

W. SIERPIŃSKI.

O SUMOWANIU SZEREGU $\sum_{n=a}^{n=b} \tau(n) f(n)$, GDZIE $\tau(n)$ OZNACZA LICZBĘ ROZKŁADÓW LICZBY n NA SUMĘ KWADRATÓW DWÓCH LICZB CAŁKOWITYCH.¹⁾

(SUR LA SOMMATION DE LA SÉRIE $\sum_{n=a}^{n=b} \tau(n) f(n)$, ON $\tau(n)$ SIGNIFIE LE NOMBRE DE COMPOSITIONS DU NOMBRE n EN UNE SOMME DE DEUX CARRÉS DES NOMBRES ENTIERS).

W S T Ę P.

Przedmiotem badań naszych będzie obliczanie sumy podwójnej

$$S = \sum \sum f(m^2 + n^2),$$

rozciągniętej na obszar wartości całkowitych zmiennych m i n , wyznaczony przez nierówności

$$a < m^2 + n^2 \leq b,$$

co do funkcji $f(n)$ zakładamy, iż jest ona ciągła i posiada pochodną w przedziale (a, b) .

Wprowadzając funkcję liczbową $\tau(k)$, przedstawiającą liczbę rozkładów liczby k na sumę kwadratów dwóch liczb całkowitych, z łatwością przekształcimy daną sumę podwójną S na zwykłą

$$(1) \quad S = \sum \sum f(m^2 + n^2) = \sum_{k=a}^{k=b} \tau(k) f(k).$$

¹⁾ Rozprawa doktorska.
Prace mat.-fizycz., t. XVIII.

W celu obliczenia wartości przybliżonej sumy S , wychodzimy ze wzoru Woronoja:

$$\sum_{n>a}^{n\leq b} \tau(n) f(n) = \int_a^b f(u) \vartheta(u) du \quad \dots(2)$$

$$+ \sum_{\lambda=0}^{m-1} (-1)^\lambda \left[\varrho_\lambda(b) f^{(\lambda)}(b) - \varrho_\lambda(a) f^{(\lambda)}(a) \right] + (-1)^m \int_a^b \varrho_{m-1}(u) f^{(m)}(u) du.$$

We wzorze tym $\vartheta(u)$ jest funkcją dowolnie obraną, byleby ciągłą w przedziale (a, b) , funkcje zaś $\varrho_k(x)$, $k=0, 1, 2, \dots$ określone są przez równości

$$\varrho_k(x) = \sum_{n>0}^{n\leq x} \tau(n) \frac{(x-n)^k}{k!} \quad \dots(3)$$

$$- \left[\int_0^x \vartheta(u) \frac{(x-u)^k}{k!} du + A_0 \frac{x^k}{k!} + A_1 \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + \dots + A_k \right],$$

gdzie $A_0, A_1, \dots$ są współczynniki, których obiór pozostaje dowolnym.

Wyznaczenie funkcji $\vartheta(u)$ oraz współczynników $A_0, A_1, \dots$ w ten sposób, iżby rząd funkcji $\varrho_k(x)$, $k=0, 1, 2, \dots$ był możliwie niski, będzie najbliższym naszym zadaniem.

Ponieważ, na mocy ogólnego wzoru sumacyjnego (2) oraz równości (3) kwestią zasadniczą jest obliczenie sum postaci

$$\varphi_k(x) = \sum_{n>0}^{n\leq x} \tau(n) \frac{(x-n)^k}{k!}, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

więc przedewszystkiem zajmujemy się wyznaczeniem przybliżonego wyrażenia analitycznego na funkcję liczbową $\varphi_k(x)$.

Przedstawimy funkcję $\varphi_k(x)$ w postaci sumy podwójnej

$$\varphi_k(x) = \sum \sum \frac{(x-\mu^2-\nu^2)^k}{k!}, \quad 0 < \mu^2 + \nu^2 \leq x,$$

wykonywamy przy pomocy wzoru Eulera-Maclaurina sumowanie najprzód względem zmiennej μ , potem zaś względem zmiennej ν . W ten sposób dochodzimy do następującego ważnego wniosku: funkcja liczbowa $\varphi_k(x)$

może być przedstawiona przybliżenie przez funkcję całkowitą $\pi \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{x^k}{k!}$

z błędem $\varrho_k(x)$, którego rząd nie przewyższa rzędu wielkości $x^{-\frac{k+1}{2}}$, $k=0, 1, 2, \dots$

Na tej podstawie znajdujemy w ogólnym wzorze sumacyjnym (2):

$$\vartheta(u) = \pi, \quad A_0 = -1 \text{ oraz } A_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

W ten sposób otrzymujemy wzór:

$$\sum_{n>a}^{n\leq b} \tau(n) f(n) = \pi \int_a^b f(u) du \quad \dots(4)$$

$$+ \sum_{\lambda=0}^{m-1} (-1)^\lambda \left[\varrho_\lambda(b) f^{(\lambda)}(b) - \varrho_\lambda(a) f^{(\lambda)}(a) \right] + (-1)^m \int_a^b \varrho_{m-1}(u) f^{(m)}(u) du,$$

który następnie stosujemy i badamy przy rozmaitych założeniach o funkcji $f(n)$.

Znalezioną wartością przybliżoną na funkcję $\varphi_k(x)$ posługujemy się dla podania nader prostego dowodu pewnego twierdzenia o zależności między liczbą rozkładów liczby całkowitej na sumę czterech kwadratów oraz sumą dzielników.

W celu bardziej szczegółowego zbadania własności funkcji liczbowej $\tau(n)$, tudzież sum postaci $\sum \tau(n) f(n)$, posługujemy się znanym twierdzeniem Jacobi'ego, według którego liczba rozkładów każdej liczby całkowitej dodatniej na sumę kwadratów dwóch liczb całkowitych równa się czterokrotnemu nadmiarowi liczby tych jej dzielników, które mają postać $4k+1$, nad liczbę jej dzielników postaci $4k+3$. Opierając się na tem twierdzeniu, ułożyliśmy tablicę wartości funkcji $\tau(n)$ dla $n \leq 1000$, którą podajemy w końcu pracy. Przy pomocy twierdzenia Jacobi'ego wyprowadzamy również pewien wzór ogólny na przekształcenie sumy (1), będący uogólnieniem znanej tożsamości Liouville'a:

$$E\sqrt{x} + E\sqrt{x-1}^2 + E\sqrt{x-2}^2 + \dots = E\frac{x}{1} - E\frac{x}{3} + E\frac{x}{5} - \dots$$

Wzór ten stosujemy do obliczenia sumy $\sum_{n>0}^{n\leq x} \frac{\tau(n)}{n}$ i znajdujemy dla niej

wyrażenie przybliżone $\pi \lg x + K$, prawdziwe do rzędu $\frac{1}{\sqrt{x}}$, gdzie K oznacza pewną stałą. Stałą tę wyrażamy przez szereg nieskończony, a również

przedstawiamy ją pod postacią całki oznaczonej. Posługując się wyprowadzonymi wzorami, obliczamy stałą K z dokładnością do 10-go znaku dziesiętnego.

Wprowadzamy dalej funkcję analityczną $F(s)$, określoną przez szereg nieskończony

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} \text{ dla } R(s) > 1.$$

Rozszerzamy następnie analityczne określenie funkcji $F(s)$ na całą płaszczyznę zmiennej zespolonej i wykazujemy, iż funkcja ta posiada jeden tylko punkt osobliwy $s=1$, biegun pierwszego rzędu, którego pozostałość równa się liczbie π .

Dowodzimy następnie ważnej własności funkcji $F(s)$, polegającej na tem, iż iloczyn

$$\frac{\Gamma(s) F(s)}{\pi^s}$$

jest funkcją, której wartość się nie zmienia przy zamianie s na $1-s$.

Zwracamy się następnie do badania przy pomocy wyprowadzonych wzorów sumacyjnych pewnych własności funkcji $\tau(n)$ dla liczb n , zawartych w jakimkolwiek postępie arytmetycznym oraz dla liczb kwadratowych. Co do tych ostatnich, dowodzimy twierdzenia: „Średnia liczba rozkładów liczb kwadratowych na sumę dwóch kwadratów wzrasta wraz z rozkładaną liczbą, w stosunku prostym do jej logarytmu”. Opierając się na tem twierdzeniu, znajdujemy wartość średnią kwadratu funkcji $\tau(n)$, skąd wreszcie wyprowadzamy pewne ciekawe wnioski o charakterze biegu zajmującej nas funkcji liczbowej.

ROZDZIAŁ I.

Punktem wyjścia dla rozważań naszych w tym rozdziale będzie pewien wzór ogólny na przekształcenie sumy $\sum_{n \leq b} \tau(n) f(n)$, gdzie $\tau(n)$ oznacza jakąkolwiek funkcję liczbową, $f(n)$ zaś—dowolną funkcję ciągłą i mającą

pochodne w przedziale (a, b) . Wzór ten został podany przez Voronoja¹⁾ i ma postać:

$$\sum_{n > a}^{\infty} \tau(n) f(n) = \int_a^b f(u) \vartheta(u) du + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k \left[\vartheta_k(b) f^{(k)}(b) - \vartheta_k(a) f^{(k)}(a) \right] + (-1)^m \int_a^b \vartheta_{m-1}(u) f^{(m)}(u) du, \quad \dots(1)$$

gdzie

$$\vartheta_k(x) = \sum_{n > 0}^{\infty} \tau(n) \frac{(x-n)^k}{k!} - \left[\int_0^x \vartheta(u) \frac{(x-u)^k}{k!} du + A \frac{x^k}{k!} + A_1 \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + \dots + A_k \right] \quad k=0, 1, 2, \dots$$

(Patrz Wstęp).

Pojmując dalej przez $\tau(n)$ liczbę rozkładów liczby n na sumę kwadratów dwóch liczb całkowitych, postaramy się obrać funkcję dowolną $\vartheta(u)$, oraz dowolne współczynniki stałe A_k w sposób dla nas najdogodniejszy.

W tym celu zajmiemy się przedewszystkiem obliczeniem funkcji sumacyjnych

$$\varphi_k(x) = \sum_{n > 0}^{\infty} \tau(n) \frac{(x-n)^k}{k!}.$$

Posłużmy nam do tego oczywista tożsamość

$$\sum_{n \geq 0}^{\infty} \tau(n) f(n) = \sum_{\nu \geq -\sqrt{x}}^{\nu \leq \sqrt{x}} \sum_{\mu \geq -\sqrt{x-\nu^2}}^{\mu \leq \sqrt{x-\nu^2}} f(\mu^2 + \nu^2);$$

¹⁾ Wzór ten był po raz pierwszy ogłoszony drukiem w książeczce „Godiecznyj Akt Warsz. Uniw. 30 Awgusta 1904 g.” (patrz „Otzyw o konkursom soczinienii na tjemu: O summirowanii rjada $\sum \tau(n) f(n) \dots$ pod dewizom $\leq \text{Summa} \geq$ “). Wzór podany jest tam bez dowodu. Z dowodzeniem znajduje się on w XXI-ym tomie „Annales de l'École Normale”, w zeszytach listopadowym z 1904-go roku: Voronoï „Sur une fonction transcendante et ses applications à la sommation de quelques séries”. str. 462.

kładąc

$$f(u) = \frac{(x-u)^k}{k!},$$

znajdujemy:

$$\varphi_k(x) = -\frac{x^k}{k!} + \sum_{\substack{\nu \leq \sqrt{x} \\ \nu > -\sqrt{x}}} \sum_{\substack{\mu \leq \sqrt{x-\nu^2} \\ \mu > -\sqrt{x-\nu^2}}} \frac{(x-\mu^2-\nu^2)^k}{k!}.$$

Oznaczmy przez skrócenie $x-\nu^2=s$ i zajmijmy się obliczeniem sumy

$$\sum_{\substack{\mu \leq \sqrt{s} \\ \mu > -\sqrt{s}}} \frac{(s-\mu^2)^k}{k!} = \sum_{\substack{\mu \leq \sqrt{s} \\ \mu > -\sqrt{s}}} \frac{(s-\mu^2)^k}{k!},$$

używając w tym celu wzoru Eulera-Maclaurina, uogólnionego przez Sonina.¹⁾ Wzór ten otrzymać można z łatwością z ogólnego wzoru Worońoja, kładąc w nim $\tau(n)=1$ i wyznaczając $\vartheta(u)$ oraz A ; tak, iżby $\varrho_k(x)$ było funkcją peryodyczną, o peryodzie równym jedności. Warunki te doprowadzają nas do założenia $\vartheta(u)=1$; dla wyznaczenia zaś współczynników A , otrzymujemy wzór zwrotny:

$$\frac{1}{(\lambda+1)!} + \frac{A_0}{\lambda!} + \frac{A_1}{(\lambda-1)!} + \dots + \frac{A_{\lambda-1}}{1!} = 0; \quad \lambda=1, 2, 3, \dots \quad (*)$$

Można wykazać, iż wszystkie $A_{2\lambda}$ są równe zeru dla $\lambda > 0$, zaś $A_0 = -\frac{1}{2}$. Zamiast współczynników A_λ wprowadzane są zwykle liczby Bernoulliego na mocy związków

$$A_{2\lambda-1} = \frac{(-1)^\lambda B_\lambda}{(2\lambda)!}; \quad (\lambda=1, 2, \dots)$$

Funkcje $\varrho_k(x)$, odpowiadające wyżej poczynionym założeniom, będziemy oznaczali nadal przez $r_k(x)$ i wzór Sonina pisać będziemy w postaci:

$$(2) \dots \sum_{\substack{n \leq b \\ n > a}} f(n) = \int_a^b f(u) du + \sum_{\lambda=0}^{m-1} (-1)^\lambda \left[r_\lambda(b) f^{(\lambda)}(b) - r_\lambda(a) f^{(\lambda)}(a) \right] + (-1)^m \int_a^b r_{m-1}(u) f^{(m)}(u) du,$$

