S. KĘPIŃSKI,

O DRGANIACH POPRZECZNYCH PRĘTÓW SPRĘŻYSTYCH.

Drgania prętów sprężystych, posiadających stały przekrój, były przedmiotem rozlicznych prac, a w ostatnich czasach rozwiązał to zagadnienie całkiem ogólnie A. Davidoglou [1]). Natomiast stosunkowo nie wiele zajmowano się drganiami prętów, posiadających przekrój zmienny. Jednym z pierwszych, zajmujących się tym przedmiotem, był G. Kirchhoff, który w pracy: „Über die Transversalschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt" (Monatsberichte der Akad. d. Wiss. zu Berlin 1879) szczegółowiej rozważył dwa przypadki, kiedy pręt ma kształt pryzmatu lub stożka i jego krawędź względnie wierzchołek jest swobodny, przyczem jednak ograniczył się do omówienia drgań (tonów) pojedyńczych.

W niniejszej pracy uwzględniam nie tylko znacznie ogólniejsze kształty pręta, lecz zajmuję się także dowolnemi drganiami takich prętów.

§ 1.

Weźmy pod uwagę pręt bardzo (nieskończenie) cienki, którego przekroje prostopadłe mają środki ciężkości ułożone wzdłuż prostej, osi OX. Jeżeli przez w oznaczymy wychylenia tego pręta w kierunku osi OY, to równaniem drgań takich będzie [2]):

$$(1) \qquad q\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -E \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),$$

[1]) Sur l'équation des vibrations transversales des verges élastiques; Ann. scient. de l'Ecole Normale Supér.; ser. VII; t. 17. 1900.

[2]) Por. Kirchhoff l. c.

gdzie $q = \iint dy\,dz$ oznacza pole przekroju, $k = \iint y^2\,dy\,dz$ oznacza moment bezwładności przekroju względem jego osi obojętnej, μ jest gęstością, zaś E spółczynnikiem sprężystości materyału.

Dla drgania (tonu) pojedyńczego przyjmujemy:

$$w = u \cos at\,, \tag{2}$$

gdzie a jest odpowiednią stałą, u zależy od x i a. Wówczas z równania (1) otrzymujemy równanie:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(k\,\frac{d^2u}{dx^2}\right) = \frac{\mu}{E}\,a^2 qu\,, \tag{3}$$

które należy zcałkować. Zajmiemy się przypadkami, w których całkowanie równania (3) można zredukować do całkowania dwu równań rzędu drugiego w następujący sposób:

Niech

$$A_2 u'' + A_1 u' = \pm \lambda u \tag{4}$$

przedstawia równania rzędu drugiego, w których A_2, A_1 są funkcyami zmiennej x, zaś λ jest stałą. Lewą stronę (4) oznaczmy przez $D(u)$:

$$D(u) \equiv A_2 u'' + A_1 u' \tag{5}$$

i utwórzmy wyrażenie DDu:

$$DDu = A_2 (A_2 u'' + A_1 u'')'' + A_1 (A_2 u'' + A_1 u')'\,,$$

czyli:

$$DDu \equiv A_2^2 u^{IV} + 2 A_2 (A_2' + A_1)\, u''' + (A_2 A_2'' + 2 A_2 A_1' + A_2' A_1 + A_1^2)\, u'' + (A_2 A_1'' + A_1 A_1')\, u'\,.$$

Ponieważ według (4) jest

$$D(u) = \pm \lambda u\,,$$

zatem:

$$DDu = D(\pm \lambda u) = \pm \lambda D(u) = (\pm \lambda)^2 u = \lambda^2 u\,.$$

Otrzymujemy tym sposobem równanie różniczkowe rzędu 4-go:

$$A^2 u^{IV} + 2 A_2 (A_2' + A_1)\, u''' + (A_2 A_2'' + 2 A_2 A_1' + A_2' A_1 + A_1^2)\, u'' + (A_2 A_1'' + A_1 A_1')\, u' = \lambda^2 u\,, \tag{6}$$

któremu czynią zadość całki równań różniczkowych:

$$A_2 u'' + A_1 u' + \lambda u = 0\,, \tag{4'}$$

$$A_2 u'' + A_1 u' - \lambda u = 0\,. \tag{4''}$$

Chcąc się dowiedzieć, kiedy równanie (3) daje się zastąpić przez dwa równania (4), porównajmy z sobą równania (3) i (6). Oznaczając przez $\varphi(x)$ czynnik proporcyalności, otrzymujemy następujące warunki:

$$k = A_2^2\, \varphi(x)\,, \tag{α}$$

$$k' = A_2 (A_2' + A_1)\,.\, \varphi(x)\,, \tag{β}$$

$$k'' = (A_2 A_2'' + 2 A_2 A_1' + A_2' A_1 + A_1^2)\, \varphi(x)\,, \tag{γ}$$

$$0 = A_2 A_1'' + A_1 A_1'\,, \tag{δ}$$

$$\frac{\mu}{E}\, a^2 q = \lambda^2 \,.\, \varphi(x)\,. \tag{ε}$$

Zachodzi pytanie, czy można tak dobrać funkcye A_1, A_2 i φ, aby tym warunkom stało się zadość?

Z warunków (α) i (β) wynika:

$$k' = (2 A_2' \varphi + A_2 \varphi') A_2 = A_2 (A_2' + A_1)\, \varphi\,,$$

a więc:

$$A_2 \varphi' = (A_1 - A_2')\, \varphi\,, \tag{ζ}$$

zaś z warunków (α) i (γ), po uwzględnieniu (ζ), otrzymujemy warunek:

$$A_2 A_1' = 0\,,$$

czyli, ponieważ $A_2 \lesseqgtr 0$,

$$A_1' = 0\,, \quad \text{skąd } A_1 = \gamma \text{ (stała)},$$

warunek zgodny z warunkiem dalszym (δ).

Z równości (ζ) otrzymujemy:

$$\varphi = \frac{c}{A_2} e^{\gamma \int \frac{dx}{A_2}}, \quad \text{gdzie } c \text{ jest stałą,}$$

a więc według (ε) i (α):

$$\frac{\mu}{E} \alpha^2 q = \frac{c \lambda^2}{A_2} e^{\gamma \int \frac{dx}{A_2}}, \tag{7}$$

$$k = c A_2 e^{\gamma \int \frac{dx}{A_2}}. \tag{8}$$

W tych wyrażeniach funkcya $A_2 = f(x)$ i stała γ są zupełnie dowolne. Jeżeli przekrój pręta w odległości l od początku układu nazwiemy q_0, zaś odpowiedni moment bezwładności k_0, to z (7) i (8) otrzymujemy:

$$\frac{q_0}{k_0} = \frac{E \lambda^2}{\mu \alpha^2} \frac{1}{f(l)^2},$$

skąd:

$$\lambda = f(l)\, \alpha \sqrt{\frac{q_0 \mu}{k_0 E}}, \tag{9}$$

wskutek czego:

$$q = c \frac{q_0}{k_0} \frac{f(l)^2}{f(x)} e^{\gamma \int \frac{dx}{f(x)}}, \tag{7'}$$

$$k = c\, f(x)\, e^{\gamma \int \frac{dx}{f(x)}}. \tag{8'}$$

Mamy więc twierdzenie: Jeżeli w odległości x przekrój q pręta wyraża się wzorem (7'), zaś moment bezwładności tegoż przekroju względem osi obojętnej wzorem (8'), to drganie pojedyńcze pręta jest przedstawione przez $w = u \cos \alpha t$, gdzie u jest równe sumie iloczynów stałych i całek zasadniczych równań:

$$f(x) u'' + \gamma u' + \lambda u = 0, \tag{4'}$$

$$f(x) u'' + \gamma u' - \lambda u = 0, \tag{4''}$$

zaś λ jest związane z α przy pomocy wzoru (9).

