

nicht, wir wissen nicht, was für Abhängigkeit die Elemente einzelner Zustände verbindet, die im obigen, physikalischen Sinne übereinstimmend sind.

Sicher ist nur, dass diese Abhängigkeit keine einfache Proportionalität zu den Elementen bekannter, physikalisch übereinstimmender Zustände ist, wie z. B. des kritischen Zustandes.

Um diese Abhängigkeit analytisch definieren zu können, muss man sehr wahrscheinlich noch eine zweite Serie übereinstimmender Elemente hinzuziehen und die Elemente: p, v, T nicht von der absoluten Null messen, sondern von einem der übereinstimmenden Punkte auf der Isothermenfläche. Zu solcher Idee kam Brillouin; Fran Meyer führte diesbezügliche Berechnungen durch, jedoch ohne sicheren Erfolg und bei willkürlicher Annahme des zweiten, übereinstimmenden (nicht physikalisch) Punktes; als offener Freund dieser Idee bekannte sich Berthelot.

Ein Hinderniss auf dem Wege zur gründlichen Prüfung des Gesetzes von übereinstimmenden Zuständen in dieser neueren Gestalt bildet der Mangel an Versuchen über die Elemente der physikalisch übereinstimmenden Zustände.

Solange wir keine Daten über charakteristische Punkte haben, bleibt die Hypothese der übereinstimmenden Zustände eine offene Frage.

G. MITTAG-LEFFLER,

O PRZEDSTAWIENIU ANALITYCZNEJ JEDNOZNACZNEJ GAŁĘZI FUNKCYI ANALITYCZNEJ.

~~~~~  
NOTA CZWARTA. <sup>1)</sup>

Zagadnienia, rozstrząsane przeze mnie w poprzedzających częściach tej rozprawy <sup>2)</sup>, dają się sprowadzić do jednego źródła, którem jest problemat, postawiony przez Abela w dzienniku Crellego (2, str. 286) <sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> Patrz Prace mat.-fizycz., t. 16, str. 157—232.

<sup>2)</sup> Po ogłoszeniu Noty trzeciej, pojawiły się następujące prace, mające związek z niniejszą rozprawą:

Z. G. de Galdeano. Estudios de critica y pedagogia matematica. Zaragoza 1900, p. 133. C. A. Dell'Agnoia. Sulle serie di polinomi che rappresentano un ramo di funzione analitica monogena (Annali di mat. (3) 6. 1901, p. 227). E. Borel. Sur les series de polynomes et de fractions rationnelles (Acta math. 24. 1901, p. 309). C. A. Dell'Agnoia. Sulle serie di polinomi (Atti del R. Ist. Veneto 60, parte 2. 1900—01, p. 171). E. Borel. Leçons sur les series divergentes. Paris 1901. Chap. IV, p. 156—182. S. Pincherle — U. Amaldi. Le operazioni distributive e loro applicazioni all'analisi. Bologna 1901 §§ 99, 214, 215. E. Lindelöf. Sur le prolongement analytique (Bull. de la Soc. math. de France. 29. 1901, p. 157). J. Hadamard. La serie de Taylor et son prolongement analytique (Scientia № 12. 1901. Chap. VI, pp. 50, 63, 85, 89, 91, 98). G. Vivanti. Teoria delle funzioni analitiche. Milano 1901, pp. 275, 279—304. E. Phragmén.

Sur le domaine de convergence de l'intégrale infinie  $\int_0^{\infty} F(ax)e^{-a} da$  (C. R. 10 juin 1901).

Lucius Hann: Über Borels Verallgemeinerung des Grenzbegriffes (Monatshefte für Math. u. Phys. 12. 1901). I. Fredholm. Sur la méthode de prolongement analytique de M. Mittag-Leffler (Ofvers. af. K. Vet.-Akad. förh. 1901). P. Painlevé. Sur le développement des fonctions analytiques en série de polynomes (C. R. 7 juillet 1902). Patrz także artykuły G. Mittag-Lefflera: Ueber eine Verallgemeinerung der Taylor'schen Reihe (Gött. Nachr. 1900), On multiply infinite series and on an extension of Taylor's series (Proc. of London Math. Soc. 32. 1900), Analytische Darstellung monogener Functionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen (Jahresb. d. deutsch. Math. Ver. 9. 1901), Sur une formule de M. Fredholm (C. R. 25 mars 1901), Sur la série de Bernoulli (C. R. 10 juin 1901), Un critère pour reconnaître les points singuliers de la branche uniforme d'une fonction monogène (C. R. 12 août 1901), Sur le terme complémentaire d'un développement de la branche uniforme d'une fonction monogène dans le cas où ce développement possède un étoile de convergence (Ofvers. af. K. Vet.-Akad. förh. 1901).

<sup>3)</sup> Oeuvres, Nouvelle édition (Sylow et Lie) 1, p. 618.

„Zakładając, że szereg

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

jest zbieżny dla każdej wartości dodatniej mniejszej od  $r$ , znaleźć granicę, do której zmierza wartość funkcji  $f(x)$ , gdy  $x$  dąży do wartości  $r$ .

A bel przyjmuje oczywiście, że  $r$  jest promieniem zbieżności szeregu. Z dzisiejszych naszych wiadomości wypływa, że istnieje głęboka różnica pomiędzy przypadkiem, w którym  $r$  jest punktem osobliwym, a przypadkiem w którym  $r$  jest punktem zwykłym (regularnym) funkcji  $f(x)$ . Do tej pory zajmowano się tylko tym ostatnim przypadkiem.

Wiadomo już z początków Rachunku nieskończonościowego, że nawet w tym przypadku szereg  $c_0 + c_1 r + c_2 r^2 + c_3 r^3 + \dots$  nieskończenie jest zbieżny. Rozważmy na przykład wzór

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots; \quad x = 1,$$

który był niegdyś przedmiotem tyłu rozstrząsań. Problemat A bel a w przypadku, gdy  $x = r$  jest punktem zwykłym, polega na zastąpieniu wyrażenia  $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$ , stosownego w ogóle jedynie dla  $0 \leq x < r$ , innym wyrażeniem, utworzonym przy pomocy stałych  $c_0, c_1, c_2, \dots$ , lecz stosownym dla  $0 \leq x \leq r$ . Stawiając tak zagadnienie, dochodzimy naturalnie do zagadnienia ogólniejszego, w którym idzie o zbudowanieżądanego wyrażenia w ten sposób, aby zachodziło dla wszystkich punktów zwykłych funkcji  $f(x)$ , położonych na osi rzeczywistej od  $x=0$  do pierwszego punktu osobliwego. Stając na tem stanowisku, musimy oczywiście pozbyć się warunku ściśniającego, iż zmienna  $x$  przebiega jedynie wartości rzeczywiste, i winniśmy żądać od szukanego wyrażenia, aby przedstawiało funkcję nie tylko na osi rzeczywistej, lecz i na każdym innym wektorze, idącym ze środka  $x=0$  aż do pierwszego punktu osobliwego. Inaczej mówiąc, należy żądać, aby szukane wyrażenie przedstawiało funkcję wewnątrz gwiazdy głównej<sup>1)</sup> stałych  $c_0, |1c_1, |2c_2, |3c_3, \dots$

Rozwiązanie zupełne tego zagadnienia podałem w trzech Notach poprzednich. Rozpatrywane z nieco odmiennego punktu widzenia, zagadnienie to należy do tych, które Weierstrass uczyniłbył podstawą przyszłego rozwoju teorii funkcji. Wiadomo, że ten wielki analista za cel idealny teorii funkcji uważał znalezienie, dla możliwie rozległych klas funkcji, takich wyrażeń arytmetycznych, które są stosowne i zachowują

<sup>1)</sup> Określenie gwiazdy głównej patrz Nota I (Prace mat.-fizycz., t. 16, str. 161), Nota II (tamże str. 192).

tę samą formę w całym obszarze istnienia funkcji. Możemy w tym względzie powołać się na ustęp, znajdujący się w odpisie<sup>1)</sup> komunikatu Weierstrassa w końcu IX-go dziesiątka zeszłego stulecia w seminarium berlińskim, gdy zdawał sprawę z rozmaitych prac nad tym przedmiotem: „Weiter ist man bis heut noch nicht gekommen, aber es scheint, als ob das Ziel, welches ich vor langen Jahren der Functionentheorie steckte, nicht unerreichbar sei: dass nämlich überall, wo zwischen mehreren Veränderlichen Zusammenhang besteht, es möglich sein müsse, ihn in beständig gültiger Form darzustellen“<sup>2)</sup>. Najogólniejszy związek analityczny w pojęciu Weierstrassa pomiędzy dwiema zmiennymi może być sprowadzony do przypadku, w którym jedna zmienna wyraża się przez szereg potęg drugiej. Z punktu widzenia Weierstrassa, mój problemat, po zdefiniowaniu możliwie rozległej jednoznacznej gałęzi funkcji monogenicznej, sprowadza się do znalezienia wyrażenia arytmetycznego tej gałęzi, posiadającego tę cechę, że jest stosowne i zachowuje swą formę w całym obszarze gałęzi.

W poprzednich częściach tej rozprawy stosowałem jedynie najelementarniejsze rozważania w szeregach potęgowych i nie uciekałem się wcale do całki Cauchy'ego. Tymczasem, oparcie się na teorii całkowania pomiędzy granicami urojonymi daje tę korzyść, że uzyskujemy wyraz dopełniający oznaczony, zupełnie analogiczny do wyrazu, jaki otrzymał był Cauchy dla przypadku rozwinięcia według szeregu Taylora. Przytem dowód naszych twierdzeń staje się wtedy nadzwyczaj prostym. To właśnie chcę pokazać w pierwszym paragrafie tej rozprawy.

Wychodząc z całki Cauchy'ego, otrzymuje się jeszcze w sposób nadzwyczaj prosty wyrażenie gałęzi funkcji przy pomocy sławnej całki Laplace'a<sup>3)</sup>, która była przedmiotem jednej z najbardziej pobudzających rozpraw A bel a<sup>4)</sup>, a której niezmiernie ciekawe nowe własności odkrył w ostatnich latach Borel<sup>5)</sup>.

Borel wykazał, że całka Laplace'a — A bel a jest stosowna w gwiazdzie, którą nazywa wielokątem sumowalności Phrag-

<sup>1)</sup> Zawdzięczamy ten odpis p. Karolowi Itzigsohnowi w Berlinie.

<sup>2)</sup> „Dalej nie doszliśmy do dziś dnia, ale zdaje się, że cel, jaki przed wieloma laty postawiłem teorii funkcji, nie jest nieosiągalny, mianowicie, że wszędzie, gdzie pomiędzy zmiennymi zachodzi związek, musi być możliwe przedstawienie go w formie stale stosownej“.

<sup>3)</sup> Théorie analytique des probabilités (Oeuvres 7. Livre premier, Seconde partie).

<sup>4)</sup> Sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes (Sylov et Lie, Oeuvres d'A bel 2, p. 67—71).

<sup>5)</sup> Leçons sur les séries divergentes. Paris 1901.

Prace mat.-fizycz., t. XVII.

mén<sup>1)</sup> znów wykazał, że ten wielokąt sumowalności jest równocześnie gwiazdą zbieżności. Dowiodę w § 2, że przy pomocy nieznaczonej modyfikacji otrzymać można całkę zbieżności  $A^{(a)}$ , która zmierza nieograniczenie do gwiazdy głównej  $A$ , gdy  $a$  dąży do zera. Dla  $a=1$  gwiazda ta staje się wielokątem sumowalności Borela.