¹⁾ Sonin: „O pewnej całej oznaczonej, zawierającej funkcję liczbową $[x]^a$ (po rosyjsku). (Warsz. Wiadomości Uniwersyteckie za rok 1885, Nr. 3).

gdzie

$$r_k(x) = - \left[\frac{(x-Ex)^{k+1}}{(k+1)!} + \sum_{\lambda=0}^k A_\lambda \frac{(x-Ex)^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!} \right] \quad (k=0, 1, \dots) \quad (2a)$$

a współczynniki A mogą być wyznaczone ze wzoru (*)

Dla obliczenia sumy

$$\sum_{\substack{\mu \leq \sqrt{s} \\ \mu > -\sqrt{s}}} \frac{(s-\mu^2)^k}{k!}$$

winniśmy we wzorze (2) założyć:

$$f(u) = \frac{(s-u^2)^k}{k!},$$

oraz przyjąć:

$$a = -\sqrt{s}, \quad b = \sqrt{s}.$$

Mamy:

$$\int_{-\sqrt{s}}^{\sqrt{s}} \frac{(s-u^2)^k}{k!} du = \frac{2^{2k+1} k! s^k \sqrt{s}}{(2k+1)!},$$

$$f^{(\lambda)}(\sqrt{s}) = f^{(\lambda)}(-\sqrt{s}) = 0, \quad \text{dla } \lambda = 0, 1, \dots, k-1,$$

oraz

$$f^{(k)}(\sqrt{s}) = (-1)^k 2^k s^k \sqrt{s}, \quad f^{(k)}(-\sqrt{s}) = 2^k s^k \sqrt{s},$$

skąd na mocy wzoru (2), kładąc w nim $m=k+1$:

$$\sum_{\substack{\mu \leq \sqrt{s} \\ \mu > -\sqrt{s}}} \frac{(s-\mu^2)^k}{k!} = \frac{2^{2k+1} k! s^k \sqrt{s}}{(2k+1)!} + 2^k s^k \sqrt{s} \left[r_k(\sqrt{s}) - (-1)^k r_k(-\sqrt{s}) \right]$$

... (3)

$$+ \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_{-\sqrt{s}}^{\sqrt{s}} r_k(u) \frac{d^{k+1}(s-u^2)^k}{du^{k+1}} du$$

W całce dopełniającą podstawimy $u = \sqrt{z}t$, co da nam

$$\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} r_k(u) \frac{d^{k+1}(z-u^2)^k}{du^{k+1}} du = \sqrt{z}^k \int_{-1}^1 r_k(\sqrt{z}t) \frac{d^{k+1}(1-t^2)^k}{dt^{k+1}} dt.$$

Z określenia funkcji peryodycznej $r_k(u)$ wynika, iż jest ona funkcją ograniczoną. Oznaczmy przez $A(k)$ dokładną górną granicę wartości bezwzględnych funkcji $r_k(u)$; przez $B(k)$ — największą wartość bezwzględną funkcji ciągłej $\frac{d^{k+1}(1-t^2)^k}{dt^{k+1}}$ w przedziale $(-1, 1)$; $B(k)$ będzie oczywiście liczbą oznaczoną, skończoną przy skończonym k .

W całce

$$\int_{-1}^1 r_k(\sqrt{z}t) \frac{d^{k+1}(1-t^2)^k}{dt^{k+1}} dt$$

funkcja podcałkowa nie przewyższa bezwzględnie w granicach całkowania liczby $A(k) \cdot B(k)$, niezależnej od z i t , skończonej przy skończonym k ; stosując twierdzenie o wartości średniej, powiemy, iż sama całka, co do swej wartości bezwzględnej, nie przewyższa $2A(k)B(k)$.

Oznaczając

$$2A(k) \left[2^k + \frac{B(k)}{k!} \right] = M(k),$$

ostatecznie ze wzoru (3) otrzymamy wzór:

$$\sum_{\substack{\mu \leq \sqrt{z} \\ \mu > -\sqrt{z}}} \frac{(z-\mu^2)^k}{k!} = \frac{2^{2k+1} \cdot k! \cdot z^k \sqrt{z}}{(2k+1)!} + \xi \cdot M(k) \cdot \sqrt{z}^k. \quad \dots (3a)$$

gdzie $|\xi| < 1$, oraz $M(k)$ jest funkcją jedynie liczby całkowitej k , skończoną przy skończonym k .

We wzorze (3a) winniśmy założyć $z = x - \nu^2$ i otrzymane w ten sposób wyrażenie sumować względem ν w granicach $-\sqrt{x} < \nu \leq \sqrt{x}$.¹⁾

¹⁾ Opuściliśmy tu dla wygody wyraz, który w razie całkowitego $\sqrt{x}$, odpowiadałby wartości $\nu = -\sqrt{x}$, co nam wolno, gdyż wyraz ten jest zerem dla $k > 0$ oraz jednością dla $k=0$, a więc na rezultat przybliżony nie wpływa.

Dwa składniki prawej strony równości (3a) dadzą nam dwie różne sumy. Suma, odpowiadająca drugiemu składnikowi, jest

$$M(k) \sum_{\substack{\nu \leq \sqrt{x} \\ \nu > -\sqrt{x}}} \xi \cdot \sqrt{x} \cdot \nu^{2k},$$

gdzie ξ , jako zależne od ν , nie może być wyprowadzone przed znak sumy. Zadawając się przybliżonym rezultatem i biorąc pod uwagę, iż

$$|\xi| < 1; \quad \sqrt{x - \nu^2} \leq \sqrt{x},$$

oraz iż liczba składników w sumie względem ν jest nie większa, niż $2\sqrt{x}$, możemy napisać:

$$\sum_{\substack{\nu \leq \sqrt{x} \\ \nu > -\sqrt{x}}} \xi \cdot \sqrt{x - \nu^2} = 2\xi' \sqrt{x}^{k+1},$$

gdzie $|\xi'| < 1$ przy wszelkiem x i k .

Suma, odpowiadająca pierwszemu składnikowi prawej strony wzoru (3a), ma postać:

$$2^{2k+1} \cdot k! \sum_{\substack{\nu \leq \sqrt{x} \\ \nu > -\sqrt{x}}} \frac{\sqrt{x - \nu^2}^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Do obliczenia jej użyjemy znów wzoru (2), kładąc w nim

$$f(u) = \frac{\sqrt{x - u^2}^{2k+1}}{(2k+1)!}; \quad a = -\sqrt{x}; \quad b = \sqrt{x}; \quad m = k+1.$$

Zważywszy, iż

$$\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{\sqrt{x - u^2}^{2k+1}}{(2k+1)!} du = \frac{\pi x^{k+1}}{2^{2k+1} \cdot k! (k+1)!}.$$

$$f^{(\lambda)}(\sqrt{x}) = f^{(\lambda)}(-\sqrt{x}) = 0 \quad \text{dla } \lambda = 0, 1, 2, \dots, k,$$

otrzymamy:

$$\sum_{\substack{v \leq \sqrt{x} \\ v > -\sqrt{x}}} \frac{\sqrt{x-v}^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\pi x^{k+1}}{2^{2k+1} \cdot k! (k+1)!} + \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} r_k(u) \frac{d^{k+1}(x-u^2)^{k+\frac{1}{2}}}{du^{k+1}} du.$$

Przez podstawienie $u = \sqrt{x}t$, nadamy całce dopełniającą postać:

$$\sqrt{x}^{k+1} \int_{-1}^1 r_k(\sqrt{x}t) \frac{d^{k+1}(1-t^2)^{k+\frac{1}{2}}}{dt^{k+1}} dt.$$

Zważywszy dalej, iż $|r_k(u)| \leq A(k)$, i oznaczając

$$\int_{-1}^1 \left| \frac{d^{k+1}(1-t^2)^{k+\frac{1}{2}}}{dt^{k+1}} \right| dt = C(k)$$

(a łatwo się przekonać, iż jest to liczba skończona), przez zastosowanie twierdzenia o wartości średniej, otrzymamy:

$$\int_{-1}^1 r_k(\sqrt{x}t) \frac{d^{k+1}(1-t^2)^{k+\frac{1}{2}}}{dt^{k+1}} dt = \eta \cdot A(k) \cdot C(k),$$

gdzie $|\eta| < 1$.

Oznaczając

$$\frac{A(k) \cdot C(k)}{(2k+1)!} = M_1(k),$$

ostatecznie otrzymamy:

$$\sum_{\substack{v \leq \sqrt{x} \\ v > -\sqrt{x}}} \frac{\sqrt{x-v}^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\pi x^{k+1}}{2^{2k+1} \cdot k! (k+1)!} + \eta' \cdot M_1(k) \cdot \sqrt{x}^{k+1}. \quad \dots (4)$$

Dochodzimy więc do równości:

$$\varphi_k(x) = \frac{\pi x^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{x^k}{k!} + \vartheta \cdot K(k) \cdot \sqrt{x}^{k+1},$$

(10)

gdzie

$$K(k) = 2 M(k) + 2^{2k+1} \cdot k! M_1(k),$$

oraz $|\vartheta| < 1$.

Oznaczając, wedle przyjętego zwyczaju, przez $O(x^i)$ funkcję, której stosunek do x^i dla x , większych od pewnej stałej granicy, pozostaje zawsze bezwzględnie mniejszym od pewnej liczby stałej, możemy jeszcze napisać:

$$\varphi_k(x) = \frac{\pi x^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{x^k}{k!} + O(x^{\frac{k}{2} + \frac{1}{2}}), \quad \dots (5)$$

co wysławiamy w sposób następujący:

Funkcja całkowita

$$\frac{\pi x^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{x^k}{k!}$$

przedstawia funkcję liczbową $\varphi_k(x)$ z błędem, którego rząd nie przewyższa rzędu funkcji $x^{\frac{k+1}{2}}$.

Wobec takiej własności funkcji liczbowej $\varphi_k(x)$, najdogodniej będzie przyjąć we wzorze W o r o n o j a

$$\vartheta(u) = \pi, \quad A_0 = -1, \quad \text{zaś } A_i = 0 \text{ dla } i > 0.$$

W ten sposób otrzymujemy wzór:

$$\sum_{\substack{n \leq b \\ n > a}} \tau(n) f(n) = \pi \int_a^b f(u) du \quad \dots (6)$$

$$+ \sum_{\lambda=0}^{m-1} (-1)^{(\lambda)} \left[\varrho_{\lambda}(b) f^{(\lambda)}(b) - \varrho_{\lambda}(a) f^{(\lambda)}(a) \right] + (-1)^m \int_a^b \varrho_{m-1}(u) f^{(m)}(u) du,$$

przyczem będzie $\varrho_k(x) = O(x^{\frac{k+1}{2}})$

($k=0, 1, 2, \dots$)

Jednym z najprostszych wniosków z otrzymanego wzoru jest nader ciekawa równość przybliżona

$$\sum_{\substack{n \leq b \\ n > a}} \tau(n) f(n) \approx \pi \int_a^b f(u) du.$$

Rząd błędu tej przybliżonej równości może być w każdym danym przypadku określony na podstawie wzoru (6) i podanej wyżej własności funkcji $\varrho_k(x)$.

(11)

W obliczaniu wartości przybliżonej funkcji liczebnej $\varphi_k(x)$ przy $k > 0$, można by było pójść też inną drogą, wskazaną przez *Woronoj*a na trzecim międzynarodowym zjeździe matematyków w Heidelbergu (w sierpniu 1904 roku)¹⁾.

Należałoby wyjść w tym celu z wzoru

$$\sum_{n>a}^{\infty} \tau(n) f(n) = \pi \int_a^b f(x) dx + \frac{1}{2} \tau(b) f(b) - \frac{1}{2} \tau(a) f(a) + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \int_a^b f(x) \eta(\pi^2 nx) dx, \quad (2)$$

gdzie $\eta(x)$ jest funkcją cylindryczną, określoną przez szereg nieskończony

$$\eta(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} \frac{x^\lambda}{\lambda!}.$$

stosując znane rozkłady funkcji cylindrycznych na szeregi asymptotyczne.²⁾

Możnaby w ten sposób uoowodnić, iż funkcja

$$\frac{\pi x^{k+1}}{(k+1)!}$$

przedstawia funkcję liczbową

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tau(n) \frac{(x-n)^k}{k!} \quad (k > 0)$$

z błędem, którego rząd nie przewyższa rzędu funkcji $x^{\frac{k}{2} + \frac{1}{4}}$; rezultat więc byłby nieco dokładniejszy od otrzymanego przez nas, lubo dowodzenie nie byłoby już tak elementarne.

¹⁾ Patrz: Verhandlungen des III Internationalen Mathematiker-Kongresses, Voronoi: „Sur le développement, à l'aide des fonctions cylindriques, des sommes doubles $\sum f(p^2 m^2 + 2qmn + rn^2)$, où $pm^2 + 2qmn + rn^2$ est une forme positive à coefficients entiers.

²⁾ Patrz tamże, strona 245, wzór (8) (przy $\Delta = 1$)

³⁾ Patrz: *Stieltjes*, Recherches sur quelques séries semi-convergentes (Annales de l'École Normale, 1886).

Przy $k=0$ na podstawie wzoru (5) otrzymamy:

$$\sum_{n>0}^{\infty} \tau(n) = \pi x + O(\sqrt{x}),$$

do czego doszedł był już *Dirichlet* drogą geometryczną.

Chcąc obliczyć dokładniej sumę $\sum_{n>0}^{\infty} \tau(n)$, należałoby użyć innej metody, również przez *Woronoj*a podanej.¹⁾ Okazałoby się, iż błąd równości przybliżonej

$$\sum_{n>0}^{\infty} \tau(n) \neq \pi x$$

jest rzędu nie wyższego od rzędu funkcji $\sqrt{x}$.

W rozdziale niniejszym prowadziliśmy umyślnie dosyć drobniawo wszystkie rozważania, odnoszące się do obliczenia rzędu funkcji $\varphi_k(x)$; dalej, o ile zajdzie potrzeba wyznaczenia rzędu jakiej funkcji, w szczególności wdawać się nie będziemy.