Kształt pręta, wykonywającego powyższe drgania, można (między innemi) zrealizować w następujący sposób:

Jeżeli $y = \pm F(x)$, $z = \pm \Phi(x)$ będą równaniami walców ograniczających pręt (patrz figurę), to przekrój:

$$q = 4yz = c \frac{q_0}{k_0} \frac{f(l)^2}{f(x)} e^{\gamma \int \frac{dx}{f(x)}},$$

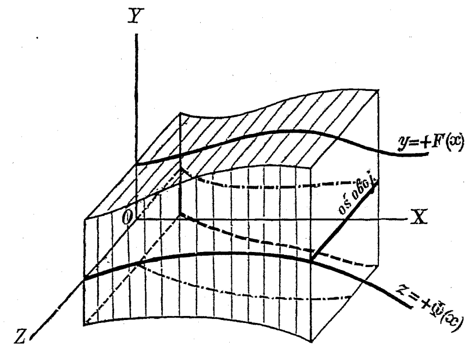
zaś moment bezwładności:

$$k = 4 \frac{y^3}{3} z = c\, f(x)\, e^{\gamma \int \frac{dx}{f(x)}},$$

skąd:

$$y = \pm F(x) = \pm \sqrt{\frac{3 k_0}{q_0} \frac{f(x)}{f(l)}}, \tag{10}$$

$$z = \pm \Phi(x) = \pm \frac{c}{4} \sqrt{\frac{q_0^3}{3 k_0^3} \frac{f(l)^3}{f(x)^2} e^{\gamma \int \frac{dx}{f(x)}}}. \tag{11}$$



§ 2.

Zostawiając do innej sposobności rozważenie rozmaitych przypadków, zajmiemy się obecnie szczegółowiej jednym z najprostszych, kiedy

$$f(x) = x, \quad \gamma = n + 2.$$

Wówczas:

$$y=\pm\sqrt{\frac{3\,k_0}{q_0}}\,\frac{x}{l}\,,$$

$$z=\pm\frac{c}{4}\sqrt{\frac{q_0^{\,3}}{3\,k_0^{\,3}}}\,\frac{l^3}{x^2}\,e^{(n+2)\log x}=\pm\frac{c^4}{4}\,l^3\sqrt{\frac{q_0^{\,3}}{3\,k_0^{\,3}}}\,x^n\,,$$

t. j. pręt jest ograniczony dwiema płaszczyznami, przecinającemi się wzdłuż osi Y i walcem $z^2=b^2x^{2n}$, zaś równania (3), (4') i (4'') przechodzą na:

$$\text{(3')}\qquad \frac{d^2}{dx^2}\left(x^{n+3}\frac{d^2u}{dx^2}\right)-\lambda^2\,x^{n+1}\,u=0\,,$$

$$\text{(4')}\qquad x\,\frac{d^2u}{dx^2}+(n+2)\,\frac{du}{dx}+\lambda\,u=0\,,$$

$$\text{(4'')}\qquad x\,\frac{d^2u}{dx^2}+(n+2)\,\frac{du}{dx}-\lambda\,u=0\,,$$

$$\text{(9)}\qquad \lambda=a\,l\sqrt{\frac{q_0\,\mu}{k_0\,E}}\,.$$

Podstawiając w tych równaniach $x=\frac{\xi}{\lambda}$, otrzymamy:

$$\text{(4*')}\qquad \xi\,\frac{d^2u}{d\xi^2}+(n+2)\,\frac{du}{d\xi}+u=0\,,$$

$$\text{(4*'')}\qquad \xi\,\frac{d^2u}{d\xi^2}+(n+2)\,\frac{du}{d\xi}-u=0\,,$$

albo, gdy przyjmiemy:

$$\xi=\frac{1}{4}\,\eta^2\,,\qquad u=\eta^{-(n+1)}\,v\,,$$

równania:

$$\frac{d^2v}{d\eta^2}+\frac{1}{\eta}\,\frac{dv}{d\eta}+\left(1-\frac{(n+1)^2}{\eta^2}\right)v=0\,,$$

$$\frac{d^2v}{d\eta^2}+\frac{1}{\eta}\,\frac{dv}{d\eta}-\left(1+\frac{(n+1)^2}{\eta^2}\right)v=0\,.$$

