CHAPITRE IV.

Remarques critiques.

K. ŻORAWSKI,

Über Krümmungseigenschaften der Scharen von Linienelementen.

(O WŁASNOŚCIACH KRZYWIZNOWYCH CIĄGŁYCH ZBIORÓW ELEMENTÓW LINIOWYCH).

Die Untersuchung der Krümmungseigenschaften eines jeden geometrischen Gebildes besteht in der Betrachtung gewisser Halbgeraden, welche bei jeder euklidischen Bewegung ihre Lage in Bezug auf das Gebilde nicht ändern, und in der Betrachtung gewisser Grössen, deren Werte bei jeder euklidischen Bewegung dieselben bleiben. Betrachtet man eine Schar von Linienelementen, welche längs einer Raumcurve liegen, dieselbe aber im allgemeinen nicht tangieren, so können die Krümmungseigenschaften dieses Gebildes in zwei Kategorien eingeteilt werden. Zur ersten Kategorie können alle solche Krümmungseigenschaften mitgezählt werden, welche von der Wahl der Raumcurve abhängig, dagegen von der Wahl der Schar von Linienelementen unabhängig sind, welche also die Krümmungstheorie der Raumcurven ausmachen; zur zweiten Kategorie hingegen alle diejenigen, welche von der Wahl der Schar von Linienelementen nicht unabhängig sind. Mit den letzten Eigenschaften beschäftigte sich A o u s t, der für die genannten Scharen gewisse Grössen wie „courbure inclinée", „flexion inclinée" etc. und gewisse mit denselben eng verbundene Halbgeraden definiert und auf die Theorie der krummlinigen Coordinaten in Anwendung gebracht hat [1]).

[1]) C. R., t. 57, p. 217—219. 1863. Annali di matematica. Ser. I, t. 6, p. 65—87. 1864; Ser. II, t. 2, p. 39—64. 1868—1869; Ser. II, t. 3, p. 55—69. 1869—1870. Analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface quelconque. Paris 1869.

In der vorliegenden Abhandlung beabsichtigen wir einerseits, einige der genannten Betrachtungen von Aoust in einer Form darzustellen, die den heutzutage gebräuchlichen Ausführungen der Differentialgeometrie näher angepasst wäre, anderseits aber gewisse den genannten nahe stehende und unseres Wissens neue Betrachtungen zu entwickeln.

Die Grundlage dieser Theorie ist eine unmittelbare Verallgemeinerung der Krümmungstheorie von Raumcurven. Insbesondere besitzen in dieser Theorie die Formeln von Frenet eine unmittelbare Geltung, sobald man nur die in denselben vorkommenden Grössen zweckmässig deutet. Die Nummer 1 vorliegender Abhandlung enthält eine Darstellung dieses Gegenstandes und soll die eben genannten Umstände deutlich hervorheben. Dabei benutzen wir nicht die Benennungen von Aoust, sondern wir ersetzen in sämtlichen Benennungen der Krümmungstheorie von Raumcurven das Wort „Raumcurve" durch den Ausdruck „Schar von Linienelementen".

Die Nummer 2 enthält eine Zusammenstellung der flächentheoretischen Fundamentalformeln, die in der Folge gebraucht werden.

In der Nummer 3 werden die Betrachtungen der Nummer 1 auf zwei in einer Fläche gelegene Curvenscharen in Anwendung gebracht. Diese Entwickelungen unterscheiden sich von den entsprechenden Entwickelungen von Aoust hauptsächlich dadurch, dass die Aoust'schen sich meistenteils auf Curvenscharen beziehen, welche gleichzeitig als Coordinatenlinien auf der Fläche angenommen werden, während wir alle hier zugehörigen Formeln unter Zugrundelegung anderer Curvenscharen als Coordinatenlinien aufstellen. Ferner, soweit es uns bekannt ist, kommen diejenigen Betrachtungen, welche in der Nummer 3 über die der Torsion analoge Grösse angestellt werden, in dieser Abhandlung überhaupt zum ersten Male vor.

Die Nummer 4 enthält eine Anwendung der allgemeinen Entwickelungen der Nummer 1 auf die Schar der Normalen der Fläche und man kommt in dieser Weise zu solchen Ausführungen, die mit den bekannten Betrachtungen über unendlich benachbarte Normalen gleichbedeutend sind.

In der Nummer 5 bieten wir endlich eine Anwendung der Entwickelungen der Nummer 1 auf die Theorie der zweifach unendlichen Curvenscharen. Diese Anwendung bildet unseres Wissens einen neuen Beitrag zu dieser Theorie.

Es möge noch hinzugefügt werden, dass wir uns in diesen Betrachtungen darauf beschränkt haben, hauptsächlich die analytische Seite derselben zu behandeln. Auf diese Weise beschäftigen wir uns nicht mit den wichtigen geometrischen Bestimmungen von Krümmungsmittelpunkten, wie dies für verschiedene Krümmungen von den Herren A. Voss und R. v. Lilienthal getan worden ist; auch auf die mannigfachen Contingenzwinkel, welche in den Schriften von Aoust behandelt werden, gehen wir hier explicite gar nicht ein.

1. Es seien x, y, z Cartesi'sche Coordinaten des Punktes im ebenen dreifachen Raume. Man betrachte in diesem Raume eine Curve:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \tag{1}$$

die keine Minimalcurve ist und man setze voraus, dass durch jeden Punkt t dieser Curve ein Linienelement hindurchgeht, dessen Richtungscosinus in Bezug auf die Axen x, y, z die folgenden sind:

$$\alpha = \alpha(t), \quad \beta = \beta(t), \quad \gamma = \gamma(t). \tag{2}$$

Diese Grössen, welche die identische Beziehung

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

befriedigen, sollen im allgemeinen von t abhängig sein, d. h. die betrachteten Linienelemente sollen im allgemeinen nicht eine und dieselbe Richtung besitzen. Ferner diese Grössen (2) werden im allgemeinen als verschieden von den Richtungscosinus der Tangente der Curve (1) vorausgesetzt, d. h. die Gleichungen (2) definieren im allgemeinen eine, von der Schar der Linienelemente der Curve (1) verschiedene Schar von Linienelementen.

Diese Schar von Linienelementen wollen wir kurz als Schar L bezeichnen.

Es sei s die Bogenlänge der Curve (1) und man bezeichne für dieselbe:

$$\frac{dx}{ds} = a(t), \quad \frac{dy}{ds} = b(t), \quad \frac{dz}{ds} = c(t).$$

Wir bilden den Ausdruck:

$$K = \sqrt{\sum \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2}, \tag{3}$$

wo die Summe Σ auf drei Axen erstreckt werden soll und nennen die Grösse K die Krümmung der Schar L.

Wenn diese Krümmung K von Null verschieden ist, so definieren die Formeln:

$$\frac{d\alpha}{ds} = Kl, \quad \frac{d\beta}{ds} = Km, \quad \frac{d\gamma}{ds} = Kn \tag{4}$$

die Richtungscosinus l, m, n einer Richtung, welche keinem Linienelemente von der Länge Null gehören kann. Die Halbgerade durch den Punkt t, welche diese Richtung besitzt, wollen wir positive Hauptnormale der Schar L nennen. Man hat:

$$\Sigma\, a l = 0\,,$$

d. h. das Linienelement und die Hauptnormale der Schar L stehen in demselben Punkte t senkrecht aufeinander.

Die Formeln:

$$\varphi = \beta n - \gamma m\,, \quad \psi = \gamma l - \alpha n\,, \quad \sigma = \alpha m - \beta l \tag{5}$$

definieren für den Punkt t die Richtungscosinus einer Richtung, welche auf das Linienelement und die Hauptnormale der Schar L im Punkte t senkrecht steht. Die Halbgerade, welche durch den Punkt t geht und die eben definierte Richtung besitzt, wollen wir als positive Binormale der Schar L bezeichnen. Man möge dabei bemerken, dass

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ l & m & n \\ \varphi & \psi & \sigma \end{vmatrix} = +1$$

d. h. dass der Dreikant des Linienelementes, der positiven Hauptnormalen und der positiven Binormalen der Schar L mit dem Dreikante der positiven Halbaxen x, y, z congruent ist.

Es ist leicht die Grössen p, q, r so zu berechnen, dass die Formeln:

$$\frac{dl}{ds} = p\alpha + ql + r\varphi\,,$$

$$\frac{dm}{ds} = p\beta + qm + r\psi\,,$$

$$\frac{dn}{ds} = p\gamma + qn + r\sigma$$

gelten. Man erhält nämlich:

$$p = \Sigma\, \alpha \frac{dl}{ds} = -\Sigma\, l \frac{d\alpha}{ds} = -K\,,$$

$$q = \Sigma\, l \frac{dl}{ds} = 0\,,$$

$$r = \Sigma\, \varphi \frac{dl}{ds}$$

und wenn man noch die Bezeichnung:

$$-\Sigma\, \varphi \frac{dl}{ds} = \Sigma\, l \frac{d\varphi}{ds} = S \tag{6}$$

einführt, so wird man diese Formeln in der Form:

$$\frac{dl}{ds} = -K\alpha - S\varphi\,, \quad \frac{dm}{ds} = -K\beta - S\psi\,, \quad \frac{dn}{ds} = -K\gamma - S\sigma \tag{7}$$

darstellen können. Auf dieselbe Weise kann man die Richtigkeit der Formeln:

$$\frac{d\varphi}{ds} = Sl\,, \quad \frac{d\psi}{ds} = Sm\,, \quad \frac{d\sigma}{ds} = Sn \tag{8}$$

beweisen.

Die Grösse S wollen wir Torsion der Schar L benennen.

Man bemerke, dass wenn die Schar L aus lauter parallelen Linienelementen besteht, so ist identisch $K = 0$. Wenn $K \neq 0$, so bildet das identische Bestehen der Beziehung $S = 0$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass alle Linienelemente der Schar L einer Ebene parallel seien.

Zweitens wollen wir einige Bemerkungen über die Vorzeichen anschliessen. Wenn $K \neq 0$, so ist sie im reellen Falle eine positive Grösse. Wenn $K \neq 0$, so sind: Hauptnormale, Binormale und Torsion vollständig bestimmt. Wählt man in diesem Falle statt der Richtung α, β, γ die entgegengesetzte und lässt die Richtung a, b, c unverändert, so bleibt die Richtung der positiven Binormalen unverändert, die Richtung der positiven Hauptnormalen geht in die entgegengesetzte über und die Torsion verändert ihr Vorzeichen. Nimmt man ferner statt der Richtung a, b, c die entgegengesetzte und lässt α, β, γ unverändert, so gehen die Richtungen der positiven Hauptnormalen und der positiven Binormalen in die entgegengesetzte über und die Torsion verändert das Vorzeichen. Wenn endlich sowohl die Richtung α, β, γ wie auch die Richtung a, b, c in entgegengesetzte übergehen, so bleibt die Richtung der positiven Hauptnormalen und der Wert von S unverändert und die Richtung der positiven Binormalen geht in die entgegengesetzte über.

Es sei endlich hervorgehoben, dass im Falle wenn α, β, γ Richtungscosinus der Linienelemente der Curve (1) von der Länge ds sind, so sind die hier definierten Grössen K und S die Krümmung und die Torsion der Curve (1) und die hier definierten Halbgeraden: positive Hauptnormale und positive Binormale der Schar L, werden zu Halbgeraden: posi-

tiver Hauptnormalen und positiver Binormalen der Curve (1). Dabei gehen die drei Gruppen von Formeln (4), (7) und (8) in die Formeln von Frenet in der Theorie der Raumcurven über. In diesem Sinne bilden diese Betrachtungen eine Verallgemeinerung der Krümmungstheorie von Raumcurven und die Formeln (4), (7) und (8) eine Verallgemeinerung der Formeln von Frenet.