# § 1.

Niechaj

$$(1) \quad v = f(u | a)$$

będzie przekształceniem dwujednoznaczem, przekształcającem koło  $|u| < R$ ,  $R > 1$  na powierzchnię skończoną i jednospójną, i założymy, że punkty  $u=0$ ,  $v=0$  oraz  $u=1$ ,  $v=1$  odpowiadają sobie wzajemnie.

Niechaj będzie jeszcze:

$$(2) \quad f(u | 1) = u.$$

Rozważmy całkę

$$(3) \quad \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy,$$

gdzie  $S$  oznacza kontur powierzchni jednospójnej, dla której tak  $f(y|a)$  jak i  $F(a + (x-a)f(y|a))$  są funkcjami monogenicznymi i regularnymi zmiennej  $y$ , kontur zawierający w swem wnętrzu dwa punkty  $y=0$ ,  $y=u$ . Dajmy, że całka jest wzięta w zwrocie dodatnim.

Mamy:

$$(4) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy \\ &= F(a + (x-a)f(u|a)) + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy, \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Sur le domaine de convergence de l'intégrale infinie  $\int_0^\infty F(ax) e^{-ax} da$  (C. R. 10 juin 1901).

gdzie całka  $\int^{(0)}$  jest wzięta w zwrocie dodatnim około punktu  $y=0$ . Połóżmy:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F^{(0)}(a) + \frac{1}{1!} F^{(1)}(a)(x-a)f(y|a) + \frac{1}{2!} F^{(2)}(a)(x-a)^2 f(y|a)^2 + \dots}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy. \end{aligned}$$

Założyliśmy, że  $\frac{1}{y} f(y|a)$  jest skończone dla  $y=0$ , przeto:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(u + (x-a)f(y|a))}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F^{(0)}(a) + \frac{1}{1!} F^{(1)}(a)(x-a)f(y|a) + \frac{1}{2!} F^{(2)}(a)(x-a)^2 f(y|a)^2 + \dots + \frac{1}{n!} F^{(n)}(a)(x-a)^n f(y|a)^n}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy. \end{aligned} \right.$$

Kładąc:

$$(6) \quad g_{\mu n}(u|a) = -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{(f(y|a))^\mu}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy,$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy \\ (7) \quad &= g_{0n}(u|a) F(a) + \frac{g_{1n}(u|a)}{1!} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{g_{2n}(u|a)}{2!} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \dots \\ & \dots + \frac{g_{nn}(u|a)}{n!} F^{(n)}(a)(x-a)^n. \end{aligned}$$

Przypominając sobie odpowiedniość pomiędzy punktami  $u=0$ ,  $v=0$  i kładąc:

$$(8) \quad D^{(n)} f^\mu = [D^{(n)} (f(y|a))^n]_{y=0},$$

widzimy, że:

$$(9) \quad g_{\mu n}(u|a) = \frac{D^{(n)} f^\mu}{|\mu|} u^\mu + \frac{D^{(n+1)} f^\mu}{|\mu+1|} u^{\mu+1} + \dots + \frac{D^{(n)} f^\mu}{|n|} u^n.$$

Mamy nadto:

$$(10) \quad g_{0n}(u|a) = 1, \quad g_{u0}(u|a) = 0.$$

Otrzymujemy tedy:

$$(11) \quad -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy$$

$$= F(a) + \sum_{\mu=1}^n \frac{1}{|\underline{\mu}|} \left( \frac{D^{(\mu)} f^\mu}{|\underline{\mu}|} u^\mu + \frac{D^{(\mu+1)} f^\mu}{|\underline{\mu+1}|} u^{\mu+1} + \dots + \frac{D^{(n)} f^\mu}{|\underline{n}|} u^n \right) F^{(\mu)}(a) (x-a)^\mu,$$

a na zasadzie wzoru (4):

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} & F(a + (x-a)f(u|a)) \\ &= F(a) + \sum_{\mu=1}^n \left( \frac{D^{(\mu)} f^\mu}{|\underline{\mu}|} u^\mu + \frac{D^{(\mu+1)} f^\mu}{|\underline{\mu+1}|} u^{\mu+1} + \dots + \frac{D^{(n)} f^\mu}{|\underline{n}|} u^n \right) F^{(\mu)}(x-a)^\mu \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy, \end{aligned} \right.$$

lub, porządkując wyrażenie (11) według potęg wielkości  $u$ :

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & F(a + (x-a)f(u|a)) \\ &= F(a) + \sum_{\mu=1}^n \frac{1}{|\underline{\mu}|} \left( \frac{D^{(\mu)} f}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a) (x-a) + \frac{D^{(\mu)} f^2}{|\underline{2}|} F^{(2)}(a) (x-a)^2 + \dots \right. \\ &+ \left. \frac{D^{(\mu)} f^\mu}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a) (x-a)^\mu \right) u^\mu + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy. \end{aligned} \right.$$

Kładąc  $u=1$  i wprowadzając:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} & a_{\mu n}(a) = -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(y|a)}{y-1} \left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} dy \\ &= \frac{D^{(\mu)} f^\mu}{|\underline{\mu}|} + \frac{D^{(\mu+1)} f^\mu}{|\underline{\mu+1}|} + \dots + \frac{D^{(n)} f^\mu}{|\underline{n}|}, \end{aligned} \right.$$

otrzymujemy wzór następujący:

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} & F(x) = F(a) + \frac{a_{1n}(a)}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a) (x-a) + \frac{a_{2n}(a)}{|\underline{2}|} F^{(2)}(a) (x-a)^2 + \dots \\ &+ \frac{a_{\mu n}(a)}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a) (x-a)^\mu + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-1} \left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} dy \\ &= F(a) + \sum_{\mu=1}^n \frac{1}{|\underline{\mu}|} \left( \frac{D^{(\mu)} f}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a) (x-a) + \frac{D^{(\mu)} f^2}{|\underline{2}|} F^{(2)}(a) (x-a)^2 + \dots \right. \\ &+ \left. \frac{D^{(\mu)} f^\mu}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a) (x-a)^\mu \right) + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-1} \left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} dy. \end{aligned} \right.$$

Uwzględniając wzór (9), definicję wyrażenia  $f(u|a)$ , oraz odpowiedniość punktów  $u=1$ ,  $v=1$ , otrzymujemy równość:

$$(16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{\mu n}(a) = 1,$$

zachodzącą dla każdej wartości danej na  $\mu$ .

Użyjmy teraz funkcji tworzącej  $f(u|a)$ ,  $|u| \leq 1$  dla utworzenia gwiazdy  $A^{(a)}$ , wpisanej w gwiazdę główną  $A$  stałych:

$$F(a), F^{(1)}(a), F^{(2)}(a), \dots, F^{(\mu)}(a) \dots^1$$

Niechaj  $X$  będzie jakimkolwiek obszarem skończonym wewnątrz  $A^{(a)}$ . Istnieć będzie zawsze gwiazda  $E$  (Nota pierwsza, str. 7) o środku  $a$ , obejmująca w sobie  $X$  i położona wewnątrz  $A^{(a)}$ . Jeżeli zmienna  $x$  przebiega gwiazdę  $E$ , ogół  $\bar{E}$  wszystkich różnych punktów  $Z$ , które otrzymujemy, kładąc:

$$Z = a + (x-a)f(u|a); \quad |u| \leq r, \quad 1 < r < R,$$

obejmie gwiazdę  $E$  i pozostanie wewnątrz  $A$ , gdy  $r$  jest obrane dość blizkiem jedności.

<sup>1)</sup> Patrz: Nota I str. 5, Nota II str. 36, Nota III str. 53.

Wprowadzając zamiast  $S$  kontur  $C$  okręgu koła  $|y|=r$ , możemy wzór (15) napisać w postaci:

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} FA^{(\alpha)}(x) &= F(a) + \frac{\alpha_1 n(\alpha)}{1} F^{(1)}(a) (x-a) + \frac{\alpha_2 n(\alpha)}{2} F^{(2)}(a) (x-a)^2 + \dots \\ &+ \frac{\alpha_n n(\alpha)}{n} F^{(n)}(a) (x-a)^n + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|\alpha))}{y-1} \left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} dy \\ &= F(a) + \sum_{\mu=1}^n \frac{1}{\mu} \left( \frac{D^{(\mu)} f}{1} F^{(1)}(a) (x-a) + \frac{D^{(\mu)} f^2}{2} F^{(2)}(a) (x-a) + \dots \right. \\ &\left. + \frac{D^{(\mu)} f^\mu}{\mu} F^{(\mu)}(a) (x-a)^\mu \right) + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|\alpha))}{y-1} \left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} dy. \end{aligned} \right.$$

Ta równość podstawowa zachodzić będzie dla wszystkich punktów  $x$ , należących do obszaru  $X$ , leżącego wewnątrz gwiazdy  $A^{(\alpha)}$ . Jeżeli uczynimy  $\alpha=1$ , otrzymamy z wzoru (17) wzór Taylora z wyrazem dopełniającym Cauchy'ego. W samej rzeczy (patrz (2)):

$$f(y|1)=y, \quad \alpha_n(1)=1, \quad \mu=0, 1, 2 \dots n,$$

a wyraz dopełniający staje się równy:

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)y)}{y-1} \left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} dy = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(z)}{z-x} \left(\frac{x-a}{z-a}\right)^{n+1} dz,$$

gdzie  $\bar{C}$  jest kołem o środku  $a$ , zawierającym w sobie punkt  $x$  i znajdującym się wewnątrz gwiazdy  $A^{(\alpha)}$ ; koło to jest kołem zbieżności rozwinięcia według wzoru Taylora. Jest to znany wzór Cauchy'ego na wyraz dopełniający, w przypadku, w którym  $x$  jest zmienną zespoloną.

Powróćmy do przypadku ogólnego. Widzieliśmy, że gdy promień  $r$  koła  $C$  weźmiemy dostatecznie bliskim jedności, wtedy  $F(a + (x-a)f(y|\alpha))$  należy zawsze do obszaru  $\bar{E}$ , położonego wewnątrz gwiazdy głównej  $A$ .

Wartość bezwzględna wyrażenia  $\frac{F(a + (x-a)f(y|\alpha))}{y-1}$  posiada tedy granicę wyższą skończoną, gdy  $y$  przebiega okrąg  $C$ . Jeżeli teraz liczba  $n$  zwiększy się dostatecznie, będzie można wartość bezwzględną wyrazu dopełniającego uczynić mniejszą od wszelkiej wielkości dodatniej, tak małej jak się podoba.

A więc równość

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} FA^{(\alpha)}(x) &= F(a) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\mu=1}^n \frac{\alpha_{\mu n}(\alpha)}{\mu} F^{(\mu)}(a) (x-a)^\mu \\ &= F(a) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\mu=1}^n \frac{1}{\mu} \left( \frac{D^{(\mu)} f}{1} F^{(1)}(a) (x-a) \right. \\ &\left. + \frac{D^{(\mu)} f^2}{2} F^{(2)}(a) (x-a)^2 + \dots + \frac{D^{(\mu)} f^\mu}{\mu} F^{(\mu)}(a) (x-a)^\mu \right) \end{aligned} \right.$$

zachodzi dla każdego punktu wewnątrz  $A^{(\alpha)}$ .