Całkami tych równań są funkcye Bessela, a mianowicie pierwszego:

$$I^{n+1}(\eta)=\left(\frac{\eta}{2}\right)^{n+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\,\frac{\left(\frac{\eta}{2}\right)^{2\nu}}{\nu!\,\Gamma(\nu+n+2)}\,,$$

$$\pi\,Y^{n+1}(\eta)=2\,I^{n+1}(\eta)\,\log\frac{\eta}{2}-\sum_{\nu=0}^{\nu=n}\frac{(n-\nu)!}{\nu!}\left(\frac{2}{\eta}\right)^{n-2\nu+1}$$

$$-\left(\frac{\eta}{2}\right)^{n+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\,\frac{\left(\frac{\eta}{2}\right)^{2\nu}}{\nu!\,(\nu+n+1)!}\,(\psi(\nu+1)+\psi(\nu+n+2))\,,$$

gdzie $\psi(x)=\frac{d}{dx}\log\Gamma(x)$, zaś równania drugiego funkcye:

$$I^{n+1}(i\eta)\,,\quad \pi\,Y^{n+1}(i\eta)\,.$$

Wskutek tego jako całki zasadnicze równania (4') możemy przyjąć:

$$u_1=\xi^{-\frac{n+1}{2}}\,I^{n+1}(2\sqrt{\xi})=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\,\frac{\xi^\nu}{\nu!\,\Gamma(\nu+n+2)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\,\frac{\lambda^\nu x^\nu}{\nu!\,\Gamma(\nu+n+2)}\,,$$

$$\text{(12)}\qquad u_3=u_1\log x-\lambda^{-(n+1)}\,x^{-(n+1)}\sum_{\nu=0}^{\nu=n}\frac{(n-\nu)!}{\nu!}\,\lambda^\nu x^\nu$$

$$-\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\,\frac{\lambda^\nu x^\nu}{\nu!\,(\nu+n+1)!}\,(\psi(\nu+1)+\psi(\nu+n+2))\,,$$

dla n całkowitego, zaś:

$$u_3=\xi^{-\frac{n+1}{2}}\,I^{-n-1}(2\sqrt{\xi})=\lambda^{-(n+1)}\,x^{-(n+1)}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\,\frac{\lambda^\nu x^\nu}{\nu!\,\Gamma(\nu-n)}$$

dla n ułamkowego.

Jako całki równania (4'') przyjmiemy odpowiednio:

$$u_2=i^{-(n+1)}\,\xi^{-\frac{n+1}{2}}\,I^{n+1}(2\,i\sqrt{\xi})=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\xi^\nu}{\nu!\,\Gamma(\nu+n+2)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\lambda^\nu x^\nu}{\nu!\,\Gamma(\nu+n+2)}\,;$$

$$\text{(13)}\qquad u_4=u_2\log x-(-1)^{n+1}\,\lambda^{-(n+1)}\,x^{-(n+1)}\sum_{\nu=0}^{\nu=n}(-1)^\nu\,\frac{(n-\nu)!}{\nu!}\,\lambda^\nu x^\nu$$

$$-\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\lambda^\nu x^\nu}{\nu!\,(\nu+n+1)!}\,(\psi(\nu+1)+\psi(\nu+n+2))\,,$$

dla n całkowitego, zaś:

$$u_4 = (-1)^{n+1} \lambda^{-(n+1)} x^{-(n+1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda^\nu \xi^\nu}{\nu!\, \Gamma(\nu - n)}$$

dla n ułamkowego.

Całką zatem równania (3) będzie:

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + c_4 u_4 \,. \tag{14}$$

Stałe dowolne c_i oznaczymy z warunków krańcowych. Przyjmiemy mianowicie, że koniec pręta $x = 0$ jest swobodny, zaś koniec drugi $x = l$ jest wmurowany. Wówczas dla $x = 0$ ma być:

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} k \frac{d^2 u}{dx^2} &= x^{n+3} \frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \,, \\ \frac{d}{dx}\left(k \frac{d^2 u}{dx^2}\right) &= \frac{d}{dx}\left(x^{n+3} \frac{d^2 u}{dx^2}\right) = 0 \,, \end{aligned}$$

zaś dla $x = l$:

$$(\beta) \qquad u = 0 \quad \text{i} \quad \frac{du}{dx} = 0 \,.$$

Z warunków (α) wynika, że $c_3 + c_4 = 0$ i $c_3 - c_4 = 0$, a więc, że

$$c_3 = 0 \,, \quad c_4 = 0 \,.$$

Zatem całka równania (3) mieć będzie kształt:

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 \,, \tag{14'}$$

przy warunkach dla $x = l$

$$(\gamma) \left\{ \begin{aligned} c_1 u_1 + c_2 u_2 &= 0 \\ c_1 \frac{du_1}{dx} + c_2 \frac{du_2}{dx} &= 0 \end{aligned} \right. \quad \text{albo dla } \xi = l\lambda: \left\{ \begin{aligned} c_1 u_1 + c_2 u_2 &= 0 \\ \lambda \left[c_1 \frac{du_1}{d\xi} + c_2 \frac{du_2}{d\xi} \right] &= 0 \,. \end{aligned} \right.$$

Z równań tych wynika dla λ warunek:

$$\lambda \left(u_1 \frac{du_2}{d\xi} - u_2 \frac{du_1}{d\xi} \right) = 0 \,.$$

Pomijając rozwiązanie $\lambda = 0$, które prowadzi do całki $u = 0$, rozważymy bliżej równanie:

$$A \equiv u_1 \frac{du_2}{d\xi} - u_2 \frac{du_1}{d\xi} = 0 \,, \quad \text{gdzie } \xi = \lambda l \,, \tag{15}$$

t. j. równanie:

$$\begin{aligned} A = &\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\xi^\nu}{\nu!\, \Gamma(\nu+n+2)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\xi^\nu}{\nu!\, \Gamma(\nu+n+3)} \\ &+ \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\xi^\nu}{\nu!\, \Gamma(\nu+n+2)} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\xi^\nu}{\nu!\, \Gamma(\nu+n+3)} = 0 \,. \end{aligned} \tag{15'}$$

Zauważymy najprzód, że lewa strona tego równania A nie zmienia się, jeżeli zamiast ξ podstawimy $-\xi$. Jest więc A funkcyą parzystą zmiennej ξ, i równanie $A = 0$ posiada pierwiastki dodatnie i ujemne. Chodzić nam będzie w dalszym ciągu tylko o pierwiastki dodatnie. Okażemy, że pierwiastków tych jest nieskończenie wiele i oznaczymy zgrubsza granice, między któremi się znajdują.

Jakoż z pierwszego z równań (12) wynika, że pierwiastki różne od zera równania $u_1 = 0$ są pierwiastkami równania:

$$I^{n+1}(2\sqrt{\xi}) = 0 \,,$$

które, jak wiadomo [1]) posiada nieskończenie wiele pierwiastków $a_0, a_1, a_2, \ldots$; najmniejszy z nich a_0 leży między krańcami

$$\frac{(n+1)(n+3)}{4} < a_0 < \frac{(n+2)(n+4)}{2} \,,$$

w razie zaś, gdy pierwiastki

$$a > \frac{[4(n+3)^2 - 1]^2}{4\pi^2} \,,$$

leżą między liczbami: $\left(\frac{2k+1}{4}\right)^2 \pi^2$ i $\left(\frac{2k+3}{4}\right)^2 \pi^2$ względnie między $\frac{k^2}{4}\pi^2$ i $\left(\frac{4k+1}{8}\right)^2 \pi^2$, zależnie od tego, czy n (całkowite $\geqslant -1$) jest

[1]) Por. np. D-r Niels-Nielsen. Handbuch der Cylinderfunktionen. Leipzig 1904, p. 174.

nieparzyste, czy parzyste; k jest liczbą całkowitą. Jeżeli zaś $n = \frac{2m-1}{2}$ i $a > (4\left(m+\frac{3}{5}\right)^2-1)^2 \frac{1}{4\pi^2}$, to pierwiastki a są zawarte między liczbami $\left(k-\frac{3}{4}\right)^2 \frac{\pi^2}{4}$ i $k^2 \frac{\pi^2}{4}$ względnie $\left(k+\frac{1}{4}\right)^2 \frac{\pi^2}{4}$ i $\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{4}$, zależnie od tego, czy m jest parzyste czy nieparzyste.