2. Wir werden diese Betrachtungen in erster Linie auf Flächentheorie anwenden. Bei den Rechnungen, die wir ausführen werden, wollen wir die allgemeinen Parameterlinien benutzen, jedoch um mit Grössen zu rechnen, die zwar von der Wahl der Parameterlinien, nicht aber von der Wahl der Parameter selbst abhängig sind, werden wir die Differentiationen nach Bogenlängen der Parameterlinien in Anwendung bringen. In Folge dessen werden wir die partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Fläche und die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie in einer solchen Form benutzen, dass diese Gleichungen bis auf die Bezeichnungen mit Gleichungen übereinstimmen, welche sich in gewissen Arbeiten der Herren A. Voss und R. v. Lilienthal befinden [1]). Anderseits ist es im diesem Zusammenhange bequem, in den Formeln, die sich auf die allgemeine Flächencurve beziehen, die Richtung dieser Curve in Bezug auf die Parameterlinien durch gewisse Richtungscoeffizienten zu bestimmen. Wegen der Entwickelungen, die in der Folge dargestellt werden sollen, stellen wir hier die auf diese Gegenstände sich beziehenden Formeln zusammen.

Es sei eine Fläche:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \tag{9}$$

und man setze zunächst voraus, dass alle in diesen Gleichungen vorkommenden Grössen reell sind. Wir wollen die Fundamentalgrössen erster Ordnung mit E, F, G bezeichnen. Wenn man die Bogenlängen der Curven $v = \text{const}$, $u = \text{const}$; mit s_1 beziehungsweise mit s_2 bezeichnet und die Annahme macht, dass diese Bogenlängen in denselben Richtungen wie u, beziehungsweise v wachsen, so hat man für beliebige Function f von u und v die Formeln:

$$\frac{df}{ds_1} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial f}{\partial u}, \quad \frac{df}{ds_2} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial f}{\partial v}. \tag{10}$$

Mögen die positiven Halbtangenten der Parameterlinien die Richtungen der wachsenden Bogenlängen besitzen und der positive Sinn der Drehung

[1]) Münchner Berichte 1892, p. 247—278. Mathematische Annalen Bd. 42, p. 505—525. Siehe auch Encyklopädie der math. Wissensch. Bd. III, p. 161.

in der Tangentialebene sei derjenige, in welchem die positive Halbtangente der Curve $v = \text{const}$ nach einer Drehung, die kleiner als zwei rechte Winkel ist, mit der positiven Halbtangente der Curve $u = \text{const}$ zusammenfällt. Bei dieser Festsetzung wird durch diese Drehung ein positiver Winkel $\theta < \pi$ gebildet, für welchen die Formeln gelten:

$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{E}\sqrt{G}}, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}\sqrt{G}}. \tag{11}$$

Die Richtungscosinus X, Y, Z der positiven Flächennormalen sollen dann durch die Formel:

$$X = \operatorname{cosec}\theta \left(\frac{dy}{ds_1} \frac{dz}{ds_2} - \frac{dy}{ds_2} \frac{dz}{ds_1} \right) \tag{12}$$

und analoge Formeln bestimmt werden.

Neben den Parameterlinien werden wir auf der Fläche die orthogonalen Trajectorien derselben in Betrachtung ziehen. Für dieselben nehmen wir diejenigen unendlich kleine Bögen $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ und diejenigen Halbtangenten als positiv an, welche aus den positiven unendlich kleinen Bögen ds_1 und ds_2 und aus den positiven Halbtangenten der Parameterlinien durch positive Drehung um $\frac{\pi}{2}$ hervorgehen. Demnach haben wir:

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\sigma_1} &= -\operatorname{cotg}\theta \frac{df}{ds_1} + \operatorname{cosec}\theta \frac{df}{ds_2}, \\ \frac{df}{d\sigma_2} &= -\operatorname{cosec}\theta \frac{df}{ds_1} + \operatorname{cotg}\theta \frac{df}{ds_2}. \end{aligned} \tag{13}$$

Wir gehen jetzt zu Beziehungen über, in denen Aufeinanderfolgen der Operationen (10) und (13) auftreten. Sind τ und τ' zwei beliebige der betrachteten Bogenlängen, so wollen wir folgende Bezeichnungsweise annehmen:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{df}{d\tau}\right) = \frac{d^2 f}{d\tau^2}, \quad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{df}{d\tau'}\right) = \frac{d^2 f}{d\tau\, d\tau'}. \tag{14}$$

Benutzt man nun zuerst die Bezeichnungen:

$$p_1 = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial v}, \quad p_2 = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial u} \tag{15}$$

so erhält man die wichtige Beziehung:

$$\frac{d^2 f}{ds_2\, ds_1} - \frac{d^2 f}{ds_1\, ds_2} = p_1 \frac{df}{ds_1} + p_2 \frac{df}{ds_2}. \tag{16}$$

Wenn man ferner die weiteren Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{p_1 + p_2 \cos\theta}{\sin\theta}, \quad q_2 = \frac{p_2 + p_1 \cos\theta}{\sin\theta}, \\ g_1 &= q_1 - \frac{d\theta}{ds_1}, \quad g_2 = q_2 + \frac{d\theta}{ds_2} \end{aligned} \tag{17}$$

annimmt und statt der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung D, D', D'' die Grössen:

$$n_1 = \frac{D}{E}, \quad m = \frac{D'}{\sqrt{E}\sqrt{G}}, \quad n_2 = \frac{D''}{G} \tag{18}$$

einführt, so wird man folgende drei Gruppen von Beziehungen hinschreiben können:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 x}{ds_1^2} &= g_1 \frac{dx}{d\sigma_1} + n_1 X, \quad \frac{d^2 x}{ds_1\, ds_2} = q_1 \frac{dx}{d\sigma_2} + m X, \\ \frac{d^2 x}{ds_2\, ds_1} &= q_2 \frac{dx}{d\sigma_1} + m X, \quad \frac{d^2 x}{ds_2^2} = g_2 \frac{dx}{d\sigma_2} + n_2 X; \end{aligned} \right. \tag{19}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dX}{ds_1} &= \operatorname{cosec}\theta \left(n_1 \frac{dx}{d\sigma_2} - m \frac{dx}{d\sigma_1} \right), \\ \frac{dX}{ds_2} &= \operatorname{cosec}\theta \left(m \frac{dx}{d\sigma_2} - n_2 \frac{dx}{d\sigma_1} \right); \end{aligned} \right. \tag{20}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 x}{ds_1\, d\sigma_1} &= -g_1 \frac{dx}{ds_1} + (m \operatorname{cosec}\theta - n_1 \operatorname{cotg}\theta) X, \\ \frac{d^2 x}{ds_2\, d\sigma_1} &= -q_2 \frac{dx}{ds_1} + (n_2 \operatorname{cosec}\theta - m \operatorname{cotg}\theta) X, \\ \frac{d^2 x}{ds_1\, d\sigma_2} &= -q_1 \frac{dx}{ds_2} + (m \operatorname{cotg}\theta - n_1 \operatorname{cosec}\theta) X, \\ \frac{d^2 x}{ds_2\, d\sigma_2} &= -g_2 \frac{dx}{ds_2} + (n_2 \operatorname{cotg}\theta - m \operatorname{cosec}\theta) X. \end{aligned} \right. \tag{21}$$

Zu jeder dieser Gruppen von Beziehungen gehören ausser den angegebenen noch diejenigen, welche aus den angegebenen dadurch hervorgehen, dass man statt der Grössen x, X die Grössen y, Y und z, Z hineinsetzt. Die Gleichungen der ersten Gruppe, d. h. die Gleichungen (19) und die denselben analogen Gleichungen werden eben nach Voss die partiellen Differentialgleichungen der Fläche genannt.

Die Integrabilitätsbedingungen der partiellen Differentialgleichungen der Fläche, d. h. die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie kann man mit Benutzung unserer Bezeichnungen in folgender Form angeben. Die Gauss'sche Beziehung kann entweder in der Form:

$$n_1 n_2 - m^2 = \sin\theta \left(\frac{dg_1}{ds_2} - \frac{dq_2}{ds_1} - p_1 g_1 - p_2 q_2 \right), \tag{22}$$

oder in der Form:

$$n_1 n_2 - m^2 = \sin\theta \left(\frac{dq_1}{ds_2} - \frac{dg_2}{ds_1} - p_1 q_1 - p_2 g_2 \right), \tag{22'}$$

dargestellt werden, weil die Beziehung:

$$\frac{d(q_1 - g_1)}{ds_2} - \frac{d(g_2 - q_2)}{ds_1} = p_1 (q_1 - g_1) + p_2 (g_2 - q_2)$$

besteht. Die Mainardi—Codazzi'schen Relationen sind die folgenden:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dn_1}{ds_2} - \frac{dm}{ds_1} &= n_1 (p_1 - q_2 \operatorname{cotg}\theta) + m (g_1 \operatorname{cotg}\theta \\ &\quad + q_2 \operatorname{cosec}\theta + p_2) - n_2 g_1 \operatorname{cosec}\theta, \\ \frac{dn_2}{ds_1} - \frac{dm}{ds_2} &= n_1 g_2 \operatorname{cosec}\theta - m (g_2 \operatorname{cotg}\theta \\ &\quad + q_1 \operatorname{cosec}\theta + p_1) - n_2 (p_2 - q_1 \operatorname{cotg}\theta). \end{aligned} \right. \tag{23}$$

Nun wollen wir noch einige Worte über die allgemeine Flächencurve hinzufügen, die wir zuerst als eine reelle Curve auf einer reellen Fläche voraussetzen. Hat man eine solche Curve:

$$u = u(s), \quad v = v(s) \tag{24}$$

wo s die Bogenlänge der Curve bezeichnet, so werden wir zur Bestimmung der Richtung der positiven Halbtangente der Curve die Coeffizienten:

$$\lambda = \sqrt{E} \frac{du}{ds}, \quad \mu = \sqrt{G} \frac{dv}{ds} \tag{25}$$

benutzen. Diese Coefficienten befriedigen die Relation:

$$\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu\cos\theta = 1 \tag{26}$$

und ist f eine Function der Parameter u und v, so bekommt man:

$$\frac{df}{ds} = \lambda\frac{df}{ds_1} + \mu\frac{df}{ds_2}. \tag{27}$$

Wenn man ferner mit ω denjenigen Winkel bezeichnet, welchen die positive Halbtangente der Curve mit der positiven Halbtangente der Curve $v = \text{const}$ einschliesst, so hat man die Ausdrücke:

$$\lambda = \frac{\sin(\theta - \omega)}{\sin\theta}, \quad \mu = \frac{\sin\omega}{\sin\theta}, \tag{28}$$

aus welchen sich durch Differentiation die Formeln:

$$\begin{aligned} d\lambda &= \bar{\lambda}(d\omega - d\theta) - \operatorname{cotg}\theta \,.\, \lambda\, d\theta, \\ d\mu &= \bar{\mu}\, d\omega - \operatorname{cotg}\theta \,.\, \mu\, d\theta \end{aligned} \tag{29}$$

ergeben, wo $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$ die Richtungscoeffizienten derjenigen Richtung in der Tangentialebene sind, welche mit der positiven Halbtangente der allgemeinen Curve den Winkel $+\frac{\pi}{2}$ bildet.

