T. LEVI-CIVITA.

SUR LA RECHERCHE DES SOLUTIONS PARTICULIÈRES DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS ET SUR LES MOUVEMENTS STATIONNAIRES.

(BADANIE SZGZEGÓLNYCH ROZWIĄZAŃ UKŁADÓW RÓŻNICZKOWYCH I O RUCHACH UMIEJSCOWIONYCH).

PRÉFACE.

Une invitation cordiale de M. Dickstein me donne occasion d'exposer, sous forme simplifiée et complétée, des recherches, qui ont formé objet de plusieurs notes, parues dans les Rendiconti dei Lincei (1901 et 1905).

Le point de départ de ces notes avait été une généralisation de la méthode, dite ignoration of coordinates par les auteurs anglais, généralisation prêtant elle-même à d'intéressantes applications dynamiques.

J'ai reconnu plus récemment qu'il ne s'agit point de propriétés, appartenant exclusivement aux équations de la dynamique, mais de conséquences d'un principe général embrassant tout système différentiel ordinaire.

Je ferai ici jouer au principe son rôle naturel au commencement de la recherche. C'est un principe assez élémentaire, qui devient intuitif, si on le présente sous forme géométrique.

Imaginons en effet les solutions d'un système différentiel quelconque représentées par des courbes d'un espace à un nombre convenable de dimensions.

Appelons, suivant l'usage, invariante toute variété (de n'importe quel nombre de dimensions) formée par un assemblage de courbes intégrales.

Il est bien clair que la partie commune à deux variétés invariantes est encore une variété invariante. Il en est de même en particulier pour les eventuelles intersections d'une variété V avec elle même, c'est-à-dire pour la sous-variété W, lieu des points doubles de V.

La connaissance d'une variété invariante V entraîne celle de W. (On n'a à effectuer, pour définir W, que des opérations algébriques). W est en général bien plus restreinte que V, et la détermination des courbes intégrales, qui en sont les génératrices, dépend par conséquent d'opérations analytiques beaucoup moins élevées.

Voilà la remarque évidente, qui se traduit dans une règle commode pour la construction des solutions particulières des systèmes différentiels.

Dans le présent mémoire, je développerai d'abord cette règle (Chap. I), en déduisant comme corollaires (Chap. II) les résultats plus précis qu'on peut établir pour les systèmes canoniques. Je passerai ensuite aux applications (Chap. III), et j'ajouterai enfin (Chap. IV) quelques réflexions critiques pour faire ressortir aussi le côté qualitatif de la question et prévenir des possibles malentendus.

Si l'on veut se former une idée plus précise de chaque chapitre, on n'a qu'à jeter un coup d'oeil sur la table des matières.

CHAPITRE I.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES, S'APPLIQUANT À TOUT SYSTÈME DIFFÉRENTIEL.

§ 1. Préliminaires.

Soit

$$\text{(S)} \qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

un système différentiel quelconque, les X_i étant censées fonctions uniformes et holomorphes de leurs arguments dans le domaine, auquel se rapportent nos considérations.

Convenons d'appeler *déplacements virtuels* et de désigner par δx_i des accroissements infiniment petits des x_i, compatibles avec les équations différentielles (S), c'est-à-dire tels que les $x_i + \delta x_i$ satisfont à (S), dès qu'il en est ainsi pour les x_i.

On tire de cette définition

$$(1) \qquad \frac{d\,\delta x_i}{dt} = \delta X_i = \sum_{1}^{n}{}_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\,\delta x_j\,,$$

où l'on doit naturellement entendre par x_i une solution de (S).

Les (1) sont, d'après M. Poincaré, les équations aux variations du système donné (S). On peut évidemment les écrire

$$\frac{d\,\delta x_i}{dt} = \delta\,\frac{dx_i}{dt}\,,$$

ce qui met au jour la propriété caractéristique des déplacements virtuels d'être permutables avec l'opération $\frac{d}{dt}$.

Il s'ensuit plus généralement, pour une fonction quelconque $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$

$$\frac{d}{dt}\,\delta f = \delta\,\frac{df}{dt}\,,$$

où la dérivation par rapport à t doit se faire, cela va sans dire, d'après (S) et (1); notamment l'écriture $\frac{df}{dt}$ remplace

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{1}^{n}{}_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\,X_i\,.$$

A toute solution $x_i(t)$ des équations (S) on peut subordonner un système ∞^n de déplacements virtuels, restant arbitraires ceux qui se rapportent à une valeur (particulière, mais d'ailleurs quelconque) de t. C'est ce qui résulte du fait que les δx_i sont les intégrales des équations (1).

§ 2. Étude d'un cas simple.

Ceci posé, soit

$$(2) \qquad H(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = 0$$

une relation invariante par rapport au système (S), ce qui veut dire, comme on sait, que $\frac{dH}{dt}$ s'annule: ou bien identiquement, auquel cas on aurait affaire à une véritable intégrale (la constante étant inclusé dans H); ou bien, en vertu de la relation elle même. On suppose naturellement qu'il s'agit d'une relation uniforme, c'est-à-dire qu' on puisse en tirer une au moins des x comme fonction uniforme des autres et de t dans le champ envisagé. Je vais établir le théorème suivant:

a) Posons

$$\delta H = 0 \tag{3}$$

pour tous les déplacements virtuels, c'est-à-dire

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = 0 . \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3'}$$

Si le système (2), (3) [sous forme explicite (2), (3')] est compatible, il est nécessairement invariant vis-à-vis de (S).

Démonstration. L'hypothèse que la relation (2) est invariante se traduit dans une identité de la forme

$$\frac{dH}{dt} = \mu H , \tag{4}$$

μ étant une fonction holomorphe [1]).

On a aussi (quels que soient t, x_i, δx_i)

$$\frac{d}{dt}\,\delta H = \delta\,\frac{dH}{dt} .$$

Remplaçons-y, au lieu de δH, sa valeur

$$\sum_1^n {}_i \frac{\partial H}{\partial x_i}\,\delta x_i ,$$

[1]) Pour le constater, considérons pour un moment H comme variable indépendante à la place d'une des x (ce qui est évidemment permis, d'après la résolubilité de $H = 0$), et pensons au développement de $\frac{dH}{dt}$ en série de puissances de H. Comme $\frac{dH}{dt}$ doit s'annuler avec H, il n'y aura pas dans le développement le terme indépendant de H, ce qui justifie bien la formule (4).

A la vérité cette dernière conclusion pourrait être en défaut pour les valeurs particulières des x, qui annulent à la fois toutes les $\frac{\partial H}{\partial x_i}$, valeurs essentielles pour notre recherche. Nous conviendrons cependant, pour éviter toute difficulté, de nous borner aux cas où μ reste holomorphe même pour les dites valeurs.

et μH au lieu de $\frac{dH}{dt}$; il vient

$$\sum_1^n {}_i \frac{d}{dt}\,\frac{\partial H}{\partial x_i}\,.\,\delta x_i = -\sum_1^n {}_i \frac{\partial H}{\partial x_i}\,\frac{d\,\delta x_i}{dt} + H\delta\mu + \mu \sum_1^n {}_i \frac{\partial H}{\partial x_i}\,\delta x_i . \tag{5}$$

Lorsqu' on tient compte des (2) et (3') [1]), le second membre s'annule, et il reste

$$\sum_1^n {}_i \frac{d}{dt}\,\frac{\partial H}{\partial x_i}\,.\,\delta x_i = 0 .$$

La relation devant subsister pour tout déplacement virtuel, il s'ensuit

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial H}{\partial x_i} = 0 . \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

C. Q. F. D.

Il convient d'ajouter:

a') Si (2) est une véritable intégrale, $\frac{dH}{dt}$ s'annule identiquement, et les équations (3') sont invariantes à elles seules.

C'est ce qui résulte de (5), dès que $\mu = 0$.

Remarque. Les x_i sont au nombre de n, tandis que les équations (2), (3') sont au nombre de $n+1$. Leur compatibilité apparaît de la sorte comme une circonstance exceptionnelle. Mais il n'en est pas ainsi dans le cas a'). On n'a alors à envisager que les équations (3'), qui sont au nombre de n comme les x_i; la (2) se trouve nécessairement satisfaite par un choix convenable de la constante arbitraire.

§ 3. Extension du résultat.

Considérons plus généralement $m+1$ équations

$$H = 0 , \quad F_1 = 0 , \quad F_2 = 0 , \ldots , F_m = 0 , \tag{I}$$

formant un système invariant vis à vis de (S). On suppose, bien entendu, que $H, F_1, F_2, \ldots, F_m$ soient uniformes, holomorphes et indépendantes dans le domaine envisagé. Dans cette hypothèse on peut, sans nuire à la généralité, se servir de $F_1, F_2, \ldots, F_m$ comme variables indépendantes à la place de m des x: de $x_1, x_2, \ldots, x_m$ par exemple.

[1]) Ceci revient à se rapporter à des valeurs des x, qui vérifient à la fois les (2), (3') pour une valeur quelconque de t. C'est justement ici qu' intervient la condition de compatibilité, mentionnée dans l'énoncé du théorème.

Avec ces nouvelles variables

$$F_1, F_2, \dots, F_m, \quad x_{m+1}, \dots, x_n,$$

le système (S) prend la forme

$$(S') \qquad \begin{cases} \dfrac{dF_r}{dt} = \Xi_r, & (r = 1, 2, \dots, m) \\[2mm] \dfrac{dx_j}{dt} = \Xi_j, & (j = m+1, \dots, n) \end{cases}$$

où les $\Xi(F_1, F_2, \dots, F_m, x_{m+1}, \dots x_n, t)$ se comportent analytiquement par rapport à leurs arguments comme les X (par rapport aux anciennes variables).

L'invariance des (I) implique que les $\dfrac{dH}{dt}, \dfrac{dF_1}{dt}, \dots, \dfrac{dF_m}{dt}$ s'annulent en vertu des équations (I) elles mêmes, ce qui se traduit par des identités de la forme suivante:

$$(6) \qquad \frac{dH}{dt} = MH + \sum_r^{1 \dots m} M_r F_r,$$

$$(7) \qquad \frac{dF_r}{dt} = N_r H + \sum_1^m N_{rs} F_s, \qquad (r = 1, 2, \dots, m)$$

où l'on doit entendre par M, M_r, N_r, N_{rs} des fonctions holomorphes [1]).