ROZDZIAŁ II.

Wyprowadzonych w rozdziale poprzedzającym wzorów na funkcje $\varphi_k(x)$ użyjemy obecnie do obliczenia pomocniczych funkcji sumacyjnych, służących do przybliżonego obliczania sumy wielokrotnej

$$(1) \dots S = \sum f(m^2 + n^2 + p^2 + q^2),$$

dla obszaru wartości całkowitych zmiennych m, n, p i q , wyznaczonego przez nierówności

$$a < m^2 + n^2 + p^2 + q^2 \leq b.$$

¹⁾ Zob. moją pracę: „O pewnem zagadnieniu z rachunku funkcji asymptotycznych“ (Prace mat.-fizycz., t. XVII).

Sumę wielokrotną S z łatwością przekształcimy na podwójną

$$(2) \dots S = \sum \sum \tau(\mu) \tau(\nu) f(\mu + \nu),$$

gdzie obszar zmienności liczb całkowitych μ i ν jest wyznaczony przez nierówności

$$a < \mu + \nu \leq b,$$

lub też na sumę zwykłą

$$(3) \dots S = \sum_{n>a}^{\mu \leq b} \tau_4(n) f(n),$$

jeśli wprowadzimy funkcję $\tau_4(n)$, wyrażającą liczbę rozkładów liczby n na sumę kwadratów czterech liczb całkowitych.

Kładąc $f(n) = \frac{(x-n)^k}{k!}$, na mocy (3) i (2) znajdziemy z łatwością

$$\varphi_{k4}(x) = \sum_{n>0}^{\mu \leq x} \tau_4(n) \frac{(x-n)^k}{k!} = \sum_{\mu>0}^{\mu \leq x} \tau(\mu) \varphi_k(x-\mu),$$

a ponieważ na mocy wzoru (5) rozdz. I z łatwością wnioskujemy:

$$\varphi_k(x-\mu) = \pi \frac{(x-\mu)^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{(x-\mu)^k}{k!} + O\left(x^{\frac{k+1}{2}}\right),$$

$$\sum_{\mu>0}^{\mu \leq x} \tau(\mu) = O(x),$$

więc otrzymamy:

$$\varphi_{k4}(x) = \pi \varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x) + O\left(x^{\frac{k+3}{2}}\right),$$

czyli, stosując znowu wzór (5), I:

$$\varphi_{k4}(x) = \frac{\pi^2 x^{k+2}}{(k+2)!} - \frac{2\pi x^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{x^k}{k!} + \varrho_{k4}(x),$$

przyczem rząd błędów $\varrho_{k4}(x)$ nie przewyższa rzędu funkcji $x^{\frac{k+3}{2}}$, $k=0, 1, \dots$

A więc w ogólnym wzorze *Woronoja* (1), I powinniśmy dla naszej funkcji $\tau_4(n)$ przyjąć

$$\mathfrak{D}(u) = \pi^2 u - 2\pi, \quad A_0 = 1, \quad A_i = 0, \quad i=1, 2, \dots$$

Kładąc w wyprowadzonym na $\varphi_{k4}(x)$ wzorze $k=0$, otrzymamy na

$$\varphi_{04}(x) = \sum_{n>0}^{\mu \leq x} \tau_4(n)$$

wartość przybliżoną

$$\pi^2 \frac{x^2}{2}$$

z błędem, którego rząd nie przewyższa rzędu funkcji $x/\sqrt{x}$. Otrzymany rezultat pozwoli nam obliczyć wartość asymptotyczną wyrażenia

$$\frac{\tau_4(n+1) + \tau_4(n+2) + \dots + \tau_4(n+m)}{m},$$

które, według *Gausa*¹⁾, przedstawia wartość średnią funkcji liczbowej $\tau_4(n)$ w miejscu n , jeżeli przypuścimy, iż n, m oraz stosunek $\frac{n}{m}$ są liczby bardzo wielkie. Mianowicie będziemy mieli:

$$M \tau_4(n) \neq \pi^2 n$$

i napisaną równość asymptotyczną należy rozumieć w ten sposób, iż stosunek obu jej stron dąży do jedności.

Oznaczmy teraz przez $\sigma(n)$ sumę wszystkich dzielników liczby n (włączając 1 i n), zaś przez $\sigma'(n)$ — sumę wszystkich tych dzielników liczby n , które nie są wielokrotnościami czterech.

Będziemy mieli:

$$\sum_{n>0}^{\mu \leq x} \sigma(n) = \sum_{n>0}^{\mu \leq x} n E \frac{x}{n} = \frac{1}{2} \sum_{n>0}^{\mu \leq x} \left(E \frac{x}{n}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n>0}^{\mu \leq x} E \frac{x}{n} = \frac{\pi^2 x^2}{12} + O(x \lg x),$$

$$\sum_{n>0}^{\mu \leq x} \sigma'(n) = \sum_{n>0}^{\mu \leq x} n E \frac{n}{x} - 4 \sum_{n>0}^{\mu \leq \frac{x}{4}} n E \frac{x}{4n} = \sum_{n>0}^{\mu \leq x} \sigma(n) - 4 \sum_{n>0}^{\mu \leq \frac{x}{4}} \sigma(n) = \frac{\pi^2 x^2}{16} + O(x \lg x),$$

¹⁾ Disquisitiones Arithm. art. 301–303.

skąd znajdziemy wyrażenie asymptotyczne na wartość średnią funkcji $\sigma'(n)$:

$$M\sigma'(n) = \frac{1}{8} \pi^2 n.$$

Zestawiając otrzymany rezultat z wyrażeniem na $M\tau_4(n)$, wyżej wyprowadzonym, dochodzimy do równości asymptotycznej

$$M\tau_4(n) = M8\sigma'(n),$$

którą tak możemy wysłowić: „Liczba rozkładów liczby całkowitej na sumę czterech kwadratów równa się średnio ośmiokrotnej sumie tych jej dzielników, które nie są podzielne przez cztery. Zaznaczyć wypada, iż w samej rzeczy funkcje $\tau_4(n)$ i $8\sigma'(n)$ są sobie równe nie tylko średnio, ale dokładnie, dla wszelkiej wartości na n , co można wyprowadzić jako wniosek z pewnej tożsamości, otrzymanej przez J a c o b i e g o z teorii funkcji eliptycznych.¹⁾

Podobnież można badać funkcję liczbową $\tau_8(n)$, przedstawiającą liczbę rozkładów liczby n na sumę kwadratów ośmiu liczb całkowitych. Znaleźlibyśmy równość asymptotyczną

$$\sum_{n>0}^{\infty} \tau_8(n) = 16 \sum_{n>0}^{\infty} n^3 E \frac{x}{n} - 32 \sum_{n>0}^{\infty} n^3 E \frac{x}{2n} + 256 \sum_{n>0}^{\infty} n^3 E \frac{x}{4n},$$

którą tak wysłowić można:

„Średnio wartość funkcji $\tau_8(n)$ równa się pomnożonej przez 16 różnicy bezwzględnej pomiędzy sumą sześciątów wszystkich nieparzystych a sumą sześciątów wszystkich dzielników liczby n “. I tu także zaznaczyć wypada, iż twierdzenie to jest prawdziwe nie tylko średnio, ale i dokładnie, co zostało dowiedzione (w przypadku nieparzystego n) już przez E i s e n s t e i n a.

ROZDZIAŁ III.

Wyprowadzimy teraz pewien nowy wzór ogólny na przekształcenie sumy

$$S = \sum_{n>a}^{\infty} \tau(n) f(n),$$

¹⁾ Dowód arytmetyczny odnośnego twierdzenia w Journ. f. reine u. ang. Math. 12, p. 167. Zob. też Lejeune-Darichlet, Werke 2, p. 201 (Sur l'équation $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 4m$).

opierając się na twierdzeniu J a c o b i e g o, według którego liczba rozkładów jakiejkolwiek liczby całkowitej dodatniej na sumę kwadratów dwóch liczb całkowitych równa się czterokrotnemu nadmiarowi liczby tych jej dzielników, które mają formę $4k+1$, nad liczbą jej dzielników formy $4k+3$.¹⁾

Jeżeli pojmować będziemy przez $j(k)$ liczbę $(-1)^{\frac{k-1}{2}}$ w razie nieparzystego k , oraz liczbę 0 w razie parzystego lub nie całkowitego k , to twierdzenie J a c o b i e g o będziemy mogli wyrazić w postaci:

$$\tau(n) = 4 \sum_{\mu=1}^{\infty} j\left(\frac{n}{\mu}\right), \quad \dots (1)$$

skąd na sumę S znajdziemy wzór

$$S = 4 \sum \sum j\left(\frac{n}{\mu}\right) f(n),$$

gdzie obszar zmiennych całkowitych n i μ jest wyznaczony przez nierówności:

$$a < n \leq b, \quad \mu > 0.$$

Zważywszy, iż $j\left(\frac{n}{\mu}\right)$ jest różne od zera jedynie w przypadku, kiedy

$\frac{n}{\mu}$ jest liczbą całkowitą nieparzystą $2\nu+1$, oraz że w tym razie $j(2\nu+1) = (-1)^\nu$, i przechodząc następnie od zmiennej sumowania n do zmiennej ν , znajdziemy:

$$S = 4 \sum \sum (-1)^\nu f([2\nu+1]\mu),$$

gdzie obszar sumowania względem zmiennych całkowitych μ i ν jest wyznaczony przez nierówności

$$a < (2\nu+1)\mu \leq b, \quad \mu > 0,$$

które, na mocy warunków $b > a \geq 0$, mogą być zastąpione przez nierówności

$$\frac{a}{2\nu+1} < \mu \leq \frac{b}{2\nu+1}.$$

¹⁾ Crelle's Journal Bd. 12, p. 167.

Uskuteczniając sumowanie względem μ , znajdziemy:

$$S = 4 \sum_{\nu} (-1)^{\nu} \sum_{\substack{\mu \leq \frac{b}{2\nu+1} \\ \mu > \frac{a}{2\nu+1}}} f([2\nu+1]\mu).$$

Aby suma wewnętrzna (względem μ) była różna od zera, ν powinno być konieczne ≥ 0 oraz $\leq \frac{b-1}{2}$, a więc, oznaczając przez A liczbę dowolną $\geq \frac{b-1}{2}$, będziemy mogli napisać:

$$S = 4 \sum_{\substack{\nu \leq A \\ \nu \geq 0}} (-1)^{\nu} \sum_{\substack{\mu \leq \frac{b}{2\nu+1} \\ \mu > \frac{a}{2\nu+1}}} f([2\nu+1]\mu) \quad (b > a \geq 0). \quad \dots(2)$$

Jest to wzór na przekształcenie sumy S , o który nam chodziło.

Kładąc, w przypadku szczególnym, $f(n) = 1$, $a = 0$, $b = x$, otrzymamy na sumę

$$\sum_{n > 0}^{\mu \leq x} \tau(n) = \varphi_0(x)$$

wzór

$$\frac{1}{4} \varphi_0(x) = E \frac{x}{1} - E \frac{x}{3} + E \frac{x}{5} - \dots$$

Lecz $\varphi_0(x)$ można uważać jako liczbę wszystkich możliwych układów liczb całkowitych m, n , spełniających nierówność

$$0 < m^2 + n^2 \leq x,$$

(patrz Wstęp wzór (1)), skąd znów z łatwością otrzymamy:

$$\frac{1}{4} \varphi_0(x) = E\sqrt{x} + E\sqrt{x-1^2} + E\sqrt{x-2^2} + \dots$$

Porównywając ze sobą oba otrzymane wzory, dostaniemy następującą nader ciekawą tożsamość Liouville'a: ¹⁾

$$E\sqrt{x} + E\sqrt{x-1^2} + E\sqrt{x-2^2} + \dots = E \frac{x}{1} - E \frac{x}{3} + E \frac{x}{5} - \dots$$

¹⁾ Liouville. Journ. des Math. 1860 p. 288 (bez dowodu).

Załóżmy obecnie we wzorze ogólnym (2):

$$a = 0, \quad b = x, \quad f(n) = \frac{1}{n}$$

i wyprowadźmy $2\nu+1$ w mianowniku przed znak sumy wewnętrznej; otrzymamy:

$$\sum_{n > 0}^{\mu \leq x} \frac{\tau(n)}{n} = 4 \sum_{\nu > 0}^{\nu \leq A} \frac{(-1)^{\nu}}{2\nu+1} \sum_{\mu > 0}^{\mu \leq \frac{x}{2\nu+1}} \frac{1}{\mu}. \quad \dots(3)$$

Stosując do sumy

$$\sum_{\mu > 0}^{\mu \leq x} \frac{1}{\mu}$$

wzór (2) rozdziału I-go (przy $m=1$), otrzymamy:

$$\sum_{\mu > 0}^{\mu \leq x} \frac{1}{\mu} = 1 + \int_1^x \frac{du}{u} + \frac{r_0(x)}{x} - \frac{r_0(1)}{1} + \int_1^x \frac{r_0(u)}{u^2} du,$$

lub, oznaczając

$$1 - \frac{r_0(1)}{1} + \int_1^x \frac{r_0(u)}{u^2} du = C$$

i wprowadzając w całce

$$\int_1^x \frac{r_0(u)}{u^2} du$$

nową zmienną t z równania $u=tx$:

$$\sum_{\mu > 0}^{\mu \leq x} \frac{1}{\mu} = \lg x + C + \frac{r_0(x)}{x} - \frac{1}{x} \int_1^x \frac{r_0(tx)}{t^2} dt. \quad \dots(4)$$

Kładąc w otrzymanym wzorze $z = \frac{x}{2\nu+1}$ i biorąc pod uwagę wzór (3), dostaniemy:

$$(5) \dots \sum_{n>0}^{n \leq x} \frac{\tau(n)}{n} = 4 (\lg x + C) \sum_{\nu \geq 0}^{n \leq A} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} - 4 \sum_{\nu \geq 0}^{n \leq A} \frac{(-1)^\nu \lg(2\nu+1)}{2\nu+1} + \frac{4}{x} \sum_{\nu \geq 0}^{n \leq A} (-1)^\nu r_0 \left(\frac{x}{2\nu+1} \right) - \frac{4}{x} \sum_{\nu \geq 0}^{n \leq A} (-1)^\nu \int_1^\infty r_0 \left(\frac{tx}{2\nu+1} \right) \frac{dt}{t^2}.$$

Ostatnią z sum, stojących po prawej stronie, przedstawimy w postaci

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t^2} \sum_{\nu \geq 0}^{n \leq A} (-1)^\nu r_0 \left(\frac{tx}{2\nu+1} \right).$$

Sumę, stojącą pod znakiem całki, rozłożymy na dwie:

$$\sum_{\nu \geq 0}^{n \leq \frac{\sqrt{tx}}{2}} (-1)^\nu r_0 \left(\frac{tx}{2\nu+1} \right) + \sum_{\nu > \frac{\sqrt{tx}}{2}}^{n \leq A} (-1)^\nu r_0 \left(\frac{tx}{2\nu+1} \right).$$

Pierwsza suma co do wartości bezwzględnej oczywiście nie przenosi liczby $\frac{\sqrt{tx}}{4} + \frac{1}{2}$, gdyż liczba składników nie jest większa, niż $\frac{\sqrt{tx}}{2} + 1$, zaś wartość bezwzględna każdego z nich nie przewyższa $\frac{1}{2}$.