Wartość graniczna

$$(19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\mu=1}^n \frac{\alpha_{\mu n}(\alpha)}{\mu} F^{(\mu)}(a) (x-a)^\mu \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\mu=1}^n \frac{1}{\mu} \left( \frac{D^{(\mu)} f^1}{1} F^{(1)}(a) (x-a) + \frac{D^{(\mu)} f^2}{2} F^{(2)}(a) (x-a)^2 + \dots + \frac{D^{(\mu)} f^\mu}{\mu} F^{(\mu)}(a) (x-a)^\mu \right)$$

jest nadto jednostajnie zbieżna w każdym obszarze  $X$  wewnątrz  $A^{(\alpha)}$ .

Przyjmijmy odwrotnie, że wartość graniczna (19) jest zbieżna dla  $x = x_0$ . Z tożsamości

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\mu=1}^n \frac{1}{\mu} \left( \frac{D^{(\mu)} f}{1} F^{(1)}(a) (x_0-a) + \frac{D^{(\mu)} f^2}{2} F^{(2)}(a) (x_0-a)^2 + \dots + \frac{D^{(\mu)} f^\mu}{\mu} F^{(\mu)}(a) (x_0-a)^\mu \right) \\ = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu} \left( \frac{D^{(\mu)} f}{1} F^{(1)}(a) (x_0-a) + \frac{D^{(\mu)} f^2}{2} F^{(2)}(a) (x_0-a)^2 + \dots + \frac{D^{(\mu)} f^\mu}{\mu} F^{(\mu)}(a) (x_0-a)^\mu \right)$$

wynika na zasadzie pewnego twierdzenia A b e l a <sup>1)</sup>, że wartość graniczna

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\mu=1}^n \frac{u^\mu}{\mu} \left( \frac{D^{(\mu)} f^1}{1} F^{(1)}(a) (x_0-a) + \frac{D^{(\mu)} f^2}{2} F^{(2)}(a) (x_0-a)^2 + \dots + \frac{D^{(\mu)} f^\mu}{\mu} F^{(\mu)}(a) (x_0-a)^\mu \right)$$

<sup>1)</sup> Oeuvres. Nouvelle édition (S y l o w e t L i e), p 223. Théor. V.

będzie zbieżna dla  $|u| < 1$ . Pamiętając, że  $f(u|a) = 0$ , widzimy, że równość (13) zachodzi dla  $x = x_0$ , gdy wielkości  $|u|$  nadawać będziemy wartości dostatecznie małe. Widzimy także, że obrawszy sobie za  $S$  kontur, obejmujący koło o środku w punkcie zero i o promieniu  $|u|$ , otrzymamy:

$$\begin{aligned} & F(a + (x_0 - a)f(u|a)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\mu=1}^n \frac{u^\mu}{|\mu|} \left( \frac{D^{(\mu)} f}{1} F^{(1)}(a)(x_0 - a) + \frac{D^{(\mu)} f^2}{2} F^{(2)}(a)(x_0 - a)^2 + \dots \right. \\ & \quad \left. + \frac{D^{(\mu)} f^\mu}{\mu} F^{(\mu)}(a)(x_0 - a)^\mu \right). \end{aligned}$$

Ponieważ strona druga jest zbieżna dla  $|u| < 1$ , przeto strona pierwsza jest funkcją regularną zmiennej  $u$  dla  $|u| < 1$ . Stąd, na podstawie definicji gwiazdy  $A^{(a)}$ , punkt  $x_0$  jest koniecznie albo wierzchołkiem gwiazdy  $A^{(a)}$  albo punktem wewnętrznym tej gwiazdy.

Przypominając sobie (patrz Notę trzecią), że funkcja tworząca  $f(u|a)$  może być obrana tak, aby gwiazda  $A^{(a)}$  dążyła nieograniczenie do gwiazdy  $A$  wtedy, gdy  $a$  dąży do zera i aby wszystkie  $a_{\mu n}(a)$  były liczbami dodatnimi, możemy otrzymane dotąd wyniki wyrazić w następującej nowej formie twierdzenia 4.

**Twierdzenie 4a.** Oznaczmy przez  $A$  gwiazdę o środku  $a$ , przez  $a$  wielkość dodatnią mniejszą od jedności, przez  $A^{(a)}$  gwiazdę spółśrodkową z  $A$  i wpisaną w  $A$ , a utworzoną przez funkcję tworzącą  $f(u|a)$ . Można będzie zawsze obrać tę funkcję tak, aby, gdy  $a$  jest dostatecznie małe, gwiazda  $A^{(a)}$  obejmowała w swem wnętrzu obszar dany jakikolwiek, położony wewnątrz gwiazdy  $A$ , i tak jeszcze, aby dla  $a=1$  gwiazda  $A^{(1)}$  stała się kołem spółśrodkowym z  $A$  i wpisaniem w  $A$ . Nadto, gdy  $A$  jest gwiazdą główną ciąg stałych:

$$F(a), F^{(1)}(a), \dots, F^{(u)}(a), \dots,$$

poddanych warunkowi Cauchy'ego, będzie można obrać  $f(u|a)$  w ten sposób, aby wyrażenie graniczne

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{a_{1n}(a)}{1} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{a_{2n}(a)}{2} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \dots \right. \\ & \quad \left. + \frac{a_{nn}(a)}{n} F^{(n)}(a)(x-a)^n \right], \end{aligned}$$

(232)

gdzie

$$a_{\mu n}(a), \quad \mu=1, 2, \dots, n; \quad \mu=1, 2, 3, \dots, \infty$$

są stałymi dodatnimi oznaczonymi o własnościach

$$a_{\mu n}(1) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{\mu n}(a) = 1,$$

zależnymi tedy tylko od funkcji tworzącej, posiadało gwiazdę zbieżności tożsamą z gwiazdą  $A^{(a)}$  i taką, by równość

$$\begin{aligned} FA(x) = F(a) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{a_{1n}(a)}{1} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{a_{2n}(a)}{2} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \dots \right. \\ \left. + \frac{a_{nn}(a)}{n} F^{(n)}(a)(x-a)^n \right], \end{aligned}$$

zachodziła wszędzie wewnątrz  $A^{(a)}$ . Wyrażenie graniczne podwójne

$$\begin{aligned} & \lim_{a \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{a_{1n}(a)}{1} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{a_{2n}(a)}{2} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \dots \right. \\ & \quad \left. + \frac{a_{nn}(a)}{n} F^{(n)}(a)(x-a)^n \right] \end{aligned}$$

ma gwiazdę zbieżności tożsamą z gwiazdą  $A$ , a równość

$$\begin{aligned} FA(x) = F(a) + \lim_{a \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{a_{1n}(a)}{1} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{a_{2n}(a)}{2} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \dots \right. \\ \left. + \frac{a_{nn}(a)}{n} F^{(n)}(a)(x-a)^n \right] \end{aligned}$$

zachodzi wszędzie wewnątrz  $A$ .

Jeżeli w przejściu do granicy zatrzymamy się na liczbie oznaczonej  $n$ , będziemy mieli równość

$$\begin{aligned} FA^{(a)}(x) = F(a) + \frac{a_{1n}(a)}{1} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{a_{2n}(a)}{2} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \dots \\ + \frac{a_{nn}(a)}{\mu} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu + \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-1} \left( \frac{1}{y} \right)^{n+1} dy, \end{aligned}$$

(233)



gdzie całka jest wzięta w zwrocie dodatnim,  $C$  zaś oznacza okrąg koła o środku w punkcie zero i o promieniu  $r$  ( $1 < r < R$ ) tak, że  $a + (x-a)f(y|a)$  należy do wnętrza gwiazdy  $A^{(a)}$ .

Zamiast całki (3) możnaby wziąć za punkt wyjścia inne całki, np.

$$\left(\frac{d f_1(u|a)}{du}\right)_{u=1} \int_{\Gamma_1} \frac{F(a+(x-a)f(y|a))}{f_1(y|a)-1} \left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} dy,$$

gdzie  $f_1(u|a)$  jest funkcją, mającą te same własności co  $f(u|a)$  i jeszcze tę własność, że:

$$\left(\frac{d f_1(u|a)}{du}\right)_{u=1}$$

nie jest zerem. Stałe  $a_{\mu n}(a)$  stają się w tym przypadku:

$$a_{\mu n}(a) = - \left(\frac{d f_1(u|a)}{du}\right)_{u=1} \int_{\Gamma_1} \frac{(f(y|a))^{\mu}}{f_1(y|a)-1} \left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} dy, \quad \mu=0, 1, 2 \dots n$$

i zachowują dwie własności:

$$a_{\mu n}(1) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{\mu n}(a) = 1;$$

lecz nie zdaje się być koniecznem, aby gwiazda  $A^{(a)}$  pozostała gwiazdą zbieżności przy każdym wyborze wielkości  $f(u|a)$ .

Wывody, podane przeze mnie w Nocie trzeciej, stosują się specjalnie do pewnej funkcji tworzącej, przy pomocy której otrzymujemy bardzo prostą konstrukcję geometryczną gwiazdy  $A^{(a)}$ . Liczby  $a_{\mu n}(a)$ ,  $\mu=1, 2 \dots n$ ,  $n=1, 2, 3 \dots \infty$ , obliczają się za pomocą wzorów zwrotnych.

Fredholm<sup>1)</sup> zaproponował, jako funkcję tworzącą, funkcję:

$$f(u|a) = \frac{\log(1-(1-a)u)}{\log a}$$

i otrzymał piękne rozwinięcie:

$$FA^{(a)}(x) = F(a) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\mu=0}^n \frac{(1-a)^{\mu}}{|\mu|} \left[ h^{(a)}_{\mu-1} F^{(n)}(a) \frac{x-a}{H} + \dots + h^{(a)}_1 F^{(a-1)}(a) \left(\frac{x-a}{H}\right)^{a-1} + F^{(a)}(a) \left(\frac{x-a}{H}\right)^a \right],$$

gdzie  $H = \log \frac{1}{a}$ , stałe zaś  $h_{\mu-1}^{(a)}, \dots, h_1^{(a)}$  są współczynnikami czynnikowej (fakultetu)  $\lambda(\lambda+1) \dots (\lambda+\mu-1)$ , t. j. liczbami całkowitemi dodatniemi, określonymi przy pomocy równości:

$$\lambda(\lambda+1)(\lambda+2) \dots (\lambda+\mu-1) = \lambda^a + h_1^{(a)} \lambda^{a-1} + \dots + h_{\mu-1}^{(a)}.$$

Lecz konstrukcja geometryczna gwiazdy  $A^{(a)}$  staje się w tym przypadku mniej prostą niż przy użyciu figury sercowatej, jak w Nocie trzeciej; wzory zaś wyrażne na współczynnik czynnikowej są bardzo zawiłe<sup>1)</sup>.

Jest przeto zadaniem interesującym znaleźć taką funkcję tworzącą dla której wzory wyrażne na stałe  $a_{\mu n}(a)$ ,  $\mu=1, 2 \dots n$ ;  $n=1, 2, 3, \dots \infty$  są dostatecznie proste.