Obok równania $u_1 = 0$ weźmy jeszcze pod uwagę równanie:

$$\frac{du_1}{d\xi} = 0 .$$

Różniczkując równanie (4′) względem ξ, otrzymujemy:

$$\xi \frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{du}{d\xi}\right) + (n+3)\frac{d}{d\xi}\left(\frac{du}{d\xi}\right) + \lambda \frac{du}{d\xi} = 0 ;$$

równanie to dla $\frac{du}{d\xi}$ tem się tylko różni od (4′), że zamiast n trzeba wziąć $n+1$. Stąd wynika, że pierwiastki tego równania $\frac{du_1}{d\xi} = 0$ różne od zera są pierwiastkami a'_i równania

$$I^{n+2}(2\sqrt{\xi}) = 0 ,$$

a więc jest ich nieskończenie wiele, p r z e g r a d z a j ą pierwiastki $a_i : a_0 < a_0' < a_1 < a_1' < a_2 \ldots$, a najmniejszy z nich a_0' jest zawarty między krańcami:

$$\frac{(n+2)(n+4)}{4} < a'_0 < \frac{(n+3)(n+5)}{2} ;$$

w razie gdy $a' > \frac{[4(n+4)^2-1]^2}{4\pi^2}$, pierwiastki a' są zawarte między liczbami $\frac{k^2}{4}\pi^2$ i $\left(\frac{4k+1}{8}\right)^2\pi^2$ względnie $\left(\frac{2k+1}{4}\right)^2\pi^2$ i $\left(\frac{2k+3}{4}\right)^2\pi^2$, zależnie od tego czy n całkowite jest nieparzyste czy parzyste i t. d.

Jeżeli więc zważymy, że dla $\xi > 0$ jest stale $u_2 > 0$, $\frac{du_2}{d\xi} > 0$, zaś dla $\xi = a_0$, $u_1 = 0$, $\frac{-du_1}{d\xi} > 0$, otrzymamy lewą stronę równania (15).

$$A = a_0 > 0 .$$

Dla $\xi = a'_0$ mieć będziemy $u_1 < 0$, $\frac{du_1}{d\xi} = 0$, a więc

$$A = a'_0 < 0 .$$

Stąd wynika, że najmniejszy pierwiastek dodatni równania (15) $A = 0$, nazwijmy go ξ_0:

$$a_0 < \xi_0 < a'_0 , \quad \text{a więc} \quad \frac{(n+1)(n+3)}{4} < \xi_0 < \frac{(n+3)(n+5)}{2} .$$

Podobnie ogólnie:

$$a_i < \xi_i < a'_i .$$

Widzimy więc, że pierwiastki równania (15) stają się wraz z wskaźnikiem i nieskończenie wielkiemi, a mianowicie, począwszy od pewnego i, większemi od kwadratów liczb całkowitych szeregu arytmetycznego (ich zatem punkt zagęszczenia znajduje się dopiero w nieskończoności).

Najmniejszy pierwiastek ξ_0 odpowiada drganiom tonu zasadniczego pręta. Znając ξ_0, znajdziemy $\lambda_0 = \frac{\xi_0}{l}$, według (9) zaś:

$$a_0 = \frac{\xi_0}{l^2}\sqrt{\frac{k_0 E}{q_0 \mu}} . \tag{9′}$$

Ogólnie dla tonów górnych jest:

$$a_i = \frac{\xi_i}{l^2}\sqrt{\frac{k_0 E}{q_0 \mu}} . \tag{9″}$$

Dla drgań pręta o przekroju niezmiennym znaleziono:

$$\beta_0 = \frac{3,51}{l^2}\sqrt{\frac{k_0 E}{q_0 \mu}} ,$$

a więc:

$$a_0 = \beta_0 \frac{\xi_0}{3,51} .$$

Ponieważ $\xi_0 > \frac{(n+1)(n+3)}{4}$; a więc wraz z n wzrasta i dla $n \geqslant 2$ jest większe od 3,51; zatem tony zasadnicze prętów rozważanych są wyższe niż tony zasadnicze prętów cylindrycznych i to tem wyższe, im większe jest n [1]).

§ 3.

Z kolei przechodzimy do dalszego zagadnienia poruszonego l. c. przez Kirchhoffa, mianowicie do oznaczenia największych wychyleń końca swobodnego przy tonie zasadniczym ($\xi_0 = \lambda l$).

