<sup>1)</sup> Według podań H. A. Schwarz'a (Crelle, 63 p. 309, 1864) Pohlke sformułował to twierdzenie około r. 1853, lecz ogłosił dopiero r. 1860 w pierwszym wydaniu swojego dzieła „Darstellende Geometrie“. Wydanie czwarte. Berlin 1876. str. 109. Literaturę dotyczącą twierdzenia Pohlkego zestawiał Fr. Schilling, Zeitschrift f. Math. u. Phys. 48, p. 487, 1903.

ogólnego twierdzenia, tylko istniały już przedtem, podyktowane potrzebą i bezpośrednio wyobraźnią.

Z tego punktu widzenia nie zachodziłaby potrzeba zastanawiania się dłużej nad powyższem twierdzeniem. Atoli to ogólne twierdzenie narzuca różne zasadnicze zagadnienia, których rozpatrzenie jest celem niniejszej rozprawy.

Dla całości podaję najprzód szkic dowodu twierdzenia Pohlkego. Wobec licznych prac, zajmujących się tym przedmiotem, nie mogę twierdzić, że rozumowanie moje zawiera myśli nowe; zbliżam się poniekąd do dowodu, podanego przez Reye<sup>1)</sup>; jednakże sposób przeprowadzenia myśli zasadniczych jest—o ile mi się wydaje—prostszy, aniżeli w istniejących dowodach. Następnie rachunek, polegający na poprzedniem rozumowaniu geometrycznem, daje w nader prosty sposób pewien wzór Pohlkego, wykazujący związek pomiędzy stosunkami skróceń osi a kątem nachylenia promieni względem tła; dalej otrzymujemy wzory, które pozwalają wyznaczyć z danego układu osi na tle kierunek promieni. Równocześnie okazuje się, że stosunków skróceń nie można—jak nieraz się utrzymuje—przyjąć dowolnie, tylko są one zależne od pewnego współczynnika, który w sposób jednoznaczny z danego układu osi wyznaczyć można. Celem dalszego badania jest—i to na podstawie wyprowadzonych wzorów—wyznaczenie układu osi na płaszczyźnie prostopadłej do promieni, których rzutem skośnym jest dany układ osi na na tle; zarazem poznajemy prosty sposób wykreślenia osi powinowactwa wzajemnie przynależnych płaszczyzn rzutów skośnych i prostokątnych. Takie zestawienie obydwóch rzutów, należących do jednego i tego samego pęku promieni, daje nam dopiero właściwą możność porównania utworów, powstających przez obydwaj rodzaje rzutów.

Na koniec podaję przykład, dotyczący znanej perspektywy kawalerskiej i to w oświetleniu przeprowadzonych ogólnych badań.

§ 1. Twierdzenie Pohlkego nie jest złączone z warunkiem, że odcinki, których rzutami są jakiekolwiek trzy proste, wyprowadzone z jednego punktu na płaszczyźnie, są równe i odmierzone na osiach wzajemnie prostopadłych. Dowód tego twierdzenia może być przeprowadzony dla nierównych odcinków i dla dowolnego układu osi.

Niech będą zatem (fig. 1) w płaszczyźnie  $O_a X_a, O_a Y_a, O_a Z_a$  osi aksonometryczne, a (fig. 2)  $OX, OY, OZ$  (trzy równe lub nierówne) odcinki na osiach jakiegokolwiek układu osi spólrzędnych; stawiamy sobie zagadnienie:

<sup>1)</sup> Th. Reye, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 11, p. 350, 1886. Zeitschrift f. Math. u. Phys. 12, p. 433, 1867.

Wykreślić na pewnej płaszczyźnie rzut skośny danego układu osi  $O(X'Y'Z')$  w ten sposób, aby rzut  $O'_a(X'_a Y'_a Z'_a)$  był podobny do danego układu osi  $O_a(X_a Y_a Z_a)$ ; albowiem możemy następnie układ  $O(X'Y'Z')$  w odpowiedni sposób tak zmienić, aby układy  $O'_a(\dots)$  i  $O_a(\dots)$  były identyczne.

Rozwiązanie tego zagadnienia uskuteczniemy: 1-o wyznaczwszy kierunek promieni rzutów, 2-o znalazłszy położenie płaszczyzny rzutów (tła).

Aby znaleźć kierunek promieni rzutów, wyznaczmy w płaszczyźnie przesuniętej przez punkty  $X', Y', Z'$  punkt  $O'$ , który z punktem  $O_a$  danego utworu  $O_a X_a Y_a Z_a$  jest w związku powinowactwa. Niech proste  $O_a X_a, O_a Y_a, O_a Z_a$  przecinają boki trójkątu  $X_a Y_a Z_a$  odpowiednio w punktach  $A, B, C$ ; wtenczas punkt  $O'$  otrzymujemy jako punkt przecięcia dwu pro-

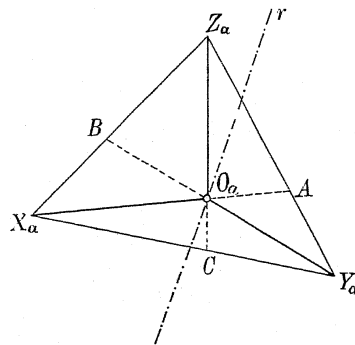


Fig. 1.

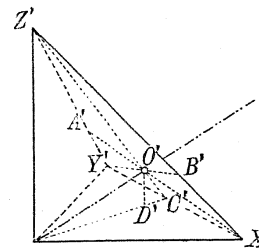


Fig. 2.

stych, np.  $X'A'$  i  $Y'B'$ , przyczem punkty  $A'$  i  $B'$  na bokach  $Y'Z'$  i  $Z'X'$  trójkąta  $X'Y'Z'$  są wyznaczone na podstawie stosunków:

$$\frac{A'Y'}{A'Z'} = \frac{AY_a}{AZ_a} \text{ i } \frac{B'Z'}{B'X'} = \frac{BZ_a}{BX_a}.$$

Żądany kierunek promieni rzutów jest następnie wyznaczony przez kierunek prostej  $OO'$ , łączącej początek  $O$  układu  $O(xyz)$  z punktem  $O'$ .