Ceci posé, convenons de représenter par $\overline{f}$ ce qui devient une fonction quelconque $f(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$, lorsqu' on la réduit au moyen des relations

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \dots, F_m = 0,$$

c'est-à-dire, en ayant égard à l'expression de f par rapport aux nouvelles variables, lorsqu' on donne la valeur 0 aux m premières.

L'identité (6) permet d'affirmer que

$$\overline{H} = 0,$$

est une relation invariante par rapport au système réduit

$$(\overline{S}) \qquad \frac{dx_j}{dt} = \overline{\Xi}_j. \qquad (j = m+1, \dots, n)$$

[1]) Pour la justification, voir la note de la page 4. On n'a qu'à généraliser d'une façon bien évidente.

En effet, explicitons d'abord l'expression de $\dfrac{dH}{dt}$, rapportée au système (S), ou, ce qui revient au même, au système (S'). Elle est

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_r^{1 \dots m} \frac{\partial H}{\partial F_r} \frac{dF_r}{dt} + \sum_j^{m+1 \dots n} \frac{\partial H}{\partial x_j} \Xi_j.$$

En y faisant

$$F_r = 0, \qquad (r = 1, 2, \dots, m)$$

et en tenant compte des (6), (7), on en tire:

$$\frac{\partial \overline{H}}{\partial t} + \sum_j^{m+1 \dots n} \frac{\partial \overline{H}}{\partial x_j} \overline{\Xi}_j = \overline{H} \left\{ \overline{M} - \sum_r^{1 \dots m} \left(\frac{\partial \overline{H}}{\partial F_r} \right) \overline{N}_r \right\}.$$

Le premier membre n'est que la dérivée de $\overline{H}$ par rapport à t, calculée d'après $(\overline{S})$, le second membre contient $\overline{H}$ en facteur.

C'est justement ce qu'il s'agissait de constater.

Appliquons maintenant le théorème a).

Il nous dit que le système

$$\overline{H} = 0, \quad \delta \overline{H} = 0,$$

c'est-à-dire, sous forme explicite,

$$\overline{H} = 0,$$

$$\frac{\partial \overline{H}}{\partial x_j} = 0, \qquad (j = m+1, \dots, n)$$

est invariant vis-à-vis de $(\overline{S})$.

On peut interpréter différemment cette conclusion en revenant à (S). Voici l'enoncé qu' on en tire:

b) Associons au système (I) les équations en termes finis provenant de la condition:

$$(II) \qquad \delta H = 0$$

(pour tout déplacement compatible avec $F_1 = 0, F_2 = 0, \dots, F_m = 0$).

Le système, qui en résulte (dès qu'il n'implique pas de contradiction), est encore invariant vis-à-vis de (S).

Démonstration. Gardons toujours les variables $F_1, F_2, \ldots, F_m, x_{m+1}, \ldots, x_n$. Tout d'abord il est bien clair que les équations

$$\frac{\partial H}{\partial x_j} = 0 \,, \qquad (j = m+1, \ldots, n)$$

provenant de (II), peuvent s'écrire:

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j} = 0 \,, \qquad (j = m+1, \ldots, n)$$

puisqu' on doit tenir compte de

$$F_1 = F_2 = \ldots = F_m = 0 \,.$$

Posons, pour abréger l'écriture:

$$H_j = \frac{\partial H}{\partial x_j} \,,$$

d'où

$$\bar{H}_j = \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j} \,.$$

On a les identités:

$$\frac{dH_j}{dt} = \sum_1^m{}_r \frac{\partial H_j}{\partial F_r} \frac{dF_r}{dt} + \left\{ \frac{\partial H_j}{\partial t} + \sum_{m+1}^n{}_l \frac{\partial H_j}{\partial x_l} \Xi_l \right\} ,$$

où la dérivation $\frac{d}{dt}$ a été explicitée d'après le système (S′), équivalent à (S), à un changement de variables près.

Pour $F_1 = F_2 = \ldots = F_m = 0$, la quantité entre parenthèses se présente comme la dérivée $\frac{d\bar{H}_j}{dt}$ de $\bar{H}_j$, calculée d'après $(\bar{S})$. Or, si l'on tient compte aussi de

$$H = 0 \,,$$

$$H_j = 0 \,, \qquad (j = m+1, \ldots, n)$$

les quelles, à cause de $F_1 = F_2 = \ldots = F_m = 0$, se réduisent à

$$\bar{H} = 0 \,,$$

$$\bar{H}_j = 0 \,, \qquad (j = m+1, \ldots, n)$$

on reconnait que

$$\frac{d\bar{H}_j}{dt} = 0 \,.$$

C'est ce qui résulte de l'invariance de

$$\bar{H} = 0 \,,$$

$$\bar{H}_j = 0 \,, \qquad (j = m+1, \ldots, n)$$

vis-à-vis de $(\bar{S})$.

D'autre part le premier terme

$$\sum_1^m{}_r \frac{\partial H_j}{\partial F_r} \frac{dF_r}{dt}$$

s'annule aussi, en vertu des (7), dès que les équations (I) sont vérifiées.

En définitive tout $\frac{dH_j}{dt}$ s'annule d'après (I) et (II).

C. Q. F. D.

Comme au n^0 précédent, on en tire un corollaire:

b′) Si, parmi les (I), il y a des véritables intégrales—au nombre de k, par exemple—le système, comprenant les autres $m-k$ équations (I) et les (II), est invariant à lui seul.

La condition de compatibilité porte dans ce cas sur $n+1-k$ équations, au lieu que sur $n+1$, comme il arrive en général.

§ 4. Solutions particulières stationnaires—justification de cet appellatif.

Rapportons nous au dernier énoncé b′), qui embrasse évidemment les trois autres: le théorème b) pour $k=0$; le théorème a) pour $m=k=0$, et son corollaire a′) pour $m=0$, $k=1$.

Les $n+1-k$ équations (par hypothèse, compatibles) pourront ne pas être toutes indépendantes. Supposons qu' il y en ait $n+1-k-k'$ distinctes $(k' \geqslant 0)$.

On peut imaginer d'en tirer autant des x. Après cela, en réduisant en conformité le système (S), on trouve, pour définir les autres x, un système différentiel d'ordre $k+k'-1$. Mais on connait déjà k intégrales de ce système restreint [celles, qui proviennent, moyennant la réduction indiquée, des intégrales, figurant par hypothèse parmi les (I)]. Il ne reste partant qu' à effectuer une opération d'ordre $k'-1$ pour obtenir $\infty^{k+k'-1}$ solutions du système donné (S).

Il est bien naturel de les appeler **stationnaires** par rapport à la fonction H, qui intervient dans leur définition, puisque, pour une quelconque d'entre elles, on a $\delta H = 0$. La valeur de H est donc maximum ou minimum, ou plus exactement **stationnaire** parmi celles, qu'elle prend (pour une même valeur de t) sur une quelconque des autres solutions de (S), également situées sur la variété $F_1 = F_2 = \ldots = F_m = 0$.

§ 5. **Remarque sur la construction effective des solutions stationnaires.**

D'après le n^0 précédent, un système invariant (I) étant donné, on doit avant tout expliciter les équations provenant de

$$\text{(II)} \qquad \delta H = 0$$

(pour tout déplacement compatible avec $F_1 = F_2 = \ldots = F_m = 0$).

Au point de vue purement théorique, il nous a été commode de regarder préalablement les F comme variables indépendantes et d'expliciter les (II) sous la forme

$$\frac{\partial H}{\partial x_j} = 0 . \qquad (j = m+1, \ldots, n)$$

Ce n'est pas en général la meilleure façon de procéder dans les cas concrets. Il convient au contraire (comme dans la théorie des maxima et minima relatifs) d'avoir recours aux multiplicateurs de **Lagrange**. On est ainsi conduit à remplacer (II) par la condition équivalente

$$\delta H + \sum_1^m {}_r \lambda_r \delta F_r = 0$$

(pour tout déplacement virtuel), c'est-à-dire

$$\text{(III)} \qquad \frac{\partial H}{\partial x_i} + \sum_1^m {}_r \lambda_r \frac{\partial F_r}{\partial x_i} = 0 , \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

où les λ_r désignent des indéterminées.

Leur élimination des (III) donnerait des relations entre les x (et t), qui, en système avec (I), reviennent aux (I), (II) du n^0 3.

On peut donc considérer les équations (III) comme résultant de deux groupes, dont l'un $(\text{III})_1$, composé de m équations, définit les multiplicateurs λ, tandis que l'autre $(\text{III})_2$, pris ensemble avec (I), équivaut aux (II).

D'après cela il est bien clair que, en dérivant ces équations (III), on n'obtient en substance rien de nouveau, à cause de leur invariance.

Appelons (Λ) l'ensemble des m équations définissant les dérivées des paramètres λ. Ce qu' on vient de dire peut être énoncé sous la forme suivante:

Les équations (I), (III) sont invariantes par rapport au système différentiel (I), (Λ).

En effet la dérivation des (I), (III), faite d'après (S), (Λ), ne conduit à aucune relation (entre les x, les λ et t) distincte de (I), (III).

Ceci posé, imaginons de réduire notre nouveau système (S), (Λ) moyennant les équations (I), (III).

Pour se rendre compte du résultat, il suffit ici encore de penser les (III) comme résultant des deux groupes $(\text{III})_1$, $(\text{III})_2$.

Quant aux x, tout se passe évidemment comme si l'on réduisait le système donné (S) moyennant les rélations (I), $(\text{III})_2$, c'est-à-dire (I), (II). Il ne reste, après cela, que les rélations $(\text{III})_1$ définissant les λ. Les (Λ) en sont, par construction, une pure conséquence et deviennent partant des identités lorsqu' on les réduit au moyen des équations $(\text{III})_1$ elles-mêmes.

En résumant, sous forme de règle, il convient de retenir:

1-o La recherche des solutions stationnaires peut se faire en éliminant d'abord les λ des (III) et en réduisant en conformité le système différentiel (S).