Przejdźmy do drugiej sumy.

Niech k_i oznacza największą, zaś k_m — najmniejszą z liczb całkowitych k , spełniających warunki

$$\frac{tx}{\sqrt{tx}+1} > k \geq \frac{tx}{2A+1};$$

liczba m wszystkich takich wartości całkowitych na k nie może oczywiście być większa, niż $\sqrt{tx}$, jakkolwiek wielką liczbą byłoby A .

Niech liczby n_i będą wyznaczone z równań

$$\frac{tx}{2n_i+1} = k_i = k_1 - i + 1.$$

Na mocy warunków dla k_i , liczby n_i będą spełniały warunki

$$\frac{\sqrt{tx}}{2} < n_i \leq A,$$

oraz będą wzrastały przy wzrastaniu wskaźnika i . Sumę

$$\sum_{\nu > \frac{\sqrt{tx}}{2}}^{n \leq A} (-1)^\nu r_0 \left(\frac{tx}{2\nu+1} \right)$$

możemy przeto rozłożyć na szereg sum

$$\sum_{\nu > \frac{\sqrt{tx}}{2}}^{n \leq A} = \sum_{\nu > \frac{\sqrt{tx}}{2}}^{n \leq n_1} + \sum_{n > n_1}^{n \leq n_2} + \dots + \sum_{\nu > n_i}^{n \leq n_{i+1}} + \dots + \sum_{\nu > n_m}^{n \leq A}. \quad \dots (6)$$

Rozważmy sumę

$$\sum_{\nu > n_i}^{n \leq n_{i+1}} (-1)^\nu r_0 \left(\frac{tx}{2\nu+1} \right).$$

Oznaczając przez $n_{i+\frac{1}{2}}$ liczbę, wyznaczoną z równania

$$\frac{tx}{2n_{i+\frac{1}{2}}+1} = k_i - \frac{1}{2},$$

i zważywszy, iż na mocy warunków

$$\frac{tx}{2n_i+1} = k_i \text{ oraz } \frac{tx}{2n_{i+1}+1} = k_{i+1} = k_i - 1$$

będzie

$$n_i < n_{i+\frac{1}{2}} < n_{i+1},$$

możemy rozpatrywaną sumę rozbić na dwie:

$$\sum_{\nu > n}^{n \leq n_{i+\frac{1}{2}}} (-1)^\nu r_0 \left(\frac{tx}{2\nu+1} \right) + \sum_{\nu > n_{i+\frac{1}{2}}}^{n \leq n_{i+1}} (-1)^\nu r_0 \left(\frac{tx}{2\nu+1} \right).$$

Dla pierwszej sumy:

$$n_i < \nu \leq n_{i+\frac{1}{2}},$$

skąd

$$k_i > \frac{tx}{2\nu+1} \geq k_i - \frac{1}{2},$$

gdzie k_i jest liczbą całkowitą.

Ponieważ

$$r_0(u) = Eu - u + \frac{1}{2}$$

(zob. wzór (2a) Rozdz. I), więc dla pierwszej sumy wszystkie $r_0\left(\frac{tx}{2\nu+1}\right)$ są ≤ 0 , a wartość ich bezwzględna przy wzrastaniu ν maleje. Wnosimy stąd, iż moduł pierwszej sumy nie przewyższa modułu pierwszego jej składnika, więc jest $\leq \frac{1}{2}$. Rozumując analogicznie co do drugiej sumy, dla której wszystkie $r_0\left(\frac{tx}{2\nu+1}\right)$ są > 0 i wzrastają razem z ν , znajdziemy również, iż moduł jej jest $\leq \frac{1}{2}$.

Mamy zatem:

$$\left| \sum_{\nu > n_i}^{r \leq n_{i+1}} (-1)^\nu r_0\left(\frac{tx}{2\nu+1}\right) \right| \leq 1.$$

Na mocy tożsamości (6), która w prawej stronie zawiera nie więcej, niż $\sqrt{tx}+1$ składników, napiszemy więc:

$$\left| \sum_{\nu > \frac{\sqrt{tx}}{2}}^{r \leq A} (-1)^\nu r_0\left(\frac{tx}{2\nu+1}\right) \right| \leq \sqrt{tx} + 1,$$

a biorąc pod uwagę to, cośmy rzekli wyżej o sumie $\sum_{\nu > 0}^{r \leq \frac{\sqrt{tx}}{2}}$, ostatecznie wnosimy:

(22)

$$(7) \dots \left| \sum_{\nu > 0}^{r \leq A} (-1)^\nu r_0\left(\frac{tx}{2\nu+1}\right) \right| \leq \frac{5}{4} \sqrt{tx} + \frac{3}{2},$$

jakkolwiek wielkie byłoby A .

Zakładając $x > 1$, będziemy mogli napisać:

$$\left| \int_1^\infty \frac{dt}{t^2} \sum_{\nu > 0}^{r \leq A} (-1)^\nu r_0\left(\frac{tx}{2\nu+1}\right) \right| \leq \sqrt{tx} \cdot \int_1^\infty \frac{dt}{t^2} \left(\frac{5}{4} \sqrt{t} + \frac{3}{2} \right),$$

czyli

$$\leq I \cdot \sqrt{x},$$

gdzie I oznacza pewną liczbę stałą.

Mamy więc:

$$\frac{1}{x} \int_1^\infty \frac{dt}{t^2} \sum_{\nu > 0}^{r \leq A} (-1)^\nu r_0\left(\frac{tx}{2\nu+1}\right) = \frac{\xi}{\sqrt{x}} \cdot I$$

gdzie

$$|\xi| \leq 1.$$

Następnie nierówność (7) przy $t=1$ da nam:

$$\sum_{\nu > 0}^{r \leq A} (-1)^\nu r_0\left(\frac{x}{2\nu+1}\right) = \eta \cdot \left(\frac{5}{4} \sqrt{x} + \frac{3}{2} \right), \quad |\eta| \leq 1.$$

a więc wzór (5) możemy teraz napisać w postaci

$$\begin{aligned} \sum_{n > 0}^{r \leq x} \frac{r(n)}{n} &= 4(\lg x + C) \sum_{\nu > 0}^{r \leq A} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} \\ &\quad - 4 \sum_{\nu > 0}^{r \leq A} (-1)^\nu \frac{\lg(2\nu+1)}{2\nu+1} + \frac{\vartheta \cdot R}{\sqrt{x}}, \end{aligned} \quad \dots(8)$$

gdzie $|\vartheta| < 1$ oraz R oznacza pewną skończoną liczbę stałą.

Przejdźmy teraz do granicy przy $A = \infty$.

(23)

Sumy

$$\sum_{\nu \geq 0} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} \quad \text{oraz} \quad \sum_{\nu \geq 0} (-1)^\nu \frac{\lg(2\nu+1)}{2\nu+1}$$

przy nieograniczonem wzrastaniu A oczywiście dążą do pewnych oznaczonych granic (jako szeregi o składnikach malejących, kolejno dodatnich i odjemnych); pierwsza z wymienionych sum dąży do granicy $\frac{\pi}{4}$, granicę drugą nazwijmy przez H . A więc, kładąc we wzorze (8) $A = \infty$, otrzymamy:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\tau(n)}{n} = \pi(\lg x + C) - 4H + \frac{\partial_0 R}{Vx}, \quad |\partial_0| < 1,$$

Wzór ten możemy jeszcze napisać w postaci:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\tau(n)}{n} - \pi \lg x = \pi C - 4H + \frac{\partial_0 R}{Vx},$$

skąd, przechodząc do granicy przy $x = \infty$, otrzymamy:

$$(9) \dots K = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sum_{n \geq 0} \frac{\tau(n)}{n} - \pi \lg x \right) = \pi C - 4H.$$

OBLICZANIE STAŁEJ K .

Na podstawie wyprowadzonego przed chwilą wzoru obliczanie stałej K sprowadzić się daje do obliczenia dwu stałych: C i H .

Dla pierwszej z nich na mocy wzoru (4) z łatwością otrzymamy

$$C = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n} - \lg x \right);$$

jest to więc stała Eulera $= 0,577215664902$.

W celu obliczenia stałej

$$H = \frac{\lg 1}{1} - \frac{\lg 3}{3} + \frac{\lg 5}{5} - \dots$$

(24)

wyjdziemy ze wzoru

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq a} (-1)^n f(2n+1) \\ &= \sum_{\lambda=0}^{m-1} (-4)^\lambda \left\{ \left[r_\lambda \left(\frac{b}{2} \right) - r_\lambda \left(\frac{b+1}{2} \right) \right] f^{(\lambda)}(2b+1) - \left[r_\lambda \left(\frac{a}{2} \right) - r_\lambda \left(\frac{a+1}{2} \right) \right] f^{(\lambda)}(2a+1) \right\} \\ & (10) \dots \\ & + (-4)^m \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[r_{m-1}(u) - r_{m-1} \left(u + \frac{1}{2} \right) \right] f^{(m)}(4u+1) du, \end{aligned}$$

który z łatwością otrzymać można ze wzoru (2) rozdziału I, stosując ten ostatni z osobna do każdej z sum

$$\sum_{\nu < \frac{b}{2}} f(4\nu+1), \quad \text{oraz} \quad \sum_{\nu > \frac{a+1}{2}} f(4\nu+1).$$

Wzór (10) przybierze postać prostszą, jeżeli przejdziemy do granicy przy $b = \infty$, zakładając, iż

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f^{(\lambda)}(x) = 0 \quad \text{dla } \lambda = 0, 1, 2, \dots, m-1.$$

Załóżmy, iż m jest liczbą parzystą $= 2p$. Można się przekonać, iż różnica funkcji periodycznych

$$r_{2p-1}(u) - r_{2p-1} \left(u + \frac{1}{2} \right)$$

osiąga przy $u=0$ największej swej wartości bezwzględnej, równej

$$\frac{2^{2p}-1}{2^{2p-1}} \frac{B_p}{(2p)!},$$

gdzie B_p jest liczbą Bernoulli'ego.

(25)

Jeżeli więc dla $u > 2a + 1$ funkcja $f^{(2p)}(u)$ zachowuje znak stały, można będzie założyć:

$$-4)^{2p} \int_{\frac{a}{2}}^{\infty} \left[r_{2p-1}(u) - r_{2p-1} \left(u + \frac{1}{2} \right) \right] f^{(2p)}(4u+1) du = \vartheta \cdot 2^{2p-1} \cdot (2^{2p}-1) \cdot \frac{B_p}{(2p)!} f^{(2p-1)}(2a+1),$$

gdzie

$$|\vartheta| < 1.$$

Przypuśćmy dalej, iż a jest liczbą całkowitą parzystą. Można wykazać, iż

$$r_0(0) - r_0\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

tudzież

$$r_{2k-1}(0) - r_{2k-1}\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^k \frac{2^{2k}-1}{2^{2k-1}} \cdot \frac{B_k}{(2k)!},$$

oraz

$$r_{2k}(0) - r_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \text{ dla } k > 0.$$

A więc, jeżeli

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f^{(\lambda)}(x) = 0 \text{ dla } \lambda = 0, 1, 2, \dots, 2p-1,$$

jeżeli nadto funkcja $f^{(2p)}(u)$ dla $u > 2a + 1$ zachowuje znak stały, zaś a oznacza liczbę parzystą, to mamy wzór:

$$\begin{aligned} \sum_{n=a}^{n=\infty} (-1)^n f(2n+1) &= -\frac{1}{2} f(2a+1) \\ + \sum_{k=1}^p (-1)^k \cdot 2^{2k-1} \cdot (2^{2k}-1) \cdot \frac{B_k}{(2k)!} f^{(2k-1)}(2a+1) &\dots (11) \\ + \vartheta \cdot 2^{2p-1} \cdot (2^{2p}-1) \cdot \frac{B_p}{(2p)!} f^{(2p-1)}(2a+1), \end{aligned}$$

gdzie

$$|\vartheta| < 1.$$

Zauważymy, iż prawa strona wzoru (11) przedstawiać będzie najczęściej szereg rozbieżny o wyrazach kolejno dodatnich i ujemnych; wyraz dopełniający jest tu bezwzględnie mniejszy od ostatniego wyrazu sumy względem k : będziemy tu zatem mieli typowy szereg asymptotyczny pierwszego gatunku. W celu znajdowania przybliżonych wartości funkcji, przedstawionych przez takie szeregi, można je bez skrupułu obliczać tak daleko, dopóki zdają się zbiegać.¹⁾

W obchodzącym nas przypadku winniśmy założyć

$$f(n) = \frac{\lg n}{n},$$

a więc będziemy mieli

$$f^{(k)}(u) = \frac{(-1)^k \cdot k!}{u^{k+1}} \left(\lg u - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{k} \right),$$

zatem $\lim_{u \rightarrow \infty} f^{(k)}(u)$ będzie zerem przy wszelkiem skończonym k .