W celu rozwiązania drugiej części naszego zagadnienia, t. j. wyznaczenia położenia tła, przesuniemy przez promień  $OO'=l$  i punkty  $X', Y', Z'$ , względnie  $A', B', C'$ , płaszczyzn  $\pi_x, \pi_y, \pi_z$  i weźmy pod uwagę powstały w ten sposób pęk płaszczyzn  $l(\pi_x, \pi_y, \pi_z, \dots)$ . Uważajmy następnie proste  $O_a X_a, O_a Y_a, O_a Z_a$  jako trzy promienie, wyznaczające pęk promieni  $O_a(x_a, y_a, z_a, \dots)$ ,

jednokreślny względem pęku płaszczyzn  $l(\pi_x, \pi_y, \pi_z, \dots)$ . Rozumowanie nasze sprowadzamy przez to do rozwiązania znanego zagadnienia:

Mając dany pęk płaszczyzn  $l(\pi_x, \dots)$  i pęk promieni  $O_a(x_a, \dots)$ , sprowadzić te utwory do położenia perspektywicznego.

W tym celu<sup>1)</sup> przecinamy pęk  $l(\pi_x, \dots)$  płaszczyzną  $\Pi_0$ , prostopadłą do osi  $l$  podług pęku  $O_0(x_0, y_0, z_0, \dots)$  i wyznaczamy promienie odpowiednio prostopadłe  $q_a$  i  $r_a$ , tudzież  $q_0$  i  $r_0$  utworów  $O_a(x_a, y_a, z_a, \dots)$  i  $O_0(x_0, y_0, z_0, \dots)$ . Jak wiadomo, otrzymujemy następnie dwie płaszczyzny  $\Pi_a$  i  $\Pi_{a_0}$  o położeniu symetrycznym do osi  $l$ , przecinające pęk płaszczyzn  $l(\dots)$  podług pęków  $O'_{a_i}(x_{a_i}, y_{a_i}, z_{a_i}, \dots)$ , przy czym punkty  $X'_{a_i}, Y'_{a_i}, Z'_{a_i}$  ( $i=1, 2$ ) przedstawiają się jako rzuty równoległe punktów  $X', Y', Z'$  w kierunku prostej  $l$ . Z równości kątów  $\sphericalangle Y'_{a_i} O'_{a_i} Z'_{a_i} = \sphericalangle Y_a O_a Z_a$  i t. d. i z uwagi, że utwory  $O'_{a_i}(X'_{a_i}, Y'_{a_i}, Z'_{a_i})$  i  $O_a(X_a, Y_a, Z_a)$  są wzajemnie w związku powinowactwa, wynika podobieństwo tych utworów. Jeżeli jeszcze na osiach układu  $O(x, y, z)$  zamiast  $OX', OY', OZ'$  odmierzymy odcinki  $OX, OY, OZ$  i to wedle stosunków

$$\frac{O'_{a_i} X'_{a_i}}{OX'} = \frac{O_a X_a}{OX} \text{ i t. d.,}$$

natenczas otrzymamy w płaszczyznach  $\Pi_a$  i  $\Pi_{a_0}$  utwory, zupełnie identyczne z utworem danym  $O_a(X_a, Y_a, Z_a)$ . c. b. d. d.

§ 2. W poprzednim rozumowaniu obraliśmy, jako punkt wyjścia, dowolny układ osi w przestrzeni i, wyznaczawszy kierunek promieni względem tego układu, wykazaliśmy następnie w sposób syntetyczny istnienie dwóch płaszczyzn  $\Pi_a$  i  $\Pi_{a_0}$ , które czynią zadość warunkom zagadnienia. Przyjmując zatem płaszczyznę papieru jako tło rysunkowe  $\Pi_a$  przedmiotu, w której poprzednio scharakteryzowane kryją się dwie płaszczyzny  $\Pi_a$  i  $\Pi_{a_0}$ , tem samem winniśmy przyjąć istnienie dwu kierunków promieni, z których każdy wyznacza rysunek na tle, jako rzut dwóch równych przedmiotów o symetrycznym położeniu do promieni.

W następnym badaniu, stosownie do jednego tła, przyjmujemy tylko jeden kierunek promieni i jeden przedmiot w przestrzeni.

Osi układu, z którym przedmiot łączymy, przyjmujemy raz na zawsze wzajemnie prostopadłe i odmierzamy na nich odcinki  $OX, OY, OZ$  równe odcinkowi jednostki „a”, których rzuty na tle są  $O_a X_a, O_a Y_a, O_a Z_a$ .

<sup>1)</sup> Zob. M. Łazar ski, Zasady Geometrii wykreślnej, Lwów 1903, tom I, str. 8.

Stawiamy teraz pytanie: Pod jakim kątem padają promienie rzutów na tło?

Niech będą:

$$\begin{aligned} & \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \text{ kąty, zawarte pomiędzy promieniem rzutów } l \text{ a osiami} \\ & OX, OY, OZ; \\ & O_0 X_0 = p_1, O_0 Y_0 = p_2, O_0 Z_0 = p_3 \text{ rzuty prostokątne jednostki} \\ & „a” \text{ w płaszczyźnie } \Pi_0; \\ & O_a X_a = q_1, O_a Y_a = q_2, O_a Z_a = q_3 \text{ odpowiednie rzuty skośne na} \\ & \text{tle } \Pi_a; \\ & \sphericalangle Y_0 O_0 Z_0 = \xi_0, \sphericalangle Z_0 O_0 X_0 = \eta_0, \sphericalangle X_0 O_0 Y_0 = \zeta_0; \\ & \sphericalangle Y_a O_a Z_a = \xi, \sphericalangle Z_a O_a X_a = \eta, \sphericalangle X_a O_a Z_a = \zeta. \end{aligned}$$

Stosunki  $\lambda_i = \frac{p_i}{a}$  względnie  $\lambda_i = \frac{q_i}{a}$  ( $i=1, 2, 3$ ) nazywać będziemy stosunkami skróceń rzutów prostokątnych, względnie stosunkami skróceń (lub przedłużeń) rzutów skośnych.