Znajdujemy rozwiązanie tego zagadnienia, wprowadzając funkcję tworzącą:

$$(20) \quad v = f(u|a) = \frac{au}{\left(1 - \frac{u}{R}\right)^a}; \quad \frac{1}{R} = 1 - a^{\frac{1}{a}}.$$

Widzimy, że przekształcenie  $v = f(u|a)$  jest dwujędnoznaczne dla  $|u| < R$  i że odpowiadają sobie wzajemnie punkty  $u=0, v=0$  oraz  $u=1, v=1$ . Widzimy jeszcze, że odpowiadają sobie wzajemnie:

$$u = -1, v = -\frac{a}{\left(2 - a^{\frac{1}{a}}\right)^a}.$$

Punkt  $v$ , który odpowiada punktowi  $u = -1$ , znajduje się więc na przedłużeniu wektora (01) poza zero i dąży do zera wraz z  $a$ . Łatwo też

<sup>1)</sup> G. Mittag-Leffler. Sur une formule de M. Fredholm (C. R. 25 mars 1901). I. Fredholm. Sur la méthode de prolongement analytique de M. Mittag-Leffler (Öfv. af K. Vet.-Ak. förhandl. 13 marca 1901).

<sup>1)</sup> O. Schlömilch. Compendium der höheren Analysis, t. II, wydanie 3-cie, str. 23—31.

widzieć, że obraz koła  $|u|=1$ , opisanego przez punkt  $v$ , spłaszcza się nieograniczenie, gdy  $\alpha$  dąży do zera. W samej rzeczy, gdy położymy:

$$1 - \frac{e^{i\theta}}{R} = \rho e^{i\theta},$$

będzie:

$$v = x + iy = \frac{\alpha}{\rho^\alpha} e^{i(\theta - \alpha\theta)},$$

a więc:

$$y = \frac{\alpha}{\rho^\alpha} \sin(\theta - \alpha\theta),$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{\alpha}{\rho^\alpha} \left[ \cos(\theta - \alpha\theta) + \frac{\alpha}{R\rho} \cos(2\theta - (1+\alpha)\theta) \right].$$

Widzimy z jednej strony, że  $\frac{1}{\rho}$  zmniejsza się stale od  $\theta=0$  do  $\theta=\pi$ ,

z drugiej zaś strony, ponieważ  $\frac{dy}{d\theta}$  pozostaje dodatniem pomiędzy  $\theta=0$

i  $\theta=\frac{\pi}{4}$ , wartość  $y$  rośnie od zera do

$$\frac{\alpha}{\left[ 2 \left( 1 - \cos \frac{\pi}{4} \right) - \alpha^{\frac{1}{\alpha}} \left( 2 - \alpha^{\frac{1}{\alpha}} - 2 \cos \frac{\pi}{4} \right) \right]^{\frac{\alpha}{2}}} \sin \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \theta \frac{\pi}{4} \right),$$

gdzie  $\theta_{\frac{\pi}{4}}$  jest wartością wielkości  $\theta$ , odpowiadającą wartości  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

Rozpatrzmy teraz  $y$ . Czynnik  $\frac{\alpha}{\rho^\alpha}$  zmniejsza się dla wartości  $\theta$  od  $\theta=0$  do  $\theta=\pi$ ; czynnik drugi  $\sin(\theta - \alpha\theta)$ , przeciwnie, powiększa się przy wartościach  $\theta$  od  $\theta=0$  do  $\theta=\frac{\pi}{4}$ . Toż samo będzie z wielkością  $y$ . Wielkość

$$\frac{\alpha}{\left[ 2 \left( 1 - \cos \frac{\pi}{4} \right) - \alpha^{\frac{1}{\alpha}} \left( 2 - \alpha^{\frac{1}{\alpha}} - 2 \cos \frac{\pi}{4} \right) \right]^{\frac{\alpha}{2}}},$$

jest więc oczywiście większa od wartości maximum na  $y$ . Lecz wielkość ta dąży nieograniczenie do zera wraz z  $\alpha$ .

Dowiedliśmy zatem, że obraz koła  $|u|=1$ , opisanego przez punkt  $v$ , dąży nieograniczenie do linii prostej, poprowadzonej od punktu  $v=0$  do punktu  $v=1$ , gdy  $\alpha$  dąży nieograniczenie do zera. Funkcja tworząca posiada tedy wszystkie własności, wysłowione w twierdzeniu 4.

Obliczmy teraz stałe  $a_{\mu n}(\alpha)$ . Wzór (14) daje bezpośrednio:

$$(21) \quad a_{\mu}(\alpha) = \alpha^\mu \left( 1 + \frac{\alpha\mu}{1} (1 - \alpha^{\frac{1}{\alpha}}) + \frac{\alpha\mu(\alpha\mu+1)}{2} (1 - \alpha^{\frac{1}{\alpha}})^2 + \dots \right. \\ \left. + \frac{\alpha\mu(\alpha\mu+1) \dots (\alpha\mu+n-\mu-1)}{n-\mu} (1 - \alpha^{\frac{1}{\alpha}})^{n-\mu} \right);$$

kładąc  $\alpha = \frac{1}{n}$ , otrzymujemy wyrażenie bardzo proste:

$$(22) \quad F(\alpha) + \lim_{n=\infty} \left[ \frac{a_{1n}(\frac{1}{n})}{1} F^{(1)}(\alpha)(x-\alpha) + \frac{a_{2n}(\frac{1}{n})}{2} F^{(2)}(\alpha)(x-\alpha)^2 + \dots \right. \\ \left. + \frac{a_{nn}(\frac{1}{n})}{n} F^{(n)}(\alpha)(x-\alpha)^n \right],$$

przedstawiające funkcję  $FA(x)$  wewnątrz gwiazdy głównej  $A$  i zarazem zbieżne jednostajnie dla każdego obszaru wewnątrz  $A$ . Lecz  $A$  nie jest w ogóle — jak to wykazał Borel<sup>1)</sup> — gwiazdą zbieżności tego wyrażenia; przeciwnie, widzieliśmy, że jest ona zawsze gwiazdą zbieżności wyrażenia granicznego podwójnego

$$F(\alpha) + \lim_{\alpha=0} \lim_{n=\infty} \left\{ \frac{a_{1n}(\alpha)}{1} F^{(1)}(\alpha)(x-\alpha) + \frac{a_{2n}(\alpha)}{2} F^{(2)}(\alpha)(x-\alpha)^2 + \dots \right. \\ \left. + \frac{a_{nn}(\alpha)}{n} F^{(n)}(\alpha)(x-\alpha)^n \right\},$$

które, podobnie jak wyrażenie (22), przedstawia  $FA(x)$  wewnątrz  $A$ .

## § 2.

Wyniki powyższe otrzymano wszystkie z badania całki:

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(\alpha + (x-\alpha)f(y|\alpha))}{y-u} \left( \frac{u}{y} \right)^{n+1} dy.$$

<sup>1)</sup> E. Borel. Sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles. Acta math. 24, p. 309. Patrz naszą Notę trzecią.



Jeżeli w tej całce, zamiast czynnika  $\left(\frac{u}{y}\right)^{n+1}$ , weźmiemy inny czynnik, zachowujący tę własność, aby był równy 1 dla  $y = u$  i aby punkt  $y = 0$  był jedynym jego punktem osobliwym, otrzymamy inne wyniki, również godne uwagi.

W paragrafie niniejszym obierzemy czynnik  $e^{\omega\left(\frac{y}{u}-1\right)}$ , gdzie  $\omega$  jest stałą dodatnią, i zajmujemy się badaniem całki:

$$(23) \quad \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-u} e^{\omega\left(\frac{y}{u}-1\right)} dy.$$

Należy rozpocząć od przypadku najprostszego  $f(y|a) = y$ ,  $u = 1$  i zbadać całkę:

$$(24) \quad \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)y)}{y-1} e^{\omega\left(\frac{y}{y}-1\right)} dy.$$

Przyjmijmy, jak w paragrafie pierwszym, że  $S$  jest konturem powierzchni jednospójnej, dla której  $F(a + (x-a)y)$  jest funkcją monogeniczną, regularną, obejmującą w sobie dwa punkty  $y = 0$ ,  $y = 1$ . Mamy:

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)y)}{y-1} e^{\omega\left(\frac{y}{y}-1\right)} dy = F(x) + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)y)}{y-1} e^{\omega\left(\frac{y}{y}-1\right)} dy.$$

Mamy nadto:

$$(25) \quad \begin{aligned} & - \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)y)}{y-1} e^{\omega\left(\frac{y}{y}-1\right)} dy \\ & = \frac{e^{-\omega}}{2\pi i} \int \left\{ F(a) + (F(a) + \frac{1}{1} F^{(1)}(a)(x-a)y) \right. \\ & \quad \left. + (F(a) + \frac{1}{1} F^{(1)}(a)(x-a)y + \frac{1}{2} F^{(2)}(a)(x-a)^2 y^2 + \dots) \right\} \\ & \quad \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{1} \frac{\omega}{y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{y}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\omega}{y}\right)^3 + \dots \right\} dy \\ & = e^{-\omega} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{1}{1} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{1}{2} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \dots \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\mu} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{\mu+1}. \end{aligned}$$

Szereg

$$(26) \quad \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{1}{1} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{\mu} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{\mu+1},$$

jest zbieżny dla każdego punktu, któremu odpowiada kontur  $S^{(1)}$ .

Mamy tedy równość:

$$(27) \quad \begin{aligned} F(x) &= e^{-\omega} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{1}{1} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{\mu} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{\mu+1} \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)y)}{y-1} e^{\omega\left(\frac{y}{y}-1\right)} dy, \end{aligned}$$

zachodzącą dla każdego punktu, któremu odpowiada kontur  $S$ .

<sup>1)</sup> W rzeczy samej, szereg ten jest bezwzględnie zbieżny dla każdej wartości  $x$  i  $\omega$ . Można to okazać sposobem, wskazanym nie przez Phragmén'a. Niechaj  $r$  będzie

wielkością dodatnią mniejszą od promienia zbieżności szeregu  $\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}$

i niechaj  $g$  będzie wartością maximum wyrażenia  $\left| \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \right|$  dla  $|x| = r$ .

Będzie wtedy:

$$\left| \frac{1}{\mu} F^{(\mu)}(a) \right| \leq gr^{-\mu}.$$

Dla jakiegokolwiek  $x$  jest:

$$\sum_{\mu=0}^n \left| \frac{1}{\mu} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \right| \leq g \frac{1 - \left(\frac{|x-a|}{r}\right)^{n+1}}{1 - \frac{|x-a|}{r}},$$

stad:

$$\sqrt[n]{\left( \sum_{\mu=0}^n \left| \frac{1}{\mu} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \right| \right) \frac{1}{n+1}} \leq \sqrt[n]{g \frac{1 - \left(\frac{|x-a|}{r}\right)^{n+1}}{1 - \frac{|x-a|}{r}}},$$

a więc:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sum_{\mu=0}^n \left| \frac{1}{\mu} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \right| \frac{1}{n+1}} = 0,$$

a zatem i t. d.