2-o Il n'est pas nécessaire toutefois d'éliminer d'avance les λ. Au contraire, il est en général plus commode de commencer par dériver les (III), ce qui fournit les $\frac{d\lambda}{dt}$ [le système, qu' on a appelé (Λ)], et pas d'autres relations en termes finis. On déterminera ensuite les solutions particulières du système (S), (Λ) (d'ordre $n+m$), qui satisfont aux relations invariantes (I), (II). On aura de la sorte, en se débarrassant enfin des λ, les expressions des x, qui appartiennent aux solutions stationnaires cherchées.

§ **6** **Stabilité.**

Une solution stationnaire Σ_0 d'un système différentiel (S) étant donnée, envisageons une seconde solution Σ, appartenant, comme Σ_0, à la variété

$$F_1 = 0 , \quad F_2 = 0 , \ldots , F_m = 0 ,$$

et d'ailleurs quelconque.

Appelons Δx_i les différences des valeurs prises par les x_i sur Σ et sur Σ_0 respectivement, pour une même valeur de t.

Nous dirons que Σ_0 est une solution stable si, pour tout nombre positif ε, si petit qu' il soit, on peut assigner un autre nombre positif η, tel qu' on ait (pour une valeur réelle quelconque de t)

$$|\Delta x_i| < \varepsilon, \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{8}$$

dès qu' on prend pour Σ des valeurs initiales satisfaisant aux conditions

$$|\Delta x_i| < \eta. \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{9}$$

S'il n'en est pas ainsi, c'est-à-dire s'il existe un nombre fini ε, tel que, parmi les Σ satisfaisant initialement aux inégalités (9), il en ait une au moins sur laquelle, pour quelque valeur de t, les (8) ne sont pas toutes remplies (et cela si petit qu' on prenne η), la solution Σ_0 sera dite instable.

Il importe de remarquer que, si $H=$ const est une intégrale du système (S), la stabilité (au sens relatif, qu' on vient de préciser) est un caractère qualitatif [1]).

Il suffit en effet que $\delta^2 H$ (calculée avec la même relativité que δH) soit, tout le long de Σ_0, une forme quadratique définie, par rapport aux $n-m$ différentielles, qui restent indépendantes sur la variété $F_1=F_2=\ldots=F_m=0$, pour qu' on puisse appliquer le raisonnement classique de Dirichlet et en déduire la stabilité de la solution, dont il s'agit.

Lorsque $\delta^2 H$ n'est pas définie, la considération de l'intégrale $H=$ const ne donne, à elle seule, aucun renseignement. Il faudrait alors s'adresser au système (S) et avoir recours à la méthode de M. Liapounoff [2]).

---

[1]) Tandis qu' en général elle est une circonstance tout à fait exceptionnelle.

On peut consulter à ce propos, outre les recherches classiques de M. Poincaré sur les courbes définies par des équations différentielles:

T. Levi-Civita: „Sopra alcuni criteri di instabilità". Annali di Matematica. Ser. 3. T. V. 1901.

R. Cigala: „Sopra un criterio di instabilità", ibidem. T. XI. 1904.

[2]) „Sur l'instabilité de l'équilibre dans certains cas, où la fonction des forces n'est pas un maximum". Journal de mathématiques pures et appliquées, 5ème Série. T. III. 1897.

CHAPITRE II.

SYSTÈMES CANONIQUES — MOUVEMENTS STATIONNAIRES — MOUVEMENTS À LA ROUTH.

§ 1. Compléments relatifs aux systèmes de forme canonique [1]).

Prenons en particulier, pour (S), un système de forme canonique

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{1}$$

la fonction caractéristique H étant indépendante de t.

Supposons en outre d'envisager un système invariant

$$F_1=0, \quad F_2=0, \ldots, F_m=0 \qquad (m<n) \tag{2}$$

de relations en involution, également indépendantes de t (et distinctes de $H=$ const).

Comme $H=$ const est une intégrale de (1), on peut l'associer aux (2), et, en posant

$$\delta H = 0 \tag{3}$$

[pour tout déplacement compatible avec (2)], on est assuré, d'après les résultats du chapitre précédent, que le système simultané (2), (3) est invariant vis-à-vis de (1).

Les hypothèses particulières, faites à l'égard de (1), (2) (forme canonique, indépendance de t, involution) permettent d'ajouter que la condition (3) ne peut donner lieu à plus que $2(n-m)$ relations distinctes entre les p et les x, tandis qu'en général elle en donnerait $2n-m$.

Première démonstration.

On le prouve très simplement en s'appuyant sur la nature de la condition (3), qui est invariante vis-à-vis de tout changement de variables (biuniforme et régulier). On y peut donc envisager comme variables, à la place des x, p, $2n$ leurs combinaisons indépendantes quelconques.

---

[1]) Les conclusions se rapportant aux systèmes canoniques ont été retrouvées et généralisées par M. Burgatti, d'après un point de vue entièrement différent. Voyez sa note dans les Rendiconti dei Lincei du 20 Avril 1902.

Pour les fixer d'une façon convenable, on part de la remarque suivante:

Dire que les relations (2) sont en involution signifie simplement que les parenthèses de Poisson

$$(F_r, F_s) \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, m)$$

s'annulent, en vertu des (2) elles-mêmes. Mais il est toujours loisible d'attribuer aux équations (2) une forme équivalente

$$\text{(2')} \qquad \varphi_1 = 0\,, \quad \varphi_2 = 0\,, \ldots, \varphi_m = 0\,,$$

telle qu' on ait identiquement

$$(\varphi_r, \varphi_s) = 0\,. \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, m)$$

Ceci posé, on prendra d'abord pour variables $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ et $n-m$ autres fonctions indépendantes

$$\varphi_j \qquad (j = m+1, \ldots, n)$$

en involution entre elles et avec les premières, ce qui est bien possible, et dans une infinité de manières.

Il est encore possible d'associer à ces fonctions φ, n conjuguées

$$\psi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(déterminées à une constante près) telles que la transformation entre les p_i, x_i, et les φ_i, ψ_i soit de contact [1]).

Le système (1), à la suite d'une telle transformation, reste canonique avec la même fonction caractéristique H (exprimée, bien entendu, par les φ, ψ).

Ayant alors

$$\text{(1')} \qquad \frac{d\varphi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \psi_i}\,, \quad \frac{d\psi_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \varphi_i}\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

l'invariance des (2) [plus précisément, celle des équivalentes (2')] se traduit dans ce fait analytique que

$$\frac{\partial H}{\partial \psi_1}\,, \quad \frac{\partial H}{\partial \psi_2}\,, \ldots, \frac{\partial H}{\partial \psi_m}$$

s'annulent toutes en vertu des (2').

[1]) Voir, pour toutes ces assertions, l'ouvrage de M. Goursat „Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre", ou le second volume de la „Theorie der Transformationsgruppen" par Lie-Engel.

Ceci posé, il est bien clair que la condition (3) n'entraîne plus que $2(n-m)$ relations entre $\varphi_{m+1}, \varphi_{m+2}, \ldots, \varphi_n$; $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, savoir

$$\frac{\partial \overline{H}}{\partial \varphi_j} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \psi_j} = 0\,, \qquad (j = m+1, \ldots, n)$$

le trait superposé indiquant qu' on a posé $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_m = 0$, c'est-à-dire qu' on tient compte des (2).

C. Q. F. D.

Seconde démonstration.

Je vais indiquer aussi une démonstration directe, qui n'exige aucun emprunt à la théorie des transformations de contact. J'ajouterai toutefois — pour éviter une petite discussion — la restriction non essentielle que les m relations données (2) (indépendantes par hypothèse) soient résolubles par rapport à m des $p: p_1, p_2, \ldots, p_m$ par exemple.

On peut alors prendre les (2) sous forme résolue, en les supposant préalablement remplacées par

$$\text{(2'')} \qquad p_r = f_r(p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n;\ x_1, x_2, \ldots, x_n)\,. \qquad (r = 1, 2, \ldots, m)$$

Les différences $p_r - f_r$ sont encore en involution, d'après un lemme bien connu [1]), dès qu' il en était ainsi des F.

Posons, pour deux fonctions quelconques U, V,

$$\{U, V\} = \sum_{m+1}^{n} {}_j \left(\frac{\partial U}{\partial p_j} \frac{\partial V}{\partial x_j} - \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial V}{\partial p_j} \right).$$

Les conditions

$$(p_r - f_r\,, \quad p_s - f_s) = 0$$

se réduisent à

$$\text{(4)} \qquad \frac{\partial f_r}{\partial x_s} - \frac{\partial f_s}{\partial x_r} + \{f_r, f_s\} \equiv 0\,. \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, m)$$

J'ai employé le signe $\equiv$ pour mettre en évidence qu' il s'agit d'une identité: il n'y a plus en effet à tenir compte des (2''), puisqu' il n'y a pas de $p_r\ (r = 1, 2, \ldots, m)$ dans les premiers membres des (4).

Il nous faut exprimer aussi que les relations (2') sont invariantes.

[1]) Goursat, loc. cit. §. 62. Ce n'est qu' une forme particulière des (2').

En formant, d'après (1), $\frac{dp_r}{dt}$, $\frac{df_r}{dt}$, on est conduit aux égalités

$$\frac{\partial H}{\partial x_r} + \{H, f_r\} + \sum_1^m {}_s \frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{\partial f_r}{\partial x_s} = 0, \tag{5} \qquad (r=1,2,\ldots,m)$$

qui doivent subsister en conséquence des (2").

Appelons ici encore $\overline{H}$ ce qui devient H lorsqu' on tient compte des relations invariantes données, c'est-à-dire, en ayant égard à la forme résolue (2"), lorsqu' on y remplace chaque p_r par f_r.