Mamy najprzód związki:

$$p_i = a \sin \sigma_i, \quad (1)$$

skąd wynika znany związek:

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 2a^2 \quad (2)$$

względnie:

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 2. \quad (2^*)$$

Oznaczmy przez  $\tau_i$  kąty, zawarte między  $p_i$  i  $q_i$ , a otrzymamy:

$$p_i = q_i \cos \tau_i. \quad (3)$$

Utwórzmy sumę kwadratów związków (3), przy czym piszemy:

$$\cos^2 \tau_i = 1 - \sin^2 \tau_i,$$

to, przy uwzględnieniu wzoru (2), będzie:

$$2a^2 = (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) - (q_1^2 \sin^2 \tau_1 + q_2^2 \sin^2 \tau_2 + q_3^2 \sin^2 \tau_3). \quad (4)$$

W celu uproszczenia tego wzoru sprowadźmy płaszczyznę  $\Pi_a$  względem  $\Pi_0$  przez przesunięcie równoległe do takiego położenia, aby punkty  $O_a$  i  $O_0$  tworzyły jeden punkt  $O_0$ , tak że prosta  $r$ , podług której płaszczyzny  $\Pi_a$  i  $\Pi_0$  się przecinają, czyli oś powinowactwa utworów  $O_a X_a Y_a Z_a$  i  $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ , przesunięta będzie przez punkt  $O_0$  (fig. 3).

Będą wtedy

$$h_i = q_i \sin \tau_i \quad (5)$$

prostopadłe, wyprowadzone z punktów  $X_a, Y_a, Z_a$  na płaszczyznę  $\Pi_0$  i przebijające tę płaszczyznę w punktach  $X_0, Y_0, Z_0$ .

Niech  $\varphi$  oznacza kąt nachylenia płaszczyzn  $\Pi_a$  i  $\Pi_0$  i niech będą  $\delta_i$  prostopadłe, wyprowadzone z punktów  $X_0, Y_0, Z_0$  do osi powinowactwa  $r$ , przyczem  $D_i$  oznaczają spodki tych prostopadłych; będzie:

$$h_i = \delta_i \operatorname{tg} \varphi, \quad (6)$$

skąd wynika:

$$h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2) \operatorname{tg}^2 \varphi. \quad (7)$$

Z trójkątów  $X_0 D_1 O_0$  i t. d. mamy:

$$\delta_1^2 = p_1^2 - \overline{O_0 D_1}^2 \text{ i t. d.} \quad (8)$$

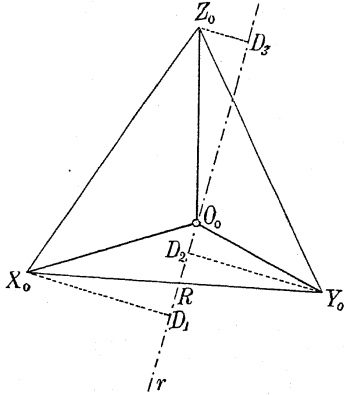


Fig. 3.

Odcinki  $O_0 D_i$  zaś są rzutami prostokątnymi odcinków  $O X, O Y, O Z$  na prostą  $r$ ; z uwagi tej wynika:

$$\overline{O_0 D_1}^2 + \overline{O_0 D_2}^2 + \overline{O_0 D_3}^2 = a^2. \quad (9)$$

A zatem z trzech równań (8), przy uwzględnieniu równania (2), wynika:

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 = a^2. \quad (10)$$

Powracając do wzorów (7) i (4), otrzymamy:

$$2a^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi, \quad (11)$$

czyli, wprowadzając stosunki skróceń:

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 2. \quad (11^*)$$

§ 3. Wzór ten, podany po raz pierwszy przez Pohlke<sup>1)</sup>, wyказuje związek pomiędzy stosunkami skróceń a kątem nachylenia ( $\varphi$ ) płaszczyzny  $\Pi_a$  do  $\Pi_0$  lub też kątem ( $90^\circ - \varphi$ ), pod którym promienie rzutów względem  $\Pi_a$  są pochylone. Podwójna wartość na  $\operatorname{tg} \varphi$  wskazuje dwie płaszczyzny  $\Pi_a$  i  $\Pi_a'$ , względnie dwa kierunki promieni, o których wspomnieliśmy na początku poprzedniego ustępu.

W myśl zagadnienia Pohlke można przyjąć dowolnie osi aksonometryczne co do kierunku ( $\xi, \eta, \zeta$ ) i długości ( $q_1, q_2, q_3$ ), natomiast wybór stosunków skróceń ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ) nie jest dowolny. Jeżeli przyjmiemy np.

$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \lambda_3 = \frac{1}{2}$  otrzymujemy, wedle (11\*),  $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{-1}$ , co znaczy, że obraliśmy fałszywie powyższe skrócenia. Popelnia się więc niedokładność, jeżeli się bez ogródki twierdzi, że przy aksonometrii skośnej rzuty osi nie tylko co do kierunku, ale i co do stosunków skróceń mogą być dowolnie przyjęte.

Związek pomiędzy stosunkami skróceń ( $\lambda_i$ ) a przyjętymi osiami ( $q_i$ ) jest raczej następujący:

Jeśli dane są długości osi, to równocześnie jest znany tylko stosunek stosunków skróceń; niechaj nim będzie:

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = m_1 : m_2 : m_3,$$

gdzie  $m_i$  uważamy jako liczby całkowite (dodatnie), które, w myśl ogólnego zagadnienia, dowolnie przyjmując możemy i które nazywać będziemy liczbami skróceń. Natenczas:

$$\lambda_i = \varrho m_i,$$

gdzie  $\varrho$  oznacza pewien (dodatni) współczynnik; przytem wzór (11\*) zmienia się na:

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \varrho^2 (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) - 2. \quad (11^{**})$$

<sup>1)</sup> Pohlke, Darstellende Geometrie. Vierte Auflage p. 112.