Ze zbieżności szeregu (26) wypływa:

$$(28) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( F(a) + \frac{1}{1} F^{(1)}(a) (x-a) + \dots + \frac{1}{n} F^{(n)}(a) (x-a)^n \right) \frac{\omega^{n+1}}{n+1} = 0,$$

a zważając, że:

$$(29) \frac{e^{-\omega} \omega^n}{\mu} = \int_0^\omega \left( \frac{e^{-\omega} \omega^{\mu-1}}{\mu-1} - \frac{e^{-\omega} \omega^\mu}{\mu} \right) d\omega,$$

widzimy, że:

$$(30) F(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\int_0^\omega e^{-\omega} \omega^\mu d\omega}{(|\mu|)^2} F^{(\mu)}(a) (x-a)^\mu + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)y)}{y-1} e^{\omega(\frac{1}{y}-1)} dy.$$

Możnaby było otrzymać również oba wzory podstawowe (27) i (30), wzięwszy za punkt wyjścia tożsamość:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)y)}{y-1} e^{\omega(\frac{1}{y}-1)} dy \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)y)}{y-1} \left[ \left( \frac{1}{y} - 1 \right) \int_0^\omega e^{\omega(\frac{1}{y}-1)} d\omega + 1 \right] dy \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)y)}{y-1} dy - \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)y)}{y} \left( \int_0^\omega e^{\omega(\frac{1}{y}-1)} d\omega \right) dy \\ &= F(x) - \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)y)}{y} \left( \int_0^\omega e^{\omega(\frac{1}{y}-1)} d\omega \right) dy. \end{aligned}$$

Szereg

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{F^{(\mu)}(a)}{(|\mu|)^2} (\omega(x-a))^\mu$$

(240)

jest widocznie zawsze zbieżny względem  $\omega$ ; będzie zatem:

$$(31) \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\int_0^\omega e^{-\omega} \omega^\mu d\omega}{(|\mu|)^2} F^{(\mu)}(a) (x-a)^\mu = \int_0^\omega e^{-\omega} \left( \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{F^{(\mu)}(a)}{(|\mu|)^2} (\omega(x-a))^\mu \right) d\omega.$$

Kładąc:

$$(32) \mathfrak{F}(a, \omega(x-a)) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{F^{(\mu)}(a)}{(|\mu|)^2} (\omega(x-a))^\mu,$$

możemy napisać:

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\int_0^\omega e^{-\omega} \omega^\mu d\omega}{(|\mu|)^2} F^{(\mu)}(a) (x-a)^\mu = \int_0^\omega e^{-\omega} \mathfrak{F}(a, \omega(x-a)) d\omega.$$

Stąd wynika:

$$(33) F(x) = \int_0^\omega e^{-\omega} \mathfrak{F}(a, \omega(x-a)) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)y)}{y-1} e^{\omega(\frac{1}{y}-1)} dy.$$

Ten nowy wzór można uważać za podstawowy na równi z wzorami (27) i (30).

Zbudujmy teraz gwiazdę  $A^{(1)}$ , wpisaną w gwiazdę główną  $A$  stałych  $F(a)$ ,  $F^{(1)}(a)$ ,  $F^{(2)}(a)$  ...  $F^{(n)}(a)$ ..., w sposób następujący. Ustalmy wektor  $l$ , wychodzący ze środka  $a$  i nadajmy mu długość  $r$ . Gdy weźmiemy  $r$  dostatecznie małe, koło, którego ta część wektora  $l$  będzie średnicą, stanowić będzie część gwiazdy  $A$ . Jeżeli przez  $\rho$  oznaczmy granicę wyższą wielkości  $r$ , odetniemy na  $l$  długość  $\rho$  i obrócimy  $l$  raz jeden około środka  $a$ , zbudujemy gwiazdę  $A^{(1)}$ .

Obierzmy teraz na  $S$  okrąg  $\mathcal{C}$  o środku w punkcie  $y = \frac{1}{2}$  i promieniu  $\frac{1}{2} r$ ;  $r > 1$ . Z wzorów (27), (30) i (33) wyprowadzamy następujące trzy równości:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 FA^{(1)}(x) &= e^{-\omega} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{1}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a) (x-a) + \dots \right. \\
 & \left. + \frac{1}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a) (x-a)^{\mu} \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{|\underline{\mu}+1|} + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a+(x-a)y)}{y-1} e^{\omega(\frac{1}{y}-1)} dy, \\
 FA^{(1)}(x) &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\int_0^{\omega} e^{-\omega} \omega^{\mu} d\omega}{(|\underline{\mu}|)^2} F^{(\mu)}(a) (x-a)^{\mu} \\
 & \quad + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a+(x-a)y)}{y-1} e^{\omega(\frac{1}{y}-1)} dy, \\
 FA^{(1)}(x) &= \int_0^{\omega} e^{-\omega} F(a+\omega(x-a)) d\omega \\
 & \quad + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a+(x-a)y)}{y-1} e^{\omega(\frac{1}{y}-1)} dy,
 \end{aligned} \right\} \quad (34)
 \end{aligned}$$

które stosują się wszystkie do jakiegokolwiek obszaru  $X$ , położonego wewnątrz  $A^{(1)}$ , byleby  $r$  było dostatecznie blizkie jedności.

Szeregi (26), (31) i (32) są jednostajnie zbieżne dla obszaru  $X$  i są one nadto zawsze i bezwzględnie zbieżne tak względem  $x$  jak i względem  $\omega$ .

Część rzeczywista wyrażenia  $\frac{1}{y} - 1$ , gdy  $y$  opisuje obwód  $\mathbb{C}$ , jest równa

$$\frac{1-r^2}{(1-r)^2 + 2r(1+\cos \varphi)},$$

gdzie uczyniono  $y = \frac{1}{2} + \frac{r}{2} e^{i\varphi}$  i pozostaje zawsze ujemną; będzie zatem:

$$(35) \quad \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a+(x-a)y)}{y-1} e^{\omega(\frac{1}{y}-1)} dy = 0.$$

Gdy obierzemy  $r$  dostatecznie blizkiem jedności, zbieżność ku zeru tego wyrażenia granicznego stanie się jednostajną dla wszelkiego obszaru  $X$  wewnątrz  $A^{(1)}$ .

Z wzorów (34) wyprowadzamy więc następujące:

$$(36) \quad \begin{aligned}
 FA^{(1)}(x) &= \lim_{\omega=\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{1}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a) (x-a) + \dots \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{|\underline{n}|} F^{(n)}(a) (x-a)^n \right) \frac{\omega^{n+1}}{|\underline{n}+1|},
 \end{aligned}$$

$$(37) \quad FA^{(1)}(x) = \lim_{\omega=\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\int_0^{\omega} e^{-\omega} \omega^n d\omega}{(|\underline{n}|)} F^{(n)}(a) (x-a)^n,$$

$$(38) \quad FA^{(1)}(x) = \int_0^{\omega} e^{-\omega} \mathfrak{F}(a, \omega(x-a)) d\omega,$$

zachodzące wszystkie wewnątrz  $A^{(1)}$ . Strony drugiej każdej z tych równości są jednostajnie zbieżne dla każdego obszaru  $X$  wewnątrz  $A^{(1)}$ .

Wzór (36) zawdzięczamy Borelowi<sup>1)</sup>. Wzór (38) jest sławnym wzorem Laplace'a — Abela<sup>2)</sup>. Funkcja  $\mathfrak{F}(a, \omega(x-a))$  jest funkcją, którą Abel nazywa „funkcją tworzącą“, gdy gałąź funkcyjna  $FA^{(1)}(x)$  jest „funkcją określającą“. Zasługą Borela jest odkrycie ważnego faktu, że całka Laplace'a — Abela

$$(39) \quad \int_0^{\omega} e^{-\omega} \mathfrak{F}(a, \omega(x-a)) d\omega,$$

jest zbieżna wszędzie wewnątrz gwiazdy  $A^{(1)}$ , która zresztą jest gwiazdą, opisaną na kole zbieżności szeregu Taylora

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a) (x-a)^{\mu}$$

i zlewa się z tem kołem tylko w przypadkach specjalnych.

<sup>1)</sup> Leçons sur les séries divergentes. Paris 1901.

<sup>2)</sup> Laplace. Théorie analytique des probabilités (Oeuvres 7. Livre premier, Sec. 2. e partie). Abel. Sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes (Sylvow et L. e, Oeuvres 2. 67—71).

Wywód powyższy podałem w liście do Hermite'a, napisanym wkrótce po pierwszej publikacji Borela<sup>1)</sup>.

Ważne pytanie pozostało jeszcze po badaniach Borela. Udowodniono wprawdzie, że całka (39) ma znaczenie wszędzie wewnątrz gwiazdy  $A^{(1)}$ , lecz nie wiadomo, czy ta całka posiada gwiazdę zbieżności, czy też jej nie posiada. Phragmén wyjaśnił tę sprawę, dowiodłszy, że gwiazda  $A^{(1)}$  jest gwiazdą zbieżności trzech wyrażeń: powyższego (39) oraz dwu wyrażeń:

$$(40) \quad \lim_{\omega=\infty} e^{-\omega} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F^{(\mu)}(a) + \frac{1}{\mu} F^{(\mu)}(a) (x-a) + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{\mu} F^{(\mu)}(a) (x-a)^{\mu} \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{\mu+1},$$

$$(41) \quad \lim_{\omega=\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\int_0^{\omega} e^{-\omega} \omega^{\mu} d\omega}{(\mu!)^2} F^{(\mu)}(a) (x-a)^{\mu}.$$

Dowodzenie Phragmèna może być streszczone w sposób następujący:

Dowodzi on najprzód następującego twierdzenia.

„Dajmy, że całka

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega t_0} \varphi(\omega) d\omega,$$

gdzie  $\varphi(\omega)$  jest funkcją rzeczywistą i jednoznaczłą,  $t_0$  zaś wielkością rzeczywistą, jest zbieżna. Oznaczmy przez  $\varepsilon$  wielkość dodatnią dowolnie małą, a przez  $R(t-t_0)$  część rzeczywistą wielkości  $t-t_0$ , gdzie  $t$  jest rzeczywiste lub zespolone.

Całka

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega t} \varphi(\omega) d\omega$$

jest jednostajnie zbieżna, gdy  $R(t-t_0) \geq \varepsilon$ .

<sup>1)</sup> Sur le domaine de convergence de l'intégrale infinie  $\int_0^{\infty} F(a) e^{-a} da$  (C. R.

10 juin 1901).

W samej rzeczy, położmy:

$$\Phi(\omega) = \int_0^{\omega} e^{-\omega t_0} \varphi(\omega) d\omega;$$

dla  $M$  dodatniego i dostatecznie wielkiego będzie:

$$|\Phi(\omega)| < M.$$

Jest nadto:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega t} \varphi(\omega) d\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega(t-t_0)} e^{-\omega t_0} \varphi(\omega) d\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega(t-t_0)} d\Phi(\omega).$$

Wykonywając całkowanie przez części, otrzymujemy:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega t} \varphi(\omega) d\omega = \left[ e^{-\omega(t-t_0)} \Phi(\omega) \right]_{\omega_1}^{\omega_2} + (t-t_0) \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega(t-t_0)} \Phi(\omega) d\omega,$$

stąd:

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega t} \varphi(\omega) d\omega \right| \leq M(e^{-\omega_1 \varepsilon} + e^{-\omega_2 \varepsilon}) + |t-t_0| M \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega \varepsilon} d\omega \\ = M(e^{-\omega_1 \varepsilon} + e^{-\omega_2 \varepsilon}) + \frac{|t-t_0|}{\varepsilon} M(e^{-\omega_1 \varepsilon} - e^{-\omega_2 \varepsilon}) \\ < 2M e^{-\omega_1 \varepsilon} + M \frac{|t-t_0|}{\varepsilon} e^{-\omega_1 \varepsilon}.$$

Wyraz po prawej, gdy  $\omega$  rośnie, może stać się tak małym, jak chcemy. Twierdzenie jest więc dowiedzione.