Was die Krümmungen der Flächencurve anbelangt, so wollen wir, um in Bezug auf die Vorzeichen eine bestimmte Wahl zu treffen, die folgende Definition annehmen. Wir setzen voraus, dass die positive in der Tangentialebene der Fläche gelegene Halbnormale der Curve so gewählt ist, dass das Trieder der positiven Halbtangente der Curve, der erwähnten positiven Halbnormalen und der positiven Flächennormalen mit dem Trieder der positiven Halbaxen x, y, z congruent ist. Betrachtet man alsdann die Krümmung der Flächencurve, als einen Vector, der die Richtung der positiven Hauptnormalen besitzt, so werden die geodätische Krümmung und die Normalkrümmung, sowohl der Grösse wie dem Vorzeichen nach, als rechtwinkelige Projectionen dieses Vectors auf die früher erwähnte in der Tangentialebene liegende positive Halbnormale beziehungsweise auf die positive Flächennormale definiert. Wir bezeichnen diese geodätische Krümmung mit g und diese Normalkrümmung mit n. Man betrachte ferner die Normalebene der Curve und man bezeichne in derselben denjenigen Sinn der Drehung als positiv, in welchem man die positive Flächennormale drehen muss, um vermöge einer Drehung um $\frac{\pi}{2}$ zu der früher erwähnten in

der Tangentialebene liegenden positiven Halbnormalen zu gelangen. Bei dieser Festsetzung wollen wir mit Ω denjenigen positiven Winkel benennen, den die positive Hauptnormale mit der positiven Flächennormalen bildet. Wenn wir ausserdem die Krümmung und Torsion mit K und S und zuletzt die geodätische Torsion mit τ bezeichnen, so gelangt man zur Reihe von Formeln:

$$\left\{\begin{aligned} n &= K\cos\Omega = n_1\lambda^2 + 2m\lambda\mu + n_2\mu^2, \\ g &= K\sin\Omega = g_1\lambda + g_2\mu + \frac{d\omega}{ds}, \\ K &= \sqrt{n^2 + g^2}, \\ S &= \frac{d\Omega}{ds} + \tau = \frac{1}{K^2}\left(n\frac{dg}{ds} - g\frac{dn}{ds}\right) \\ &\quad - [n_1\lambda\bar{\lambda} + m(\lambda\bar{\mu} + \mu\bar{\lambda}) + n_2\mu\bar{\mu}]. \end{aligned}\right. \tag{30}$$

Wir haben die in dieser Nummer vorhandenen Definitionen und Formeln unter der Voraussetzung der Realität angegeben und bemerken dabei, dass alle in diesen Formeln vorhandenen Quadratwurzeln als positiv angenommen werden sollen. Diese Betrachtungen können natürlich nicht sämtlich auf die Fälle, in welchen die Voraussetzung der Realität nicht zutrifft, angewendet werden. Sobald man aber annimmt, dass für die Fläche die Discriminante $EG - F^2$ nicht identisch Null ist und dass die Curven $u = \text{const}$ und $v = \text{const.}$ keine Minimalcurven sind, so können dennoch alle auf die Fläche sich beziehenden Formeln auch in imaginären Fällen in Anwendung gebracht werden, wo für jede der vorhandenen Quadratwurzeln ein bestimmter und immer derselbe der beiden möglichen Werte angenommen werden muss. Wenn man ferner voraussetzt, dass die Flächencurve keine Minimalcurve ist, so können auch in Fällen, in welchen die Realitätsvoraussetzungen nicht stattfinden, die für die Flächencurve angegebenen Formeln benutzt werden, wobei für die Quadratwurzeln dieselbe Bemerkung gelten muss.

3. Es seien zwei Curvenscharen auf der Fläche vorgelegt, die wir als erste und zweite unterscheiden wollen. Wir setzen voraus, dass keine dieser Curvenscharen eine Schar von Minimalcurven ist. Längs jeder Curve der zweiten Curvenschar hat man eine Schar von Linienelementen der Curven der ersten Schar und längs jeder Curve der ersten Curvenschar hat man eine Schar von Linienelementen der Curven der zweiten Schar. Wir wollen die Scharen von Linienelementen der ersten Categorie als Scharen (1, 2) und die Scharen von Linienelementen der zweiten Categorie als Scharen (2, 1) bezeichnen. Diese Scharen von Linienelementen bieten Beispiele für

die Scharen L, mit welchen wir uns in der Nummer 1 beschäftigt haben. Wir haben unter 1. für diese Scharen einige Grössen und Richtungen definiert. Wir wollen diese Grössen und Richtungen für die Scharen (1, 2) und (2, 1) mit denselben Buchstaben bezeichnen, wie wir dies unter 1. getan haben, diesen Buchstaben jedoch die Indices (1, 2), beziehungsweise (2, 1) beifügen. In den Rechnungen, die nun folgen sollen, werden auch Grössen vorkommen, welche sich nur auf die Curven der ersten oder nur auf die der zweiten unserer Curvenscharen beziehen. Den Buchstaben, die jene Grössen bezeichnen, sollen in der Folge die Indices (1) beziehungsweise (2) beigefügt werden.

Eine auf der Fläche gelegene Curvenschar kann durch die Richtungscoeffizienten der positiven Halbtangenten der Curven der Schar bestimmt werden. Es seien also:

$$\lambda^{(1)},\ \mu^{(1)} \text{ und } \lambda^{(2)},\ \mu^{(2)}$$

die Richtungscoeffizienten für die erste und für die zweite Curvenschar. Diese Richtungscoeffizienten sind im allgemeinen Functionen von u und v. Differentiationen nach den Bogenlängen unserer Curvenscharen werden dann durch die Formeln:

$$\frac{df}{ds^{(1)}} = \lambda^{(1)} \frac{df}{ds_1} + \mu^{(1)} \frac{df}{ds_2},$$

$$\frac{df}{ds^{(2)}} = \lambda^{(2)} \frac{df}{ds_1} + \mu^{(2)} \frac{df}{ds_2}$$

bestimmt, wo f eine Function von u, v bedeutet.

Man betrachte nun die Richtungscosinus der positiven Halbtangente der Curven der ersten Curvenschar, d. h. die Grössen:

$$\alpha^{(1)} = \frac{dx}{ds^{(1)}}, \quad \beta^{(1)} = \frac{dy}{ds^{(1)}}, \quad \gamma^{(1)} = \frac{dz}{ds^{(1)}},$$

und suche zuerst, die Unbekannten h, $n^{(1,2)}$ und $g^{(1,2)}$ aus den Gleichungen:

$$\frac{d}{ds^{(2)}}\left(\frac{dx}{ds^{(1)}}\right) = h\frac{dx}{ds^{(1)}} + g^{(1,2)}\frac{dx}{d\sigma^{(1)}} + n^{(1,2)} X,$$

$$\frac{d}{ds^{(2)}}\left(\frac{dy}{ds^{(1)}}\right) = h\frac{dy}{ds^{(1)}} + g^{(1,2)}\frac{dy}{d\sigma^{(1)}} + n^{(1,2)} Y,$$

$$\frac{d}{ds^{(2)}}\left(\frac{dz}{ds^{(1)}}\right) = h\frac{dz}{ds^{(1)}} + g^{(1,2)}\frac{dz}{d\sigma^{(1)}} + n^{(1,2)} Z$$

zu bestimmen, wo $d\sigma^{(1)}$ das Linienelement bezeichnet, welches in der Tangentialebene gelegen ist und mit dem Linienelemente $ds^{(1)}$ den Winkel $+\frac{\pi}{2}$ bildet. Man ersieht sofort, dass sich die folgenden Werte ergeben:

$$h = \sum \frac{dx}{ds^{(1)}} \frac{d}{ds^{(2)}}\left(\frac{dx}{ds^{(1)}}\right) = 0,$$

$$g^{(1,2)} = \sum \frac{dx}{d\sigma^{(1)}} \frac{d}{ds^{(2)}}\left(\frac{dx}{ds^{(1)}}\right),$$

$$n^{(1,2)} = \sum X \frac{d}{ds^{(2)}}\left(\frac{dx}{ds^{(1)}}\right).$$

Aus diesen Formeln können nun für $g^{(1,2)}$ und $n^{(1,2)}$ Ausdrücke abgeleitet werden, welche lauter Grössen enthalten, die von der Wahl des rechtwinkeligen Coordinatensystems x, y, z unabhängig sind. Zu dem Zwecke beachte man, dass die Grösse:

$$\frac{d}{ds^{(2)}}\left(\frac{dx}{ds^{(1)}}\right) = \frac{d}{ds^{(2)}}\left(\lambda^{(1)}\frac{dx}{ds_1} + \mu^{(1)}\frac{dx}{ds_2}\right)$$

in der Form:

$$\frac{d}{ds^{(2)}}\left(\frac{dx}{ds^{(1)}}\right) = \lambda^{(1)}\left(\lambda^{(2)}\frac{d^2x}{ds_1^2} + \mu^{(2)}\frac{d^2x}{ds_2\, ds_1}\right) + \mu^{(1)}\left(\lambda^{(2)}\frac{d^2x}{ds_1\, ds_2} + \mu^{(2)}\frac{d^2x}{ds_2^2}\right) + \frac{dx}{ds_1}\frac{d\lambda^{(1)}}{ds^{(2)}} + \frac{dx}{ds_2}\frac{d\mu^{(1)}}{ds^{(2)}}$$

dargestellt werden kann, und wenn man die Relationen (19) in Anwendung bringt und bedenkt, dass aus (13) die Relationen:

$$\frac{dx}{ds_1} = \operatorname{cotg}\theta\frac{dx}{d\sigma_1} - \operatorname{cosec}\theta\frac{dx}{d\sigma_2},$$

$$\frac{dx}{ds_2} = \operatorname{cosec}\theta\frac{dx}{d\sigma_1} - \operatorname{cotg}\theta\frac{dx}{d\sigma_2}.$$

folgen, so kommt man auf die folgende Formel:

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d}{ds^{(2)}}\left(\frac{dx}{ds^{(1)}}\right) &= [n_1\lambda^{(1)}\lambda^{(2)} + m(\lambda^{(1)}\mu^{(2)} + \mu^{(1)}\lambda^{(2)}) + n_2\mu^{(1)}\mu^{(2)}]\, X \\ &+ \left[\lambda^{(1)}(q_1\lambda^{(2)} + q_2\mu^{(2)}) + \operatorname{cotg}\theta\frac{d\lambda^{(1)}}{ds^{(2)}} + \operatorname{cosec}\theta\frac{d\mu^{(1)}}{ds^{(2)}}\right]\frac{dx}{d\sigma_1} \\ &+ \left[\mu^{(1)}(q_1\lambda^{(2)} + g_2\mu^{(2)}) - \operatorname{cosec}\theta\frac{d\lambda^{(1)}}{ds^{(2)}} - \operatorname{cotg}\theta\frac{d\mu^{(1)}}{ds^{(2)}}\right]\frac{dx}{d\sigma_2}. \end{aligned}\right.$$

Analoge Formeln existieren für die Axen y und z. Aus diesen Formeln folgt zunächst:

$$n^{(1,2)} = n_1 \lambda^{(1)} \lambda^{(2)} + m (\lambda^{(1)} \mu^{(2)} + \mu^{(1)} \lambda^{(2)}) + n_2 \mu^{(1)} \mu^{(2)} \text{ [1]} . \tag{32}$$

Wenn man ferner mit $\omega^{(1)}$ den Winkel bezeichnet, welchen die positive Halbtangente der Curvenschar 1 mit der positiven Halbtangente der Curve $v = \text{const}$ bildet, und die Formeln (29) in Anwendung bringt, so ergibt sich:

$$\operatorname{cotg} \theta \frac{d\lambda^{(1)}}{ds^{(2)}} + \operatorname{cosec} \theta \frac{d\mu^{(1)}}{ds^{(2)}} = \lambda^{(1)} \frac{d\omega^{(1)}}{ds^{(2)}} ,$$

$$- \operatorname{cosec} \theta \frac{d\lambda^{(1)}}{ds^{(2)}} - \operatorname{cotg} \theta \frac{d\mu^{(1)}}{ds^{(2)}} = \mu^{(1)} \left(\frac{d\omega^{(1)}}{ds^{(2)}} - \frac{d\theta}{ds^{(2)}} \right) .$$