Co zaś do stałości znaku funkcji $f^{(2p)}(u)$, to skoro już oberzemy sobie liczbę p , warunek ten będzie spełniony dla dostatecznie wielkich wartości u . Wszystkie zatem warunki, wymagane dla wzoru (11), mogą być stosownym doborze liczby a spełnione.

Dla obliczenia stałej H należy obrać liczby p i a stosownie do żądanej dokładności, kierując się wygodą przy obliczaniu, przyczem należy mieć na względzie, iż sumę

$$\sum_{n=1}^a \frac{(-1)^n \lg(2n+1)}{2n+1}$$

trzeba będzie wyliczyć bezpośrednio.

Na stałą H otrzymujemy wartość:

$$H = -0,192901316797,$$

ze wzoru zaś (9) obliczymy:

$$K = 2,5849817596.$$

¹⁾ O szeregach asymptotycznych zob. obszerniej u Borela: *Leçons sur les séries divergentes*. Paris 1901. Rozdział I.

Można też z łatwością otrzymać na stałą K wzory w postaci całki oznaczonej. Zauważmy w tym celu, iż liczbę $-H$ uważać można jako wartość przy $s=1$ pochodnej względem s szeregu nieskończonego

$$\frac{1}{1^s} - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \dots,$$

który, używając znanego wzoru

$$\frac{\Gamma(s)}{n^s} = \int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} dx,$$

możemy przedstawić jako

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{e^{-x} \cdot x^{s-1} dx}{1 + e^{-2x}},$$

skąd znajdziemy:

$$-H = \frac{\pi}{4} C + \int_0^\infty \frac{e^{-x} \lg x}{1 + e^{-2x}} dx;$$

stałą zaś $C = -\Gamma'(1)$ możemy wyrazić przez który ze znanych wzorów całkowych.

ROZDZIAŁ IV.

W rozdziale niniejszym zajmować się będziemy funkcją $F(s)$, określoną przez szereg nieskończony:

$$(1) \dots F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}, \quad R(s) > 1.$$

Kładąc we wzorze (2) rozdziału poprzedzającego

$$f(n) = \frac{1}{n^s}; \quad a=0, \quad b=\infty,$$

z łatwością otrzymamy:

$$(2) \dots F(s) = 4\zeta(s) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^s},$$

oznaczając przez $\zeta(s)$ znaną funkcję Riemanna

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

Dla $q > 0$ mamy rozwinięcia według wzrastających potęg wielkości q :

$$\zeta(1+q) = \frac{1}{q} + C + \dots$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^{1+q}} = \frac{\pi}{4} - Hq + \dots,$$

skąd

$$F(1+q) = \frac{\pi}{q} + (\pi C - 4H) + \dots,$$

a więc:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \left[F(1+q) - \frac{\pi}{q} \right] = K,$$

gdzie K oznacza znaną nam z rozdziału poprzedzającego granicę

$$K = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sum_{n \leq x} \frac{\tau(n)}{n} - \pi \lg x \right].$$

Możnaby też znaleźć ogólniejszą własność współczynników rozwinięcia

$$F(1+q) = \frac{\pi}{q} + K + \frac{K_1}{1!} q + \frac{K_2}{2!} q^2 + \dots,$$

mianowicie:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sum_{n \leq x} \tau(n) \frac{\lg^h n}{n} - \pi \frac{\lg^{h+1} x}{h+1} \right) = (-1)^h K_h, \quad (h=1, 2, \dots).$$

W tym celu zważmy, iż odpowiednie zastosowanie wzoru (6) rozdziału I, daje

$$F(1+e) = \frac{\pi}{e} + \pi + (1+e) \int_1^{\infty} \frac{e_0(u)}{u^{2+e}} du,$$

skąd dla $h > 0$

$$K_h = (-1)^h \int_1^{\infty} \frac{e_0(u)}{u^2} \left[\lg^h u - h \lg^{h-1} u \right] du$$

i porównajmy otrzymane wyrażenie z granicą, do której dąży przy nieograniczonym wzrastaniu x całka dopełniająca we wzorze

$$\sum_{n>0}^{\infty} \tau(n) \frac{\lg^n n}{n} - \pi \frac{\lg^{h+1} x}{h+1} = \frac{e_0(x) \cdot \lg^h x}{x} + \int_1^x \frac{e_0(u)}{u^2} \left[\lg^h u - h \lg^{h-1} u \right] du,$$

gdzie pierwszy wyraz prawej strony, na mocy własności funkcji $e_0(x)$ (Rozdz. I), przy $x = \infty$ zmierza do zera.

Wzór (1) określa funkcję $F(s)$ tylko dla wartości zmiennej s , dla których część rzeczywista $R(s)$ jest większą od jedności. Postaramy się obecnie uogólnić funkcję $F(s)$ na całą płaszczyznę zmiennej zespolonej.

W tym celu wystarczy wyjść ze wzoru

$$F(s) = 4\zeta(s) f(s), \quad \dots(2a)$$

gdzie

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}$$

(patrz wzór 2) i użyć znanych uogólnień dla funkcji $\zeta(s)$ i $f(s)$, podanych przez Riemanna.¹⁾

W ten sposób możnaby z łatwością okazać, iż funkcja $F(s)$ posiada jeden tylko punkt osobliwy $s=1$, biegun rzędu pierwszego, którego pozostałość równa się liczbie π .

Funkcja $F(s)$ posiada następującą własność charakterystyczną: iloczyn

$$\frac{F(s) F(s)}{\pi^s}$$

¹⁾ Zob. o tem np. u Bachmanna: *Analyt. Zahlentheorie*. 1894, str. 340.

nie zmienia swej wartości przy zamianie s na $1-s$.

Aby to udowodnić, oprzemy się na własności funkcji $\zeta(s)$:

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cos \frac{s\pi}{2} \cdot \Gamma(s) \zeta(s),^1)$$

podanej przez Riemanna, oraz analogicznej własności funkcji $f(s)$:

$$f(1-s) = \left(\frac{2}{\pi} \right) \sin \frac{s\pi}{2} \cdot \Gamma(s) f(s),$$

znalezionej przez Schloemilcha.

Mnożąc przez siebie odpowiedniami stronami obie napisane równości i zwracając uwagę na tożsamość (2a), otrzymamy:

$$F(1-s) = \frac{\sin s\pi \cdot \Gamma(s) \cdot \Gamma(s)}{\pi^{2s}} F(s),$$

a ponieważ, na mocy znanej własności funkcji Γ jest:

$$\sin s\pi \cdot \Gamma(s) = \frac{\pi}{\Gamma(1-s)},$$

przeto możemy jeszcze napisać:

$$\frac{\Gamma(1-s) F(1-s)}{\pi^{1-s}} = \frac{\Gamma(s) F(s)}{\pi^s},$$

o co właśnie chodziło.

Rozwińmy teraz następujące ciekawe zagadnienie: zbudujmy funkcję całkowitą $G(x)$, któraby dla wszystkich całkowitych dodatnich wartości n spełniła warunek

$$G(n) = \tau(n).$$

Taką funkcją, jak łatwo się o tem przekonać, będzie np. funkcja

$$G(x) = \frac{\sin 2\pi x}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \tau(n)}{x^2 - n^2}.$$

¹⁾ Tamże, str. 339, wzór 62.

Możnaby wykazać, iż jest to funkcja całkowita, parzysta

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^{2n},$$

której współczynniki wyrażają się przy pomocy funkcji $F(s)$:

$$A_n = \sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^{\mu+1} \frac{2^{2\mu+1} \cdot \pi^{2\mu}}{(2\mu+1)!} F(2n-2\mu, 1)$$

ROZDZIAŁ V.

Zbadamy obecnie, jak rozłożoną jest funkcja $\tau(n)$ po rozmaitych postęпах arytmetycznych.

Rozważmy w tym celu sumę

$$\sum_{n \geq 0}^{\infty} \tau(mn + a),$$

gdzie m i a są liczby całkowite dodatnie.

Obliczenie takiej sumy oczywiście jest równoważne wyznaczeniu wszystkich układów liczb całkowitych ξ i η , czyniących jednocześnie zadość kongruencji

$$\xi^2 + \eta^2 \equiv a \pmod{m},$$

oraz nierówności

$$a \leq \xi^2 + \eta^2 \leq mx + a.$$

Wszystkie takie układy możemy podzielić na grupy, zaliczając do jednej i tej samej grupy dwa układy (ξ, η) i (ξ', η') , dla których

$$\xi \equiv \xi' \text{ oraz } \eta \equiv \eta' \pmod{m},$$

¹⁾ Porównaj: Wigert. Recherches sur la représentation analytique de la fonction $\sum_{n=1}^q \left[\frac{q}{n} \right]$. Première note, str. 165 (Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. Band 1. Stockholm 1903—04).

zaś do grup różnych, jeżeli przynajmniej jedna z napisanych kongruencji nie jest spełniona.

Niech l będzie liczbą takich grup. Wszystkie rozwiązania kongruencji

$$\xi^2 + \eta^2 \equiv a \pmod{m},$$

należące do i -tej grupy, będą zawarte we wzorach:

$$\xi = \xi_i + mt,$$

$$\eta = \eta_i + mu,$$

gdzie (ξ_i, η_i) przedstawia jakieś oznaczone rozwiązanie tej grupy.

Jeżeli chcemy otrzymywać jedynie układy, spełniające nierówności

$$a \leq \xi^2 + \eta^2 \leq mx + a,$$

to liczby t i u mogą przybierać tylko takie wartości całkowite, iżby

$$a \leq (\xi_i + mt)^2 + (\eta_i + mu)^2 \leq mx + a.$$

Liczbę wszystkich układów (t, u) , spełniających napisane nierówności, znajdziemy z łatwością, obliczając najprzód np. ile różnych wartości może przyjmować u przy danej wartości na t , a następnie sumując otrzymane w ten sposób wyrażenie względem t . W ten sposób znajdziemy na liczbę układów (ξ, η) , tworzących i -tą grupę, wartość $\frac{\pi}{m} x$, prawdziwą do rzędu wielkości $\sqrt{x}$, skąd:

$$\sum_{n \geq 0}^{\infty} \tau(mn + a) = \frac{\pi}{m} lx + O(\sqrt{x}).$$

Ze wzoru tego wypływa, iż wyrażenie

$$\frac{\tau(a) + \tau(a+m) + \tau(a+2m) + \dots + \tau(a+nm)}{n}$$

dąży przy wzrastaniu n do granicy oznaczonej

$$\frac{\pi l}{m},$$

która przedstawia wartość średnią funkcji $\tau(n)$ w postępie arytmetycznym $mk + a$. Liczba grup l jest funkcją liczbową zmiennych m i a ; tablicę wartości tej funkcji dla $m \leq 10$ podajemy na końcu pracy. Nie byłoby to rzeczą trudną podać ogólny sposób obliczania funkcji l , gdy zmienne jej rozłożone są na czynniki pierwsze, nie będziemy się jednak bliżej zatrzymywać i przejdziemy do badania wartości średniej funkcji $\tau(n)$ dla liczb kwadratowych.

Oznaczmy przez $\bar{\omega}(n)$ liczbę rozkładów n na sumę kwadratów dwóch liczb względnie pierwszych. Pomiędzy funkcjami liczbowymi $\tau(n)$ oraz $\bar{\omega}(n)$ zachodzi zależność

$$\tau(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\omega}\left(\frac{n}{k^2}\right), \quad \dots(1)$$

gdzie przez $\bar{\omega}(x)$ należy pojmować liczbę zero, w przypadku, kiedy x nie jest liczbą całkowitą. Tożsamość (1) może być odwrócona, t. j. można również wyrazić funkcję $\bar{\omega}$ przez τ wzorem

$$\bar{\omega}(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) \tau\left(\frac{n}{k^2}\right), \quad \dots(2)$$

gdzie $\mu(k)$ oznacza znaną funkcję Mertensa.¹⁾

Przy pomocy tożsamości (2), oraz twierdzenia Jacobi'ego (rozdz. III), udowodnić można następującą własność funkcji $\bar{\omega}(n)$ dla liczb kwadratowych:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\omega}(n^2) &= 0, \text{ kiedy } n \text{ jest liczbą parzystą,} \\ \bar{\omega}(n^2) &= \bar{\omega}(n) \text{ przy } n \text{ nieparzystym.} \end{aligned} \right\} \quad \dots(3)$$

Na mocy wzoru (1) oraz własności (3) z łatwością wyprowadzić można tożsamość:

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n > 0}} \tau(n^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\omega}(2k+1) E \frac{x}{2k+1},$$

¹⁾ O funkcji Mertensa zob. np. u Bachmanna *Analyt. Zahlenthe.* w rozdziale 12-ym.

z której znów, przy pomocy wzoru (2), otrzymać możemy wzór

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n > 0}} \tau(n^2) = \sum_m \mu(m) \sum_n \tau(n) E \frac{x}{m^2 n}, \quad \dots(4)$$

gdzie sumowanie po stronie prawej względem m i n rozciąga się na wszystkie dodatnie liczby nieparzyste.

Zajmijmy się przedewszystkiem obliczeniem sumy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tau(2n+1) E \frac{z}{2n+1}.$$

Na mocy własności

$$\tau(2n) = \tau(n),$$

możemy napisać:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tau(2n+1) E \frac{z}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) E \frac{z}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) E \frac{z}{2n}, \quad \dots(5)$$

tak iż całe zagadnienie sprowadza się do obliczenia sumy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) E \frac{z}{n},$$

lub, co na jedno wyniesie, sumy podwójnej

$$\sum_{m, n} E \frac{z}{m^2 + n^2},$$

rozciągniętej na wszystkie różne układy wartości całkowitych na m i n , wyłączając $m = n = 0$.