Przyjmijmy teraz, że wyrażenie (40) jest zbieżne dla  $x=x_0$ . Będzie:

$$\begin{aligned}
 (42) \quad & \sum_{\mu=0}^{\infty} e^{-\omega_1} \left( F(a) + \frac{1}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu \right) \frac{\omega_2^{\mu+1}}{|\underline{\mu}+1|} \\
 & - \sum_{\mu=0}^{\infty} e^{-\omega_1} \left( F(a) + \frac{1}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu \right) \frac{\omega_1^{\mu+1}}{|\underline{\mu}+1|} \\
 & = \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{1}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu \right) \left( \frac{e^{-\omega_2} \omega_2^{\mu+1}}{|\underline{\mu}+1|} - \frac{e^{-\omega_1} \omega_1^{\mu+1}}{|\underline{\mu}+1|} \right) \\
 & = \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{1}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu \right) \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left( \frac{e^{-\omega} \omega^\mu}{|\underline{\mu}|} - \frac{e^{-\omega} \omega^{\mu+1}}{|\underline{\mu}+1|} \right) d\omega \\
 & \quad \text{[porów. (29)]} \\
 & = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega} \omega^\mu d\omega}{(|\underline{\mu}|)^2} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu = \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega} \mathfrak{F}(a, \omega(x-a)) d\omega.
 \end{aligned}$$

Kładąc:

$$(43) \quad \omega(x-a) = w, \quad (44) \quad \frac{1}{x-a} = t,$$

$$(45) \quad \mathfrak{F}(a, w) = \varphi(w) + i \psi(w),$$

gdzie  $\varphi(w)$ ,  $\psi(w)$  są rzeczywiste, otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 (46) \quad & \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega} \mathfrak{F}(a, \omega(x-a)) d\omega = t \int_{w_1}^{w_2} e^{-w} \mathfrak{F}(a, w) dw \\
 & = t \left[ \int_{w_1}^{w_2} e^{-w} \varphi(w) dw + i \int_{w_1}^{w_2} e^{-w} \psi(w) dw \right].
 \end{aligned}$$

Warunkiem tedy koniecznym i dostatecznym na to, aby każde z trzech

wyrażeń (39), (40) i (41) było zbieżne, jest, by moduł każdego z dwóch wyrażeń

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega} \varphi(\omega) d\omega, \quad \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\omega} \psi(\omega) d\omega,$$

gdy  $w_1$  jest dostatecznie wielkie,  $w_2$  zaś jest wielkością dodatnią jakąkolwiek i  $w_1 < w_2$ , pozostawał mniejszy od wielkości dodatniej danej, jakkolwiek małej. Przyjmuje się, że warunek ten spełnia się dla  $t_0 = \frac{1}{x_0 - a}$ .

Według twierdzenia P h r a g m é n a warunek ten spełnia się także dla

$$R\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x_0-a}\right) = R(t-t_0) \geq \varepsilon,$$

t.j. we wszystkich punktach wnętrza koła, którego średnicą jest wektor  $(ax_0)$ .

Całka (39) jest więc funkcją monogeniczną i regularną zmiennej  $x$  wszędzie wewnątrz tego koła. Punkt  $x_0$  jest przeto albo wierzchołkiem, albo punktem wewnętrznym gwiazdy  $A^{(1)}$ . Ta gwiazda zbieżności całki (39) jest równocześnie na zasadzie wzoru (42), gwiazdą zbieżności dwóch wyrażeń (40) i (41).

Wyniki, osiągnięte dotąd w tym paragrafie, dają się streścić w następującem twierdzeniu:

**Twierdzenie 7 a.** Oznaczmy przez  $A$  gwiazdę o środku  $a$ , przez  $A^{(1)}$  inną gwiazdę, którą nazwijmy gwiazdą Borela; ta gwiazda Borela będzie spółśrodkowa z  $A$ , wpisana w  $A$  i tworzy się tak: ograniczamy każdy wektor  $l$ , wychodzący ze środka  $a$ , do długości  $\varrho$ , będącej granicą wyższą innej długości  $r$ , na wektorze  $l$  takiej, że koło o średnicy  $r$  stanowi część składową gwiazdy  $A$ .

Ponieważ gwiazda  $A$  jest gwiazdą główną stałych  $F(a)$ ,  $F^{(1)}(a)$ , ...,  $F^{(\mu)}(a)$ , ... poddanych warunkowi Cauchy'ego, przeto każde z wyrażeń

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty e^{-\omega} \mathfrak{F}(a, \omega(x-a)) d\omega, \quad \mathfrak{F}(a, \omega(x-a)) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{F^{(\mu)}(a)}{(|\underline{\mu}|)^2} (\omega(x-a)^\mu), \\
 & \lim_{\omega=\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{1}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{|\underline{\mu}+1|} \\
 & \lim_{\omega=\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\int_0^\infty e^{-\omega} \omega^\mu d\omega}{(|\underline{\mu}|)^2} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu
 \end{aligned}$$

będzie miało gwiazdę Borela jako gwiazdę zbieżności, a równość:

$$\begin{aligned} FA^{(1)}(x) &= \int_0^\infty e^{-\omega} \delta(a, \omega(x-a)) d\omega \\ &= \lim_{\mu=0} \sum_{\mu=0}^\infty \left( F(a) + \frac{1}{1} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{\mu} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{|\mu+1|} \\ &= \lim_{\omega=\infty} \sum_{\mu=0}^\infty \frac{\int_0^\infty e^{-\omega} \omega^\mu d\omega}{(|\mu|)^2} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu \end{aligned}$$

zachodzić będzie wszędzie wewnątrz gwiazdy Borela.

Jeżeli w przejściu do nieskończoności zatrzymamy się na określonej liczbie skończonej, będziemy mieli równość:

$$\begin{aligned} FA^{(1)}(x) &= \int_0^\omega e^{-\omega} \delta(a, \omega(x-a)) d\omega + \int \frac{F(a+(x-a)y)}{y-1} e^{\omega(\frac{1}{y}-1)} dy \\ &= e^{-\omega} \sum_{\mu=0}^\infty \left( F(a) + \frac{1}{1} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{\mu} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{|\mu+1|} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a+(x-a)y)}{y-1} e^{\omega(\frac{1}{y}-1)} dy \\ &= \sum_{\mu=0}^\infty \frac{\int_0^\omega e^{-\omega} \omega^\mu d\omega}{(|\mu|)^2} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a+(x-a)y)}{y-1} e^{\omega(\frac{1}{y}-1)} dy, \end{aligned}$$

gdzie całka  $\int$  jest wzięta w zwrocie dodatnim i gdzie

$\odot$  oznacza koło o środku  $\frac{1}{2}$  i promieniu  $\frac{1}{2}r$  ( $r>1$ ) tak, że  $a+(x-a)y$  należy do wnętrza gwiazdy  $A'$ .

Wróćmy teraz do badania całki ogólnej (23), t. j. całki

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a+(x-a)f(y|a))}{y-u} e^{\omega(\frac{u}{y}-1)} dy.$$

Nadamy funkcji  $f(y|a)$  to samo znaczenie, co w paragrafie pierwszym i przyjmijmy tak samo, jak w tym paragrafie, że  $S$  jest konturem powierzchni jednospójnej, dla której tak  $f(y|a)$  jak i  $F(a+(x-a)f(y|a))$  są funkcjami monogenicznymi i regularnymi, konturem zawierającym w swym wnętrzu punkty  $y=0$ ,  $y=u$ . Mamy:

$$\begin{aligned} &F(a+(x-a)f(u|a)) \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a+(x-a)f(y|a))}{y-u} e^{\omega(\frac{u}{y}-1)} dy + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a+(x-a)f(y|a))}{y-u} e^{\omega(\frac{u}{y}-1)} dy \end{aligned}$$

i nadto:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a+(x-a)f(y|a))}{y-u} e^{\omega(\frac{u}{y}-1)} dy = -\frac{e^{-\omega}}{2\pi i} \int \frac{F(a+(x-a)f(y|a))}{y-u} dy \\ &\quad -\frac{1}{2\pi i} \frac{e^{-\omega}\omega}{1} \int \frac{F(a+(x-a)f(y|a))}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right) dy \\ &\quad -\frac{1}{2\pi i} \frac{e^{-\omega}\omega^2}{2} \int \frac{F(a+(x-a)f(y|a))}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right)^2 dy \\ &\quad -\dots -\frac{1}{2\pi i} e^{-\omega}\omega^{\mu+1} \int \frac{F(a+(x-a)f(y|a))}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right)^{\mu+1} dy - \dots \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\mu=0}^\infty \frac{e^{-\omega}\omega^{\mu+1}}{|\mu+1|} \int \frac{F(a+(x-a)f(y|a))}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right)^{\mu+1} dy. \end{aligned}$$

Stąd na zasadzie wzoru (7) będzie:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a+(x-a)f(y|a))}{y-u} e^{\omega(\frac{u}{y}-1)} dy \\ &= e^{-\omega} \sum_{\mu=0}^\infty \left( F(a) + \frac{g_1 u |a|}{1} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{g_2 u |a|}{2} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{g_\mu u |a|}{\mu} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{|\mu+1|} \\ &= e^{-\omega} \sum_{\mu=0}^\infty \left( F(a) + \sum_1^\mu \frac{u^r}{|r|} \left( F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{D^r f^2}{2} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{D^r f^r}{|r|} F^{(r)}(a)(x-a)^r \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{|\mu+1|} \right). \end{aligned}$$



A zatem:

$$\begin{aligned}
 & F(a + (x-a)f(u|a)) \\
 &= e^{-\omega} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{g_{1u}(u|a)}{1} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{g_{uu}(u|a)}{\mu} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{\mu+1} \\
 & \quad + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-u} e^{\omega(\frac{u}{y}-1)} dy, \quad (48)
 \end{aligned}$$

a kładąc  $u=1$ , mieć będziemy:

$$\begin{aligned}
 F(x) &= e^{-\omega} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{a_{1u}(a)}{1} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{a_{uu}(a)}{\mu} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{\mu+1} \\
 & \quad + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-1} e^{\omega(\frac{1}{y}-1)} dy. \quad (49)
 \end{aligned}$$

Widzimy analogię zupełną z wzorem (27). Użyjmy teraz funkcji tworzącej  $f(u|a)$ , gdzie  $u$  opisuje okrąg, którego średnicą jest prosta zawarta pomiędzy 0 a 1, dla utworzenia gwiazdy  $\mathfrak{A}^{(a)}$ , wpisanej w gwiazdę główną stałych  $F(a), F^{(1)}(a), \dots, F^{(\mu)}(a), \dots$ . Widzimy, że gwiazda ta jest wpisana w gwiazdę  $A^{(a)}$ , która powstaje, gdy  $u$  opisuje okrąg  $|u|=1$ , i że zlewa się z gwiazdą  $A^{(a)}$  tylko w przypadkach szczególnych.