Aby tedy stosunki  $\lambda_i$  i kąt  $\varphi$  były znane, winniśmy wyznaczyć współczynnik  $q$ . Sposób, w jaki to skutecznie można, podamy później.

§ 4. W celu wyprowadzenia dalszych wniosków z ogólnego twierdzenia, weźmy pod uwagę przekrój prostopadły ( $\Pi_0$ ) pęku płaszczyzn  $l(\pi_x, \pi_y, \pi_z, \dots)$ . Trójkąt  $Z_0 O_0 Y_0$  jest przytem prostokątnym rzutem trójkąta  $ZOY$ ; kątem nachylenia płaszczyzn obydwóch trójkątów jest kąt, zawarty między prostopadłami do tych płaszczyzn, a więc  $\sigma_1$ ; zatem otrzymujemy jako wyrażenie na podwójną płaszczyznę  $\Delta Z_0 O_0 Y_0$  i w podobny sposób na  $\Delta Y_0 O_0 X_0$  i  $\Delta X_0 O_0 Z_0$ :

$$\begin{aligned} p_2 p_3 \sin \xi_0 &= a^2 \cos \sigma_1, \\ p_3 p_1 \sin \eta_0 &= a^2 \cos \sigma_2, \\ p_1 p_2 \sin \zeta_0 &= a^2 \cos \sigma_3. \end{aligned} \quad (12)$$

Uważając zaś  $\Delta Z_0 O_0 Y_0$  jako rzut prostokątny trójkąta  $Z_a O_a Y_a$ , otrzymujemy:

$$\begin{aligned} p_1 p_2 \sin \xi_0 &= q_2 q_3 \sin \xi \cdot \cos \varphi, \\ p_2 p_1 \sin \eta_0 &= q_3 q_1 \sin \eta \cdot \cos \varphi, \\ p_1 p_2 \sin \zeta_0 &= q_1 q_2 \sin \zeta \cdot \cos \varphi. \end{aligned} \quad (13)$$

Pierwsze wzory (12) prowadzą do znanych wzorów Weisbacha na aksjometrię prostokątną.

Uwzględniając wzory (1), piszemy:

$$\cos \sigma_1 = \sqrt{1 - \sin^2 \sigma_1} = \frac{\sqrt{a^2 - p_1^2}}{a},$$

czyli na podstawie wzoru (2):

$$a^2 \cos \sigma_1 = \frac{1}{2} \sqrt{(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)(-p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)}. \quad (14)$$

Wiążemy (14) z (12) i otrzymujemy znane wzory; po wprowadzeniu zaś stosunków skrótów  $\kappa_i = \frac{p_i}{a}$ , będzie:

$$\begin{aligned} \sin \xi_0 &= \frac{1}{2 \kappa_2 \kappa_3} \sqrt{(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2)(-\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2)}, \\ \sin \eta_0 &= \frac{1}{2 \kappa_1 \kappa_3} \sqrt{(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2)(+\kappa_1^2 - \kappa_2^2 + \kappa_3^2)}, \\ \sin \zeta_0 &= \frac{1}{2 \kappa_1 \kappa_2} \sqrt{(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2)(+\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - \kappa_3^2)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Połączenie wzorów (12) i (13) prowadzi do nowych wniosków. Z wzorów tych wynika szereg równań:

$$\frac{a^2}{\cos \varphi} = \frac{q_2 q_3 \sin \xi}{\cos \sigma_1} = \frac{q_1 q_3 \sin \eta}{\cos \sigma_2} = \frac{q_1 q_2 \sin \zeta}{\cos \sigma_3}. \quad (16)$$

Istnienie tych równań jest tylko możliwe pod warunkiem równoczesnego istnienia stosunków:

$$\cos \sigma_1 : \cos \sigma_2 : \cos \sigma_3 = \frac{\sin \xi}{q_1} : \frac{\sin \eta}{q_2} : \frac{\sin \zeta}{q_3}. \quad (17)$$

A zatem: Dostawy kątów promieni są proporcjonalne do ilorazów wstaw kątów, zawartych między dwiema osiami aksjometrycznymi, przez oś trzecią.<sup>1)</sup>

Zagadnienie to pozwala z danego układu osi na tle wyznaczyć kierunek promieni względem osi przyjętego układu, do którego punkty przedmiotu się odnoszą.

§ 5. Powróćmy do dowodu twierdzenia Pohlkego i przypomnijmy sobie, że tam wyznaczyliśmy w inny sposób kierunek promieni. Biorąc punkty przecięcia  $A, B, C$  danych osi na tle z przeciwległymi bokami trójkąta  $X_i Y_i Z_i$ , znaleźliśmy odpowiednie punkty  $A' B' C'$  na bokach  $\Delta X' Y' Z'$  (fig. 2). Wprowadzamy zatem do rozumowania następujące stosunki, dane na tle przez położenie osi aksjometrycznych:

$$\frac{A O_a}{A X_a} = \mu_1, \quad \frac{B O_a}{B Y_a} = \mu_2, \quad \frac{C O_a}{C Z_a} = \mu_3. \quad (18)$$

Według tych samych stosunków dzieli punkt  $O'$  proste  $A' X', B' Y', C' Z'$  trójkąta  $X' Y' Z'$ . Wyprowadźmy z punktu  $O'$  prostopadłą  $O' D' = z'$  do płaszczyzny  $O' X' Y'$ , a otrzymamy z  $\Delta C' O' Z'$  stosunek:

$$\frac{O' D'}{Z' O'} = \frac{O' O'}{C' Z'}$$

czyli:

$$\frac{z'}{a} = \mu_3.$$

<sup>1)</sup> Wzór (17) zachodzi w innym związku w pracy H. A. Schwarz a l. c.

