only one G of each of these orders and the group of cogredient isomorphisms of all of these G's is of order p^4. Moreover, all of these groups are conformal with abelian groups generated by two operators [1]). Continuing this process it is easy to see that t_1, t_2 may generate any one of $1+2+\ldots+m-1+m$ non-abelian groups and that all of these groups are conformal with abelian groups having just two generators, except when $p=2$ and $m=1$. All of them contain two operators of highest order which transform each other into their β, δ powers, where β, δ are arbitrany numbers satisfying the condition that they are congruent to unity modulo p^m.

The preceding considerations can readily be applied to the case when $\alpha-1$ is not some power of a prime. From the fact that the commutators of G are invariant it follows that G is the direct product of its Sylow subgroups. Hence the number of the distinct G's is equal to the product of the numbers of distinct Sylow subgroups. Since these Sylow subgroups are conformal with abelian groups except when one is the quaternion group, it follows that G is always conformal with an abelian group except when its Sylow subgroup whose order is a power of 2 is the quaternion group. In this case G is the direct product of the quaternion group and a group which is conformal with an abelian group.

When $\alpha-1=2^{m_0}p_1^{m_1}p_2^{m_2}\ldots p_\lambda^{m_\lambda}$ these are just

$$1/2^{\lambda+1}\, m_0\, m_1\, m_2 \ldots m_\lambda\, (m_0+1)\,(m_1+1)\,(m_2+1)\ldots(m_\lambda+1)$$

groups which are generated by two operators transforming each other into their α power and which involve only non-abelian Sylow subgroups. In all of these groups the operators which transform each other into their α power are of the same order. There is one and only one such group of order $2^{m_0+2}p_1^{m_1+2}\ldots p_\lambda^{m_\lambda+2}$ and the order of each of the others is divisible by this number.

The necessary and sufficient condition that a Sylow subgroup of order p_β^γ, contained in a group which is generated by two operators which transform each other into their α power, be abelian is that $\gamma<m_\beta+1$ the order of each of its two generators be less than $p_\beta^{m_\beta+1}$. The number of such groups which have one or more than one abelian Sylow subgroups can readily be obtained from the number of those in which the Sylow subgroups are non-abelian, since an abelian Sylow subgroup has not to satisfy any condition except that it has only two generators and that the order of each of these divides p^m.

[1]) Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 7 (1901), p. 351.

A. PRZEBORSKI

O CAŁKACH NIEANALITYCZNYCH

równań różniczkowych liniowych o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego.

Jednem z najważniejszych i najtrudniejszych pytań Analizy jest pytanie o charakterze całek równań różniczkowych. Znane jest twierdzenie Cauchy'ego, że wszelkie równanie różniczkowe

$$\frac{d^n y}{dx^n}=F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right),$$

gdzie F jest funkcyą analityczną argumentów w pewnym obszarze (ε), ma w tym obszarze tylko całki analityczne. Także wszelki układ równań różniczkowych jednoczesnych

$$\frac{dy_1}{dx}=\omega_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),\ \frac{dy_2}{dx}=\omega_2(x, y_1, y_2 \ldots y_n) \ldots \frac{dy_n}{dx}=\omega_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

gdzie $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ są funkcye analityczne w pewnym obszarze (ε), ma zawsze w tym obszarze tylko całki analityczne. Inaczej rzecz się ma z równaniami o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego.

W artykule niniejszym zastanawiam się wyłącznie nad jednem równaniem różniczkowem liniowem o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego:

$$(1)\quad \begin{aligned} &A_0(x_0, x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial x_n}{\partial x_0}+A_1(x_0, x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial x_n}{\partial x_1}+\ldots \\ &+A_{n-1}(x_0, x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}}=A_n(x_0, x_1, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

gdzie $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ są funkcye analityczne w pewnym obszarze (ε), przyczem zakładamy, że dla punktów tego obszaru funkcya $A_0(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ nie jest równa zeru.

Znane jest twierdzenie Z. Kowalewskiej o istnieniu całek tego równania, analitycznych w obszarze (ε).

Zbadajmy, czy nie można znaleść całki równania (1) nieanalitycznej w tym obszarze?