Les dérivées de cette fonction $\overline{H}(p_{m+1},\ldots,p_n; x_1, x_2,\ldots,x_n)$ sont évidemment liées à celles de H par les formules

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \overline{H}}{\partial p_j} &= \frac{\partial H}{\partial p_j} + \sum_1^m {}_s \frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{\partial f_s}{\partial p_j} \\ \frac{\partial \overline{H}}{\partial x_j} &= \frac{\partial H}{\partial x_j} + \sum_1^m {}_s \frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{\partial f_s}{\partial x_j} \end{aligned}\right. ; \tag{6} \qquad (j=m+1,\ldots,n)$$

$$\frac{\partial \overline{H}}{\partial x_r} = \frac{\partial H}{\partial x_r} + \sum_1^m {}_s \frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{\partial f_s}{\partial x_r}. \tag{7} \qquad (r=1,2,\ldots,m)$$

Les (6) donnent immédiatement

$$\{\overline{H}, f_r\} = \{H, f_r\} - \sum_1^m {}_s \frac{\partial H}{\partial p_s} \{f_r, f_s\},$$

d'où, en ajoutant aux (7):

$$\frac{\partial \overline{H}}{\partial x_r} + \{\overline{H}, f_r\} = \frac{\partial H}{\partial x_r} + \{H, f_r\} + \sum_1^m {}_s \frac{\partial H}{\partial p_s}\left[\frac{\partial f_s}{\partial x_r} - \{f_r, f_s\}\right].$$

D'après (4) et (5), il reste (identiquement, tout p_r ayant disparu)

$$\frac{\partial \overline{H}}{\partial x_r} + \{\overline{H}, f_r\} = 0. \tag{8} \qquad (r=1,2,\ldots,m)$$

Ceci posé, remarquons que la condition (3) équivaut évidemment à

$$\delta \overline{H} = 0$$

(sans aucune liaison, désormais) c'est-à-dire, sous forme explicite, aux équations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \overline{H}}{\partial p_j} = 0, \quad \frac{\partial \overline{H}}{\partial x_j} = 0; \qquad (j=m+1, m+2,\ldots,n) \\ &\frac{\partial \overline{H}}{\partial x_r} = 0. \qquad (r=1,2,\ldots,m) \end{aligned}\right.$$

Les m dernières sont bien une conséquence des autres $2(n-m)$, d'après (8).

C. Q. F. D.

§ 2. Rappel des recherches de M. Routh.

Considérons un système matériel holonome, à liaisons indépendantes du temps; appelons $x_1, x_2,\ldots,x_n$ les paramètres indépendantes fixant la position du système, et supposons, avec M. Routh, que la force vive T (fonction quadratique des $x'_i = \frac{dx_i}{dt}$, dont les coefficients sont en général des fonctions des x) soit indépendante de quelques unes des x: de $x_1, x_2,\ldots,x_m$ par exemple.

Si le potentiel U des forces appliquées est également indépendant de $x_1, x_2,\ldots,x_m$, les équations du mouvement admettent ∞^{2m} solutions particulières très simples, pour lesquelles $x_1, x_2,\ldots,x_m$ (les coordonnées ignorées, selon l'expression des anglais) sont des fonctions linéaires du temps, tandis que les autres coordonnées $x_{m+1},\ldots,x_n$ demeurent constantes. On le met au jour très simplement en introduisant les moments cinétiques p_i (ou variables conjuguées aux x_i) d'après les positions

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial x'_i}, \tag{9} \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

et en se rapportant à la forme canonique des équations du mouvement. La fonction caractéristique n'est autre chose que l'énergie totale

$$H = T - U,$$

en y supposant, bien entendu, remplacées les x' par leurs expressions, en fonction des p et des x, tirées des (9).

T et U étant par hypothèse indépendantes de x_r $(r=1,2,\ldots,m)$, il en sera de même de H, et les équations du mouvement pourront être partagées en trois groupes, comme il suit:

$$\frac{dp_r}{dt} = 0; \tag{10} \qquad (r=1,2,\ldots,m)$$

$$\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad \frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}; \tag{11} \qquad (j=m+1, m+2,\ldots,n)$$

$$\frac{dx_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_r}. \tag{12} \qquad (r=1,2,\ldots,m)$$

Le premier est immédiatement intégrable et donne

$$p_r = p_r^0 \qquad (p_r^0 \text{ constante arbitraire});$$

le second, en y posant $p_r = p_r^0$, vient à dépendre seulement des inconnues p_j, x_j; c'est donc un système d'ordre $2(n-m)$, apte à les déterminer. Dès qu'on l'ait intégré, la détermination des x_r, d'après (12), se fait par quadratures.

Ceci en général.

Mais il est bien clair qu' on a une solution particulière des (11), en prenant pour p_j, x_j des valeurs constantes vérifiant les $2(n-m)$ équations

$$(13) \qquad \frac{\partial H}{\partial x_j} = 0\,, \quad \frac{\partial H}{\partial p_j} = 0 \qquad (j = m+1, \ldots, n)$$

(si tant est qu'elles soient compatibles). Il s'en suivra des valeurs également constantes pour les seconds membres des (12), d'où, pour les x_r, des fonctions linéaires de t.

Voilà les solutions annoncées, qui, en définitive, dépendent bien de $2m$ constantes arbitraires: les p_r^0 et les valeurs initiales des x_r.

D'après (13), on a, pour ces solutions particulières:

$$\delta H = 0\,,$$

compatiblement avec les conditions

$$p_r = p_r^0\,. \qquad (r = 1, 2, \ldots, m)$$

A cause de cette propriété de l'énergie totale, M. Routh a appelé stationnaires les mouvements correspondants.

§ 3. Mouvements stationnaires en général—Mouvements à la Routh.

On aperçoit bien nettement dans ce qu'on vient de dire l'origine des recherches plus générales, dont il est question dans le présent mémoire.

Tout d'abord, en se plaçant avec M. Routh au point de vue, pour ainsi dire, énergétique, on se trouve amené à généraliser ses considérations sur les systèmes holonomes, rappelées tout à l'heure. Il suffit pour cela de remplacer l'hypothèse des coordonnées ignorées, c'est-à-dire de l'existence d'intégrales de la forme particulière $p_r = p_r^0$, par les conditions (2).

Mais il y a lieu de profiter des intégrales connues, pour la recherche de solutions particulières, sans rendre stationnaire l'énergie totale, et même sans qu' il s'agisse de systèmes de forme canonique.

C'est ce que montrent les résultats du chapitre I.

D'après cela, je conviendrai (en étendant la définition de M. Routh) d'appeler stationnaire tout mouvement d'un système matériel, qui soit représenté par une solution stationnaire (au sens analytique abstrait envisagé jusqu' ici).

Comme définition il n'y a naturellement rien à objecter, mais on pourrait craindre de perdre en intérêt mécanique ce qu' on gagne en extension, dès que l'énergie ne demeure plus stationnaire.

Il n'en est rien, comme on le verra au dernier chapitre par l'examen critique des circonstances, qui ont principale influence sur le degré de simplicité d'un mouvement.

Il serait toutefois déraisonnable de méconnaître l'importance toute spéciale du cas de M. Routh et de sa première généralisation: soit pour leurs applications nombreuses; soit pour le plus grand nombre de constantes, dont dépendent les mouvements correspondants (voir le § suivant); soit enfin pour la forme particulière des conditions de stabilité.

Je propose partant d'appeler cette catégorie de mouvements stationnaires mouvements à la Routh.

En définitive ils sont caractérisés par les hypothèses suivantes:

1-o Il s'agit de systèmes holonomes, à liaisons indépendantes du temps, soumis à des forces, dérivant d'un potentiel. Les équations du mouvement ont alors la forme canonique (1), H étant l'énergie totale.

2-o Le système de relations invariantes

$$(2) \qquad F_1 = 0\,, \quad F_2 = 0\,, \ldots, F_m = 0\,,$$

d'où l'on part pour rendre H stationnaire, est en involution, et lui aussi, indépendant de t.

D'après la remarque du § 1, on est assuré que la condition (3) (tant qu' il y a compatibilité) conduit à un ensemble de ∞^m, au moins, mouvements à la Routh.

L'arbitrariété augmente naturellement lorsque quelques-unes des (2) sont des véritables intégrales. Au cas plus favorable (et d'ailleurs plus important), où elles seraient toutes des intégrales, on aura précisément ∞^{2m} de tels mouvements.

Remarque.

Théoriquement on peut toujours par une transformation de contact se réduire au cas typique de M. Routh, où les premiers membres des rélations invariantes données jouent le rôle de coordonnées ignorées. C'est ce qu' on a fait dans la première démonstration du § 1. Il ne faut pas en conclure toutefois que notre règle, se rapportant à un système quelconque de paramètres (canoniques ou non), soit dépourvue d'intérêt.

En effet le côté essentiel de nos considérations réside précisément dans la possibilité d'assigner certaines classes de solutions par des moyens simples (plus simples que l'intégration complète du système donné): en somme, par l'intégration d'un système réduit d'ordre $m-1$ (au lieu que $2n$).

Or la transformation de contact (qui reconduirait à la forme linéaire de M. Routh) dépend en général d'opérations analytiques d'ordre bien plus élevé que $m-1$. Elle n'est donc pas admissible comme instrument de calcul, bien qu' il soit parfaitement légitime et même convenable de s'en servir comme instrument de démonstration.

En ligne pratique il y a lieu d'ajouter une autre remarque:

Certains problèmes de dynamique comportent de variables, pour ainsi dire, naturelles (telles que les composantes de la rotation p, q, r, et les cosinus directeurs de la verticale $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, pour un solide pésant mobile autour d'un point fixe; u, v, w, p, q, r pour un solide au sein d'un liquide; etc.). Dans ces cas, même si l'on connaitraît d'avance une transformation conduisant aux variables φ_i, ψ_i du § 1, il y a avantage à l'éviter sous le double aspect de la simplicité des calculs et de la spontanéité des interprétations.

§ 4. Règle de Dirichlet—Liapounoff.

Pour les mouvements à la Routh il y a lieu de poser la question de la stabilité sous la forme plus restreinte que voici [1]):

Rapportons-nous aux variables φ_i, ψ_i du § 1 (première démonstration).

Sur la variété invariante

$$\varphi_1 = 0\,, \quad \varphi_2 = 0\,, \ldots, \varphi_m = 0 \tag{2'}$$

on a aussi

$$\frac{\partial H}{\partial \psi_1} = \frac{\partial H}{\partial \psi_2} = \ldots = \frac{\partial H}{\partial \psi_m} = 0\,,$$

de façon que H ne dépend plus que $2(n-m)$ arguments φ_j, ψ_j $(j=m+1, \ldots, n)$.

Il est alors naturel de ne se préoccuper pas de $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$, qui jouent le rôle de coordonnées ignorées et de poser la question de la stabilité seulement à l'égard des autres $2(n-m)$ paramètres φ_j, ψ_j [2]).