Wziąwszy jako kontur  $S$  okrąg  $\mathfrak{C}$  o środku  $y=\frac{1}{2}$  i promieniu  $\frac{1}{2}r$  ( $r>1$ ), otrzymujemy równość:

$$\begin{aligned}
 F\mathfrak{A}^{(a)}(x) &= e^{-\omega} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{a_{1u}(a)}{1} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{a_{uu}(a)}{\mu} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{\mu+1} \\
 & \quad + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-1} e^{\omega(\frac{1}{y}-1)} dy, \quad (50)
 \end{aligned}$$

zachodzącą w każdym obszarze  $X$  wewnątrz  $\mathfrak{A}^{(a)}$ , jeżeli tylko obierzemy  $r$  dostatecznie blizkiem jedności. Sposobem, w jaki dowiedliśmy równości (35), dowodzi się też równości:

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-1} e^{\omega(\frac{1}{y}-1)} dy = 0, \quad (51)$$

(250)

a więc równość:

$$\begin{aligned}
 F\mathfrak{A}^{(a)}(x) &= \lim_{\omega=\infty} e^{-\omega} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{a_{1\mu}(a)}{1} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots \right. \\
 & \quad \left. + \frac{a_{u\mu}(a)}{\mu} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{\mu+1}, \quad (52)
 \end{aligned}$$

zachodzi w każdym obszarze wewnątrz  $\mathfrak{A}^{(a)}$ . Wyrażenie po drugiej stronie jest jednostajnie zbieżne dla wszelkiego obszaru, położonego wewnątrz gwiazdy  $\mathfrak{A}^{(a)}$ . Widzimy, że wzór ten jest bezpośrednim uogólnieniem wzoru (36) Borela.

Otrzymujemy łatwo analogiczne uogólnienie wzorów (37) i (38). Mamy:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-u} e^{\omega(\frac{u}{y}-1)} dy \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-u} dy \\
 & \quad - \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y} \left( \int_0^{\omega} e^{\omega(\frac{u}{y}-1)} d\omega \right) dy \\
 &= F(a) + (x-a)f(y|a) - \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y} \left( \int_0^{\omega} e^{\omega(\frac{u}{y}-1)} d\omega \right) dy, \quad (53)
 \end{aligned}$$

a także:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y} \left( \int_0^{\omega} e^{\omega(\frac{u}{y}-1)} d\omega \right) dy \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y} \left( \int_0^{\omega} e^{\omega(\frac{u}{y}-1)} d\omega \right) dy \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int \left[ F(a) + \frac{1}{1} F^{(1)}(a)(x-a)f(y|a) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} F^{(2)}(a)(x-a)^2 f(y|a)^2 + \dots \right] \left( \int_0^{\omega} e^{\omega(\frac{u}{y}-1)} d\omega \right) \frac{dy}{y}. \quad (54)
 \end{aligned}$$

(251)

Funkcja  $f(y|a)$  znika dla  $y=0$ , będzie (porówn. (8)):

$$(55) \quad f(y|a)^r = \frac{D^r f^r}{|\underline{r}|} y^r + \frac{D^{r+1} f^r}{|\underline{r}+1|} y^{r+1} + \frac{D^{r+2} f^r}{|\underline{r}+2|} y^{r+2} + \dots,$$

a zatem:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int f(y|a)^r \left( \int_0^w e^{-\omega} \left( \frac{u}{y} - 1 \right) d\omega \right) \frac{dy}{y} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int \left( \frac{D^r f^r}{|\underline{r}|} y^r + \frac{D^{r+1} f^r}{|\underline{r}+1|} y^{r+1} + \frac{D^{r+2} f^r}{|\underline{r}+2|} y^{r+2} + \dots \right) \\ & \times \left( \int_0^w \left( 1 + \frac{1}{|\underline{1}|} \frac{\omega u}{y} + \frac{1}{|\underline{2}|} \left( \frac{\omega u}{y} \right)^2 + \frac{1}{|\underline{3}|} \left( \frac{\omega u}{y} \right)^3 + \dots \right) e^{-\omega} d\omega \right) \frac{dy}{y} \\ &= \int_0^w e^{-\omega} \left( \frac{D^r f^r}{(|\underline{r}|)^2} (\omega u)^r + \frac{D^{r+1} f^r}{(|\underline{r}+1|)^2} (\omega u)^{r+1} + \frac{D^{r+2} f^r}{(|\underline{r}+2|)^2} (\omega u)^{r+2} + \dots \right) d\omega. \end{aligned}$$

Kładąc:

$$(56) \quad f_r(\omega u|a) = \frac{D^r f^r}{(|\underline{r}|)^2} (\omega u)^r + \frac{D^{r+1} f^r}{(|\underline{r}+1|)^2} (\omega u)^{r+1} + \frac{D^{r+2} f^r}{(|\underline{r}+2|)^2} (\omega u)^{r+2} + \dots,$$

mamy:

$$(57) \quad \frac{1}{2\pi i} \int f(y|a)^r \left( \int_0^w e^{-\omega} \left( \frac{u}{y} - 1 \right) d\omega \right) \frac{dy}{y} = \int_0^w e^{-\omega} f_r(\omega u|a) d\omega.$$

Przeto:

$$(58) \quad \left\{ \begin{aligned} & F(a + (x-a)f(u|a)) = \int_0^w e^{-\omega} d\omega \cdot F(a) + \frac{\int_0^w e^{-\omega} f_1(\omega u|a) d\omega}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a)(x-a) \\ & + \frac{1}{2\pi i} \frac{\int_0^w e^{-\omega} f_2(\omega u|a) d\omega}{|\underline{2}|} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \frac{\int_0^w e^{-\omega} f_3(\omega u|a) d\omega}{|\underline{3}|} F^{(3)}(a)(x-a)^3 + \dots \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-u} e^{-\omega} \left( \frac{u}{y} - 1 \right) dy. \end{aligned} \right.$$

(252)

Jeżeli wprowadzimy:

$$(59) \quad \mathfrak{F}(x|f_1\omega) = F(a) + \frac{f_1(\omega|a)}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{f_2(\omega|a)}{|\underline{2}|} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \dots,$$

będzie:

$$(60) \quad \begin{aligned} & F(a + (x-a)f(u|a)) \\ &= \int_0^w e^{-\omega} \mathfrak{F}(x, f, \omega u) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-u} e^{-\omega} \left( \frac{u}{y} - 1 \right) dy. \end{aligned}$$

Kładąc  $a=1$ , otrzymujemy  $f(y|a)=y$ ; funkcja  $\mathfrak{F}(x|f, \omega)$  staje się w tym przypadku tem, co wyżej oznaczyliśmy przez  $\mathfrak{F}(a, \omega(x-a))$  (porów. (32)), i otrzymujemy równość:

$$(61) \quad \mathfrak{F}(x|f, \omega) = \mathfrak{F}(a, \omega(x-a)).$$

W terminologii A b e l a nowa wprowadzona funkcja  $f_r(\omega u|a)$  jest funkcją tworzącą funkcji określającej  $f(u|a)^r$ . Mamy więc równość:

$$(62) \quad f(u|a)^r = \int_0^w e^{-\omega} f_r(\omega u|a) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(u y|a)^r}{y-1} e^{-\omega} \left( \frac{1}{y} - 1 \right) dy$$

zasługującą na zaznaczenie.

Obierzmy teraz jako kontur  $S$  okrąg  $\mathfrak{C}$  wyżej określony; kładąc  $u=1$ , otrzymamy zamiast wzorów (58) i (60) dwa następujące:

$$(63) \quad \begin{aligned} \mathfrak{F}^{(1)}(x) &= \int_0^w e^{-\omega} d\omega \cdot F(a) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\int_0^w e^{-\omega} f_r(\omega|a) d\omega}{|\underline{r}|} F^{(r)}(a)(x-a)^r \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-1} e^{-\omega} \left( \frac{1}{y} - 1 \right) dy, \end{aligned}$$

$$(64) \quad \mathfrak{F}^{(1)}(x) = \int_0^w e^{-\omega} \mathfrak{F}(x|f, \omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-a} e^{-\omega} \left( \frac{1}{y} - 1 \right) dy$$

stosowalne w każdym obszarze  $X$  wewnątrz  $\mathfrak{U}^{(a)}$ , jeżeli tylko promień  $r$  koła  $\mathfrak{C}$  weźmiemy dość bliskim jedności.

(253)

Otrzymujemy jeszcze dwa wzory:

$$(65) \quad F^{\mathfrak{A}(\alpha)}(x) = F(a) + \lim_{\nu=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\int_0^{\omega} e^{-\omega} f_{\nu}(\omega | a) d\omega}{|\underline{\nu}|} F^{(\nu)}(a) (x-a)^{\nu},$$

$$(66) \quad F^{\mathfrak{A}(\alpha)}(x) = \int_0^{\infty} e^{-\omega} \mathfrak{F}(x | f, \omega) d\omega$$

stosowalne w każdym obszarze  $X$  wewnątrz  $\mathfrak{A}(\alpha)$ . Wyrażenia po stronie drugiej są jednostajnie zbieżne dla każdego obszaru wewnątrz gwiazdy  $\mathfrak{A}(\alpha)$ .

Zestawmy te dwa wzory (65) i (66) z poprzednim wzorem (52). Te trzy wzory stanowią razem bezpośrednie uogólnienie wzorów (36), (37) i (38). Możnaby otrzymać wzory (65) i (66), poddając wzór (52) temu samemu przekształceniu, jakiemu poddaliśmy wzór (27) dla otrzymania z niego wzorów (30) i (33).

Pozostaje jeszcze do wyjaśnienia bardzo ważne pytanie:

Gwiazda  $\mathfrak{A}(\alpha)$  była gwiazdą zbieżności w przypadku  $\alpha = 1$ . Czy jest jeszcze gwiazdą zbieżności dla trzech wyrażeń (52), (65) i (66) w przypadku ogólnym  $0 < \alpha \leq 1$ ?

Tak jest w samej rzeczy, a dowodzenie tego jest tylko powtórzeniem dowodzenia P h r a g m é n a dla  $\alpha = 1$ . Przyjmijmy w istocie, że całka

$\int_0^{\infty} e^{-\omega} \mathfrak{F}(x_0 | f, \omega) d\omega$  jest zbieżna, t. j. że wyrażenie:

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{\omega}{u}} \mathfrak{F}(x_0 | f, \omega u) d\omega = \frac{1}{u} \int_0^{\infty} e^{-\frac{w}{u}} \mathfrak{F}(x_0 | f, w) dw$$

jest zbieżna dla  $u = 1$ . Według twierdzenia P h r a g m é n a całka

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{\omega}{u}} \mathfrak{F}(x_0 | f, \omega) d\omega \quad \text{będzie jednostajnie zbieżna dla } R\left(\frac{1}{u} - 1\right) \geq \varepsilon,$$

gdzie  $\varepsilon$  jest wielkością dodatnią tak małą, jak chcemy, co wychodzi na to, że całka jest jednostajnie zbieżna dla każdego obszaru wewnątrz koła, opisanego przez zmienną  $u$  i mającego za średnicę wektor (01). Całka jest więc funkcją monogeniczną i regularną zmiennej  $u$  wszędzie wewnątrz tego koła. Lecz gdy obierzemy  $|u|$  dostatecznie małym, będzie  $f(u | a)$  tak blizkiem zera, jak chcemy, i otrzymamy równość:

$$F(a + (x_0 - a) f(u | a)) = \int_0^{\infty} e^{-\omega} \mathfrak{F}(x_0 | f, \omega u) d\omega. \quad (\text{por. (60)})$$

Wynika stąd, że gdy  $u$  jest punktem wewnątrz koła, którego średnicą jest (01), to  $F(a + (x - a) f(u | a))$  będzie funkcją monogeniczną i regularną zmiennej  $z = (a + (x - a) f(u | a))$ , o ile punkt  $x$  będzie punktem położonym na wektorze  $(ax_0)$  pomiędzy  $a$  i  $x_0$ . A więc  $x_0$  jest albo wierzchołkiem albo punktem wewnętrznym gwiazdy  $\mathfrak{A}(\alpha)$ . Dowodzenie, zastosowane przez nas do wyrażenia (66), stosuje się i do wyrażenia (65), a także do wyrażenia (52), jeżeli posługujemy się przekształceniem analogicznym do przekształcenia użytego dla wzoru (42).