Całkę ogólną równania (1) znajdziemy, całkując układ równań zwyczajnych

$$\frac{dx_1}{dx_0}=\frac{A_1(x_0, x_1, \ldots, x_n)}{A_0(x_0, x_1, \ldots, x_n)}, \quad \frac{dx_2}{dx_0}=\frac{A_2(x_0, x_1, \ldots, x_n)}{A_0(x_0, x_1, \ldots, x_n)} \cdots \frac{dx_n}{dx_0}=\frac{A_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)}{A_0(x_0, x_1, \ldots, x_n)}.$$

Równania te posiadają zawsze układ całek

$$L_1(x_0, x_1, \ldots, x_n)=c_1, \quad L_2(x_0, x_1, \ldots, x_n)=c_2 \ldots L_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)=c_n,$$

gdzie $c_1, c_2 \ldots c_n$ są stałe dowolne, $L_1, L_2, \ldots L_n$ — funkcye analityczne w obszarze (ε_1), zawartym w (ε), czyniące zadość warunkowi, że jakobian

$$D=\frac{\partial(L_1, L_2, L_3 \ldots L_n)}{\partial(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n)} \tag{2}$$

w tym obszarze nie jest zerem.

Jeżeli przez $\omega(L_2, L_3, \ldots, L_n)$ oznaczymy funkcyę dowolną ciągłą, mającą pochodne cząstkowe rzędu pierwszego względem $L_2, L_3 \ldots L_n$, to równanie

$$L_1-\omega(L_2, L_3, \ldots, L_n)=0 \tag{3}$$

będzie całką ogólną równania (1) pod warunkiem, że funkcya ω jest wybrana tak, że

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_n}-\sum_{k=2}^{n}\frac{\partial \omega}{\partial L_k}\frac{\partial L_k}{\partial x_n} \neq 0 \tag{4}$$

w obszarze (ε).

Rozwiązując równanie (3) względem x_n, znajdziemy całkę równania (1) w postaci:

$$x_n=P(x_0, x_1 \ldots x_{n-1}). \tag{5}$$

Postaramy się dowieść, że jeżeli ω nie jest funkcyą analityczną, to całka (5) będzie też nieanalityczną całką równania (1).

Załóżmy więc, że funkcya P jest funkcyą analityczną w obszarze (ε_1), zawartym w (ε).

Oznaczmy przez $\lambda_k(x_0, x_1 \ldots x_{n-1})$ funkcye analityczne w obszarze (ε_1), które otrzymamy podstawiając w funkcye L_k zamiast x_n jego wartość (5), t. j.

$$\lambda_k(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \equiv L_k(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, P(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})). \tag{6}$$

Podstawiając w równanie (3) zamiast x_n jego wartość (5) i mając na uwadze, że wyrażenie (5) jest rozwiązaniem równania (3), otrzymamy tożsamość:

$$\lambda_1(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})-\omega(\lambda_2(x_0, \ldots, x_{n-1}), \lambda_3(x_0, \ldots, x_{n-1}) \ldots \lambda_n(x_0, \ldots, x_{n-1})) \equiv 0. \tag{7}$$

Nietrudno dowieść, że z układu równań

$$\lambda_2(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})=\lambda_2, \quad \lambda_3(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})=\lambda_3, \ldots \lambda_n(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})=\lambda_n \tag{8}$$

można wyznaczyć $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ jako funkcye analityczne względem $x_0, \lambda_2, \lambda_3 \ldots \lambda_n$.

Istotnie, by tego dowieść, dość jest pokazać, że jakobian

$$\Delta=\frac{\partial(\lambda_2, \lambda_3 \ldots \lambda_n)}{\partial(x_1, x_2 \ldots x_{n-1})}$$

nie jest zerem w obszarze (ε_1).

Na mocy wzoru (6) otrzymujemy:

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial x_i}=\frac{\partial L_k}{\partial x_i}+\frac{\partial L_k}{\partial x_n}\frac{\partial P}{\partial x_i}; \tag{9}$$

$$(k=1, 2, \ldots n, \quad i=0, 1, \ldots n-1).$$

Prócz tego na podstawie wzoru (3) mamy:

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_i}-\sum_{k=2}^{n}\frac{\partial \omega}{\partial L_k}\frac{\partial L_k}{\partial x_i}+\frac{\partial P}{\partial x_i}\left(\frac{\partial L_1}{\partial x_n}-\sum_{k=2}^{n}\frac{\partial \omega}{\partial L_k}\frac{\partial L_k}{\partial x_n}\right)=0. \tag{10}$$

Przyjmując pod uwagę warunek (4) i podstawiając w wyrażenie na Δ zamiast $\frac{\partial \lambda_k}{\partial x_i}$ i $\frac{\partial P}{\partial x_i}$ ich wartości, wyznaczone z (9) i (10), znajdziemy, że

$$\Delta=\frac{(-1)^{n+1} D}{\frac{\partial L_1}{\partial x_n}-\sum_{k=2}^{n}\frac{\partial \omega}{\partial L_k}\frac{\partial L_k}{\partial x_n}},$$

gdzie D jest jakobianem (2), nierównym zeru w obszarze (ε).