Otrzymujemy zatem na współrzędne punktu  $O'$ :

$$x' = a\mu_1, \quad y' = a\mu_2, \quad z' = a\mu_3. \quad (19)$$

Na podstawie tych wartości wynika wyrażenie na odległość punktu  $O'$  od początku współrzędnych  $O$ ; będzie:

$$r = a\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2};$$

a kierunek prostej  $OO'$ , t. j. promienia rzutów, jest wyznaczony na podstawie wyrażen:

$$\cos \sigma_1 = \frac{x'}{r} = \frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2}} \text{ i t. d.} \quad (20)$$

czyli

$$\cos \sigma_1 : \cos \sigma_2 : \cos \sigma_3 = \mu_1 : \mu_2 : \mu_3. \quad (21)$$

Stosunek wartości (18) wyznacza więc stosunek dostaw kierunku promieni rzutów.

Uważając stosunki  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  jako dane, możemy wyrazić przez nie i inne poprzednio wyznaczone wielkości. Np. otrzymujemy na wstawy kątów  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$ :

$$\sin \xi_0 = \frac{\cos \sigma_1}{\sin \sigma_2 \cdot \sin \sigma_3} = \mu_1 \sqrt{\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2}{(\mu_1^2 + \mu_2^2)(\mu_1^2 + \mu_3^2)}} \quad (22)$$

i podobne wyrażenia na  $\sin \eta_0$  i  $\sin \zeta_0$ .

§ 6. Jeżeli na osiach  $Ox, Oy, Oz$  naszego prostokątnego układu w przestrzeni odmierzymy odcinki (rys. 4)  $OM_1, OM_2, OM_3$ , proporcjonalne odpowiednio do  $\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}, \frac{1}{\mu_3}$ , to płaszczyzna, przesunięta przez  $M_1, M_2, M_3$ , jest prostopadła do kierunku promieni, albowiem wzory (20) wyrażają kierunek prostopadłej do tej płaszczyzny.

Trójkąt  $M_1M_2M_3$ , którego boki mają stosunek wzajemny

$$\overline{M_1M_2} : \overline{M_2M_3} : \overline{M_3M_1} = \sqrt{\frac{1}{\mu_1^2} + \frac{1}{\mu_2^2}} : \sqrt{\frac{1}{\mu_2^2} + \frac{1}{\mu_3^2}} : \sqrt{\frac{1}{\mu_3^2} + \frac{1}{\mu_1^2}}, \quad (23)$$

przedstawia zatem trójkąt śladów przekroju ( $\Pi_0$ ) prostopadłego do pęku promieni. Punkt  $O_0$ , jako rzut prostokątny wierzchołka  $O$  na płaszczyznę  $\Pi_0$ , jest wspólnym punktem przecięcia wysokości trójkąta śla-

dów, przez co równocześnie są dane kierunki (22) osi aksonometrycznych na płaszczyźnie  $\Pi_0$ .

§ 7. Uwaga. Wzajemne połączenie wzorów (17) i (18) względnie (21) prowadzi do wzoru:

$$\frac{AO_u}{AX_u} : \frac{BO_u}{BY_u} : \frac{CO_u}{CZ_u} = \frac{\sin \xi}{q_1} : \frac{\sin \eta}{q_2} : \frac{\sin \zeta}{q_3}.$$

Uważajmy proste  $AX_u, BY_u, CZ_u$  jako poprzeczne w trójkącie  $X_uY_uZ_u$ , przechodzące przez wspólny punkt  $O_u$ , to powyższy wzór określa pewne związki metryczne, dotyczące poprzecznych i zawartych między nimi kątów.

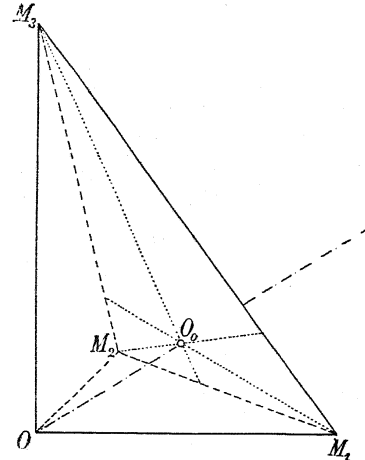


Fig. 4.

Przykład. Jeżeli  $O_u$  jest środkiem ciężkości trójkąta, to otrzymujemy na podstawie powyższego wzoru:

$$\frac{\sin \xi}{t_1} = \frac{\sin \eta}{t_2} = \frac{\sin \zeta}{t_3},$$

gdzie  $t_1, t_2, t_3$  oznaczają linie środkowe.

W stosunku do płaszczyzny  $\Pi_0$  wyraża ten przypadek rzut izometryczny.

§ 8. Wyznaczenie współczynnika  $\varrho$ . Wzory (12) i (13) w połączeniu z warunkiem

$$\xi + \eta + \zeta = 360^\circ, \quad (24)$$

któremu kąty  $\xi, \eta, \zeta$  winny zadość czynić, wskażą nam drogę, na której możemy wyznaczyć współczynnik  $\varrho$ , dotyczący stosunków skrótów (§ 3).

W tym celu wyprowadzamy z wzorów (12) i (13) wartości na wstawy kątów  $\xi, \eta, \zeta$ :

$$\sin \xi = \frac{a^2}{\varrho_2 \varrho_3} \cos \sigma_1 \cdot \frac{1}{\cos \varphi}. \quad (25)$$

Kładziemy w równaniu (25) wyrażenie na skrócenia:

$$\lambda_i = \frac{q_i}{a} = \varrho m_i$$

oraz wzór, wynikający z (11\*\*):

$$\frac{1}{\cos \varphi} = \sqrt{\varrho^2(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) - 1},$$

dla krótkości piszemy:

$$u = \sqrt{\frac{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho^4}} \quad (26)$$

a otrzymamy:

$$\begin{aligned} \sin \xi &= \frac{\cos \sigma_1}{m_2 m_3} u, \\ \sin \eta &= \frac{\cos \sigma_2}{m_3 m_1} u, \\ \sin \zeta &= \frac{\cos \sigma_3}{m_1 m_2} u. \end{aligned} \quad (27)$$

Dostawy kątów  $\sigma_i$ , które na podstawie wzorów (17) lub (21) uważamy jako dane, są niezależne od współczynnika  $\varrho$ , tak że jedynie wielkość  $u$  zawiera ten współczynnik.