La simple inspection de $\delta^2 H$ (dans le cas général, où elle est irréductible comme forme quadratique des différentielles $\delta\varphi_j, \delta\psi_j$) permet de décider sans ambiguité si la solution, dont il s'agit, est stable ou instable.

---

[1]) C'est justement la forme adoptée par M. Routh. On arriverait d'ailleurs aux mêmes conclusions en acceptant la définition proposée récemment par M. M. Klein et Sommerfeld dans leur „Theorie des Kreisels". Chap. V, § 6.

[2]) En fixant — il est presque inutile de le dire — à l'égard de $\Delta\varphi_j, \Delta\psi_j$ les mêmes conditions, indiquées pour les Δx_i dans la définition du chapitre précédent, § 6.

On a en effet la règle de Dirichlet-Liapounoff:

Pour la stabilité il faut et il suffit que $\delta^2 H$ soit une forme définie.

C'est sans doute une forme de stabilité, où les variables φ_i, ψ_i, auxquelles nous nous rapportons, jouent un rôle particulier. On peut toutefois reconnaître si cette stabilité existe ou n'existe pas, sans qu' il soit nécessaire une transformation préalable de variables, pour passer des x_i, p_i primitives aux φ_i, ψ_i. Il suffit pour cela de remarquer que, tout changement de variables entraînant une substitution linéaire entre leurs différentielles, la caractéristique de la forme quadratique $\delta^2 H$ n'en reste pas altérée. Si l'on suppose donc de se rapporter à l'expression de $\delta^2 H$ en variables quelconques, on n'aura qu' à vérifier:

1-o si la caractéristique est précisément $2(n-m)$, auquel cas on pourra, dans une infinité de manières (par des opérations algébriques élémentaires réelles), réduire $\delta^2 H$ à une forme équivalente Q ne dépendant plus que de $2(n-m)$ arguments;

2-o si la forme réduite Q est ou n'est pas définie.

C'est ce qui arrivera aussi pour $\delta^2 H$ par rapport aux variables $\delta\varphi_j, \delta\psi_j$. En effet les formes réduites Q sont toutes équivalentes dans le domaine réel, c'est à dire transformables l'une dans l'autre par une substitution linéaire, réelle. Elles sont donc en particulier, toutes à la fois, définies ou indéfinies. Évidemment l'expression de $\delta^2 H$ au moyen des $\delta\varphi_j, \delta\psi_j$ n'est autre qu' une réduite particulière.

CHAPITRE III.

EXEMPLES DE MOUVEMENTS À LA ROUTH.

§ 1. Corps solide suspendu par un de ses points.

a) Solide pesant dans le cas général. On a, avec les notations usuelles,

$$H = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + P(\gamma_1 x_0 + \gamma_2 y_0 + \gamma_3 z_0)\,,$$

et on connaît (en dehors de l'intégrale des forces vive $H =$ const et de l'identité géométrique $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$) la seule intégrale des aires pour les plans horizontaux

$$Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = \text{const.} \tag{1}$$

Appelons, pour abréger, G_3 son premier membre (moment des quantités de mouvement par rapport à la verticale ascendante du point fixe Ω).

Dans un mouvement à la Routh on doit avoir $\delta H = 0$, pour tout système d'accroissements de $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ satisfaisant à la condition $G_3 = \text{const}$, et naturellement aussi à $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$.

Posons donc

$$\delta H - \omega\, \delta G_3 - \lambda (\gamma_1\, \delta\gamma_1 + \gamma_2\, \delta\gamma_2 + \gamma_3\, \delta\gamma_3) = 0\,,$$

ω et λ étant les multiplicateurs, à priori indéterminés.

Il vient sous forme explicite

(2) $$p = \omega\gamma_1\,, \quad q = \omega\gamma_2\,, \quad r = \omega\gamma_3\,;$$

(3) $$P x_0 - \omega A p - \lambda\gamma_1 = 0\,, \quad P y_0 - \omega B q - \lambda\gamma_2 = 0\,, \quad P z_0 - \omega C r - \lambda\gamma_3 = 0\,.$$

En réduisant, d'après (2), les formules de Poisson

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2 r - \gamma_3 q\,, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_3 p - \gamma_1 r\,, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1 q - \gamma_2 p\,,$$

on reconnaît avant tout que $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sont des constantes. Cela signifie que la verticale du point de suspension Ω occupe une position fixe par rapport au corps. Les mouvements en question se réduisent donc à des rotations autour de la verticale de Ω; et à des rotations uniformes, puisque, d'après (1) et (2),

$$\omega (A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2) = \text{const},$$

et par suite l'auxiliaire ω ($|\omega|$ est évidemment la vitesse angulaire) reste constante.

Ces rotations uniformes sont bien connues. Elles ont été étudiées par M. Staude[1]). Pour retrouver ses conclusions, on n'a qu'à discuter les équations (3). En y remplaçant p, q, r par leurs valeurs (2), elles s'écrivent

(3') $$(\lambda + \omega^2 A)\,\gamma_1 = P x_0\,, \quad (\lambda + \omega^2 B)\,\gamma_2 = P y_0\,, \quad (\lambda + \omega^2 C)\,\gamma_3 = P z_0\,,$$

d'où, en éliminant λ et ω^2,

$$\begin{vmatrix} \gamma_1\,, & A\gamma_1\,, & x_0 \\ \gamma_2\,, & B\gamma_2\,, & y_0 \\ \gamma_3\,, & C\gamma_3\,, & z_0 \end{vmatrix} = 0\,.$$

[1]) „Über permanente Rotationsaxen", Journal für die reine und angewandte Mathematik. B. **113**. 1894.

C'est l'équation d'un cône quadrique de sommet Ω, lieu (dans le corps) des possibles axes permanents de rotation.

Ce cône passe par les arêtes du trièdre des coordonnées (c'est à dire par les axes principaux d'inertie, relatifs au sommet), puisque le déterminant s'annule lorsqu'on y remplace $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ par $1, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, 1$.

Réciproquement — on le vérifie sans peine — toute génératrice de ce cône, dès qu'on la suppose dirigée verticalement, est bien un axe permanent de rotation. Il lui correspond une vitesse angulaire, qui résulte en général déterminée univoquement, d'après les équations (3').

La discussion des cas particuliers (dégénérations du cône, indétermination de ω, etc.), qui peuvent se présenter pour des distributions spéciales de la masse du corps (c'est à dire pour des valeurs nulles de quelques-unes des quantités $B-C$, $C-A$, $A-B$, x_0, y_0, z_0) nous entraînerait trop loin. Il vaut mieux de s'en rapporter au mémoire cité de M. Staude.

Il resterait toutefois à former les conditions de stabilité, dont M. Staude ne s'est pas occupé. Je ne m'en occuperai pas non plus, en me contentant de signaler la question, qui n'exige d'ailleurs que quelque développement matériel de calcul.

b) Cas de Lagrange.

On a

$$A = B\,,$$

$$x_0 = y_0 = 0\,, \quad (z_0 > 0)$$

et les expressions de H et de G_3 deviennent respectivement

$$H = \frac{1}{2}\left\{ A(p^2 + q^2) + Cr^2 \right\} + P z_0 \gamma_3\,,$$
$$G_3 = A(p\gamma_1 + q\gamma_2) + C r\gamma_3\,.$$

Il existe dans ce cas la troisième intégrale

$$r = r_0 \qquad (r_0 \text{ constante}),$$

qui est bien en involution avec

$$G_3 = \text{const.}\ ^{1})$$

[1]) On a en effet, en supposant d'adopter comme variables canoniques les angles d'Euler ϑ, φ, ψ et leurs conjuguées $p_\vartheta, p_\varphi, p_\psi$:

$$G_3 = p_\psi\,, \quad r = p_\varphi\,,$$

d'où $(G_3, r) = 0$.

On doit s'attendre, d'après le chapitre précédent, à ∞^4 mouvements à la Routh. Il est aisé de les caractériser. Écrivons la condition de stationnariété sous la forme

$$\delta H - \omega\,\delta G_3 - A\lambda\,(\gamma_1\,\delta\gamma_1 + \gamma_2\,\delta\gamma_2 + \gamma_3\,\delta\gamma_3) = 0$$

(ω, λ indéterminées), en y considérant $\delta r = 0$, à cause de l'intégrale $r = r_0$. Elle donne

$$\begin{cases} p = \omega\gamma_1\,, \\ q = \omega\gamma_2\,; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega p + \lambda\gamma_1 = 0\,, \\ \omega q + \lambda\gamma_2 = 0\,; \end{cases}$$

$$C\,\omega r_0 + A\,\lambda\gamma_3 = Pz_0\,.$$

Le second groupe, en y remplaçant p et q par leurs valeurs $\omega\gamma_1$, $\omega\gamma_2$, devient

$$(\omega^2 + \lambda)\,\gamma_1 = 0\,, \quad (\omega^2 + \lambda)\,\gamma_2 = 0\,,$$

d'où, ou bien

1-o $$\gamma_1 = \gamma_2 = 0\,;$$

ou bien

2-o $$\lambda = -\omega^2\,.$$

Dans le premier cas les cosinus directeurs de la verticale restent constants ($\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = \pm 1$) et le mouvement se réduit à une rotation uniforme (les composantes de la vitesse angulaire étant $p = 0$, $q = 0$, $r = r_0$) autour de l'axe de symétrie de l'ellipsoïde d'inertie, dirigé verticalement.

C'est ce qui arrive (rigoureusement en théorie, très prochainement en pratique) pour une toupie, lorsqu' on prend soin que l'axe soit dirigé verticalement au moment de la mise en marche (toupie dormante).

Dans le second cas, il reste, en se débarassant de λ,

(4) $$\begin{cases} p = \omega\gamma_1\,, \\ q = \omega\gamma_2\,, \\ C\,\omega r_0 = A\,\omega^2\gamma_3 + Pz_0\,. \end{cases}$$

Ces valeurs, introduites dans l'intégrale des aires, donnent

$$A\,\omega^2 - G_3\,\omega + Pz_0\,\gamma_3 = 0\,.$$

En multipliant par $A\omega^2$ et remplaçant $A\,\omega^2\gamma_3$ par sa valeur $C\,\omega r_0 - Pz_0$, il vient

(5) $$A^2\omega^4 - A\,G_3\,\omega^3 + Pz_0\,Cr_0\,\omega - P^2 z_0^2 = 0\,,$$

ce qui montre que l'auxiliaire ω est une constante non nulle[1]).

