Jeżeli w przejściu do nieskończoności zatrzymamy się na liczbie oznaczonej skończonej ω, będzie:

$$F\mathfrak{A}^{(a)}(x) - e^{-\omega}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(F(a) + \frac{a_{1\,\mu}(a)}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots\right.$$

$$\left. + \frac{a_{\mu\,\mu}(a)}{\underline{|\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\right)\frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\mu+1}}$$

$$= F\mathfrak{A}^{(a)}(x) - \int_0^{\omega} e^{-\omega}\,d\omega\,.\,F(a) - \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\int_0^{\infty} e^{-\omega} f_{\nu}(\omega\,|\,a)\,d\omega}{\underline{|\nu}}F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu}$$

$$= F\mathfrak{A}^{(a)}(x) - \int_0^{\omega} e^{-\omega}\,\mathfrak{F}(x\,|\,f,\omega)\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int^{(\mathfrak{C})}\frac{F(a+(x-a)\,f(y\,|\,a))}{y-u}\,e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}\,dy\,,$$

gdzie $\mathfrak{C}$ oznacza okrąg koła o środku w punkcie a i promieniu $\frac{1}{2}r$ $(r>1)$; równość ta zachodzi, o ile x jest punktem takim, że $a+(x-a)\,f(y\,|\,a)$ należy do wnętrza gwiazdy $\mathfrak{A}^{(a)}$, gdy y opisuje okrąg $\mathfrak{C}$ [1]).

---

[1]) Prócz prac wskazanych na początku tej Noty, po ogłoszeniu Noty trzeciej ukazały się jeszcze następujące prace, odnoszące się do przedmiotu mej pracy: Le Roy, Sur les séries divergentes; rectification à une note précédente (C. R. 5. VI. 1900). Le Roy, Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor (Ann. de la Fac. des sciences de Toulouse 2. 1900, p. 322—328). E. Borel, Les séries absolument sommables, les séries et le prolongement analytique (C. R. 19. XI. 1900). E. Borel, Sur la généralisation du prolongement analytique (C. R. 21. VII. 1902). P. Painlevé, Observations sur la communication précédente (C. R. 21. VII. 1902). E. Borel, Leçons sur les séries à termes positifs. Paris 1902. Chap. VI, p. 70.

A. PRZEBORSKI,

O CAŁKACH NIEANALITYCZNYCH

równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego.

W artykule „O całkach nieanalitycznych równań różniczkowych liniowych o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego“ [1]), dowiodłem twierdzenia, że wszelkie równanie liniowe o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego

$$A_0(x_0, x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial x_n}{\partial x_0} + \ldots + A_{n-1}(x_0, x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}} = A_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)\,,$$

gdzie $A_0, A_1, \ldots, A_n$ są funkcye analityczne w pewnym obszarze, posiada w tym obszarze, oprócz całek analitycznych, i całki nieanalityczne.

W artykule niniejszym dowiodę analogicznego twierdzenia i dla równania nieliniowego o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego:

$$(1) \qquad F(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0\,,$$

gdzie $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$, przyczem F jest funkcyą analityczną w pewnym obszarze (ε)

Metoda, którą będę się posługiwał, jest uogólnieniem metody, podanej w poprzednim artykule.

---

[1]) Prace matematyczno-fizyczne, tom XVII, str. 123.

Zakładając, że funkcya $\frac{\partial F}{\partial p_n}$ nie jest zerem w obszarze (ε), znajdziemy całkę zupełną równania (1), całkując układ równań zwyczajnych

$$\frac{dz}{dx_n} = A_0(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n), \quad \frac{dx_1}{dx_n} = A_1(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n),$$

$$(2) \qquad \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = A_{n-1}(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n),$$

$$\frac{dp_1}{dx_n} = B_1(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n), \quad \frac{dp_2}{dx_n} = B_2(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n),$$

$$\frac{dp_n}{dx_n} = B_n(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n),$$

gdzie:

$$A_0(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_i} p_i}{\frac{\partial F}{\partial p_n}}, \quad A_k(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = \frac{\frac{\partial F}{\partial p_k}}{\frac{\partial F}{\partial p_n}},$$

$$B_h(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_h} + \frac{\partial F}{\partial z} p_h}{\frac{\partial F}{\partial p_n}}.$$

$$(k = 1, 2 \ldots n-1; \; h = 1, 2 \ldots n)$$

Wiadomem jest, że układ równań (2) ma układ całek:

$$(3) \qquad L(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = c, \quad L_1(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = c_1, \ldots$$

$$L_{2n-1}(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = c_{2n-1},$$

gdzie $c, c_1, \ldots, c_{2n-1}$ są stałe dowolne, a $L, L_1, \ldots, L_{2n-1}$ funkcye analityczne w pewnym obszarze (ε_1), zawartym w (ε), czyniące zadość warunkowi, że wyznacznik Jacobi'ego

$$(4) \qquad D = \frac{\partial(L, L_1, \ldots, L_{2n-1})}{\partial(z, x_1, \ldots, x_{n-1}, p_1, \ldots, p_n)}$$

w tym obszarze nie jest zerem.

Układem całek równań (2) będzie i układ równań

$$(5) \qquad L - \omega(L_{n+1}, L_{n+2}, \ldots, L_{2n-1}) = 0, \quad L_1(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = c_1, \ldots$$

$$L_{2n-1}(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = c_{2n-1},$$

gdzie ω jest funkcyą dowolną, ciągłą, mającą pochodne cząstkowe rzędu pierwszego względem $L_{n+1}, L_{n+2}, \ldots, L_{2n-1}$.

Funkcyę ω wybierzemy w ten sposób, aby jakobian

$$(6) \qquad \Delta = \frac{\partial(L - \omega, L_1, \ldots, L_n)}{\partial(z, p_1, \ldots, p_n)}$$

nie był zerem w obszarze (ε_1).