Ostatnia suma, jak to łatwo można widzieć, przedstawia liczbę wszystkich możliwych układów wartości całkowitych zmiennych l, m, n , spełniających nierówności

$$(S) \dots \quad 0 < l(m^2 + n^2) \leq z, \text{ przy } z \geq 0.$$

Obszar wartości całkowitych zmiennych l, m, n , wyznaczony przez nierówności (S), rozbić możemy na dwa obszary, określając je odpowiednio przez nierówności:

$$(S').. \quad 0 < l(m^2 + n^2) \leq z, \quad l \leq \sqrt[3]{z},$$

oraz

$$(S'').. \quad 0 < l(m^2 + n^2) \leq z, \quad l > \sqrt[3]{z}.$$

Liczbę układów (l, m, n) , należących do obszaru (S') , przedstawić możemy w postaci

$$\sum_{l > 0}^{\sqrt[3]{z}} \varphi_0 \left(\frac{z}{l} \right),$$

gdzie, jak i w rozdziale I, oznaczamy

$$\varphi_0(x) = \sum_{n > 0}^{\sqrt[3]{x}} \tau(n).$$

Co się zaś tyczy liczby układów (l, m, n) , tworzących obszar (S'') , to, zważywszy, iż przy danych m i n , na mocy nierówności (S'') , zmienna l może przyjmować

$$E \frac{z}{m^2 + n^2} - E \sqrt[3]{z}$$

różnych wartości, jeżeli tylko $m^2 + n^2 \leq (\sqrt[3]{z})^2$, znajdziemy, iż liczba ta jest równa sumie

$$\sum_{m, n} \left(E \frac{z}{m^2 + n^2} - E \sqrt[3]{z} \right), \dots (0 < m^2 + n^2 \leq \sqrt[3]{z}^2)$$

lub, co na jedno wynosi:

$$\sum_{n > 0}^{\sqrt[3]{z}} \tau(n) E \frac{z}{n} - \varphi_0(\sqrt[3]{z}^2) E \sqrt[3]{z}.$$

(36)

Zestawiając teraz razem wszystko, cośmy rzekli o obszarach (S') i (S'') , możemy ostatecznie napisać tożsamość:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) E \frac{z}{n} = \sum_{n > 0}^{\sqrt[3]{z}} \varphi_0 \left(\frac{z}{n} \right) + \sum_{n > 0}^{\sqrt[3]{z}} \tau(n) E \frac{z}{n} - \varphi_0(\sqrt[3]{z}^2) E \sqrt[3]{z}. \quad \dots (6)$$

Zajmiemy się teraz przybliżeniem obliczaniem przy wielkich wartościach na z każdej z sum, stojących po prawej stronie.

Sumę

$$\sum_{n > 0}^{\sqrt[3]{z}} \varphi_0 \left(\frac{z}{n} \right)$$

obliczymy, posługując się znalezionym w rozdziale pierwszym wzorem

$$\varphi_0(x) = \pi x + O(\sqrt{x}),$$

oraz wzorem na przybliżoną wartość sumy

$$\sum_{n > 0}^{\sqrt[3]{z}} \frac{1}{n} = \frac{1}{3} \log z + C + O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{z}}\right)$$

(porówn. wzór (4) Rozdz. III). W ten sposób znajdziemy:

$$\sum_{n > 0}^{\sqrt[3]{z}} \varphi_0 \left(\frac{z}{n} \right) = \frac{\pi z}{3} \log z + \pi C z + O(\sqrt[3]{z}^2).$$

Przejdźmy do sumy

$$\sum_{n > 0}^{\sqrt[3]{z}} \tau(n) E \frac{z}{n}.$$

Odrzucając symbol E i biorąc pod uwagę rząd sumy $\sum \tau(n)$, czyli funkcji φ_0 , znajdziemy

(37)

$$\sum_{n>0}^{\frac{3}{Vx^2}} \tau(n) E \frac{z}{n} = z \sum_{n>0}^{\frac{3}{Vx^2}} \frac{\tau(n)}{n} + O\left(\frac{3}{Vx^2}\right).$$

Lecz (Rozdz. III):

$$\sum_{n>0}^{\frac{3}{Vx^2}} \frac{\tau(n)}{n} = \frac{2}{3} \pi \log z + K + O\left(\frac{1}{Vz}\right),$$

a więc:

$$\sum_{n>0}^{\frac{3}{Vx^2}} \tau(n) E \frac{z}{n} = \frac{2}{3} \pi z \log z + Kz + O\left(\frac{3}{Vz^2}\right).$$

W końcu z łatwością znajdziemy:

$$\varphi_0\left(\frac{3}{Vx^2}\right) E \frac{3}{Vx^2} = \pi z + O\left(\frac{3}{Vx^2}\right),$$

tak iż ostatecznie:

$$\sum_{n>0}^{\frac{3}{Vx^2}} \tau(n) E \frac{z}{n} = \pi z \log z + (\pi C + K - 1)z + O\left(\frac{3}{Vx^2}\right)$$

i na mocy wzoru (5):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tau(2n+1) E \frac{z}{2n+1} = \frac{\pi z}{2} \log z + (\pi C + K + \pi \log 2 - 1) \frac{z}{2} + O\left(\frac{3}{Vx^2}\right)$$

W otrzymanem wyrażeniu winniśmy założyć $z = \frac{x}{m^2}$ i wziąć pod uwagę wzór (4). We wzorze tym sumowanie względem m możemy rozciągnąć tylko na wartości dodatnie nieparzyste liczby m , niewiększe od $\sqrt{x}$, gdyż dla $m > \sqrt{x}$ znika suma wewnętrzna.

Dla sumy

$$\sum_m \frac{\mu(m)}{m^2} \quad (m \text{ nieparzyste} \leq \sqrt{x})$$

znajdujemy wartość przybliżoną

$$\frac{8}{\pi^2} + O\left(\frac{1}{Vx}\right),$$

zaś dla sumy

$$\sum_m \frac{\mu(m) \log m}{m^2} \quad (m \text{ nieparzyste} \leq \sqrt{x}),$$

wartość

$$\frac{8}{3} \frac{\log 2}{\pi^2} + \frac{48}{\pi^4} F + O\left(\frac{\log x}{Vx}\right),$$

gdzie

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2} = 0,9375482543.$$

W ten sposób, na mocy wzoru (4), ostatecznie znajdziemy:

$$(7) \dots \sum_{n>0}^{\frac{3}{Vx^2}} \tau(n^2) = Ax \log x + Bx + O\left(\frac{3}{Vx^2}\right),$$

gdzie

$$A = \frac{4}{\pi}, \quad B = \frac{4}{\pi} \left(C + \frac{K}{\pi} - \frac{12}{\pi^2} F + \frac{\log 2}{3} - \frac{1}{\pi} \right).$$

Wzór (7) pozwala nam obliczyć wartość asymptotyczną wyrażenia

$$\frac{\tau([n+1]^2) + \tau([n+2]^2) + \dots + \tau([n+m]^2)}{m},$$

która przedstawia (wedle Gaussa) wartość średnią funkcji liczbowej $\theta(n) = \tau(n^2)$ w miejscu n , jeżeli przypuścimy, iż liczby n i m rosną nieograniczenie, tak, iżby stosunki $\frac{n}{m}$ oraz $\frac{Vn^2}{m}$ zmierzały do zera.

Po wykonaniu łatwych rachunków (porównaj Bachmann Zahl. II, strona 414), otrzymamy:

$$M \tau(n^2) = \frac{4}{\pi} \log n + (A + B).$$

Dla funkcji $\tilde{\omega}(n)$ na mocy wzoru (2) znaleźlibyśmy:

$$\sum_{n>0}^{n \leq x} \tilde{\omega}(n) = \sum_{n>0}^{n \leq \sqrt{x}} \mu(n) q_0 \left(\frac{x}{n^2} \right),$$

skąd, przy pomocy wzoru

$$\sum_{n>0}^{n \leq \sqrt{x}} \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{6}{\pi^2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right);$$

wyprowadzilibyśmy z łatwością:

$$(8) \dots \sum_{n>0}^{n \leq x} \tilde{\omega}(n) = \frac{6x}{\pi} + O(\sqrt{x} \log x),$$

skąd

$$M \tilde{\omega}(n) = \frac{6}{\pi}.$$

Dla funkcji $\tilde{\omega}(n^2)$ przy pomocy własności (3) oraz wzoru (2) można znaleźć wzór analogiczny ze wzorem (4) dla funkcji $\tau(n^2)$, a mianowicie:

$$\sum_{n>0}^{n \leq x} \tilde{\omega}(n^2) = \sum_m \mu(m) \sum_n \tau(n),$$

gdzie sumowanie względem n rozciąga się na wszystkie liczby dodatnie nieparzyste $\leq \frac{x}{m^2}$, sumowanie zaś względem m —na wszystkie liczby dodatnie nieparzyste, nie przewyższające $\sqrt{x}$.

Na podstawie tego wzoru możnaby otrzymać

$$\sum_{n>0}^{n \leq x} \tilde{\omega}(n^2) = \frac{4x}{\pi} + O(\sqrt{x} \log x),$$

skąd

$$M \tilde{\omega}(n^2) = \frac{4}{\pi}.$$

Zestawiając ze sobą wartości średnie funkcji $\tau(n)$, $\tau(n^2)$, $\tilde{\omega}(n)$, $\tilde{\omega}(n^2)$, przychodzimy do następującego ciekawego wniosku:

„Średnia liczba rozkładów liczb szeregu naturalnego na sumę kwadratów dwu liczb całkowitych jest wielkością stałą, gdy tymczasem średnio liczba takich rozkładów dla liczb kwadratowych wzrasta wraz z rozkładaną liczbą w stosunku prostym do jej logarytmu. Co się zaś tyczy liczby rozkładów na sumę kwadratów dwóch liczb względnie pierwszych, to, zarówno dla liczb szeregu naturalnego, jak i dla kwadratów zupełnych, jest ona średnio stałą”.

Wyprowadzimy jeszcze wzory na wartości średnie funkcji τ dla kwadratów liczb postaci $4n+1$ oraz $4n+3$. Wzory, które przytem otrzymamy, przydadzą nam się w rozdziale następnym.

Na mocy wzoru (1) i własności (3) możemy napisać

$$\tau([4n+1]^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\omega}\left(\frac{4n+1}{k}\right),$$

skąd

$$\sum_{n>0}^{n \leq \frac{x-1}{4}} \tau([4n+1]^2) = \sum_{n>0}^{n \leq \frac{x-1}{4}} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\omega}\left(\frac{4n+1}{k}\right).$$

Aby liczba $\tilde{\omega}\left(\frac{4n+1}{k}\right)$ była różną od zera, iloraz $\frac{4n+1}{k}$ powinien być liczbą całkowitą postaci $4m+1$, skąd wnosimy, iż taką samą postać musi mieć liczba k . Kładąc $k=4l+1$, możemy napisać:

$$4n+1 = (4l+1)(4m+1),$$

i warunki

$$k > 0, \quad 0 \leq n \leq \frac{x-1}{4},$$

lub

$$k > 0, \quad 0 < 4n+1 \leq x,$$

przybiorą postać:

$$4l+1 > 0, \quad 4m+1 > 0, \quad (4l+1)(4m+1) \leq x. \quad \dots(S)$$

Mamy zatem:

$$\sum_{n \geq 0} \tau([4n+1]^2) = \sum_{l, m} \tilde{\omega}(4m+1),$$

gdzie suma $\sum_{l, m}$ rozciąga się na wszystkie układy wartości całkowitych l i m , spełniające nierówności (S).

Obszar (S) możemy rozłożyć na dwa: (S') i (S''), określając je odpowiednio przez nierówności:

$$(S') \quad 4l+1 > 0, \quad 4m+1 > 0, \quad (4l+1)(4m+1) \leq x, \quad 4l+1 \leq \sqrt[3]{x},$$

$$(S'') \quad 4l+1 > 0, \quad 4m+1 > 0, \quad (4l+1)(4m+1) \leq x, \quad 4l+1 > \sqrt[3]{x}.$$

Obliczając osobno sumy, odnoszące się do każdego z tych obszarów, otrzymamy (porówn. wyprow. tożsamości (6)):

$$\sum_{n \geq 0} \tau([4n+1]^2) = \sum_{l \geq 0} \sum_{m \geq 0} \tilde{\omega}(4m+1) \quad \dots (9)$$

$$+ \sum_{m \geq 0} \tilde{\omega}(4m+1) E \frac{1}{4} \left(\frac{x}{4m+1} - 1 \right) - E \frac{\sqrt[3]{x}-1}{4} \sum_{m \geq 0} \tilde{\omega}(4m+1).$$

Zauważywszy, iż $\tilde{\omega}(4m+3) = 0$, możemy pierwszą z sum prawej strony przedstawić w postaci

$$\sum_{l \geq 0} \sum_{m \geq 0} \tilde{\omega}(2m+1)$$

i na podstawie łatwo wyprowadzić się dającego wzoru

$$\sum_{n \geq 0} \tilde{\omega}(2n+1) = \frac{4}{\pi} z + O(\sqrt{z} \log z)$$

(zob. w tym celu wzór (8), znajdziemy dla niej wartość

$$\frac{4x}{\pi} \sum_{l \geq 0} \frac{1}{4l+1} + O(\sqrt[3]{x^2} \log x).$$

Lecz

$$4 \sum_{l \geq 0} \frac{1}{4l+1} = \frac{1}{3} \log x + C + \log 2 + \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right),$$

więc

$$\sum_{l \geq 0} \sum_{m \geq 0} \tilde{\omega}(4m+1) = \frac{x}{3\pi} \log x + \left(C + \log 2 + \frac{\pi}{2}\right) \frac{x}{\pi} + O(\sqrt[3]{x^2} \log x).$$

Uważajmy obecnie sumę

$$\sum_{m \geq 0} \tilde{\omega}(4m+1) E \frac{1}{4} \left(\frac{x}{4m+1} - 1 \right).$$

Odrzucając symbol E i zwracając uwagę na rząd sumy $\sum \tilde{\omega}(n)$, znajdziemy (na mocy własności $\tilde{\omega}(4m+3) = 0$) dla rozważanej sumy wartość

$$\frac{x}{4} \sum_{m \geq 0} \frac{\tilde{\omega}(2m+1)}{2m+1} + O(\sqrt[3]{x^2}).$$

Zajmijmy się obliczeniem sumy względem m . Załóżmy:

$$\sum_{n \geq 0} \tilde{\omega}(n) = \frac{6}{\pi} u + r(u),$$

gdzie, wedle (8), mamy $r(u) = O(\sqrt{u} \lg u)$ i użyjmy tożsamości

$$\sum_{n>0}^{\infty} \frac{\bar{\omega}(n)}{n} = \frac{6}{\pi} \log z + \frac{r(z)}{z} + \frac{6}{\pi} + \int_1^z \frac{r(u)}{u^2} du.$$

Zważywszy, iż $\int_1^{\infty} \frac{r(u)}{u^2} du$, oraz $\frac{r(z)}{z}$ są wielkości rzędu nie wyżej

$\frac{\lg z}{\sqrt{z}}$, oraz oznaczając

$$\frac{6}{\pi} + \int_1^{\infty} \frac{r(u)}{u^2} du = D,$$

otrzymamy:

$$\sum_{n>0}^{\infty} \frac{\bar{\omega}(n)}{n} = \frac{6}{\pi} \log z + D + O\left(\frac{\log z}{\sqrt{z}}\right).$$

Postaramy się wyrazić stałą D przez znane nam już stałe. W tym celu będziemy rozwijali dwoma sposobami funkcję

$$\Phi(1+\varrho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\omega}(n)}{n^{1+\varrho}} \quad (\varrho > 0)$$

na szereg według potęg wielkości ϱ .