Il s'en suit, d'après la troisième des (4), que γ_3 aussi est une constante: l'axe de symétrie du corps (plus généralement de son ellipsoïde d'inertie) décrit donc un cône circulaire autour de la verticale.

Mais on peut aller plus avant et reconnaître complètement la nature du mouvement, d'après les équations (4).

En les écrivant

$$p = \omega\gamma_1 + 0\,,$$

$$q = \omega\gamma_2 + 0\,,$$

$$r_0 = \omega\gamma_3 + \left(\frac{A - C}{C}\,\omega\gamma_3 + \frac{Pz_0}{C\omega}\right),$$

on met en évidence que la rotation istantanée du corps est la résultante de deux composantes constantes: l'une autour de la verticale (ascendante), mesurée (en valeur et signe) par ω; l'autre autour de l'axe de symétrie, mesurée par

$$\frac{A - C}{C}\,\omega\gamma_3 + \frac{Pz_0}{C\omega} = r_0 - \omega\gamma_3\,.$$

Il s'agit donc de précessions régulières. Leur ensemble dépend bien de quatre constantes: r_0 et G_3 (ou, si l'on veut, $\omega \lesseqgtr 0$ et γ_3); la valeur initiale de γ_1 (ou de γ_2, ou même, si l'on veut, de l'angle d'Euler φ): enfin la valeur initiale de l'angle de précession ψ, lié aux variables $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ par la relation

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{G_3 - Cr_0\,\gamma_3}{A\,(1 - \gamma_3^2)}\,.$$

[1]) En effet le terme tout connu $-P^2z_0^2$ est négatif. L'équation (5) n'a donc aucune racine nulle; d'ailleurs elle admet toujours deux racines réelles au moins.

qui se réduit à

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega .$$

Pour voir s'il y a stabilité, les variables $p, q, \ldots, \gamma_3$, si commodes pour l'étude du mouvement, ne sont pas les plus indiquées. On arrive plus rapidement au but, en ayant recours, avec M. M. Klein et Sommerfeld[1]), aux angles d'Euler ϑ, φ, ψ et à leurs dérivées.

Le résultat très simple est le suivant:

Les précessions régulières sont toujours stables. Les rotations autour de l'axe de symétrie, dirigé verticalement, le sont aussi, si le centre de gravité tombe au dessous du point fixe; dans le cas contraire (où rentre en particulier la toupie dormante) il y a stabilité alors et alors seulement que la vitesse angulaire r_0, autour de l'axe de symétrie, est assez grande, c'est-à-dire

$$r_0^2 > 4\, P z_0 .$$

c) Cas d'Euler.

A, B, C étant quelconques, le moment des forces appliquées, par rapport au point fixe Ω, est nul. L'énergie est alors purement cinétique, et l'on a

$$H = \frac{1}{2}\,(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) .$$

Le moment résultant G des quantités de mouvement, par rapport à Ω, reste constant (en valeur et direction).

La constance de la valeur absolue donne lieu à l'intégrale

$$G^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \text{const.}$$

Cherchons d'abord les mouvements à la Routh auxquels elle donne lieu, et posons en conformité

$$\delta H - \frac{1}{2}\,\lambda\,\delta G^2 = 0 ,$$

en désignant le multiplicateur par $-\frac{1}{2}\lambda$.

Il s'en suit, en développant,

$$(1 - A\lambda)\,p = 0 , \quad (1 - B\lambda)\,q = 0 , \quad (1 - C\lambda)\,r = 0 .$$

[1]) „Theorie des Kreisels". Chap. V. § 7, page 354 et suivantes.

Dans le cas général, où A, B, C sont distincts, ces équations exigent évidemment que deux des composantes p, q, r soient nulles.

La troisième est alors nécessairement constante, d'après $H = \text{const}$ (ou $G = \text{const}$), et d'ailleurs arbitraire. Les mouvements en question sont donc (toutes et seules) les rotations uniformes autour des axes principaux d'inertie. Fixons le troisième, par exemple, et éliminons r de H, en le tirant de

$$G^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 .$$

Il vient

$$H = \frac{1}{2\,C}\,\{ A\,(C - A)\,p^2 + B\,(C - B)\,q^2 - G^2 \} ,$$

d'où (p et q ayant la valeur zéro pour les rotations autour du troisième axe)

$$\delta^2 H = \frac{1}{C}\,\{ A\,(C - A)\,\delta p^2 + B\,(C - B)\,\delta q^2 \} .$$

C'est une forme définie, pourvu que $C - A$ et $C - B$ aient même signe. On en tire la conclusion bien connue:

Les rotations autour du grand et du petit axe de l'ellipsoïde d'inertie sont stables; celles, qui correspondent à l'axe moyen, sont instables.

Examinons maintenant plus de près s'il y a d'autre profit à tirer des intégrales, admises par le problème, qui nous occupe.

Comme on l'a déjà remarqué, le moment G est constant, non seulement en valeur, mais en direction aussi. En le projetant sur les trois axes fixes ξ, η, ζ (qu' on peut d'ailleurs choisir arbitrairement) on obtient les trois intégrales (des aires):

$$G_1 = Ap\,\alpha_1 + Bq\,\alpha_2 + Cr\,\alpha_3 = \text{const} ,$$

$$G_2 = Ap\,\beta_1 + Bq\,\beta_2 + Cr\,\beta_3 = \text{const} ,$$

$$G_3 = Ap\,\gamma_1 + Bq\,\gamma_2 + Cr\,\gamma_3 = \text{const} ,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \gamma_3$ désignant comme d'habitude les cosinus directeurs de ξ, η, ζ par rapport aux axes principaux d'inertie.

Il est bien connu que les expressions canoniques de G_1, G_2, G_3 ne sont point en involution entre elles, mais qu' il en est ainsi pour le couple formé avec

$$G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = G^2$$

et une quelconque des G_i ($i = 1, 2, 3$).

Au couple

$$G^2 = \text{const}, \quad G_3 = \text{const},$$

on peut faire correspondre, d'après la position

$$\delta H - \omega\,\delta G_3 - \frac{1}{2}\lambda\,\delta G^2 - \mu(\gamma_1\,\delta\gamma_1 + \gamma_2\,\delta\gamma_2 + \gamma_3\,\delta\gamma_3) = 0$$

(ω, λ et μ indéterminées), ∞^4 mouvements à la Routh: lesquels?

Il suffit d'expliciter, pour reconnaitre qu' on est justement reconduit aux rotations envisagées tout à l'heure. En surplus l'intervention des variables $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ donne lieu aux conséquences suivantes:

1-o L'axe de rotation est dirigé dans l'espace suivant la droite $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ (axe fixe des ζ). Comme il peut être choisi arbitrairement, ceci revient à dire que la direction dans l'espace de l'axe de rotation peut être fixée d'avance d'une façon quelconque.

Il s'en suit que l'ensemble des rotations envisagées dépend bien de 4 constantes: deux pour fixer l'orientation dans l'espace de l'axe de rotation (qui est un de trois axes d'inertie); et deux pour fixer la valeur constante de la vitesse angulaire et la position initiale du corps autour de l'axe.

2-o Le critère de stabilité (telle qu' on doit l'entendre pour un mouvement à la Routh, d'après la définition du chap. préc. § 4) est bien celui qu' on a tiré tout à l'heure, en tenant compte seulement de $G^2 = \text{const.}$

C'est évident, dès qu' on pense que G_3 dépend aussi de la direction $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, tandis que H et G contiennent seulement p, q, r.

L'expression trouvée pour $\delta^2 H$ est déjà une forme réduite Q (à $2(3-2)=2$ arguments); il est donc inutile de la transformer davantage en se servant de $G_3 = \text{const.}$

Faisons remarquer, en terminant, qu' il n'y a pas d'autre manière (essentiellement distincte de celle qu' on vient de discuter) de combiner les intégrales des aires pour en tirer des mouvements à la Routh.

§ 2. Problème plan des trois corps.

Soient P_0, P_1, P_2 les trois corps; m_0, m_1, m_2 leurs masses; x_1, y_1; x_2, y_2 les coordonnées de P_1, P_2 par rapport à P_0 (plus précisément par rapport à un système d'axes de direction invariable, ayant l'origine en P_0); p_1, q_1; p_2, q_2 les composantes (par rapport aux mêmes axes) des quantités de mouvement absolu de P_1, P_2.

Convenons de désigner par

$$r_1, \quad r_2, \quad \Delta$$

les trois distances

$$\overline{P_0P_1} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2},$$
$$\overline{P_0P_2} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2},$$
$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2},$$

et supposons (comme il est toujours permis sans altérer les équations différentielles du mouvement) que le centre de gravité du système P_0, P_1, P_2 reste immobile.

La somme des quantités de mouvement des trois points P_0, P_1, P_2 est alors nulle, et il en résulte que

$$-(p_1 + p_2), \quad -(q_1 + q_2)$$

sont les composantes de la quantité de mouvement de P_0.