Na zasadzie warunku (24) mamy znany wzór goniometryczny:

$$\cos \xi + \cos \eta + \cos \zeta + 4 \cos \frac{\xi}{2} \cos \frac{\eta}{2} \cos \frac{\zeta}{2} + 1 = 0. \quad (28)$$

Wyrażamy dostawy połów kątów przez dostawy całych kątów i zamiast (28) otrzymamy:

$$\cos^2 \xi + \cos^2 \eta + \cos^2 \zeta - 2 \cos \xi \cos \eta \cos \zeta - 1 = 0. \quad (29)$$

względnie

$$4 \sin^2 \xi \sin^2 \eta \sin^2 \zeta - 4 \sin^2 \xi \sin^2 \zeta + (\sin^2 \xi - \sin^2 \eta + \sin^2 \zeta)^2 = 0. \quad (30)$$

Wprowadzając do tego wzoru wyrażenia (27), otrzymamy równanie na  $u$ :

$$u^2 = \frac{4m_1^2 \cos^2 \sigma_1 m_2^2 \cos^2 \sigma_2 - (m_1^2 \cos^2 \sigma_1 - m_2^2 \cos^2 \sigma_2 + m_3^2 \cos^2 \sigma_3)^2}{4 \cos^2 \sigma_1 \cos^2 \sigma_2 \cos^2 \sigma_3}. \quad (31)$$

Równanie, wynikające z (26):

$$\frac{1}{\varrho^2} - (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) \frac{1}{\varrho^2} + u^2 = 0 \quad (32)$$

daje dwie wartości na współczynnik  $\varrho$ ; przekonamy się jednak, że tylko jednej wartości użyć można. Rozwiązanie równania (32) prowadzi do wzoru:

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)^2 - 4u^2}. \quad (33)$$

Wzór ten napiszemy w postaci:

$$\varrho^2 (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) - 2 = \mp \varrho^2 \sqrt{(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)^2 - 4u^2}. \quad (34)$$

Lewa strona tego równania przedstawia wedle (11\*\*) wartość na  $\tan^2 \varphi$ . Z uwagi tej wnioskujemy, że tylko wartość dodatnia pierwiastnika wzoru (34) czyli ujemny znak w (33) wyznacza wartość na współczynnik  $\varrho$ . Zatem:

Dowolnie przyjętym liczbom skrótów  $m_i$  odpowiada jedna jedyna wartość na współczynnik  $\varrho$ .

Jeżeli są dane na tle  $\Pi_a$  osi aksometrycznej ( $q_i$ ), a więc zarazem i liczby skrótów ( $m_i$ ), to otrzymamy na stosunki skrótów wartości:

$$\lambda = \varrho m_i, \quad (35)$$

a na jednostkę „a” wartość:

$$a = \frac{q_i}{\varrho m_i}; \quad (36)$$

długości osi w płaszczyźnie  $\Pi_n$  będą:

$$p_i = a \kappa_i = \frac{q_i}{\varrho m_i}. \quad (37)$$

§ 9. Wykreślenie układu osi w płaszczyźnie  $\Pi_0$ . Po przednio przeprowadzone rozumowanie pozwala wykreślić układ osi w płaszczyźnie  $\Pi_0$ , jeżeli jest dany układ w płaszczyźnie  $\Pi_a$ .

Kierunek osi w płaszczyźnie  $\Pi_0$  możemy obliczyć, posługując się wzorami (15), jeżeli poprzednio wyznaczaliśmy  $n_i = \sin \sigma_i$  na zasadzie wartości dostaw kątów  $\sigma_i$  (17).

W sposób geometryczny otrzymamy kąty  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$  najwygodniej za pomocą trójkąta śladów  $M_1 M_2 M_3$ , którego stosunek boków jest dany przez wzór (23).

W celu przeprowadzenia konstrukcji dobieramy dowolny odcinek  $e$  i wyznaczamy wielkości:

$$e \cdot \frac{AX_a}{AO_a} = \frac{e}{\mu_1} = n_1, \quad e \cdot \frac{BY_a}{BO_a} = n_2, \quad e \cdot \frac{CZ_a}{CO_a} = n_3$$

jako czwarte proporcjonalne według

$$A_a O : AX_a = e : n_1, \text{ i t. d.}$$

Następnie z wyznaczonych odcinków  $n_1, n_2, n_3$  otrzymamy za pomocą trójkątów prostokątnych boki trójkąta śladów:

$$\overline{M_1 M_2} = \sqrt{n_1^2 + n_2^2}, \quad \overline{M_2 M_3} = \sqrt{n_2^2 + n_3^2}, \quad \overline{M_3 M_1} = \sqrt{n_3^2 + n_1^2}.$$

Kierunek osi wykreślamy, prowadząc (fig. 5) z wierzchołków trójkąta śladów ( $M_1 M_2 M_3$ ) prostopadłe do przeciwległych boków.

Odmierzamy następnie z punktu  $O_0$ , wspólnego punktu przecięcia tych prostopadłych, odcinki  $O_0 X_0 = p_1, O_0 Y_0 = p_2, O_0 Z_0 = p_3$ , danych na podstawie wzorów (37), a otrzymamy układ osi w płaszczyźnie  $\Pi_0$ .

Z korzyścią możemy się także posługiwać sposobami, znanymi z aksometrii prostokątnej<sup>1)</sup>. W tym celu uskuteczniamy kłady pewnych płaszczyzn ( $M_1 O M_2$  i t. d.) na płaszczyznę  $\Pi_0$ ; następnie odmierzymy na kładach  $\overline{OM_1}, \overline{OM_2}, \overline{OM_3}$  odcinki  $\overline{OX_0}, \overline{OY_0}, \overline{OZ_0}$ , równe jednostce „ $a$ “, i wyznaczamy rzuty prostokątne  $O_0 X_0, O_0 Y_0, O_0 Z_0$ . Równocześnie otrzymamy, jak wiadomo, stosunki skróceń, t. j. wstawy kątów  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Konstrukcja geometryczna nadawać się będzie mianowicie wtenczas, jeśli nie zależy na istotnych długościach osi ( $p_i$ ), tylko na ich stosunku wzajemnym.