Jedno rozwinięcie otrzymamy, zważywszy, iż na mocy wzoru (2):

$$\Phi(1+\varrho) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^{2(1+\varrho)}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau(m)}{m^{1+\varrho}}.$$

Ponieważ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^{2(1+\varrho)}} = \frac{6}{\pi^2} - \frac{72F}{\pi^2} \varrho + \dots$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau(m)}{m^{1+\varrho}} = \frac{\pi}{\varrho} + K + \dots,$$

więc otrzymamy:

$$\Phi(1+\varrho) = \frac{6}{\pi \varrho} + \left(\frac{6}{\pi^2} K - \frac{72}{\pi^2} F \right) + \dots$$

(44)

Z drugiej zaś strony, dla $\varrho > 0$ mamy tożsamość:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\omega}(n)}{n^{1+\varrho}} = \frac{6}{\pi \varrho} + \frac{6}{\pi} + (1+\varrho) \int_1^{\infty} \frac{r(u)}{u^{2+\varrho}} du,$$

skąd:

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\omega}(n)}{n^{1+\varrho}} - \frac{6}{\pi \varrho} \right) = \frac{6}{\pi} + \int_1^{\infty} \frac{r(u)}{u^2} du = D;$$

porównyując to z otrzymanem wyżej rozwinięciem funkcji $\Phi(1+\varrho)$, znajdziemy:

$$D = \frac{6}{\pi^2} K - \frac{72}{\pi^2} F.$$

W podobny sposób, jakieśmy znaleźli wyrażenie dla sumy $\sum \frac{\bar{\omega}(n)}{n}$, możemy też znaleźć:

$$(13) \dots \sum_{n>0}^{\infty} \frac{\bar{\omega}(2m+1)}{2m+1} = \frac{4}{\pi} \log z + D' + O\left(\frac{\log z}{\sqrt{z}}\right),$$

gdzie D' jest pewną stałą, którą zaraz wyznaczymy

Napisany przed chwilą wzór oraz tożsamość

$$\sum_{n>0}^{\infty} \frac{\bar{\omega}(n)}{n} = \sum_{n>0}^{\infty} \frac{\bar{\omega}(2n+1)}{2n+1} + \frac{1}{2} \sum_{n>0}^{\infty} \frac{\bar{\omega}(2n+1)}{2n+1}$$

[$\bar{\omega}(2n)$ jest bowiem różne od zera tylko przy nieparzystym n i przytem $\bar{\omega}(4n+2) = \bar{\omega}(2n+1)$], dają nam:

$$\sum_{n>0}^{\infty} \frac{\bar{\omega}(n)}{n} = \frac{6}{\pi} \log z + \frac{3}{2} D' - \frac{2}{\pi} \log 2 + O\left(\frac{\log z}{\sqrt{z}}\right),$$

skąd, porównyując z otrzymanem wyżej wyrażeniem dla tejże sumy, znajdziemy:

$$D' = \frac{4}{\pi^2} K - \frac{48}{\pi^2} F + \frac{4}{3\pi} \log 2.$$

(45)

W ten sposób, na mocy równości (13), oraz wzoru (12) na sumę (11), otrzymamy już z łatwością:

$$\sum_{m \geq 0} \omega(4m+1) E \frac{1}{4} \left(\frac{x}{4m+1} - 1 \right) = \frac{2x}{3\pi} \log x + \left(\frac{K}{\pi} - \frac{12}{\pi^2} F + \frac{\log 2}{3} \right) \frac{x}{\pi} + O(\sqrt[3]{x^3} \log x). \quad (14)...$$

Dalej znajdziemy:

$$E \frac{\sqrt[3]{x}-1}{4} \sum_{m \geq 0} \omega(4m+1) = \frac{x}{\pi} + O(\sqrt[3]{x^3} \log x). \quad (15)...$$

Biorąc więc pod uwagę tożsamość (9) oraz wzory (10), (14) i (15), ostatecznie znajdziemy:

$$\sum_{n \geq 0} \tau([4n+1]^2) = \frac{x}{\pi} \log x + \left(\frac{C}{\pi} + \frac{K}{\pi^2} - \frac{12}{\pi^3} F + \frac{4}{3\pi} \log 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right) x + O(\sqrt[3]{x^3} \log x), \quad (16)...$$

skąd z łatwością możnaby obliczyć średnią wartość rozpatrywanej funkcji.

Wzór, podobny do napisanego przed chwilą, mianowicie

$$\sum_{n \geq 0} \tau([4n+3]^2) = \frac{x}{\pi} \log x + \left(\frac{C}{\pi} + \frac{K}{\pi^2} - \frac{12}{\pi^3} F + \frac{4}{3\pi} \log 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right) x + O(\sqrt[3]{x^3} \log x), \quad (17)...$$

znaleźlibyśmy z łatwością, wychodząc z tożsamości

$$\sum_{n \geq 0} \tau([4n+3]^2) = \sum_{n \geq 0} \tau(n^2) - \sum_{n \geq 0} \tau(n^2) - \sum_{n \geq 0} \tau([4n+1]^2).$$

ROZDZIAŁ VI.

Postaramy się obliczyć średnią wartość kwadratu funkcji liczbowej $\tau(n)$. W tym celu przedewszystkiem udowodnimy tożsamość:

$$\tau^2(n) = 4 \sum_{d:n} j(d) \tau(d^2), \quad (1)$$

w której $\sum_{d:n}$ oznacza sumę, rozciągniętą na wszystkie dzielniki liczby n , zaś funkcja $j(n)$ oznacza to samo, co i w rozdziale III-im. Dowód ten jednak poprzedzimy ogólniejszemi rozważaniami.

Bardzo wiele funkcji $f(n)$, spotykanych w Teorii liczb, posiada tę własność, iż dla liczb, względnie pierwszych, m i n mamy zawsze:

$$f(1) f(mn) = f(m) f(n).$$

O każdej funkcji, posiadającej powyższą własność, będziemy dla krótkości mówili, iż posiada ona własność A . Podamy kilka twierdzeń o funkcjach, posiadających własność A .

I. Każda liczba stała może być uważana za funkcję, posiadającą własność A .

II. Iloczyn kilku funkcji, z których każda posiada własność A , sam jest funkcją, posiadającą tę własność.

III. Potęga całkowita funkcji, posiadającej własność A , posiada tę własność.

Dowód wszystkich tych własności jest tak łatwy, iż go pomijamy. Przejdziemy do następnego, nieco trudniejszego, twierdzenia.

IV. Jeżeli funkcja $f(n)$ posiada własność A , zaś funkcja $\varphi(n)$ jest określona przez wzór

$$\varphi(n) = \sum_{d:n} f(d), \quad (n=1, 2, \dots)$$

to funkcja $\varphi(n)$ również posiada własność A .

W samej rzeczy, na zasadzie określenia funkcji $\varphi(n)$, możemy napisać:

$$\varphi(m) \varphi(n) = \sum_{d:m} f(d) \sum_{\delta:n} f(\delta).$$

Jeżeli liczby m i n są względnie pierwsze, to takimiż będą i ich dzielniki d i δ ; będziemy więc na mocy własności funkcji f mieli:

$$f(d)f(\delta) = f(1)f(d\delta);$$

możemy zatem napisać:

$$\varphi(m)\varphi(n) = f(1) \sum_{d:m} \sum_{\delta:n} f(d\delta).$$

Z łatwością można się przekonać, iż w sumie podwójnej po prawej stronie iloczyn $d\delta$ przebiega wszystkie dzielniki liczby $m \cdot n$ i przytem przyjmuje wartość każdego z nich raz tylko jeden; możemy więc ją zastąpić przez sumę

$$\sum_{d:mn} f(d) = \varphi(mn);$$

z określenia zaś funkcji $\varphi(n)$ wypada:

$$\varphi(1) = f(1);$$

w ten sposób otrzymujemy:

$$\varphi(m)\varphi(n) = \varphi(1)\varphi(mn),$$

c. b. d. d. Podamy jeszcze dwa twierdzenia:

V. Jeżeli $f(n)$ posiada własność A, oraz

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

jest rozkładem liczby n na czynniki pierwsze, to będziemy mieli:

$$[f(1)]^{k-1} f(n) = f(p_1^{\alpha_1}) f(p_2^{\alpha_2}) \dots f(p_k^{\alpha_k}).$$

VI. Jeżeli $f(n)$ posiada własność A, to funkcja $\theta(n) = f(n)^2$ również posiada własność A.

Dowody obu tych twierdzeń pomijamy, gdyż są bardzo łatwe.

Funkcja $j(n)$, jak łatwo się o tem można przekonać, wychodząc z jej określenia, posiada własność A, posiada ją więc i funkcja $4j(n)$ (wedle I i II).

Napiszemy twierdzenie J a c o b i' e g o w postaci

$$\tau(n) = \sum_{d:n} 4j(d);$$

na mocy tego, cośmy rzekli przed chwilą o funkcji $4j(n)$, oraz twierdzenia IV, wnosimy, iż funkcja $\tau(n)$ posiada własność A.

Założmy

$$f(n) = 4j(n)\tau(n^2);$$

na mocy twierdzeń VI i II przekonamy się, iż funkcja $f(n)$ posiada własność A. Posiada ją więc i funkcja

$$\varphi(n) = \sum_{d:n} f(d)$$

na mocy twierdzenia IV.

Tożsamość (1), o dowód której chodzi, możemy napisać w postaci:

$$\tau^2(n) = \varphi(n);$$

obie jej strony są funkcjami, posiadającymi własność A (funkcja $\tau^2(n)$ posiada ją na mocy III).

Na mocy twierdzenia V z łatwością widzimy, iż tożsamość ta będzie udowodniona dla wszelkich n , jeżeli tylko zostanie wykazana dla

$$n = p^a \quad (a = 0, 1, 2, \dots),$$

gdzie p jest liczbą pierwszą.

Rozważmy osobno następujące przypadki:

1) Niech $n = p^a$, gdzie p jest liczbą pierwszą kształtu $4k+1$.

Na mocy twierdzenia J a c o b i' e g o znajdziemy z łatwością w tym przypadku:

$$\tau^2(n) = 16(a+1)^2,$$

zaś dla sumy

$$\sum_{d:n} j(d)\tau(d^2)$$

otrzymamy wartość:

$$\tau(1) + \tau(p^2) + \dots + \tau(p^{2a}) = 4[1 + 3 + \dots + (2a+1)] = 4(a+1)^2.$$

2) Niechaj $n = p^a$, gdzie p oznacza liczbę pierwszą kształtu $4k + 3$. Jeśli a jest liczbą nieparzystą, to

$$\tau^2(n) = 0,$$

oraz

$$\sum_{d:n} j(d) \tau(d^2) = \tau(1) - \tau(p^2) + \tau(p^4) - \dots - \tau(p^{2a}) \\ = 4[1 - 1 + 1 - \dots - 1] = 0;$$

przy a zaś parzystym:

$$\tau^2(n) = 16,$$

oraz:

$$\sum_{d:n} j(d) \tau(d^2) = \tau(1) - \tau(p^2) + \dots + \tau(p^{2a}) \\ = 4[1 - 1 + \dots + 1] = 4.$$

3) Niech będzie $n = 2^a$. Mamy w tym przypadku:

$$\tau^2(n) = 16,$$

oraz:

$$\sum_{d:n} j(d) \tau(d^2) = \tau(1) = 4.$$

Tożsamość (1) została zatem udowodniona.

Kładąc w niej na n wartości $1, 2, \dots, E x$ i sumując, otrzymamy:

$$\sum_{n>0} \tau^2(n) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \theta(n) E \frac{x}{n}, \quad \dots (2)$$

jeśli oznaczymy $\theta(n) = j(n) \tau(n^2)$.