Es lassen sich demnach die zweite und dritte Zeile der Formel (31) in der Form:

$$\lambda^{(1)} \left[\lambda^{(2)} \left(g_1 + \frac{d\omega^{(1)}}{ds_1} \right) + \mu^{(2)} \left(q_2 + \frac{d\omega^{(1)}}{ds_2} \right) \right] \frac{dx}{d\sigma_1}$$

$$+ \mu^{(1)} \left[\lambda^{(2)} \left(q_1 - \frac{d\theta}{ds_1} + \frac{d\omega^{(1)}}{ds_1} \right) + \mu^{(2)} \left(g_2 - \frac{d\theta}{ds_2} + \frac{d\omega^{(1)}}{ds_2} \right) \right] \frac{dx}{d\sigma_3}$$

darstellen. Beachtet man jetzt die Formeln (17) und die Formel:

$$\frac{dx}{d\sigma^{(1)}} = \lambda^{(1)} \frac{dx}{d\sigma_1} + \mu^{(1)} \frac{dx}{d\sigma_2} ,$$

so ergibt sich:

$$g^{(1,2)} = \left(g_1 + \frac{d\omega^{(1)}}{ds_1} \right) \lambda^{(2)} + \left(q_2 + \frac{d\omega^{(1)}}{ds_2} \right) \mu^{(2)} . \tag{33}$$

Wir haben also constatiert, dass wenn man unter $n^{(1,2)}$ und $g^{(1,2)}$ die Ausdrücke (32) und (33) versteht, so bekommt man die Formel:

$$\frac{d}{ds^{(2)}} \left(\frac{dx}{ds^{(1)}} \right) = n^{(1,2)} X + g^{(1,2)} \frac{dx}{d\sigma^{(1)}} \tag{34}$$

und die zu derselben analogen Formeln für die Axen y und z. Mit Hilfe

[1]) Diese Formel ist bis auf die Bezeichnungen mit der Formel (6), p. 47. Annali di mat. Serie II. Tomo II von Aoust identisch.

derselben kann nun auf Grund der Formel (3) der Ausdruck für die Krümmung der Schar (1, 2) gebildet werden:

$$K^{(1,2)} = \sqrt{(n^{(1,2)})^2 + (g^{(1,2)})^2} .$$

Es liegt ferner nahe, die Grössen $n^{(1,2)}$ und $g^{(1,2)}$ mit den Benennungen Normal und geodätische Krümmung der Schar (1, 2) zu belegen.

Die Normalkrümmung ist symmetrisch in Bezug auf die Richtungscoeffizienten der Scharen 1 und 2, d. h. es findet die Beziehung statt:

$$n^{(1,2)} = n^{(2,1)} .$$

Wenn man diese Grösse für positive Richtungen der Scharen $v = \text{const}$ und $u = \text{const}$ berechnet, so ergibt sich der Coeffizient m.

In Bezug auf die geodätische Krümmung $g^{(1,2)}$ möge man bemerken, dass wenn man mit $\omega^{(2)}$ denjenigen Winkel bezeichnet, welchen die positive Halbtangente der Curvenschar 2 mit der positiven Halbtangente der Curvenschar $v = \text{const}$ bildet, und mit $g^{(2)}$ die geodätische Krümmung der Curvenschar 2 benennt, so kommt man leicht auf die Formel:

$$g^{(1,2)} = g^{(2)} - \frac{d(\omega^{(2)} - \omega^{(1)})}{d\sigma^{(2)}} \text{ [1]} .$$

Man beachte ferner, dass wenn man für positive Richtungen der Curvenscharen 1 und 2 die positiven Richtungen der Curvenscharen $v = \text{const}$, beziehungsweise $u = \text{const}$ annimmt und $g^{(1,2)}$ berechnet, so bekommt man q_2 und dass wenn man für positive Richtungen der Curvenscharen 1 und 2 die positiven Richtungen der Curvenscharen $u = \text{const}$, beziehungsweise $v = \text{const}$ annimmt und $g^{(1,2)}$ berechnet, so bekommt man q_1.

Im Falle, wenn gleichzeitig:

$$n^{(1,2)} = 0 , \quad g^{(1,2)} = 0$$

ist, so verbindet jede Curve der Curvenschar 2 solche Linienelemente der Curvenschar 1, die einander parallel sind. Die erste dieser Gleichungen besagt, dass die Curvenscharen 1 und 2 mit einander conjugiert sind. Man bemerke, dass wenn gleichzeitig:

$$n^{(1,2)} = 0 , \quad g^{(1,2)} = 0 , \quad g^{(2,1)} = 0 , \tag{35}$$

[1]) Diese Formel ist bis auf die Bezeichnungsweise mit der Formel (14), p. 75. Annali di mat. Serie I. Tomo VI von Aoust gleichbedeutend.

jede Curve der Curvenschar 2 parallele Linienelemente der Curvenschar 1 und jede Curve der Curvenschar 1 parallele Linienelemente der Curvenschar 2 verbindet. Demnach sind die Beziehungen (35) im Falle, wenn die Scharen 1 und 2 voneinander verschieden sind, notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass diese Scharen zwei miteinander conjugierte Scharen von congruenten und gleichgestellten Curven auf einer Translationsfläche sind.

Wenn dagegen die Scharen 1 und 2 miteinander identisch sind, so besagen die Beziehungen (35), dass diese Scharen geradlinige Erzeugende einer Regelfläche sind.

Wenn die Krümmung $K^{(1,2)}$ von Null verschieden ist, so existiert die positive Hauptnormale der Schar (1, 2). Die Richtungscosinus derselben werden durch die Formel:

$$K^{(1,2)} l^{(1,2)} = n^{(1,2)} X + g^{(1,2)} \frac{dx}{d\sigma^{(1)}} \tag{36}$$

und die ihr analogen Formeln bestimmt sein. Diese Formeln bilden in unserem Falle die Gruppe (4) der verallgemeinerten Formeln von Frenet.

Hier wollen wir noch einige Bemerkungen über die Formeln (32) und (33) einschalten. Führt man nämlich die Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} n^{(1,u)} &= n_1 \lambda^{(1)} + m \mu^{(1)}, \quad n^{(1,v)} = m \lambda^{(1)} + n_2 \mu^{(1)}, \\ g^{(1,u)} &= g_1 + \frac{d\omega^{(1)}}{ds_1}, \quad g^{(1,v)} = q_2 + \frac{d\omega^{(1)}}{ds_2}, \end{aligned} \tag{37}$$

ein, so kann man die Formeln (32) und (33) in der kürzeren Form darstellen:

$$\begin{aligned} n^{(1,2)} &= n^{(1,u)} \lambda^{(2)} + n^{(1,v)} \mu^{(2)}, \\ g^{(1,2)} &= g^{(1,u)} \lambda^{(2)} + g^{(1,v)} \mu^{(2)}. \end{aligned} \tag{38}$$

Die Grössen (37) sind die Normal und geodätischen Krümmungen der Curvenschar 1 in Bezug auf die Parameterlinien. Wenn die Curvenschar 1 unveränderlich bleibt und wenn man anstelle der Curvenschar 2 verschiedene Curvenscharen auf der Fläche nimmt, so verändern sich in den Formeln (38) nur die Richtungscoeffizienten $\lambda^{(2)}$ und $\mu^{(2)}$. Dabei bleiben die Grössen $n^{(1,2)}$ und $g^{(1,2)}$ im Allgemeinen nicht constant.

Die Grösse $n^{(1,2)}$ ist dann und nur dann von der Wahl der Curvenschar 2 unabhängig, wenn gleichzeitig:

$$n^{(1,u)} = n_1 \lambda^{(1)} + m \mu^{(1)} = 0, \quad n^{(1,v)} = m \lambda^{(1)} + n_2 \mu^{(1)} = 0$$

ist. Man sieht sofort ein, dass dies nur für die Schar der Haupttangentencurven auf einer abwickelbaren Fläche der Fall ist.

Damit die Grösse $g^{(1,2)}$ von der Wahl der Curvenschar 2 unabhängig sei, müssen die Gleichungen:

$$g^{(1,u)} = g_1 + \frac{d\omega^{(1)}}{ds_1} = 0, \quad g^{(1,v)} = q_2 + \frac{d\omega^{(1)}}{ds_2} = 0$$

bestehen. Die Integrabilitätsbedingung dieser Gleichungen liefert:

$$\frac{dg_1}{ds_2} - \frac{dq_2}{ds_1} - p_1 g_1 - p_2 q_2 = 0,$$

es folgt also aus der Gleichung (22), dass die Fläche eine abwickelbare sein muss. Wählt man nun die Parameter u, v in der Weise, dass das Quadrat des Linienelementes die Form:

$$du^2 + dv^2$$

annimmt, so wird die Curvenschar 1 die Gleichungen:

$$\frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial v} = 0$$

befriedigen müssen. Es besteht somit die Curvenschar 1 aus Curven, die gleichzeitig geodätisch und geodätisch parallel sind, d. h. aus Curven, welche in eine Schar von parallelen Geraden übergehen, sobald man die Fläche auf die Ebene abwickelt.

In allen anderen Fällen, sobald die Curvenschar 2 variiert, variieren auch die Grössen $n^{(1,2)}$ und $g^{(1,2)}$.

Jede von diesen Grössen hat die Form:

$$f = A \lambda^{(2)} + B \mu^{(2)},$$

wo A und B nur von der Curvenschar 1 abhängig sind. Bezeichnet man mit $\omega^{(2)}$ den Winkel der positiven Halbtangente der Curve der Schar 2 mit der positiven Halbtangente der Curve $v = \text{const}$, so bekommt man:

$$\frac{df}{d\omega^{(2)}} = A \bar{\lambda}^{(2)} + B \bar{\mu}^{(2)},$$

wo $\bar{\lambda}^{(2)}, \bar{\mu}^{(2)}$ diejenige Richtung ist, die mit der Richtung $\lambda^{(2)}, \mu^{(2)}$ den Winkel $+\frac{\pi}{2}$ bildet. Daraus folgt, dass im Falle, wenn A und B reel sind, ein Maximum ev. ein Minimum für diejenige Curvenschar 2 eintritt,

welche durch orthogonale Trajectorien derjenigen Curvenschar 2 gebildet wird, die das Verschwinden der Function f herbeiführt. Die Richtungscoeffizienten dieser, dem Maximum ev. dem Minimum entsprechender Curvenschar sind:

$$\lambda^{(2)} = \frac{A \operatorname{cosec} \theta - B \operatorname{cotg} \theta}{\varepsilon \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta}}, \quad \mu^{(2)} = \frac{B \operatorname{cosec} \theta - A \operatorname{cotg} \theta}{\varepsilon \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta}},$$

wo $\varepsilon = \pm 1$ ist. Der Wert des Maximums ev. des Minimums ist also:

$$f = \varepsilon \operatorname{cosec} \theta \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta}.$$

Wenn $\varepsilon = +1$, so tritt das Maximum, wenn $\varepsilon = -1$, das Minimum von f ein.

Die Grösse $n^{(1,2)}$ ist Null, sobald die Curvenscharen 1 und 2 miteinander conjugiert sind. Also tritt in reellem Falle das Maximum ev. das Minimum der Grösse $n^{(1,2)}$ für diejenige Curvenschar 2 ein, deren Curven orthogonale Trajectorien der mit der Curvenschar 1 conjugierten Schar sind. Wenn speziell die Curvenschar 2 für diese besonderen Werte mit der Curvenschar 1 zusammenfällt, so hat man den Nullwert von $n^{(1,2)}$ für die Haupttangentencurven und den Maximal ev. Minimalwert von $n^{(1,2)}$ für Krümmungslinien.

Analoges gilt auch von der geodätischen Krümmung $g^{(1,2)}$. Wenn speziell die Curvenschar 2 mit der Curvenschar 1 zusammenfällt, so tritt der Nullwert von $g^{(1,2)}$ für eine Schar der geodätischen Linien und der Maximal beziehungsweise Minimalwert von $g^{(1,2)}$ für eine Schar von Curven ein, welche orthogonale Trajectorien einer Schar von geodätischen Linien bilden.