On a ainsi, pour les vitesses absolues de P_0, P_1, P_2, les composantes

$$-\frac{1}{m_0}(p_1 + p_2), \quad -\frac{1}{m_0}(q_1 + q_2);$$
$$\frac{p_1}{m_1}, \quad \frac{q_1}{m_1};$$
$$\frac{p_2}{m_2}, \quad \frac{q_2}{m_2},$$

d'où l'expression suivante de l'énergie cinétique du système:

$$T = \frac{1}{2\,m_0}\left\{(p_1 + p_2)^2 + (q_1 + q_2)^2\right\} + \frac{1}{2}\sum_{i}^{2}{}_{1}\frac{1}{m_i}(p_i^2 + q_i^2).$$

Il s'en suit encore que les composantes $\frac{dx_i}{dt}$, $\frac{dy_i}{dt}$ de la vitesse relative de P_i ($i = 1, 2$), par rapport à P_0, ont les expressions:

$$(6) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{p_i}{m_i} + \frac{1}{m_0}(p_1 + p_2), \\ \frac{dy_i}{dt} &= \frac{q_i}{m_i} + \frac{1}{m_0}(q_1 + q_2). \end{aligned}\right. \qquad (i=1,2)$$

On a d'autre part le potentiel newtonien

$$(7) \qquad U = f\left\{\frac{m_0 m_1}{r_1} + \frac{m_0 m_2}{r_2} + \frac{m_1 m_2}{\Delta}\right\}$$

(f constante de l'attraction universelle). L'énergie totale H du système est donc

$$(8)\qquad H=T-U=\frac{1}{2\,m_0}\{(p_1+p_2)^2+(q_1+q_2)^2\}+\frac{1}{2}\sum_{1}^{2}{}_i\,\frac{1}{m_i}\,(p_i^2+q_i^2)-U.$$

On sait que les équations du mouvement peuvent être présentées sous forme canonique avec quatre dégrés de liberté, H pour fonction caractéristique,

$$x_1\,,\quad y_1\,,\quad x_2\,,\quad y_2\,,$$
$$p_1\,,\quad q_1\,,\quad p_2\,,\quad q_2\,,$$

comme couples de variables conjuguées [1]. Mais nous n'aurons pas à expliciter les équations différentielles. Il va nous suffire de remarquer qu' elles admettent, en dehors de $H=$ const, l'intégrale des aires, relative au plan du mouvement (qui est d'ailleurs la seule intégrale connue). Cette intégrale, en supposant de prendre comme pole fixe la position occupée par P_0 à l'instant envisagé, s'écrit

$$(9)\qquad G=\sum_{1}^{2}{}_i\,(x_i q_i-y_i p_i)=\text{const}\,.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'étudier très simplement les ∞^2 mouvements à la Routh de notre système, provenant de

$$\delta H-\omega\,\delta G=0$$

(ω multiplicateur indéterminé), ce qui se traduit, d'après (8) et (9) dans les huit équations:

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{p_i}{m_i}+\dfrac{1}{m_0}(p_1+p_2)=-\,\omega y_i\,, \\[2ex] \dfrac{q_i}{m_i}+\dfrac{1}{m_0}(q_1+q_2)=\omega x_i\,; \end{cases}\qquad (i=1,2)$$

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x_i}+\omega q_i=0\,, \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial y_i}-\omega p_i=0\,. \end{cases}\qquad (i=1,2)$$

[1] Poincaré „Sur une forme nouvelle des équations du problème des trois corps", Acta Mathematica. T. 21. 1897; ou bien „Leçons de mécanique céleste". T. 1. Paris 1905. № 26.

En tenant compte des (6), les équations (10) se réduisent simplement à

$$(10')\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt}=-\,\omega y_i\,, \\[2ex] \dfrac{dy_i}{dt}=\omega x_i\,. \end{cases}\qquad (i=1,2)$$

L'interprétation cinématique de ces formules est bien évidente:

Les deux points P_1, P_2 tournent autour de P_0 avec la même vitesse angulaire ω.

Il s'en suit en particulier que les trois distances r_1, r_2, Δ, c'est-à-dire la configuration des trois corps demeure invariable pendant le mouvement. Pour la déterminer, on n'a qu' à tenir compte des (11).

En remplaçant, dans les équations (10), ωp_i, ωq_i par leurs valeurs, tirées des (11), il vient

$$(11\,\text{a})\qquad \frac{\partial U}{\partial x_i}+\frac{m_i}{m_0}\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}+\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)+m_i\omega^2 x_i=0\,,\qquad (i=1,2)$$

$$(11\,\text{b})\qquad \frac{\partial U}{\partial y_i}+\frac{m_i}{m_0}\left(\frac{\partial U}{\partial y_1}+\frac{\partial U}{\partial y_2}\right)+m_i\omega^2 y_i=0\,,\qquad (i=1,2)$$

les (11 b) se déduisant des (11 a) par le changement matériel de x en y.

Sous forme développée, en tenant compte de l'expression (7) de U, j'écrirai les (11 a), comme il suit:

$$(12)\qquad \begin{cases} \left[f\left(\dfrac{m_0+m_1}{r_1^3}+\dfrac{m_2}{\Delta^3}\right)-\omega^2\right]x_1+f\,m_2\left[\dfrac{1}{r_2^3}-\dfrac{1}{\Delta^3}\right]x_2=0\,, \\[3ex] f\,m_1\left[\dfrac{1}{r_1^3}-\dfrac{1}{\Delta^3}\right]x_1+\left[f\left(\dfrac{m_0+m_2}{r_2^3}+\dfrac{m_1}{\Delta^3}\right)-\omega^2\right]x_2=0\,, \end{cases}$$

en les envisageant comme deux équations linéaires en x_1, x_2, qui, à cause des (11 b), doivent d'ailleurs être vérifiées aussi par y_1, y_2.

On est ainsi conduit à distinguer deux cas:

1-o Les deux systèmes de solutions x_1, x_2; y_1, y_2 sont distincts, c'est-à-dire le déterminant $x_1y_2-x_2y_1$, ou, si l'on veut, l'aire du triangle $P_0\,P_1\,P_2$, ne s'annule pas).

2-o Les deux solutions coïncident (ce qui veut dire: P_0, P_1, P_2 en ligne droite).

P r e m i e r c a s. Les équations (12), admettant par hypothèse deux solutions d i s t i n c t e s, leurs quatre coefficients doivent être tous identiquement nuls.

Ceci donne d'abord

$$\frac{1}{r_1^3} = \frac{1}{\Delta^3}, \quad \frac{1}{r_2^3} = \frac{1}{\Delta^3},$$

c'est-à-dire

$$r_1 = r_2 = \Delta,$$

après quoi les deux autres conditions se réduisent simplement à

$$(13) \qquad \omega^2 = \frac{fM}{\Delta^3} \qquad (M = m_0 + m_1 + m_2).$$

On en conclut que le triangle $P_0\, P_1\, P_2$ (invariable, comme on l'avait déjà remarqué) est équilatéral et que la vitesse angulaire ω est une constante, liée à la longueur Δ du côté du triangle par la relation (13).

Ces solutions dépendent bien de deux constantes arbitraires: la dimension Δ du triangle équilatéral (qui détermine moyennant (13) la vitesse de rotation; ou vice-versa); et l'orientation initiale du triangle par rapport à une direction fixe.

Il est à peine nécessaire d'ajouter que, le centre de gravité des trois corps P_0, P_1, P_2 ayant été supposé fixe, leur mouvement absolu est une rotation uniforme de vitesse angulaire ω autour de ce point.

S e c o n d c a s. Prenons l'axe des x dirigé suivant la droite, où se trouvent (à l'instant envisagé) les trois corps P_0, P_1, P_2. On a alors $y_1 = y_2 = 0$, et il n'y a plus à se préoccuper des y.

Voyons ce qu'il arrive des x. On peut supposer, sans nuire évidemment à la généralité de la discussion, que P_0 soit situé entre P_1 et P_2 et que $P_0\,P_1$ soit la direction positive de l'axe des x.

On aura

$$r_1 = x_1, \quad r_2 = -x_2, \quad \Delta = x_1 - x_2 = r_1 + r_2,$$

et les équations (12) s'écriront:

$$(12') \qquad \begin{cases} r_1\,\omega^2 = f\left[\dfrac{m_0+m_1}{r_1^2} + \dfrac{m_2}{(r_1+r_2)^2} - \dfrac{m_2}{r_2^2}\right], \\[2ex] r_2\,\omega^2 = f\left[\dfrac{m_0+m_2}{r_2^2} + \dfrac{m_1}{(r_1+r_2)^2} - \dfrac{m_1}{r_1^2}\right], \end{cases}$$

d'où, en éliminant ω^2 et en chassant les dénominateurs,

$$\begin{vmatrix} r_1 & (m_0+m_1)\,r_2^2\,(r_1+r_2)^2 + m_2\,r_1^2\,r_2^2 - m_2\,r_1^2\,(r_1+r_2)^2 \\ r_2 & (m_0+m_2)\,r_1^2\,(r_1+r_2)^2 + m_1\,r_1^2\,r_2^2 - m_1\,r_2^2\,(r_1+r_2)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre est homogène de cinquième degré en r_1, r_2. En divisant par r_1^5, en posant

$$\frac{r_2}{r_1} = A,$$

et en réduisant, on obtient l'équation de L a g r a n g e

$$(14) \qquad (m_0+m_1)\,A^5 + (2\,m_0 + 3\,m_1)\,A^4 + (m_0+3\,m_1)\,A^3 - (m_0+3\,m_2)\,A^2 - (2\,m_0+3\,m_2)\,A - (m_0+m_2) = 0,$$

qui admet une racine positive et une seule, comme le montrent les signes des coefficients.

Le rapport des distances étant ainsi déterminé, les deux équations (12′) donnent nécessairement pour ω^2 une même valeur. En les aditionnant on obtient cette valeur sous la forme symétrique

$$\omega^2\,(r_1+r_2) = f\left\{\frac{m_0}{r_1^2} + \frac{m_0}{r_2^2} + \frac{m_1+m_2}{(r_1+r_2)^2}\right\},$$

qui met en évidence la réalité de ω.

Ici encore on a en définitive ∞^2 solutions, demeurant arbitraires une des distances et l'orientation initiale de la droite $P_2\,P_0\,P_1$.

S t a b i l i t é. Sans insister davantage, je me bornerai à rappeler les résultats, dus, comme on sait, à L i o u v i l l e [1]) et à M. R o u t h [2]).

Le second cas (corps alignés) est toujours instable.

Le premier (triangle équilatéral) peut être stable ou instable suivant le rapport des masses; la condition de stabilité étant

$$M^2 > 27\,(m_0\,m_1 + m_0\,m_2 + m_1\,m_2).$$

---

[1]) Extrait d'un mémoire sur un cas particulier du problème des trois corps". Journal de Mathématiques pures et appliquées. T. VII. 1842.

[2]) „On Laplace's three particles". Proceedings of the London Mathematical Society, vol. VI. 1875.

Elle est bien satisfaite lorsqu' une des masses (soit m_0) est prépondérante sur les deux autres $\left(\text{étant par exemple } \frac{m_1}{m_0}, \frac{m_2}{m_0} < \frac{1}{54}\right)$.

Si au contraire les trois masses diffèrent peu, il y a assurément instabilité.

§ 3. Renseignements bibliographiques.