Użyjemy dalej tożsamości:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta(n) E \frac{x}{n} = \sum_{n>0} \varphi\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{n>0} \theta(n) E \frac{x}{n} - \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{x^3}}\right) \cdot E \sqrt{x}, \quad \dots (3)$$

gdzie

$$\varphi(x) = \sum_{n>0} \theta(n),$$

(50)

którą z łatwością otrzymać można, zważywszy, iż sumę

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta(n) E \frac{x}{n}$$

rozpatrywać możemy, jako sumę podwójną

$$\sum_{m,n} \theta(n),$$

gdzie obszar sumowania jest wyznaczony przez nierówności:

$$m > 0, \quad n > 0, \quad mn \leq 0,$$

rozkładając obszar ten na dwa, tak, iżby w jednym z nich było $n \leq \sqrt[4]{x}$, w drugim zaś $n > \sqrt[4]{x}$ i obliczając sumę dla każdego z otrzymanych w ten sposób obszarów oddzielnie.¹⁾

Mamy oczywiście

$$\sum_{n>0} \theta(n) = \sum_{n \leq \frac{x-1}{4}} \tau([4n+1]^2) - \sum_{n \geq 0} \tau([4n+3]^2),$$

skąd, na mocy wzorów (16) i (17) rozdziału poprzedzającego, możemy napisać

$$\sum_{n>0} \theta(n) = x + O\left(\frac{1}{\sqrt{x^2} \log x}\right)$$

i stąd już z łatwością znajdziemy (na mocy (3):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta(n) E \frac{x}{n} = x \sum_{n>0} \frac{1}{n} + x \sum_{n>0} \frac{\theta(n)}{n} - x + O\left(\frac{1}{\sqrt{x^3} \log x}\right). \quad \dots (4)$$

¹⁾ Porówn. V. r. u. a. M. Bd. 126) str. 244 wzór (1) przy $f(m, n) = \theta(n)$, oraz: Dirichlet, Ueber die Bestimmung der mittl. Werthe in der Zahlentheorie § 2 wzór (b).

Mamy:

$$\sum_{n>0} \frac{1}{n} = \frac{1}{4} \log x + C + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right). \quad \dots(5)$$

Zajmijmy się teraz obliczeniem sumy $\sum_{n>0} \frac{\theta(n)}{n}$.

Drogą, całkiem analogiczną do użytej przy obliczaniu sumy $\sum \frac{\bar{\omega}(n)}{n}$ (w rozdziale poprzedzającym), znajdziemy:

$$\sum_{n>0} \frac{\theta(n)}{n} = \log z + G + O\left(\frac{\log z}{\sqrt{z}}\right), \quad \dots(6)$$

gdzie stałą G wyznaczmy, jako współczynnik przy z^0 w rozwinięciu według potęg wielkości z funkcji

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta(n)}{n^{1+e}}.$$

Rozwinięcie takie otrzymamy z tożsamości

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta(n)}{n^{1+e}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{j(k)}{k^{1+e}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{\omega}(2n+1)}{(2n+1)^{1+e}},$$

którą wyprowadzimy, wychodząc z określenia funkcji $\theta(n)$, biorąc pod uwagę tożsamość (1) oraz własność (3) w Rozdz. V.

Mamy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{j(k)}{k^{1+e}} = \frac{\pi}{4} - He + \dots; \left(H = \frac{\pi C - K}{4}\right).$$

Dalej, z tożsamości

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\omega}(n)}{n^{1+e}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{\omega}(2n+1)}{(2n+1)^{1+e}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\omega}(2n)}{(2n)^{1+e}},$$

na mocy własności

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(4n+2) &= \bar{\omega}(2n+1), \\ \bar{\omega}(4n) &= 0, \end{aligned}$$

wyprowadzimy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\omega}(n)}{n^{1+e}} = \left(1 + \frac{1}{2^{1+e}}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\omega}(2n+1)}{(2n+1)^{1+e}},$$

skąd, biorąc pod uwagę rozwinięcia według potęg wielkości z funkcji

$$\frac{z^{1+e}}{1+z^{1+e}} = \frac{2}{3} + \frac{2\log 2}{9} z + \dots,$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\omega}(n)}{n^{1+e}} = \Phi(1+z)$$

(zob. rozdz. poprz.), znajdziemy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{\omega}(2n+1)}{(2n+1)^{1+e}} = \frac{4}{\pi z} + \left(\frac{4}{\pi^2} K - \frac{48}{\pi^3} F + \frac{4}{3\pi} \log 2\right) + \dots$$

W ten sposób znajdujemy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta(n)}{n^{1+e}} = \frac{1}{z} + \left(\frac{2K}{\pi} - C - \frac{12}{\pi^2} F + \frac{1}{3} \log 2\right) + \dots,$$

skąd:

$$G = \frac{2K}{\pi} - C - \frac{12}{\pi^2} F + \frac{1}{3} \log 2.$$

Kładąc obecnie we wzorze (6) $z = \sqrt[4]{x}$ i biorąc jeszcze pod uwagę wzór (5), na zasadzie wzoru (4), otrzymamy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta(n) \frac{x}{n} = x \log x + \left(\frac{2K}{\pi} - \frac{12}{\pi^2} F + \frac{1}{3} \log 2 - 1\right) x + O(\sqrt[4]{x^3} \log x),$$

skąd ostatecznie na mocy (2):

$$\sum_{n>0} \tau^2(n) = 4x \log x + \left(\frac{8K}{\pi} - \frac{48}{\pi^2} F + \frac{4}{3} \log 2 - 4\right) x + O(\sqrt[4]{x^3} \log x) \dots(7)$$

i na średnią wartość funkcji $\tau^2(n)$ otrzymujemy:

$$M\tau^2(n) = 4 \log n + \frac{8K}{\pi} - \frac{48}{\pi^2} F + \frac{4}{3} \log 2;$$

godnem uwagi jest, iż, oprócz spotykanych już, nie wchodzi tu żadna nowa stała.

Uważamy jakąkolwiek funkcję liczbową $f(n)$ w przedziale $a < n < b$; przez ω oznaczmy średnią arytmetyczną wartości funkcji $f(n)$ w uważanym przedziale.

Im mniejsze będą wartości bezwzględne różnic

$$f(a+1) - \omega, f(a+2) - \omega, \dots, f(b) - \omega, (*)$$

tem mniejsze na ogół będą wahania funkcji $f(n)$ w przedziale (a, b) .

Funkcję symetryczną różnic (*):

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{b-a} [f(a+i) - \omega]^2}{b-a}} = Wf(n)_{a,b}$$

nazywać będziemy wahaniami średnimi funkcji $f(n)$ w przedziale (a, b)

W przypadku, kiedy liczby n, m i $\frac{n}{m}$ są bardzo wielkie, liczbę

$$Wf(n)_{n, n+m}$$

uważać można za wahanie średnie funkcji $f(n)$ w miejscu n (porówn. określenie Gaussa wartości średniej funkcji $f(n)$ w miejscu n).

Nie wdając się na tem miejscu w bardziej szczegółowe badania własności wahań średnich, znajdziemy wartość asymptotyczną na wahanie śred-

nie funkcji $\tau(n)$ w miejscu n , zakładając, że stosunek $\frac{\sqrt[4]{n^3 \log n}}{m}$ jest liczbą bardzo małą.

Na mocy wzoru (7) z łatwością znajdziemy wzór asymptotyczny:

$$W\tau(n) = 2\sqrt{\log n};$$

wahanie funkcji $\tau(n)$ zatem wzrasta w miarę postępowania w szeregu naturalnym, i to w stosunku prostym do pierwiastka kwadratowego z logarytmu liczby n .

TABLICA WARTOŚCI FUNKCYI $\tau(n)$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1	4	4	0	4	8	0	0	4	4
1	8	0	0	8	0	0	4	8	4	0
2	8	0	0	0	0	12	8	0	0	8
3	0	0	4	0	8	0	4	8	0	0
4	8	8	0	0	0	8	0	0	0	4
5	12	0	8	8	0	0	0	0	8	0
6	0	8	0	0	4	16	0	0	8	0
7	0	0	4	8	8	0	0	0	0	0
8	8	4	8	0	0	16	0	0	0	8
9	8	0	0	0	0	0	0	8	4	0
10	12	8	0	0	8	0	8	0	0	8
11	0	0	0	8	0	0	8	8	0	0
12	0	4	8	0	0	16	0	0	4	0
13	16	0	0	0	0	0	8	8	0	0
14	0	0	0	0	4	16	8	0	8	8
15	0	0	0	8	0	0	0	8	0	0
16	8	0	4	0	8	0	0	0	0	12
17	16	0	0	8	0	0	0	0	8	0
18	8	8	0	0	0	16	0	0	0	0
19	0	0	0	8	8	0	4	8	0	0
20	12	0	8	0	0	16	0	0	8	0
21	0	0	8	0	0	0	0	0	8	0
22	0	16	0	0	0	12	8	0	0	8
23	0	0	8	8	8	0	0	0	0	0
24	0	8	4	0	8	8	0	0	0	0

$$0 \leq n < 250.$$

$250 \leq n < 500.$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
25	16	0	0	0	0	0	4	8	0	0
26	16	8	0	0	0	16	0	0	0	8
27	0	0	8	0	8	0	0	8	0	0
28	0	8	0	0	0	0	0	0	4	12
29	16	0	8	8	0	0	8	0	8	0
30	0	0	0	0	0	16	8	0	0	0
31	0	0	0	8	8	0	0	8	0	0
32	8	0	0	0	4	24	0	0	8	0
33	0	0	0	8	0	0	0	8	12	0
34	16	0	0	0	0	0	8	0	0	8
35	0	0	0	8	0	0	8	0	0	0
36	8	4	8	0	0	16	0	0	0	8
37	16	0	0	8	0	0	0	16	0	0
38	0	0	0	0	0	0	8	0	8	8
39	0	0	4	0	8	0	0	8	0	0
40	12	8	0	0	8	8	0	0	0	8
41	16	0	0	0	0	0	8	0	0	0
42	0	8	0	0	8	24	0	0	0	0
43	0	0	0	8	0	0	8	0	0	0
44	0	4	16	0	0	16	0	0	0	8
45	12	0	8	0	0	0	0	8	8	0
46	0	8	0	0	8	0	8	0	8	0
47	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0
48	0	16	8	0	4	16	0	0	8	0
49	8	0	0	16	0	0	0	0	0	0

 $250 \leq n < 500.$

(56)

 $500 \leq n < 750.$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	16	0	0	0	0	16	0	0	0	8
51	0	0	4	0	8	0	0	0	0	0
52	16	8	8	0	0	0	0	0	0	4
53	16	0	0	16	0	0	0	0	8	0
54	0	8	0	0	8	16	0	0	8	8
55	0	0	0	0	8	0	0	8	0	0
56	0	0	8	0	0	16	0	0	0	8
57	0	0	0	0	0	0	4	8	12	0
58	16	0	0	0	8	16	8	0	0	0
59	0	0	8	8	0	0	8	0	0	0
60	0	8	0	0	0	8	0	0	0	0
61	16	0	8	8	0	0	0	8	0	0
62	0	0	0	0	0	20	8	0	8	16
63	0	0	0	0	8	0	0	8	0	0
64	8	8	0	0	0	0	0	0	4	0
65	24	0	0	8	0	0	8	8	0	0
66	0	8	0	0	0	0	8	0	0	0
67	0	0	0	8	8	0	12	8	0	0
68	16	0	0	0	0	16	0	0	0	16
69	0	0	8	0	0	0	0	16	8	0
70	0	8	0	0	0	0	8	0	0	8
71	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0
72	8	0	4	0	8	24	0	0	0	4
73	16	0	0	8	0	0	0	0	8	0
74	16	0	0	0	0	16	8	0	0	0

 $500 \leq n < 750.$

(57)

$750 \leq n < 1000.$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
75	0	0	0	0	16	0	0	8	0	0
76	0	8	0	0	0	16	0	0	0	8
77	0	0	8	8	0	0	8	0	8	0
78	0	0	0	0	4	16	0	0	8	0
79	0	0	0	16	8	0	0	8	0	0
80	12	8	8	0	0	0	0	0	8	8
81	8	0	0	0	0	0	0	0	8	0
82	16	8	0	0	0	0	0	0	0	8
83	0	0	8	8	0	0	0	0	0	0
84	0	12	8	0	0	24	0	0	8	0
85	0	0	0	8	0	24	0	8	0	0
86	0	0	0	0	0	16	8	0	0	0
87	0	0	8	8	0	0	0	8	0	0
88	0	8	4	0	16	0	0	0	0	0
89	16	0	0	0	0	0	0	0	8	0
90	12	16	0	0	8	16	0	0	0	8
91	0	0	0	0	8	0	8	0	0	0
92	0	0	8	0	0	24	0	0	8	8
93	0	0	8	0	0	0	8	8	0	0
94	0	8	0	0	0	0	0	0	0	16
95	0	0	0	8	8	0	0	0	0	0
96	0	4	16	0	8	16	0	0	4	0
97	16	0	0	0	0	0	8	8	0	0
98	8	8	0	0	0	16	16	0	0	0
99	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0

 $750 \leq n < 1000.$

 TABLICA WARTOŚCI FUNKCJI $\tau_1(n)$ dla $n < 100$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	144	96	96	112	192	192	24	144	312	160
2	144	256	288	192	96	248	336	320	192	240
3	576	256	24	384	432	384	312	304	480	448
4	144	336	768	352	288	624	576	384	96	456
5	744	576	336	432	960	576	192	640	720	480
6	576	496	768	832	24	672	1152	544	432	768
7	1152	576	312	592	912	992	480	768	1344	640
8	144	968	1008	672	768	864	1056	960	288	720
9	1872	896	576	1024	1152	960	96	784	1368	1248

 TABLICA WARTOŚCI FUNKCJI $l(m, a)$ DLA $m \leq 10$.

$\begin{smallmatrix} a \\ m \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	2	—	—	—	—	—	—	—	—
3	4	4	1	—	—	—	—	—	—	—
4	8	4	0	4	—	—	—	—	—	—
5	4	4	4	4	9	—	—	—	—	—
6	8	8	2	8	8	2	—	—	—	—
7	8	8	8	8	8	8	1	—	—	—
8	16	16	0	8	16	0	0	8	—	—
9	12	12	0	12	12	0	12	12	9	—
10	8	8	8	8	18	8	8	8	8	18.