Wenn man nun auf die Formeln (36) zurückkommt, so erhält man aus denselben auf Grund der Formeln (5) die Richtungscosinus der positiven Binormalen der Schar (1, 2). Diese Richtungscosinus werden durch die Formel:

$$K^{(1,2)} \lambda^{(1,2)} = g^{(1,2)} X - n^{(1,2)} \frac{dx}{d\sigma^{(1)}} \tag{39}$$

und analogen Formeln bestimmt sein. Wenn man ferner die in der Nummer 1 dargelegte Begriffsbildung weiter führt, so kommt man auf die Torsion der Schar (1, 2), die durch die Formel:

$$S^{(1,2)} = \Sigma\, l^{(1,2)} \frac{d\lambda^{(1,2)}}{ds^{(2)}}$$

definiert wird. Sobald diese Grösse eingeführt ist, können schon alle verallgemeinerten Frenet'schen Formeln angegeben werden. Es hat keinen Zweck darauf hier des näheren einzugehen, aber es dürfte von Interesse sein eine Darstellung von $S^{(1,2)}$ zu bekommen, in welcher keine Grössen vorkommen, die von der Wahl des rechtwinkeligen Systems x, y, z abhängig wären.

Differenziert man die Formeln (39) nach $s^{(2)}$, so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{dK^{(1,2)}}{ds^{(2)}} \lambda^{(1,2)} + K^{(1,2)} \frac{d\lambda^{(1,2)}}{ds^{(2)}} &= \frac{dg^{(1,2)}}{ds^{(2)}} X - \frac{dn^{(1,2)}}{ds^{(2)}} \frac{dx}{d\sigma^{(1)}} \\ &+ g^{(1,2)} \frac{dX}{ds^{(2)}} - n^{(1,2)} \frac{d}{ds^{(2)}} \left(\frac{dx}{d\sigma^{(1)}} \right). \end{aligned} \tag{40}$$

Aber die Anwendung der Formeln (20) und (21) liefert:

$$\frac{dX}{ds^{(2)}} = \operatorname{cosec} \theta \left[(n_1 \lambda^{(2)} + m \mu^{(2)}) \frac{dx}{d\sigma_2} - (m \lambda^{(2)} + n_2 \mu^{(2)}) \frac{dx}{d\sigma_1} \right],$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds^{(2)}} \left(\frac{dx}{d\sigma^{(1)}} \right) = &- \frac{d\lambda^{(1)}}{ds^{(2)}} \frac{dx}{d\sigma_1} + \frac{d\mu^{(1)}}{ds^{(2)}} \frac{dx}{d\sigma_2} - \lambda^{(1)} (q_1 \lambda^{(2)} + q_2 \mu^{(2)}) \frac{dx}{ds_1} \\ &- \mu^{(1)} (q_1 \lambda^{(2)} + q_2 \mu^{(2)}) \frac{dx}{ds_2} + \operatorname{cosec} \theta \left[(m - n_1 \cos \theta) \lambda^{(1)} \lambda^{(2)} + (n_2 - m \cos \theta) \lambda^{(1)} \mu^{(2)} \right. \\ &\left. + (m \cos \theta - n_1) \mu^{(1)} \lambda^{(2)} + (n_2 \cos \theta - m) \mu^{(1)} \mu^{(2)} \right] X \end{aligned}$$

und anderseits bekommt man leicht die Formeln:

$$\sum \frac{dx}{ds_1} l^{(1,2)} = -\mu^{(1)} \frac{g^{(1,2)}}{K^{(1,2)}} \sin \theta,$$

$$\sum \frac{dx}{ds_2} l^{(1,2)} = \lambda^{(1)} \frac{g^{(1,2)}}{K^{(1,2)}} \sin \theta,$$

$$\sum \frac{dx}{d\sigma_1} l^{(1,2)} = \bar{\mu}^{(1)} \frac{g^{(1,2)}}{K^{(1,2)}} \sin \theta,$$

$$\sum \frac{dx}{d\sigma_2} l^{(1,2)} = -\bar{\lambda}^{(1)} \frac{g^{(1,2)}}{K^{(1,2)}} \sin \theta,$$

wo $\bar{\lambda}^{(1)}$ und $\bar{\mu}^{(1)}$ die Richtungscoeffizienten derjenigen Richtung in der Tangentialebene bezeichnen, welche mit der positiven Halbtangente der

Curve der Schar 1 den Winkel $+\frac{\pi}{2}$ bildet. Es folgt also aus der Gleichung (40) und analogen Gleichungen:

$$(K^{(1,2)})^2 S^{(1,2)} = n^{(1,2)} \frac{dg^{(1,2)}}{ds^{(2)}} - g^{(1,2)} \frac{dn^{(1,2)}}{ds^{(2)}}$$

$$- \left((g^{(1,2)})^2 + (n^{(1,2)})^2 \right) [n_1 \overline{\lambda}^{(1)} \lambda^{(2)} + m (\overline{\mu}^{(1)} \lambda^{(2)} + \overline{\lambda}^{(1)} \mu^{(2)}) + n_2 \overline{\mu}^{(1)} \mu^{(2)}]$$

$$- g^{(1,2)} n^{(1,2)} [\overline{\mu}^{(1)} \frac{d\lambda^{(1)}}{ds^{(2)}} - \overline{\lambda}^{(1)} \frac{d\mu^{(1)}}{ds^{(2)}} - \lambda^{(1)} \mu^{(1)} \left((q_1 - g_1) \lambda^{(2)} + (g_2 - q_2) \mu^{(2)} \right)] .$$

Differenziert man aber die Relation (26) nach $s^{(2)}$, so überzeugt man sich, dass die Summe der Glieder, die in den letzten eckigen Klammern enthalten sind, gleich Null ist. Demnach gelangt man zur Formel:

$$S^{(1,2)} = \frac{1}{(K^{(1,2)})^2} \left(n^{(1,2)} \frac{dg^{(1,2)}}{ds^{(2)}} - g^{(1,2)} \frac{dn^{(1,2)}}{ds^{(2)}} \right)$$

$$- [n_1 \overline{\lambda}^{(1)} \lambda^{(2)} + m (\overline{\mu}^{(1)} \lambda^{(2)} + \overline{\lambda}^{(1)} \mu^{(2)}) + n_2 \overline{\mu}^{(1)} \mu^{(2)}] .$$

Wenn man den Winkel, welchen die positive Hauptnormale der Schar (1, 2) mit der positiven Flächennormalen bildet, mit $\Omega^{(1,2)}$ bezeichnet und in demselben Sinne als positiv betrachtet, wie den in der Nummer 2 behandelten Winkel Ω, und wenn man die Bezeichnung einführt:

$$\tau^{(1,2)} = - [n_1 \overline{\lambda}^{(1)} \lambda^{(2)} + m (\overline{\mu}^{(1)} \lambda^{(2)} + \overline{\lambda}^{(1)} \mu^{(2)}) + n_2 \overline{\mu}^{(1)} \mu^{(2)}] ,$$

wobei es nahe liegt die Grösse $\tau^{(1,2)}$ die geodätische Torsion der Schar (1, 2) zu nennen, so bekommt man für die Grösse $S^{(1,2)}$ den einfachen Ausdruck:

$$S^{(1,2)} = \frac{d\Omega^{(1,2)}}{ds^{(2)}} + \tau^{(1,2)} . \tag{41}$$

Zuvörderst wollen wir einige Bemerkungen in Bezug auf die hier eingeführte geodätische Torsion $\tau^{(1,2)}$ einschalten. Man betrachte die Curvenschar 1 und die Curvenschar 1′, für welche die positive Halbtangente mit der positiven Halbtangente der Curvenschar 1 den Winkel $-\frac{\pi}{2}$ bildet. Man sieht sogleich, dass

$$\tau^{(1,2)} = n^{(1',2)} ;$$

d. h. dass die geodätische Torsion der Schar 1 und die Normalkrümmung der Schar 1′ in Bezug auf dieselbe Curvenschar 2 einander gleich sind. Daraus folgt unmittelbar, dass $\tau^{(1,2)}$ dann und nur dann von der Wahl der Curvenschar 2 unabhängig ist, wenn die Fläche eine abwickelbare Fläche ist und wenn die Schar 1 aus orthogonalen Trajectorien der Schar der Haupttangentencurven gebildet wird; der Wert von $\tau^{(1,2)}$ ist in diesem Falle beständig Null. Falls die Grösse $\tau^{(1,2)}$ mit der Curvenschar 2 variiert, so ist sie gleich Null, wenn die Schar der orthogonalen Trajectorien der Curvenschar 1 und die Curvenschar 2 mit einander conjugiert sind und speziell, im Falle des Zusammenfallens der Curvenscharen 1 und 2, wenn sie aus Krümmungslinien bestehen. Im reellen Falle kann man nach dem Maximum ev. Minimum von $\tau^{(1,2)}$ bei Veränderung der Curvenschar 2 fragen und man sieht, dass dies für diejenige Curvenschar 2 eintritt, die mit der Curvenschar 1 conjugiert ist. Wenn das Maximum ev. Minimum für den Fall eintritt, in welchem die Curvenscharen 1 und 2 zusammenfallen, so bestehen dieselben aus Haupttangentencurven. Man frage zuletzt, in welchen Fällen die Beziehung:

$$\tau^{(1,2)} = \tau^{(2,1)}$$

besteht. Diese Beziehung kann so dargestellt werden:

$$(n_1 + n_2 - 2m \cos \theta) (\lambda^{(1)} \mu^{(2)} - \lambda^{(2)} \mu^{(1)}) = 0 ;$$

also, wenn die Fläche keine Minimalfläche ist, so besteht diese Beziehung nur in dem Fall, wenn die Curvenscharen 1 und 2 zusammenfallen; dagegen im Falle einer Minimalfläche besteht diese Beziehung für beliebige Curvenscharen 1 und 2.

Wenn wir jetzt zur Formel (41) übergehen, so ist leicht zu sehen, dass aus ihr Eigenschaften abgelesen werden können, die den bekannten Joachimsthal'schen Sätzen über ebene Krümmungslinien analog sind. Wir wollen dahin einigen, wenn alle Linienelemente der Curvenschar 1, die entlang einer und derselben Curve der Schar 2 gelegen sind, einer Ebene parallel sind und wenn eine solche Eigenschaft für jede Curve der Schar 2 stattfindet, d. h. wenn für diese Curvenscharen $S^{(1,2)} = 0$ ist, zu sagen dass die Curvenschar 1 in Bezug auf die Curvenschar 2 die Eigenschaft A besitzt. Ferner, wenn der Winkel der Hauptnormalen der Curvenschar 1 in Bezug auf die Curvenschar 2 mit der Flächennormalen längs einer und derselben Curve der Schar 2 unverändert bleibt und wenn dies für jede Curve der Schar 2 stattfindet, d. h. wenn für diese Curvenscharen $\frac{d\Omega^{(1,2)}}{ds^{(2)}} = 0$, so sagen wir, dass die Curvenschar 1 in Bezug auf die Curvenschar 2 die Eigenschaft B besitzt. Ist endlich die Curvenschar 2 mit den orthogo-

nalen Trajectorien der Curvenschar 1 conjugiert, d. h. ist $\tau^{(1,2)}=0$, so nenne man diese Eigenschaft die Eigenschaft C. Man erhält also folgenden Satz: Besitzt die Curvenschar 1 in Bezug auf die Curvenschar 2 irgend welche zwei der Eigenschaften A, B, C, so besitzt sie in Bezug auf die Curvenschar 2 auch die dritte dieser Eigenschaften.

Bemerkung. Bei der Darstellung der in dieser Nummer durchgeführten Betrachtungen haben wir immer von den Eigenschaften zweier auf der Fläche gelegenen Curvenscharen gesprochen, vermöge derer auf der Fläche unendlich viele Scharen L definiert waren. Es leuchtet ein, dass die meisten unserer Entwickelungen und Sätze auf eine einzige auf der Fläche gelegene Schar L bezogen werden können, worauf wir indessen nicht näher eingehen.