§ 10. Wyznaczenie osi powinowactwa. Utwory w płaszczyznach  $\Pi_0$  i  $\Pi_a$  są wzajemnie zwarte osią powinowactwa. Jeden ze sposobów wyznaczenia tej osi, nadających się mianowicie do konstrukcji geometrycznej, wskazuje druga część dowodu twierdzenia Pohlkego. Wyżej rozwinięte wzory umożliwiają jej wykreślenie także na podstawie rachunku. Znając bowiem stosunek prostopadłych  $\delta_i$ , poprowadzonych z punktów np.  $X_0$  i  $Y_0$  do osi powinowactwa, przesuniętej przez  $O_0$ , znajdujemy na prostej

<sup>1)</sup> M. Łazarzski, l. c. 102.

$X_0 Y_0$  punkt  $R$  (fig. 3), jako drugi punkt tej osi, który dzieli odcinek  $X_0 Y_0$  w stosunku owych prostopadłych.

Celem wyznaczenia tego stosunku łączymy wzory (5) i (6) i otrzymamy na prostopadłe:

$$\delta_i = \frac{q_i \sin \tau_i}{\operatorname{tg} \varphi}. \quad (38)$$

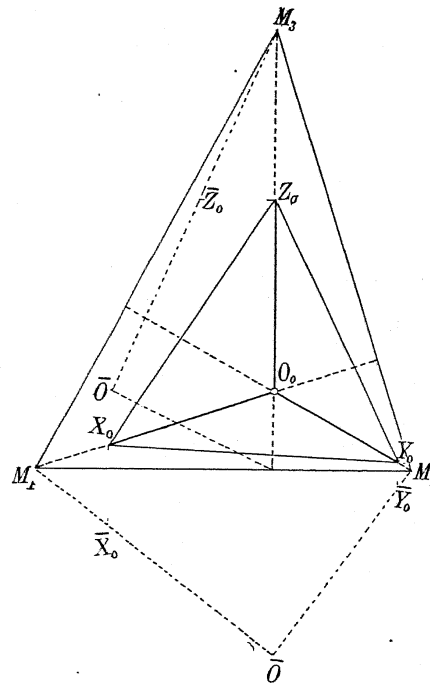


Fig. 5.

Zważmy, że:

$$\cos \tau_i = \frac{p_i}{q_i} = \frac{z_i}{\lambda_i},$$

a będzie zamiast (38)

$$\delta_i = \frac{\sqrt{q_i^2 - n_i^2}}{\operatorname{tg} \varphi}. \quad (39)$$



Kładąc w równaniach (39)  $\kappa_i = \frac{p_i}{a}$ ,  $\lambda_i = \frac{q_i}{a}$  jako wartości znane, otrzymamy na wyrażenie szukanego stosunku:

$$\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 = \sqrt{\lambda_1^2 - \kappa_1^2} : \sqrt{\lambda_2^2 - \kappa_2^2} : \sqrt{\lambda_3^2 - \kappa_3^2}. \quad (40)$$

§ 11. W rozprawie „Grundzüge einer allgemeinen axonometrischen Theorie der darstellenden Perspective“ podaje Hauck<sup>1)</sup> przy zastosowaniu ogólniejszej teorii do rzutów równoległych, oprócz wzoru (11\*\*), szereg innych wzorów. Pod pewnym względem wyniki przeprowadzonego w niniejszej rozprawie rozumowania są w pewnej sprzeczności z orzeczeniami wspomnianego autora. Z badań jego nie wynika, że współczynnik  $\rho$ , zachodzący we wzorze (11\*\*), posiada tylko jedną wartość. Nadto zachodzą tam wzory, zależne nie tylko od stosunków skróceń, lecz jeszcze od pewnych pomocniczych wielkości, nie zachodzących we wzorach naszych, które są niejako wyodrębnione z pod zależności od zagadnienia Poiklego. Wykazuje się, że te wielkości pomocnicze są to odcinki, wyznaczone przez tło  $\Pi_x$  na osiach  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ . Jest widoczne, że jeżeli wyrazi się te odcinki przez wielkości, przyjęte w naszej rozprawie, natenczas zniknie niezależność owych wzorów od ogólnego zagadnienia.

§ 12. Zastosowanie. Poprzednio przeprowadzone rozumowanie stosujemy do pewnego przypadku perspektywy kawaleryjskiej, najprostszego przykładu aksonometrii skośnej.

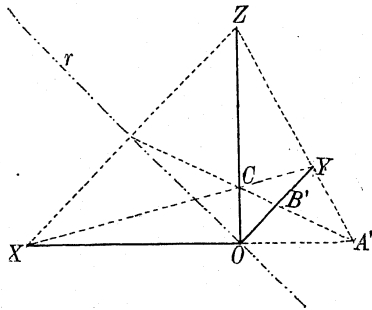


Fig. 6.

<sup>1)</sup> G. Hauck, Zeitschrift für Mathem. u. Phys. 21, p. 81, 1876.

Jako dane bierzemy (fig. 6) długości osi (w dowolnej jednostce):

$$OX = q_1 = 1, \quad OY = q_2 = \frac{1}{2}, \quad OZ = q_3 = 1,$$

tudzież kąty aksonometryczne:

$$\xi = 45^\circ, \quad \eta = 90^\circ, \quad \zeta = 225^\circ;$$

przyjmujemy zatem jako dane równocześnie liczby skróceń:

$$m_1 = 2, \quad m_2 = 1, \quad m_3 = 2.$$

Dla kierunku promieni  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  wynika z wzoru (17):

$$\begin{aligned} \cos \sigma_1 : \cos \sigma_2 : \cos \sigma_3 &= \frac{\sin 45^\circ}{1} : \frac{\sin 90^\circ}{\frac{1}{2}} : \frac{\sin 225^\circ}{1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} : 2 : \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Będzie:

$$\cos \sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} = 0,316; \quad \cos \sigma_2 = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0,894; \quad \cos \sigma_3 = \frac{1}{\sqrt{10}} = 0,316.$$

Do tego samego wyniku prowadzą wzory (20). W tym celu wyznaczamy:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{AO}{AX} = \frac{OY}{XZ} = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \\ \mu_2 &= \frac{CO}{CZ} = \frac{OY}{XZ} = \frac{1}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Punkt  $B$  leży w nieskończoności; wartość stosunku  $\mu_2 = \frac{B_\infty O}{B_\infty Y} = \frac{\infty}{\infty}$  otrzymamy z uwagi, że punkt  $B'$ , jako punkt przecięcia prostych  $OY$  i  $AC$ , jest do punktu  $B_\infty$  w stosunku harmonicznym; zatem:

$$\mu_2 = \frac{B_\infty O}{B_\infty Y} = \frac{B'O}{B'Y} = 1.$$

Z wartości na  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  otrzymujemy za pomocą wzoru (21) wartości na dostawy kątów  $\sigma_n$ .