Równocześnie skutkiem założenia (4) wyznacznik

$$(7) \qquad \frac{\partial(L - \omega, L_1, \ldots, L_{2n-1})}{\partial(z, x_1, \ldots, x_{n-1}, p_1, \ldots, p_n)}$$

też nie jest zerem w obszarze (ε_1).

Na mocy warunku (6) możemy wyznaczyć z równań

$$(8) \qquad L - \omega(L_{n+1}, \ldots, L_{2n-1}) = 0, \quad L_1 = c_1, \ldots L_n = c_n,$$

funkcye $z, p_1, \ldots, p_n$, przyczem wyznaczona w ten sposób funkcya z jest całką równania (1).

Niech rozwiązania równań (8) będą:

$$(9) \qquad z = P(x_1, \ldots, x_n), \quad p_1 = P_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, p_n = P_n(x_1, \ldots, x_n).$$

Postaramy się dowieść, że funkcye $P, P_1, \ldots, P_n$ będą funkcyami analitycznemi tylko pod warunkiem, że ω jest funkcyą analityczną.

Załóżmy więc, że funkcye $P, P_1, \ldots, P_n$ są **funkcyami analitycznemi** w pewnym obszarze (ε_2), zawartym w (ε_1).

Oznaczmy przez $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ funkcye **analityczne**, które otrzymamy, rugując za pomocą (9) z funkcyj $L, L_{n+1}, \ldots, L_{2n-1}$ wielkości $z, p_1, \ldots, p_n$ tak, że

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) \equiv L(x_1, \ldots, x_n, P(x_1, \ldots, x_n), P_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots P_n(x_1, \ldots, x_n)),$$

$$\lambda_k(x_1, \ldots, x_n) \equiv L_{n+k}(x_1, \ldots, x_n, P(x_1, \ldots, x_n), P_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots P_n(x_1, \ldots, x_n)).$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

Z powodu, że układ (9) jest rozwiązaniem równań (8), otrzymujemy **tożsamość**

$$(10) \qquad \lambda(x_1, \ldots, x_n) \equiv \omega(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}).$$

Na mocy warunku (4) łatwo dowieść, że układ równań

$$(11) \qquad \lambda_1(x_1, \ldots, x_n) = \lambda_1, \quad \lambda_2(x_1, \ldots, x_n) = \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) = \lambda_{n-1}$$

może być rozwiązany względem $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

Wyznaczając więc z równań (11) $x_1, \ldots, x_{n-1}$ i oznaczając te rozwiązania przez $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_{n-1}$, znajdziemy, że są one funkcyami analitycznemi względem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$.

Podstawiając w tożsamości (10) te wartości na $x_1, \ldots, x_{n-1}$ i oznaczając przez $\lambda^*(x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ funkcyę analityczną, którą otrzymamy, podstawiając $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_{n-1}$ zamiast $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ w funkcyi λ tak, że

$$\lambda^*(x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \equiv \lambda(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_{n-1}, x_n),$$

napiszemy tożsamość (10) w postaci:

$$\lambda^*(x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \equiv \omega(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}). \tag{12}$$

Nie trudno jednakże dowieść, że rugując za pomocą równań (11) z funkcyi $\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ wielkości $x_1, \ldots, x_{n-1}$, wyrugujemy też i wielkość x_n, innemi słowy dowieść, że funkcya λ^* nie zależy od x_n.

Istotnie łatwo widzieć, że funkcyę $\lambda^*(x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ otrzymaliśmy, rugując $z, p_1, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_{n-1}$ z funkcyi $L(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$ za pomocą równań (5), gdzie tylko zamiast $c_{n+1}, c_{n+2}, \ldots, c_{2n-1}$ podstawiliśmy $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$.

Lecz równania (5) są układem całek równań różniczkowych (2), zarazem i równanie

$$L = c$$

jest całką tychże równań (2); stąd wynika, że funkcye L, $L - \omega(L_{n+1}, \ldots, L_{2n-1})$, $L_1, \ldots, L_{2n-1}$ są funkcyami zależnemi względem $z, p_1, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_n$, a więc funkcya λ^* nie zależy od x_n.

W ten sposób doszliśmy do tożsamości

$$\lambda^*(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \equiv \omega(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}),$$

a że funkcya λ^* jest funkcyą analityczną, więc i funkcya ω, równa jej tożsamościowo, jest funkcyą analityczną.

A więc założenie, że znaleziona przez nas całka równania (1)

$$z = P(x_1, \ldots, x_n)$$

jest funkcyą analityczną, doprowadziło nas do wniosku koniecznego, że funkcya ω jest analityczną.

Jeżeli więc założymy, że funkcya ω nie jest analityczną, to z równań (8) otrzymamy nieanalityczną całkę równania (1).

W ten sposób dowiedliśmy następującego twierdzenia:

Wszelkie równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego

$$F(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0,$$

gdzie F jest funkcyą analityczną w pewnym obszarze (ε), oprócz całek analitycznych w obszarach, zawartych w (ε), posiada zawsze i całki nieanalityczne.

Za pomocą tej samej metody, którą posługiwałem się wyżej, łatwo dowieść następującego ogólniejszego twierdzenia:

Wszelki układ równań różniczkowych jednoczesnych o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego

$$F_1(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0, \quad F_2(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n), \ldots$$
$$F_m(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0,$$

gdzie funkcye $F_1, F_2, \ldots, F_m$ są analitycznemi w pewnym obszarze (ε), oprócz całek analitycznych w obszarach, zawartych w (ε), ma zawsze całki nieanalityczne.

Charków, w kwietniu 1906 r.