4. Als ein anderes Beispiel einer Schar von Linienelementen betrachte man auf einer Fläche die Gesammtheit der Linienelemente, deren Punkte auf der Fläche liegen und deren Richtungen die der positiven Flächennormalen in diesen Punkten sind. Längs einer jeden Flächencurve, die keine Minimalcurve ist, hat man eine Schar L der genannten Linienelemente. Wir wollen jetzt diese Scharen L in Betrachtung ziehen. Dabei werden wir für die Fläche und die Flächencurve die in der Nummer 2 besprochenen Bezeichnungen benutzen; für die genannte Schar L werden wir die in der Nummer 1 eingeführten Grössen mit den dort benutzten Buchstaben bezeichnen, aber dieselben mit einem Striche versehen.

Die Richtungscosinus unserer Linienelemente sind X, Y, Z und wir bestimmen zuerst die Grössen h, p, q aus den Gleichungen:

$$\frac{dX}{ds}=hX+p\frac{dx}{ds}+q\frac{dx}{d\sigma},$$

$$\frac{dY}{ds}=hY+p\frac{dy}{ds}+q\frac{dy}{d\sigma},$$

$$\frac{dZ}{ds}=hZ+p\frac{dz}{ds}+q\frac{dz}{d\sigma},$$

wo ds den unendlich kleinen Bogen der betrachteten Flächencurve und $d\sigma$ den unendlich kleinen Bogen bedeutet, der mit ds den Winkel $+\frac{\pi}{2}$ bildet. Aus diesen Gleichungen folgt:

$$h=\sum X\frac{dX}{ds}=0\,,\quad p=\sum\frac{dX}{ds}\frac{dx}{ds}\,,\quad q=\sum\frac{dX}{ds}\frac{dx}{d\sigma}$$

und wenn man beachtet, dass

$$\frac{dx}{ds}=\lambda\frac{dx}{ds_1}+\mu\frac{dx}{ds_2}\,,\quad \frac{dx}{d\sigma}=\lambda\frac{dx}{d\sigma_1}+\mu\frac{dx}{d\sigma_2}$$

und dass auf Grund der Formeln (20):

$$\frac{dX}{ds}=\operatorname{cosec}\theta\left\{\lambda\left(n_1\frac{dx}{d\sigma_2}-m\frac{dx}{d\sigma_1}\right)+\mu\left(m\frac{dx}{d\sigma_2}-n_2\frac{dx}{d\sigma_1}\right)\right\}, \tag{42}$$

so ergibt sich:

$$p=-(n_1\lambda^2+2m\lambda\mu+n_2\mu^2)=-n\,,$$

$$q=-[n_1\lambda\bar{\lambda}+m(\lambda\bar{\mu}+\mu\bar{\lambda})+n_2\mu\bar{\mu}]=\tau\,.$$

Man bekommt also die Formel:

$$\frac{dX}{ds}=\tau\frac{dx}{d\sigma}-n\frac{dx}{ds}$$

und die zu derselben analogen Formeln.

Auf Grund dieser Formeln kann die Krümmung unserer Schar L gebildet werden und es ergibt sich:

$$K'=\sqrt{n^2+\tau^2}\,.$$

Wenn gleichzeitig

$$n=0\,,\quad \tau=0\,,$$

so ist diese Krümmung gleich Null, was aber der ganzen Flächencurve entlang nur für Curven der Fall ist, die gleichzeitig Haupttangentencurven und Krümmungslinien sind.

Wenn die Krümmung K' von Null verschieden ist, so existieren die positive Hauptnormale und die positive Binormale der Schar L, deren Richtungscosinus durch die Formeln:

$$\begin{aligned} l'&=\frac{1}{K'}\left(\tau\frac{dx}{d\sigma}-n\frac{dx}{ds}\right),\\ \varphi'&=-\frac{1}{K'}\left(\tau\frac{dx}{ds}+n\frac{dx}{d\sigma}\right)\end{aligned} \tag{43}$$

und die analogen Formeln bestimmt werden. Diese Halbgeraden liegen in der Tangentialebene. Man bezeichne die Richtungscoeffizienten der positiven Binormalen mit λ'_B, μ'_B und man suche sie zu bestimmen. Es ist leicht zu ersehen, dass

$$\varphi' = \frac{1}{K'}\left(Y\frac{dZ}{ds} - Z\frac{dY}{ds}\right)$$

und dass aus der Formel (42) und analogen Formeln folgt:

$$\varphi' = \frac{\operatorname{cosec}\theta}{K'}\left\{(m\lambda + n_2\mu)\frac{dx}{ds_1} - (n_1\lambda + m\mu)\frac{dx}{ds_2}\right\}.$$

Es ergeben sich also die Werte:

$$\lambda'_B = \frac{m\lambda + n_2\mu}{K'\sin\theta}, \quad \mu'_B = -\frac{n_1\lambda + m\mu}{K'\sin\theta}$$

und man überzeugt sich leicht, dass die Beziehung:

$$n_1\lambda\lambda'_B + m(\lambda\mu'_B + \mu\lambda'_B) + n_2\mu\mu'_B = 0$$

besteht. Die Richtung der Binormalen unserer Schar L ist also mit der Richtung der zugehörigen Flächencurve conjugiert.

Die eben durchgeführten Betrachtungen bilden eine veränderte Fassung einiger von den gewöhnlichen Entwickelungen, die in der Flächentheorie über unendlich benachbarte Normalen angestellt werden. Wir brauchen daher auf die Eigenschaften der Krümmung K' nicht näher einzugehen und wir wenden uns zur Aufstellung des Ausdruckes für die Torsion S', welcher, wie wir sehen werden, gewissen Betrachtungen von O. Bonnet nahe steht.

Für diese Torsion haben wir die Formel:

$$S' = \Sigma\, l'\frac{d\varphi'}{ds},$$

wenn man also die Formeln (43) in Anwendung bringt, so bekommt man zuerst:

$$S' = -\frac{1}{K'}\sum\left(\tau\frac{dx}{d\sigma} - n\frac{dx}{ds}\right)\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{K'}\right)\frac{dx}{ds}\right.$$
$$\left. + \frac{d}{ds}\left(\frac{n}{K'}\right)\frac{dx}{d\sigma} + \frac{\tau}{K'}\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right) + \frac{n}{K'}\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)\right\}.$$

Es sollen nun die Ausdrücke:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right) \text{ und } \frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)$$

umgestaltet werden. Zu dem Behufe brauchen wir jedoch bloss die Formel (34) anzuwenden. Und zwar nehme man zuerst in dieser Formel:

$$\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda, \quad \mu^{(1)} = \mu^{(2)} = \mu,$$

so folgt:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right) = nX + g\frac{dx}{d\sigma};$$

wenn man ferner annimmt:

$$\lambda^{(1)} = \bar{\lambda}, \quad \mu^{(1)} = \bar{\mu}; \quad \lambda^{(2)} = \lambda, \quad \mu^{(2)} = \mu,$$

so gewinnt man ohne weiteres die Formel:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{d\sigma}\right) = -\tau X - g\frac{dx}{ds}.$$

Auf Grund dieser Formeln kommen wir nun leicht auf den Ausdruck:

$$S' = \frac{n}{K'}\frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{K'}\right) - \frac{\tau}{K'}\frac{d}{ds}\left(\frac{n}{K'}\right) - g.$$

Dieser Ausdruck kann noch vereinfacht werden. Man bezeichne mit Ω' denjenigen Winkel in der Tangentialebene, welchen die positive Binormale der Schar L mit der positiven Halbtangente der Flächencurve bildet. Man hat dann:

$$\cos\Omega' = -\frac{\tau}{K'}, \quad \sin\Omega' = -\frac{n}{K'},$$

folglich:

$$S' = -\frac{d\Omega'}{ds} - g. \tag{44}$$

Auf Grund dieser Formel können wir einige Bemerkungen anschliessen, welche jenen am Schlusse der vorigen Nummer analog sind. Man sieht nämlich, dass wenn die Flächencurve irgend welche zwei von den Eigenschaften besitzt: 1) $S' = 0$, d. h. dass die in den Punkten der Flächencurve aufgestellten Flächennormalen einer und derselben Ebene parallel sind; 2) $\frac{d\Omega'}{ds} = 0$, d. h. dass in allen Punkten der Flächencurve das Li-

nienelement derselben mit dem conjugierten Linienelemente constanten Winkel bildet; 3) $g=0$, d. h. dass die Flächencurve geodätisch ist; so besitzt sie auch die dritte dieser Eigenschaften. Dieser Satz ist mit einem Satze gleichbedeutend, der von O. Bonnet aufgestellt worden ist [1]).

5. Ausser den obigen flächentheoretischen Betrachtungen, wollen wir noch die Krümmungseigenschaften der einfach unendlichen Scharen von Linienelementen auf zweifach unendliche Curvenscharen in Anwendung bringen.

Es sei eine zweifach unendliche Curvenschar durch die von x, y, z abhängigen Functionen α, β, γ definiert, welche Richtungscosinus der Linienelemente dieser Curvenschar sind. Man betrachte ferner eine zweite Curvenschar, deren Linienelemente ds die Richtungscosinus a, b, c besitzen, die gleichfalls Functionen von x, y, z sind. Wir wollen die erste die Curvenschar Γ und die zweite die Curvenschar C nennen und solche Scharen L in Betrachtung ziehen, deren jede aus denjenigen Linienelementen der Curvenschar Γ besteht, welche einer Curve der Curvenschar C entlang gelegen sind. Wir setzen voraus, dass die in Betracht kommenden Linienelemente der ersten und der zweiten Curvenschar reell sind und wir mögen die unter 1 eingeführten Bezeichnungen benutzen.

Wir haben:

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\partial\alpha}{\partial x}a+\frac{\partial\alpha}{\partial y}b+\frac{\partial\alpha}{\partial z}c$$

und die analogen Formeln. Für die Krümmung K der Schar L ergibt sich also die Formel:

$$K^2=\sum\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}a+\frac{\partial\alpha}{\partial y}b+\frac{\partial\alpha}{\partial z}c\right)^2.$$

Wenn man jetzt die kürzeren Bezeichnungen:

$$k_{11}=\sum\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2,\quad k_{22}=\sum\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2,\quad k_{33}=\sum\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)^2$$

$$k_{23}=k_{32}=\sum\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\alpha}{\partial z},$$

$$k_{31}=k_{13}=\sum\frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial\alpha}{\partial x},$$

$$k_{12}=k_{21}=\sum\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial y}$$

[1]) Journal de mathematiques. 2-me serie Tome V. 1860, p. 168.

einführt, so erhält man für K^2 die Formel:

$$K^2=k_{11}a^2+k_{22}b^2+k_{33}c^2+2k_{23}bc+2k_{31}ca+2k_{12}ab\,.$$

Wir wollen die Richtung der Linienelemente der Curvenschar C auf ein solches von x, y, z abhängiges rechtwinkeliges Trieder beziehen, dass in diesem Ausdrucke nur Glieder vorkommen, welche Quadrate der Richtungscosinus der Linienelemente der zweiten Curvenschar enthalten.