W ten sposób dowiedliśmy, że wyznaczone z układu (8) funkcye $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$ są funkcyami analitycznemi argumentów $x_0, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$.

Podstawiając wartość na $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$ w tożsamości (7), otrzymamy tożsamość:

$$\lambda_1^*(x_0, \lambda_2, \lambda_3 \ldots \lambda_n) \equiv \omega(\lambda_2, \lambda_3 \ldots \lambda_n), \tag{11}$$

gdzie przez $\lambda_1^*(x_0, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n)$ oznaczyliśmy funkcyę analityczną, którą otrzymamy, rugując z funkcyi λ_1 za pomocą równań (8) wielkości $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$, tak, że

$$\lambda_1^*(x_0, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n) \equiv \lambda_1(x_0, x_1(x_0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \ldots x_n(x_0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)).$$

Teraz okażemy, że funkcya λ_1^* nie zależy od x_0. W tym celu wystarcza dowieść, że funkcye $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ są zależne.

W rzeczy samej, wyrażenie

$$\left(\frac{\partial L_1}{\partial x_n} - \sum_{k=2}^{n} \frac{\partial \omega}{\partial L_k} \frac{\partial L_k}{\partial x_n}\right) \Delta_1,$$

gdzie:

$$\Delta_1 = \frac{\partial(\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n)}{\partial(x_0, x_1 \ldots x_{n-1})}$$

na mocy związków (9) i (10) wyraża się jako suma algebraiczna wyznaczników, tożsamościowo równych zeru, mianowicie wyznacznika

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial L_1}{\partial x_0} & \frac{\partial L_1}{\partial x_0} & \frac{\partial L_2}{\partial x_0} & \cdots & \frac{\partial L_n}{\partial x_0} \\ \frac{\partial L_1}{\partial x_1} & \frac{\partial L_1}{\partial x_1} & \frac{\partial L_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial L_n}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial L_1}{\partial x_n} & \frac{\partial L_1}{\partial x_n} & \frac{\partial L_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial L_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

i wyznaczników:

$$\frac{\partial \omega}{\partial L_k} \begin{vmatrix} \frac{\partial L_k}{\partial x_0} & \frac{\partial L_1}{\partial x_0} & \cdots & \frac{\partial L_{k-1}}{\partial x_0} & \frac{\partial L_k}{\partial x_0} & \frac{\partial L_{k+1}}{\partial x_0} & \cdots & \frac{\partial L_n}{\partial x_0} \\ \frac{\partial L_k}{\partial x_1} & \frac{\partial L_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial L_{k-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial L_k}{\partial x_1} & \frac{\partial L_{k+1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial L_n}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial L_k}{\partial x_n} & \frac{\partial L_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial L_{k-1}}{\partial x_n} & \frac{\partial L_k}{\partial x_n} & \frac{\partial L_{k+1}}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial L_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

$(k = 2, 3 \ldots n)$

Wnioskujemy stąd, że funkcya λ_1^* nie zależy od x_0, a więc tożsamość (11) może być napisana w postaci:

$$\omega(\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n) \equiv \lambda_1^*(\lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n),$$

a że funkcya λ_1^* jest funkcyą analityczną, więc i funkcya ω, równa jej tożsamościowo, jest funkcyą analityczną.

W ten sposób założenie, że całka

$$x_n = P(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$$

równania (1), wyznaczona z równania (3), jest funkcyą analityczną, doprowadza nas do koniecznego wniosku, że funkcya ω musi być analityczną.

A więc, jeżeli w całce ogólnej (3) założymy, że funkcya ω nie jest analityczną, to rozwiązując równanie (3) względem x_n, otrzymamy całkę nieanalityczną naszego równania (1).

W ten sposób dowiedliśmy następującego twierdzenia:

Wszelkie równanie różniczkowe liniowe o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego, którego spółczynniki są funkcyami analitycznemi w pewnym obszarze (ε), oprócz całek analitycznych, ma zawsze całki nieanalityczne w obszarze (ε_1), zawartym w (ε).