Na podstawie wartości  $\cos \sigma_i$  wynika z (31):  $u^2 = 20$ , a następnie z równania (32), gdy bierzemy tylko pierwiastek ujemny, wynika:  $\rho = \frac{1}{2}$ . Zatem stosunki skróceń będą:  $\lambda_1 = \rho m_1 = 1$ ;  $\lambda_2 = \rho m_2 = \frac{1}{2}$ ;  $\lambda_3 = \rho m_3 = 1$ ; jednostka „ $a$ ” będzie (36):  $a = 1$ ; kąt, zawarty między płasz-

czyznami  $\Pi_a$  i  $\Pi_0$  będzie (11\*\*):  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2}$ ;  $\varphi = 36^\circ,5$ ; zatem kąt promieni rzutów do tła:  $90 - \varphi = 63^\circ,5$ .

Płaszczyzna  $\Pi_0$  rzutów prostokątnych:  
Stosunki skróceń:

$$\kappa_1 = \sin \sigma_1 = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0,149; \kappa_2 = \sin \sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,447; \kappa_3 = \sin \sigma_3 = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0,949.$$

Kąty, zawarte między osiami, na podstawie (15) lub (22):

$$\sin \xi_0 = \frac{\sqrt{5}}{3}; \sin \eta_0 = \frac{4\sqrt{5}}{9}; \sin \zeta_0 = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\xi_0 = 48^\circ 10'; \eta_0 = 83^\circ 40'; \zeta_0 = 228^\circ 10'.$$

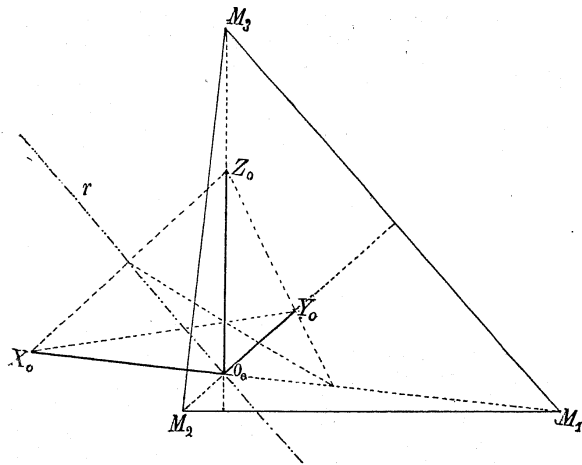


Fig. 7.

Kąty te otrzymujemy także za pomocą trójkąta śladów ( $M_1 M_2 M_3$ ), którego boki są w stosunku (23): 3 : 3 : 4.

Długości osi (37):  $p_1 = 0,949$ ;  $p_2 = 0,447$ ;  $p_3 = 0,949$ .

Stosunek prostopadłych (40):  $\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 = 1 : \frac{1}{\sqrt{2}} : 1$ .

A zatem oś powinowactwa  $r$  płaszczyzn  $\Pi_0$  i  $\Pi_a$ , przeprowadzona przez wierzchołek osi  $O$  względnie  $O_0$ , przecina środek odcinków  $\overline{XZ}$  względnie  $\overline{X_0Z_0}$ .

Uzupełnienie osi na płach  $\Pi_a$  i  $\Pi_0$  do sześcianu daje pojęcie o wzajemności odwzorzonego przedmiotu; porównanie rysunków wypada na korzyść rzutów prostokątnych.

Na koniec podaję liczby, odnoszące się do rysunków (1—5), zachodzących w rozprawie:

$$\xi = 121^\circ, \eta = 95^\circ, \zeta = 144^\circ.$$

$$q_1 = 42, q_2 = 36, q_3 = 38.$$

$$m_1 = 21, m_2 = 18, m_3 = 19.$$

$$\cos \sigma_1 = \tau \cdot \frac{\sin 59}{21} = 0,5413.$$

$$\cos \sigma_2 = \tau \cdot \frac{\sin 85}{18} = 0,7339.$$

$$\cos \sigma_3 = \tau \cdot \frac{\sin 36}{19} = 0,4103.$$

$$\tau^2 = 0,005686 = 1.$$

$$\cos^2 \sigma_1 = 0,2930; \cos^2 \sigma_2 = 0,5387; \cos^2 \sigma_3 = 0,1683.$$

$$\kappa_1^2 = 0,7070; \kappa_2^2 = 0,4613; \kappa_3^2 = 0,8317.$$

$$\kappa_1 = 0,841; \kappa_2 = 0,679; \kappa_3 = 0,912.$$

$$\xi_0 = 119^\circ 5'; \eta_0 = 106^\circ 50'; \zeta_0 = 134^\circ 5'.$$

$$u^2 = 293307; \varrho = 0,0494.$$

$$\lambda_1 = 1,038; \lambda_2 = 0,890; \lambda_3 = 0,939.$$

$$u = 20,2.$$

$$p_1 = 17,0; p_2 = 13,7; p_3 = 18,5^1)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = 0,867; \varphi = 40^\circ 55'.$$

$$\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 = 61 : 57,5 : 22,5.$$

Charlottenburg, w listopadzie 1906.

<sup>1)</sup> Trójkąt  $X_0 Y_0 Z_0$  jest narysowany w powiększonej mierze.