On trouve d'autres exemples de mouvements à la Routh dans les ouvrages de cet auteur et notamment dans l'Advanced Part de son traité de dynamique (cinquième édition, London: Macmillan. 1905; traduction allemande, Leipzig: Teubner. 1898).

A signaler encore:

T. Levi-Civita „Sui moti stazionari di un corpo rigido nel caso della Kovalewski". Rendiconti dei Lincei, 5 Mai, 1 et 16 Juin 1901.

G. Picciati „Sui moti stazionari di sistemi olonomi, soggetti a forze conservative in casi particolari". Atti dell' Istituto Veneto. T. LXI. 1902.

A. Viterbi „Sui moti stazionari spontanei di un solido immerso in un liquido indefinito", ibidem. T. LXII. 1903.

CHAPITRE IV.

REMARQUES CRITIQUES.

§ 1. Exemple élémentaire.

Soit P un point matériel, mobile dans le plan sous l'action d'une force dérivant d'un potentiel.

Les petites oscillations du point autour d'une position d'équilibre stable, peuvent être définies (après un choix convenable des axes des coordonnées) par les équations caractéristiques des mouvements harmoniques

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_1{}^2 x = 0, \\ &\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_2{}^2 y = 0, \end{aligned}\right.$$

ω_1 et ω_2 étant deux constantes (réelles), qui dépendent de la nature de la force.

Les intégrales de ces équations sont

$$\text{(1)} \qquad \left\{\begin{aligned} x &= A \cos(\omega_1 t + \alpha), \\ y &= B \cos(\omega_2 t + \beta), \end{aligned}\right.$$

avec les quatre constantes A, α, B, β, qui doivent être déterminées par les conditions initiales.

Supposons qu' on les ait fixées d'une façon quelconque, et considérons la correspondante trajectoire du mouvement, c'est-à-dire la courbe C représentée paramétriquement par les (1).

Elle reste toujours à l'intérieur du rectangle formé par les droites $x = \pm A$, $y = \pm B$; mais sa nature est essentiellement différente selon que ω_1 et ω_2 sont ou ne sont pas commensurables entre eux.

Dans le premier cas la courbe C est fermée et algébrique.

Lorsque au contraire le rapport $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ est irrationnel, la courbe est trascendente et passe aussi près que l'on veut d'un point quelconque intérieur au rectangle [1]). Pratiquement elle remplit le rectangle.

On voit ainsi que, pour $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ nombre rationnel, l'élimination de t entre les (1) donne lieu à une liaison, qu' on peut voir (je veux dire mettre en évidence par quelque moyen expérimental), entre les positions, qui seront successivement occupées par le mobile.

Dans le second cas il n'y a plus de relation physiquement saisissable. Au point de vue pratique les choses se passent comme s'il n'existait aucune relation.

§ 2. Relations uniformes en général.

Des conclusions analogues s'appliquent aux mouvements des systèmes, dont la position et (par conséquent) la distribution des vitesses dépendent d'un nombre fini de paramètres: soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Supposons ces paramètres accessibles à l'expérience (d'une façon d'ailleurs quelconque), et envisageons les équations finies d'un mouvement du système:

$$\text{(2)} \qquad x_i = \varphi_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

[1]) Voyez par exemple Appell „Traité de Mécanique rationnelle". T. I, page 488 (de la seconde édition).

les φ_i étant bien entendu des fonctions uniformes et régulières pendant la durée de ce mouvement.

L'exemple, indiqué tout à l'heure, montre qu' en général l'élimination de t ne donnera pas lieu à $n-1$ relations effectives (c'est-à-dire vérifiables en dehors de l'analyse mathématique), mais seulement à un certain nombre, qui peut même être nul.

Pour donner à cette remarque une forme précise, il suffit d'avoir recours à une notion, acquise à la science depuis Gauss et Jacobi, mais beaucoup mieux appréciée à la suite des recherches mémorables de M. Poincaré sur le problème des trois corps. Je fais allusion à la notion de relations uniformes [1]), et je vais la rappeler.

Soit généralement un système de $m \leqslant n$ relations

$$(2) \qquad F_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, m)$$

entre $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Supposons qu' elles soient vérifiées par des valeurs particulières $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ des x; en langage géométrique plus compréhensif, au point P_0.

On dit que le système (3) est uniforme au voisinage de P_0, s'il existe un domaine D autour de ce point, jouissant de la propriété suivante:

Dès qu' on se donne arbitrairement les valeurs de $n-m$ des x (avec la seule condition qu' elles appartiennent au domaine D) les valeurs des autres m restent déterminées par les équations (3) d'une facon unique.

D'après cette définition, les remarques précédentes reviennent à dire que, parmi les relations entre les x, provenant des (2), il y a lieu de considérer tout particuliérement celles qui peuvent former un système uniforme. Supposons qu' il y en ait m ($\leqslant n-1$) indépendantes, et pas davantage.

Ce nombre m mesure, à un certain sens, le degré de netteté du mouvement. Le mouvement reussit d'autant mieux caractérisé que m s'approche de $n-1$.

Quant aux autres $n-m-1$ relations indépendantes, fournies par l'élimination de t, elles échappent complètement à l'intuition, soit géométrique, soit mécanique.

§ 3. Systèmes mécaniques usuels. Raison de l'intérêt de leurs mouvements stationnaires.

[1]) Jacobi les appelait analytiques. On peut voir à ce propos une intéressante note historique de M. Schlesinger „Ueber den Begriff der analytischen Funktion bei Jacobi". Bibliotheca Mathematica. B. VI. 1905.

Les paramètres, dont on sert ordinairement pour fixer l'état de mouvement (position et vitesse) d'un système matériel sont des longueurs et des angles.

Désignons en général par l un paramètre quelconque de la première sorte, par λ un paramètre quelconque de la seconde. Les nombres l sont naturellement déterminés d'une façon unique pour un état de mouvement donné; les λ le sont au contraire à moins de multiples entiers de 2π.

Il arrive presque toujours, dans les problèmes naturels, qu' on peut s'arranger de façon que la force vive et plus généralement les intégrales (ou relations invariantes) connues dépendent algebriquement des l, et des fonctions trigonométriques des λ. Les premiers membres se présentent alors comme fonctions algébriques des l et des $e^{i\lambda}$, et il est bien clair (d'après le Chap. I) que toute condition de stationnariété résulte elle même algébrique dans les l, $e^{i\lambda}$.

Les solutions stationnaires vérifient partant un système de relations uniformes [1]) entre les paramètres physiquement accessibles, l et grandeurs géométriques [2]) des angles λ; tandis que, en général, pour les autres solutions du problème, il n'existe pas de relations uniformes ou il en existe un nombre moindre.

C'est ici la véritable origine de l'intérêt, présenté par les mouvements stationnaires, qu' on rencontre dans les applications concrètes. Ils possèdent des caractères de simplicité et de netteté, qui les mettent en évidence parmi les autres mouvements possibles et les rendent aussi précieux comme points de répère pour aborder l'étude du cas général.

Nous avons ainsi analysé au point de vue qualitatif la nature des mouvements stationnaires. On peut se demander s'il n'y a rien de quantitatif contribuant à les distinguer. A première vue on serait tenté à le croire en ayant égard aux opérations analytiques, d'où ils ressortent. Mais il est aisé de se convaincre qu' il n'en est rien.

On vérifie en effet sans peine, pour un système différentiel quelconque, que toute solution, donnée d'avance, peut être considérée comme stationnaire (suivant la définition du Chap. I), dès qu' on ait effectué un changement de variables convenable (régulier et biunivoque au voisinage de quelque système de valeurs, appartenant à la solution donnée).

Il y a même plus.

[1]) A des systèmes de valeurs exceptionnelles près (points multiples) au voisinage desquelles on a un nombre fini de branches. Ceci n'infirme d'ailleurs pas les considérations, qui suivent dans le texte.

[2]) Je dis grandeurs géométriques, parce que les nombres λ présentent au contraire l'indétermination de multiples entiers de 2π.

Plaçons nous dans le cas typique de M. Routh, où l'on a affaire à un système canonique

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

H étant indépendant de t.

Un mouvement quelconque, défini par ce système, peut acquérir tous les caractères formels d'un mouvement à la Routh. Il suffit pour cela d'avoir recours à une transformation convenable [1]).

Padoue, septembre 1905.

[1] Voyez ma note „Sui moti stazionari dei sistemi olonomi". Rendiconti dei Lincei. 17 Avril. 1901.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE IV.

Remarques critiques.

K. ŻORAWSKI,

Über Krümmungseigenschaften der Scharen von Linienelementen.

(O WŁASNOŚCIACH KRZYWIZNOWYCH CIĄGŁYCH ZBIORÓW ELEMENTÓW LINIOWYCH).

Die Untersuchung der Krümmungseigenschaften eines jeden geometrischen Gebildes besteht in der Betrachtung gewisser Halbgeraden, welche bei jeder euklidischen Bewegung ihre Lage in Bezug auf das Gebilde nicht ändern, und in der Betrachtung gewisser Grössen, deren Werte bei jeder euklidischen Bewegung dieselben bleiben. Betrachtet man eine Schar von Linienelementen, welche längs einer Raumcurve liegen, dieselbe aber im allgemeinen nicht tangieren, so können die Krümmungseigenschaften dieses Gebildes in zwei Kategorien eingeteilt werden. Zur ersten Kategorie können alle solche Krümmungseigenschaften mitgezählt werden, welche von der Wahl der Raumcurve abhängig, dagegen von der Wahl der Schar von Linienelementen unabhängig sind, welche also die Krümmungstheorie der Raumcurven ausmachen; zur zweiten Kategorie hingegen alle diejenigen, welche von der Wahl der Schar von Linienelementen nicht unabhängig sind. Mit den letzten Eigenschaften beschäftigte sich A o u s t, der für die genannten Scharen gewisse Grössen wie „courbure inclinée", „flexion inclinée" etc. und gewisse mit denselben eng verbundene Halbgeraden definiert und auf die Theorie der krummlinigen Coordinaten in Anwendung gebracht hat [1]).

[1]) C. R., t. 57, p. 217—219. 1863. Annali di matematica. Ser. I, t. 6, p. 65—87. 1864; Ser. II, t. 2, p. 39—64. 1868—1869; Ser. II, t. 3, p. 55—69. 1869—1870. Analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface quelconque. Paris 1869.