Zu dem Zwecke muss zuerst die Gleichung

$$(45)\qquad \begin{vmatrix} k_{11}-\omega, & k_{12}, & k_{13} \\ k_{21}, & k_{22}-\omega, & k_{23} \\ k_{31}, & k_{32}, & k_{33}-\omega \end{vmatrix}=0$$

für ω gelöst werden. Es ist leicht zu sehen, dass sie stets eine Wurzel besitzt, die gleich Null ist. Es besteht in der Tat die identische Beziehung:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1\,,$$

man hat also identisch:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial x}, & \frac{\partial\alpha}{\partial y}, & \frac{\partial\alpha}{\partial z} \\ \frac{\partial\beta}{\partial x}, & \frac{\partial\beta}{\partial y}, & \frac{\partial\beta}{\partial z} \\ \frac{\partial\gamma}{\partial x}, & \frac{\partial\gamma}{\partial y}, & \frac{\partial\gamma}{\partial z} \end{vmatrix}=0$$

und auch:

$$\Delta^2=\begin{vmatrix} k_{11}, & k_{12}, & k_{13} \\ k_{21}, & k_{22}, & k_{23} \\ k_{31}, & k_{32}, & k_{33} \end{vmatrix}=0\,.$$

Die Vielfachheit dieser verschwindenden Wurzel hängt von den Eigenschaften der Minoren und der Elemente der Determinante Δ ab. Man bezeichne mit Δ_{ik} das algebraische Komplement desjenigen Elementes der Determinante Δ, welches in der i-ten Zeile und k-ten Colonne gelegen ist und man gebrauche für die Minoren der Determinante Δ^2 die Bezeichnungen:

$$\delta'=k_{22}k_{33}-k_{23}^2\,,\quad \delta''=k_{33}k_{11}-k_{31}^2\,,\quad \delta'''=k_{11}k_{22}-k_{12}^2\,,$$

$$\varepsilon'=k_{12}k_{31}-k_{11}k_{23}\,,\quad \varepsilon''=k_{23}k_{12}-k_{22}k_{31}\,,\quad \varepsilon'''=k_{31}k_{23}-k_{33}k_{12}\,.$$

Zwischen den Minoren der Determinanten Δ und denjenigen der Determinante Δ^2 hat man die Beziehungen:

$$\delta' = \sum_1^3 {}_i\, \Delta^2_{i1}\,, \quad \delta'' = \sum_1^3 {}_i\, \Delta^2_{i2}\,, \quad \delta''' = \sum_1^3 {}_i\, \Delta^2_{i3}\,,$$

$$\varepsilon' = \sum_1^3 {}_i\, \Delta_{i2}\, \Delta_{i3}\,, \quad \varepsilon'' = \sum_1^3 {}_i\, \Delta_{i3}\, \Delta_{i1}\,, \quad \varepsilon''' = \sum_1^3 {}_i\, \Delta_{i1}\, \Delta_{i2}\,.$$

Wenn man nun die Eigenschaften der Gleichung (45) in Erinnerung bringt und die angeführten Beziehungen zwischen den Elementen und Minoren der Determinanten Δ und Δ^2 berücksichtigt, so gelangt man zu dem Schlusse, dass die verschwindende Wurzel der Gleichung (45) einfach ist, sobald nicht alle Minoren 2-ten Grades der Determinante Δ gleich Null sind, dass ferner diese Wurzel zweifach ist, sobald alle diese Minoren, jedoch nicht alle Elemente der Determinante Δ gleich Null sind, dass endlich diese Wurzel dreifach ist, sobald alle Elemente der Determinante Δ gleich Null sind.

Wir werden in der Folge drei Fälle auseinander halten, jenachdem die verschwindende Wurzel der Gleichung (45) im Allgemeinen einfach, zweifach oder dreifach ist. Der dritte Fall stellt kein Interesse dar, weil in diesem Falle die erste Curvenschar aus parallelen Geraden besteht.

Wir setzen zunächst voraus, dass die verschwindende Wurzel der Gleichung (45) im Allgemeinen einfach ist. Die übrigen Wurzeln der Gleichung (45) sind bekanntlich reell und genügen der Gleichung:

$$\omega^2 - (k_{11} + k_{22} + k_{33})\,\omega + \delta' + \delta'' + \delta''' = 0$$

d. h. besitzen die Werte:

$$\omega = \frac{1}{2}\left[k_{11} + k_{22} + k_{33} \pm \sqrt{(k_{11} + k_{22} + k_{33})^2 - 4\,(\delta' + \delta'' + \delta''')}\,\right].$$

Da diese beiden Wurzeln reell sind, so hat man

$$(k_{11} + k_{22} + k_{33})^2 - 4\,(\delta' + \delta'' + \delta''') \geqq 0$$

und da in diesem Falle die beiden Summen:

$$k_{11} + k_{22} + k_{33} \quad \text{und} \quad \delta' + \delta'' + \delta'''$$

im Allgemeinen von Null verschiedene positive Werte besitzen, so sind die beiden Wurzeln positiv, abgesehen von den Ausnahmestellen in welchen sie verschwinden können. Wir wollen diese Wurzeln mit ω_1 und ω_2

bezeichnen und voraussetzen, dass z. B. $\omega_1 \geqq \omega_2$ ist. Wenn wir noch die verschwindende Wurzel der Gleichung (45) ω_3 nennen, so können wir sagen, dass zur Ausführung der gewünschten Transformation von K^2 die Richtungscosinus

$$a_i\,, \quad b_i\,, \quad c_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

der Linienelemente dreier Curvenscharen aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} k_{11}\,(a_i - \omega_i) + k_{12}\, b_i + k_{13}\, c_i &= 0\,, \\ k_{21}\, a_i + k_{22}\,(b_i - \omega_i) + k_{23}\, c_i &= 0\,, \\ k_{31}\, a_i + k_{32}\, b_i + k_{33}\,(c_i - \omega_i) &= 0\,, \\ a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 &= 1 \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

bestimmt werden müssen. Für $i = 3$ ergeben diese Gleichungen eine vollständig bestimmte Curvenschar; für $i = 1, 2$, in dem Fall, wenn $\omega_1 > \omega_2$ ist, ergeben sich zwei ebenfalls vollständig bestimmte Curvenscharen, die zu der früher genannten senkrecht stehen; ist dagegen $\omega_1 = \omega_2$, dann bekommt man alle Curvenscharen, welche zu der dem Index 3 entsprechenden Curvenschar senkrecht stehen. Im ersten Falle hat man also drei zu einander senkrechte Curvenscharen; im zweiten können unter den erhaltenen Curvenscharen drei auf einander senkrecht stehende gewählt werden. Diese drei Curvenscharen wollen wir kurz als Curvenscharen 1, 2, 3 bezeichnen und ihre Halbtangenten, die durch die Richtungscosinus a_i, b_i, c_i bestimmt sind als positiv annehmen. Die Krümmungen der Scharen von Linienelementen der Curvenschar Γ, welche längs der Curvenscharen 1, 2, 3 gelegen sind, sind augenscheinlich gleich den Functionen: $\sqrt{\omega_1}$, beziehungsweise $\sqrt{\omega_2}$ und 0.

Wenn man jetzt die Richtungscosinus der Curvenschar C in Bezug auf die positiven Halbtangenten der Curvenscharen 1, 2, 3 mit a', b', c' bezeichnet, so hat man:

$$\begin{aligned} a' &= a_1\, a + b_1\, b + c_1\, c\,, \\ b' &= a_2\, a + b_2\, b + c_2\, c\,, \\ c' &= a_3\, a + b_3\, b + c_3\, c\,, \end{aligned}$$

also auch:

$$\begin{aligned} a &= a_1\, a' + a_2\, b' + a_3\, c'\,, \\ b &= b_1\, a' + b_2\, b' + b_3\, c'\,, \\ c &= c_1\, a' + c_2\, b' + c_3\, c' \end{aligned}$$

und die Formel für K^2 nimmt die einfache Form an:

$$K^2 = \omega_1 a'^2 + \omega_2 b'^2 . \tag{46}$$

Um uns über die Veränderlichkeit von K^2 bei variablen a', b', c' Rechenschaft zu geben, denken wir uns das Coordinatensystem X, Y, Z, dessen Anfangspunkt im Punkte x, y, z gelegen ist und dessen positive Halbaxen positive Halbtangenten der durch den Punkt x, y, z gehenden Curven der Curvenscharen 1, 2, 3 sind; ferner schreiben wir in diesem Coordinatensystem die Gleichung desjenigen Kegels von Linienelementen a', b', c', für welchen $K^2 = p$ ist. Diese Gleichung lautet:

$$(\omega_1 - p) X^2 + (\omega_2 - p) Y^2 = p Z^2 .$$

Für $p < 0$ definiert diese Gleichung kein reelles Linienelement und ist $p = 0$, so ergibt sich $X = Y = 0$ d. h. das Linienelement der Curvenschar 3. Nimmt man zuerst $\omega_1 > \omega_2$ an, so hat man für $p = \omega_1$ nur das Linienelement der Curvenschar 1; für andere Werte von p betrachte man die Schnittpunkte des Kegels mit einer zur XY-Ebene parallelen Ebene; ist $\omega_2 < p < \omega_1$, dann bekommt man eine Hyperbel mit der reellen Achse, welche der X-Achse parallel ist, bei $0 < p < \omega_2$ eine Ellipse und bei $p = \omega_2$ zwei zur Y-Achse parallele Geraden. Wenn zweitens $\omega_1 = \omega_2$ ist, so hat man für $p = \omega_1$ die XY-Ebene und betrachtet man wieder die Schnittpunkte des Kegels mit einer zur XY-Ebene parallelen Ebene, so ergibt sich für $0 < p < \omega_1$ ein Kreis. Wenn $p > \omega_1$ ist, so besitzt der Kegel in beiden Fällen keine reellen Linienelemente.

Wir schreiten jetzt zur Bestimmung der Richtungscosinus der positiven Hauptnormalen und der positiven Binormalen der Schar L. Zu dem Zwecke beachte man, dass wenn man mit ds_i die Linienelemente bezeichnet, deren Richtung durch die Cosinus a_i, b_i, c_i definiert ist, so erhält man für jede Funktion f von x, y, z die Formel:

$$\frac{df}{ds} = a' \frac{df}{ds_1} + b' \frac{df}{ds_2} + c' \frac{df}{ds_3} . \tag{47}$$

Da aber die Richtungscosinus der positiven Hauptnormalen durch die Formel:

$$l = \frac{1}{K} \frac{da}{ds}$$

und die zu derselben analogen Formeln bestimmt sind, und auf Grund der früheren Bestimmungen α, β, γ längs jeder Curve der Curvenschar 3

dieselben Werte besitzen, so ergibt sich für die positive Hauptnormale die Formel:

$$l = \frac{1}{K} \left(a' \frac{da}{ds_1} + b' \frac{da}{ds_2} \right)$$

und die ihr analogen Formeln. Wir wollen noch mit:

$$l_1 , \quad m_1 , \quad n_1$$
$$l_2 , \quad m_2 , \quad n_2$$

die Richtungscosinus der positiven Hauptnormalen der Scharen von Linienelementen der Curvenschar Γ bezeichnen, die längs der Curven der Curvenscharen 1 und 2 gelegen sind. Dann wird man l, m, n folgendermassen ausdrücken können:

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{K} (\sqrt{\omega_1}\, a' l_1 + \sqrt{\omega_2}\, b' l_2) , \\ m &= \frac{1}{K} (\sqrt{\omega_1}\, a' m_1 + \sqrt{\omega_2}\, b' m_2) , \\ n &= \frac{1}{K} (\sqrt{\omega_1}\, a' n_1 + \sqrt{\omega_2}\, b' n_2) . \end{aligned} \tag{48}$$

Wenn man ferner mit

$$\varphi_1 , \quad \psi_1 , \quad \sigma_1$$
$$\varphi_2 , \quad \psi_2 , \quad \sigma_2$$

die Richtungscosinus der positiven Binormalen derjenigen Scharen von Linienelementen der Curvenschar Γ bezeichnet, die längs der Curven der Curvenscharen 1, 2 gelegen sind, so wird man für die Richtungscosinus der positiven Binormalen der Scharen L die Formeln erhalten:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{K} (\sqrt{\omega_1}\, a' \varphi_1 + \sqrt{\omega_2}\, b' \varphi_2) , \\ \psi &= \frac{1}{K} (\sqrt{\omega_1}\, a' \psi_1 + \sqrt{\omega_2}\, b' \psi_2) , \\ \sigma &= \frac{1}{K} (\sqrt{\omega_1}\, a' \sigma_1 + \sqrt{\omega_2}\, b' \sigma_2) . \end{aligned} \tag{49}$$