Jeżeli teraz pozwolimy wielkości  $\alpha$  dążyć do zera, otrzymamy następujące wyrażenia, stosowalne wszędzie wewnątrz gwiazdy  $H$ , która jest ich gwiazdą zbieżności:

$$(67) \quad \left\{ \begin{aligned} FA(x) &= \lim_{\alpha=0} \lim_{\omega=\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \left( F(a) + \frac{a_1 u(a)}{|\underline{1}|} F^{(1)}(a) (x-a) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_{\mu} u(a)}{|\underline{\mu}|} F^{(\mu)}(a) (x-a)^{\mu} \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{|\underline{\mu}+1|} \\ &= F(a) + \lim_{\alpha=0} \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\int_0^{\omega} e^{-\omega} f_{\nu}(\omega | a) d\omega}{|\underline{\nu}|} F^{(\nu)}(a) (x-a)^{\nu} \\ &= \lim_{\alpha=0} \int_0^{\infty} e^{-\omega} \mathfrak{F}(x | f, \omega) d\omega. \end{aligned} \right.$$

Wyrażenia, otrzymane w tym paragrafie na  $F^{\mathfrak{A}(\alpha)}(x)$  [ $0 < \alpha \leq 1$ ] są wszystkie zawilsze od wyrażeń w paragrafie poprzedzającym w tem znaczeniu, że są wyrażeniami granicznymi podwójnemi, wtedy gdy wyrażenia nasze w paragrafie pierwszym są wyrażeniami granicznymi pojedynczemi.

Wyrażenia na  $FA(x)$  w paragrafie pierwszym są wyrażeniami granicznymi podwójnemi, a w paragrafie niniejszym stają się wyrażeniami granicznymi potrójnemi. Wiemy już, że niepodobna przedstawić  $FA(x)$  za pomocą wyrażenia granicznego pojedynczego, jeżeli chcemy zachować dla gwiazdy  $A$  własność pozostawiania gwiazdą zbieżności we wszystkich przypadkach 1).

Wyniki tego paragrafu możemy streścić w następującem twierdzeniu:

<sup>1)</sup> E. B o r e l. Sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles. Addition au mémoire sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles. Acta math. 24.

**Twierdzenie 7b.** Oznaczmy przez  $A$  gwiazdę o środku w punkcie  $a$ , przez  $\alpha$  wielkość dodatnią mniejszą od jedności, przez  $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$  gwiazdę półśrodkową z  $A$ , wpisaną w  $A$  i utworzoną przez funkcję tworzącą  $f(u|a)$ , gdzie  $u$  opisuje okrąg koła, którego średnicą jest prosta zawarta pomiędzy zerem a jednością, który zatem, gdy  $f(u|a)$  dobrano odpowiednio, będzie opisany na gwiazdzie  $A^{(\alpha)}$ , otrzymanej przy pomocy tejże samej funkcji tworzącej, gdy  $u$  opisuje okrąg koła o środku  $a$  i promieniu 1. Będzie można zawsze obrać funkcję  $f(u|a)$  taką, by, gdy  $\alpha$  jest dostatecznie małe, gwiazda  $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$  obejmowała w swem wnętrzu wszelki obszar położony wewnątrz  $A$ , i taką jeszcze, by dla  $\alpha=1$  gwiazda  $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$  stawała się gwiazdą Borela (twierdzenie 7a).

Będzie można jeszcze obrać funkcję  $f(u|a)$  taką, by — gdy  $A$  jest gwiazdą główną stałych  $F(a), F'(a) \dots F^{(\nu)}(a) \dots$  poddanych warunkowi Cauchy'ego — następujące trzy wyrażenia (A), (B), (C) posiadały jedną gwiazdę zbieżności, zawsze tę samą i identyczną z gwiazdą  $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ .

$$(A) \quad \lim_{\omega=\infty} e^{-\omega} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{\alpha_1 \mu(a)}{1} F^{(1)}(a) (x-a) + \dots + \frac{\alpha_{\mu} \mu(a)}{\mu} F^{(\mu)}(a) (x-a)^{\mu} \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{\mu+1},$$

gdzie  $\alpha_{\mu} \mu(a)$   $\mu=1, 2, \dots, n$  są stałymi dodatnimi oznaczonymi, mającymi wszystkie własności podwójne  $\alpha_{\mu} n(1)=1$ ,  $\lim_{n=\infty} \alpha_{\mu} n(a)=1$  i zależnymi tylko od funkcji tworzącej;

$$(B) \quad F(a) + \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\int_0^{\omega} e^{-\omega} f_{\nu}(\omega|a) d\omega}{\nu} F^{(\nu)}(a) (x-a)^{\nu},$$

gdzie:

$$(C) \quad f_{\nu}(\omega|a) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{D^{\mu} f^{\nu}}{(\mu)^2} \omega^{\mu}, \quad D^{\mu} f^{\nu} = [D^{\mu} f(u|a)^{\nu}]_{u=0};$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega} \mathfrak{F}(x|f, \omega) d\omega,$$

gdzie:

$$\mathfrak{F}(x|f, \omega) = F(a) + \frac{f_1(\omega|a)}{1} F^{(1)}(a) (x-a) + \frac{f_2(\omega|a)}{2} F^{(2)}(a) (x-a)^2 + \dots$$

Nadto równość:

$$FA(x) = \lim_{\omega=\infty} e^{-\omega} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{\alpha_1 \mu(a)}{1} F^{(1)}(a) (x-a) + \dots + \frac{\alpha_{\mu} \mu(a)}{\mu} F^{(\mu)}(a) (x-a)^{\mu} \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{\mu+1}$$

$$= F(a) + \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\int_0^{\omega} e^{-\omega} f_{\nu}(\omega|a) d\omega}{\nu} F^{(\nu)}(a) (x-a)^{\nu} = \int_0^{\infty} e^{-\omega} \mathfrak{F}(x|f, \omega) d\omega,$$

zachodzi wszędzie wewnątrz  $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ .

Wyrażenia graniczne potrójne:

$$\lim_{\alpha=0} \lim_{\omega=\infty} e^{-\omega} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{\alpha_1 \mu(a)}{1} F^{(1)}(a) (x-a) + \dots + \frac{\alpha_{\mu} \mu(a)}{\mu} F^{(\mu)}(a) (x-a)^{\mu} \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{\mu+1},$$

$$F(a) + \lim_{\alpha=0} \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\int_0^{\omega} e^{-\omega} f_{\nu}(\omega|a) d\omega}{\nu} F^{(\nu)}(a) (x-a)^{\nu},$$

$$\lim_{\alpha=\infty} \int_0^{\infty} e^{-\omega} \mathfrak{F}(x|f, \omega) d\omega,$$

mają wszystkie gwiazdę zbieżności identyczną z  $A$ , a równość, w której po stronie lewej mamy  $FA(x)$ , po prawej zaś pierwsze, drugie lub trzecie z powyższych trzech wyrażen granicznych, zachodzi wszędzie wewnątrz  $A$ .

Jeżeli w przejściu do nieskończoności zatrzymamy się na liczbie oznaczonej skończoną  $\omega$ , będzie:

$$\begin{aligned} F^{(a)}(x) &= e^{-\omega} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( F(a) + \frac{a_{1a}(a)}{1} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_{\mu a}(a)}{\mu} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \right) \frac{\omega^{\mu+1}}{\mu+1} \\ &= F^{(a)}(x) - \int_0^{\omega} e^{-\omega} d\omega \cdot F(a) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\int_0^{\omega} e^{-\omega} f_{\nu}(\omega|a) d\omega}{\nu} F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu} \\ &= F^{(a)}(x) - \int_0^{\omega} e^{-\omega} \delta(x|f, \omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|a))}{y-a} e^{\omega(\frac{1}{y}-1)} dy, \end{aligned}$$

gdzie  $\mathcal{G}$  oznacza okrąg koła o środku w punkcie  $a$  i promieniu  $\frac{1}{2}r$  ( $r > 1$ ); równość ta zachodzi, o ile  $x$  jest punktem takim, że  $a + (x-a)f(y|a)$  należy do wnętrza gwiazdy  $\mathfrak{A}^{(a)}$ , gdy  $y$  opisuje okrąg  $\mathcal{G}^{(1)}$ .

<sup>1)</sup> Przez prace wskazanych na początku tej Noty, po ogłoszeniu Noty trzeciej ukazały się jeszcze następujące prace, odnoszące się do przedmiotu mej pracy: L. e R o y, Sur les séries divergentes; rectification à une note précédente (C. R. 5. VI. 1900). L. e R o y, Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor (Ann. de la Fac. des sciences de Toulouse 2. 1900, p. 322-328). E. B o r e l, Les séries absolument sommables, les séries et le prolongement analytique (C. R. 19. XI. 1900). E. B o r e l, Sur la généralisation du prolongement analytique (C. R. 21. VII. 1902). P. P a i n l e v é, Observations sur la communication précédente (C. R. 21. VII. 1902). E. B o r e l, Leçons sur les séries à termes positifs. Paris 1902. Chap. VI, p. 70.

A. PRZEBORSKI,

## O CAŁKACH NIEANALITYCZNYCH

równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego.

W artykule „O całkach nieanalitycznych równań różniczkowych liniowych o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego“ <sup>1)</sup>, dowiodłem twierdzenia, że wszelkie równanie liniowe o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego

$$A_0(x_0, x_1, \dots, x_n) \frac{\partial x_n}{\partial x_0} + \dots + A_{n-1}(x_0, x_1, \dots, x_n) \frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}} = A_n(x_0, x_1, \dots, x_n),$$

gdzie  $A_0, A_1, \dots, A_n$  są funkcje analityczne w pewnym obszarze, posiada w tym obszarze, oprócz całek analitycznych, i całki nieanalityczne.

W artykule niniejszym dowiodę analogicznego twierdzenia i dla równania nieliniowego o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego:

$$(1) \quad F(z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 0,$$

gdzie  $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$ , przyczem  $F$  jest funkcją analityczną w pewnym obszarze ( $\epsilon$ )

Metoda, którą będę się posługiwał, jest uogólnieniem metody, podanej w poprzednim artykule.

<sup>1)</sup> Prace matematyczno-fizyczne, tom XVII, str. 123.