Bildet man nun die Summe der Quadrate von l, m, n, so kommt man auf die Beziehung:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 ,$$

welche besagt, dass die den Curvenscharen 1, 2 entsprechende Hauptnormalen zu einander senkrecht stehen. Bedenkt man aber, dass alle hier in Betracht kommenden Haupt und Binormalen in der Normalebene des Linienelementes der Curvenschar Γ gelegen sind, so ergeben sich die Beziehungen:

$$\varphi_1 = \varepsilon l_2\,, \quad \psi_1 = \varepsilon m_2\,, \quad \sigma_1 = \varepsilon n_2\,,$$
$$\varphi_2 = \eta l_1\,, \quad \psi_2 = \eta m_1\,, \quad \sigma_2 = \eta n_1\,,$$

wo ε und η unbestimmte Vorzeichen bedeuten, die wir sogleich bestimmen können. Aus diesen Relationen folgt nämlich:

$$\varepsilon = -\eta = \begin{vmatrix} \alpha\,, & \beta\,, & \gamma \\ l_1\,, & m_1\,, & n_1 \\ l_2\,, & m_2\,, & n_2 \end{vmatrix}\,,$$

wo die erhaltene Determinante entweder $+1$ oder -1 gleich ist. Wir können immer voraussetzen, dass die Vorzeichen der Richtungscosinus a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 so gewählt worden sind, dass diese Determinante gleich $+1$ ist. Dann hat man $\varepsilon = +1$ und die Formeln:

$$(50) \qquad \begin{aligned} l_2 &= \varphi_1\,, \quad m_2 = \psi_1\,, \quad n_2 = \sigma_1\,, \\ \varphi_2 &= -l_1\,, \quad \psi_2 = -m_1\,, \quad \sigma_2 = -n_1\,. \end{aligned}$$

Man nehme ferner in der Normalebene des Linienelementes der Curvenschar Γ denjenigen Sinn der Drehung als positiv an, in welchem man jede positive Hauptnormale der Curvenschar Γ um $\frac{\pi}{2}$ drehen muss um zur entsprechenden positiven Binormalen dieser Curvenschar zu gelangen. Wenn man also mit Ω den Winkel bezeichnet, welchen die positive Hauptnormale l, m, n mit der positiven Hauptnormalen l_1, m_1, n_1 bildet, so wird man die Formeln:

$$(51) \qquad \begin{aligned} l &= l_1 \cos\Omega + \varphi_1 \sin\Omega\,, \\ \varphi &= \varphi_1 \cos\Omega - l_1 \sin\Omega \end{aligned}$$

und die ihnen analogen Formeln erhalten. Vergleicht man diese Formeln unter Berücksichtigung von (50) mit den früheren Formeln (48) und (49), so folgt:

$$(52) \qquad \cos\Omega = \frac{a'\sqrt{\omega_1}}{K}\,, \quad \sin\Omega = \frac{b'\sqrt{\omega_2}}{K}\,.$$

Auf diese Weise sind die Richtungscosinus der Haupt und Binormalen jeder Schar L durch den bezüglichen Winkel Ω und die Richtungscosinus der Haupt und Binormalen derjenigen Schar von Linienelementen der Curvenschar Γ bestimmt worden, welche längs der entsprechenden Curve der Curvenschar 1 gelegen sind.

Wir wollen nun die Formel für die Torsion der Schar L aufstellen. Wendet man die Formel (6) an und benutzt die Beziehungen (51), so kommt man auf den Ausdruck:

$$S = -\frac{d\Omega}{ds} + \cos^2\Omega\, \Sigma\, l_1 \frac{d\varphi_1}{ds} - \sin^2\Omega\, \Sigma\, \varphi_1 \frac{dl_1}{ds}$$

folglich mit Hilfe von (47) auf den Ausdruck:

$$S = -\frac{d\Omega}{ds} + a'\, \Sigma\, l_1 \frac{d\varphi_1}{ds_1} + b'\, \Sigma\, l_1 \frac{d\varphi_1}{ds_2} + c'\, \Sigma\, l_1 \frac{d\varphi_1}{ds_3}\,.$$

Hier sind

$$\Sigma\, l_1 \frac{d\varphi_1}{ds_1} = S_1$$

und

$$\Sigma\, l_1 \frac{d\varphi_1}{ds_2} = -\Sigma\, \varphi_2 \frac{dl_2}{ds_2} = S_2\,.$$

Torsionen derjenigen Scharen von Linienelementen der Curvenschar Γ, die längs der bezüglichen Curven der Curvenscharen 1 und 2 gelegen sind. Was nun den Ausdruck:

$$\Sigma\, l_1 \frac{d\varphi_1}{ds_3} = R$$

anbetrifft, so denke man sich längs der Curve der Curvenschar 3 die Schar von Linienelementen, welche die Richtung der positiven Binormalen $\varphi_1, \psi_1, \sigma_1$ besitzen und beachte, dass diese Schar von Linienelementen, falls sie nicht alle einander parallel sind, ihre von Null verschiedene Krümmung und ihre positive Hauptnormale besitzt. Betrachtet man diese Krümmung als einen Vector mit der Richtung der genannten positiven Hauptnormalen, so ist R die rechtwinkelige Projection dieses Vetors auf die positive Hauptnormale l_1, m_1, n_1. Besteht die betrachtete Schar aus parallelen Linienelementen, so ist R gleich Null.

In Folge der eingeführten Bezeichnungen bekommt man die Formel:

$$S = -\frac{d\Omega}{ds} + S_1 a' + S_2 b' + R c' . \tag{53}$$

Diese Formel gibt Anlass zu änlichen Bemerkungen, die wir am Schlusse der Nummern 3 und 4 gemacht haben. Wenn für die Curvenschar C die Grösse S gleich Null ist, so besitzt jede Curve der Curvenschar C die Eigenschaft solche Linienelemente der Curvenschar Γ zu verbinden, welche einer Ebene parallel sind. Wenn für die Curvenschar C die Beziehung $\frac{d\Omega}{ds} = 0$ besteht, so ist der von der positiven Hauptnormalen l, m, n mit der positiven Hauptnormalen l_1, m_1, n_1 gebildete Winkel, eine Grösse, welche längs einer Curve der Curvenschar C einen konstanten Wert besitzt. Endlich ist die Gleichung:

$$S_1 a' + S_2 b' + R c' = 0$$

eine Pfaff'sche Differentialgleichung für die Linienelemente der Curvenschar C. Wenn die Curvenschar C in Bezug auf die Curvenschar Γ zwei der genannten Eigenschaften besitzt, so besitzt sie auch die dritte dieser Eigenschaften.

Die durchgeführten Betrachtungen beziehen sich auf den Fall, wo die verschwindende Wurzel der Gleichung (45) im allgemeinen einfach ist. Ist diese Wurzel im allgemeinen zweifach, d. h. sind alle Minoren zweiten Grades aber nicht alle Elemente der Determinante Δ gleich Null, so gestalten sich diese Betrachtungen bedeutend einfacher. In diesem Falle existiert eine derartige Function $\Phi(x, y, z)$, die sich nicht auf eine Constante reduziert, dass

$$\alpha = \alpha\,[\,\Phi(x, y, z)]\,, \quad \beta = \beta\,[\,\Phi(x, y, z)]\,, \quad \gamma = \gamma\,[\,\Phi(x, y, z)]$$

sind. Wir erhalten somit:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \left(a\frac{\partial\Phi}{\partial x} + b\frac{\partial\Phi}{\partial y} + c\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\frac{d\alpha}{d\Phi}$$

und es folgt für K^2 der Wert:

$$K^2 = \left(a\frac{\partial\Phi}{\partial x} + b\frac{\partial\Phi}{\partial y} + c\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2 \sum\left(\frac{d\alpha}{d\Phi}\right)^2 .$$

Man betrachte nun die orthogonalen Trajectorien der Flächenschar:

$$\Phi(x, y, z) = \text{const}\,.$$

Es können folgende Richtungscosinus der positiven Halbtangente dieser Trajectorien genommen werden:

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{\sum\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2}}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,,\quad b_1 = \frac{1}{\sqrt{\sum\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2}}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial y}\,,\quad c_1 = \frac{1}{\sqrt{\sum\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2}}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial z}\,.$$

Bezeichnet man also den Cosinus des Winkels, welchen diese positive Halbtangente mit der positiven Halbtangente der Curve C bildet, mit a' so wird:

$$a' = \frac{1}{\sqrt{\sum\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2}}\left(a\frac{\partial\Phi}{\partial x} + b\frac{\partial\Phi}{\partial y} + c\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$$

und führt man noch die Bezeichnung:

$$\omega_1 = \sum\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 \sum\left(\frac{d\alpha}{d\Phi}\right)^2$$

ein, so ergibt sich für K^2 die Formel:

$$K^2 = \omega_1 a'^2 . \tag{54}$$

Man ersieht ferner, dass wenn man die Richtungscosinus der positiven Hauptnormalen und Binormalen derjenigen Scharen von Linienelementen der Curvenschar Γ, die längs der orthogonalen Trajectorien der Flächenschar $\Phi(x, y, z) = \text{const}$ gelegen sind l_1, m_1, n_1 beziehungsweise $\varphi_1, \psi_1, \sigma_1$ nennt, so ergeben sich die Formeln:

$$l_1 = \frac{\frac{d\alpha}{d\Phi}}{\sqrt{\sum\left(\frac{d\alpha}{d\Phi}\right)^2}}\,,\quad \varphi_1 = \frac{\beta\frac{d\gamma}{d\Phi} - \gamma\frac{d\beta}{d\Phi}}{\sqrt{\sum\left(\frac{d\alpha}{d\Phi}\right)^2}}$$

und die ihnen analogen Formeln. Die Richtungscosinus der positiven Hauptnormalen und Binormalen der Schar L sind dann

$$l = \varepsilon l_1\,,\quad m = \varepsilon m_1\,,\quad n = \varepsilon n_1$$

$$\varphi = \varepsilon\varphi_1\,,\quad \psi = \varepsilon\psi_1\,,\quad \sigma = \varepsilon\sigma_1$$

wobei $\varepsilon = +1$ oder -1 ist, jenachdem a' positiv oder negativ ist.

Für die Torsion der Scharen von Linienelementen der Curvenschar Γ,

die längs der betrachteten orthogonalen Trajectorien liegen, bekommt man die Formel:

$$S_1 = -\frac{\sqrt{\sum\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2}}{\sum\left(\frac{d\alpha}{d\Phi}\right)^2}\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \frac{d\alpha}{d\Phi}, & \frac{d\beta}{d\Phi}, & \frac{d\gamma}{d\Phi} \\ \frac{d^2\alpha}{d\Phi^2}, & \frac{d^2\beta}{d\Phi^2}, & \frac{d^2\gamma}{d\Phi^2} \end{vmatrix}$$

und für die Torsion der Schar L die Formel:

$$S = S_1 a' . \tag{55}$$

W. SIERPIŃSKI.

O PEWNEM ZAGADNIENIU Z RACHUNKU FUNKCYJ ASYMPTOTYCZNYCH.

Pod tytułem powyższym ukazała się w „Journal für reine und angewandte Mathematik“ (T. 126, zeszyt 4) praca G. Woronoja, zajmująca się nieznaną przedtem metodą obliczania wartości asymptotycznej funkcyi liczbowej

$$\sum_{n>0}^{n\leqslant x} E\frac{x}{n},$$

gdzie Ex oznacza liczbę całkowitą, czyniącą zadość warunkom:

$$x-1 < Ex \leqslant x .$$

Autor dowiódł nowego twierdzenia, dotyczącego tej sumy: „Funkcya $x(\lg x + 2C - 1)$, gdzie C jest stałą Eulera, przedstawia funkcyę liczbową $\sum_{n>0}^{n\leqslant x} E\frac{x}{n}$ z błędem, którego rząd nie przewyższa rzędu funkcyi $\sqrt[3]{x}\lg x$“ i dodaje, iż metoda, którą się w tym celu posługuje, może być stosowana do badania wartości asymptotycznych rozmaitych sum podwójnych.

Praca niniejsza ma na celu zastosowanie metody Woronoja do obliczenia wartości asymptotycznej funkcyi liczbowej

$$\sum_{n\geqslant 0}^{n<\sqrt{x}} E\sqrt{x-n^2} .$$