Jak wiadomo, największa dylatacya δ w przekroju prostopadłym pręta, poprowadzonym w odległości x, znajduje się na obwodzie tegoż przekroju i wyraża się wzorem $\delta = y \dfrac{d^2u}{dx^2}$ [2]). Ponieważ tu $y = \sqrt{\dfrac{3k_0}{q_0}}\,\dfrac{x}{l}$, albo jeżeli $y_{x=l} = a = \sqrt{\dfrac{3k_0}{q_0}}$, $y = a\dfrac{x}{l}$, zaś $\lambda_0 = \dfrac{\xi_0}{l}$, zatem:

$$\delta = \frac{a\lambda}{l}\left(\xi\frac{d^2u}{d\xi^2}\right) = a\frac{\xi_0}{l^2}\left(\xi\frac{d^2u}{d\xi^2}\right). \tag{16}$$

Największą z tych dylatacyj δ, nazwijmy ją Δ, znajdziemy przy pomocy równania $\dfrac{d\delta}{d\xi} = 0$, czyli równania

$$B \equiv \frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{d^2u}{d\xi^2}\right) = 0. \tag{17}$$

Nazywając dla krótkości $u_1(\xi_0) = u_1^0$, $u_2(\xi_0) = u_2^0$, $u'_1(\xi_0) = u'^0_1$, $u'_2(\xi_0) = u'^0_2$, otrzymujemy według (14′), (β'):

$$u = C_1(u_1 u_2^0 - u_2 u_1^0), \tag{18}$$

$$u = C_2(u_1 u'^0_2 - u_2 u'^0_1);\ C_1,\ C_2 \text{ są stałe; } C_2 = C_1\frac{u_2^0}{u'^0_2}. \tag{18′}$$

Podstawiając w (17) wyrażenie np. (18′), otrzymamy:

$$B \equiv u'^0_2\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{d^2u_1}{d\xi^2}\right) - u'^0_1\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{d^2u_2}{d\xi^2}\right) = 0,$$

[1]) W pracy Kirchhoffa l. c. jest przeprowadzone obliczenie dla $n = 1, 2$ i toż samo prawidło stwierdzone.

[2]) Por. np. Clebsch. Theorie der Elasticität. Leipzig 1862, p 263.

albo z uwagi na równania (4):

$$B \equiv u'^0_2\left[-(n+2)u''_1 - u'_1\right] - u'^0_1\left[-(n+2)u''_2 + u'_2\right] = 0, \tag{19}$$

lub

$$\begin{aligned} B \equiv{} & \frac{(n+2)^2}{\xi}\left[u'^0_1 u_1 - u'^0_1 u'_2\right] \\ & + \frac{n+2}{\xi}\left[u'^0_2 u_1 + u'^0_1 u_2\right] - \left[u'^0_2 u'_1 + u'^0_1 u'_2\right] = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Aby znaleść dolną granicę najmniejszego pierwiastka ζ_0 równania (16) postąpimy w ten sposób. Zauważmy najprzód, że $u'_2 > 0$, zaś $u'^0_1 < 0$. Istotnie u'_2 jest szeregiem wyrazów dodatnich, zaś $u'^0_1 = u'_1(\xi_0)$ ma z uwagi na to, iż $\xi_0 < \alpha'_0$, ten sam znak, co $u'_1(0) = -\dfrac{1}{\Gamma(n+3)} < 0$. Dalej:

$$-(n+2)u''_1 - u'_1 = \frac{1}{\Gamma(n+4)}\left[\left(1 - \frac{2\xi}{n+4}\right) + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots\frac{\xi^\nu}{\nu!}\left(\frac{\nu+1}{(n+4)\ldots(n+\nu+3)} - \frac{(\nu+2)\xi}{(\nu+1).(n+4)\ldots(n+\nu+4)}\right) + \ldots\right].$$

Wyrażenia w nawiasach są dodatnie, jeżeli

$$\xi < \frac{(\nu+1)^2}{\nu+2}(n+\nu+4) \text{ dla każdego } \nu,$$

co mieć będzie miejsce, jeżeli tylko $\xi \leqslant \dfrac{n+4}{2}$; a więc dla $\xi \leqslant \dfrac{n+4}{2}$ jest: $-(n+2)u''_1 - u'_1 > 0$. Wyrażenie:

$$-(n+2)u''_2 - u'_2 = \frac{1}{\Gamma(n+4)}\left(1 + \frac{2\xi}{n+4} + \ldots\right),$$

jest dla $\xi > 0$ dodatnie. Stąd wynika, że lewa strona równania (16) dla $\xi \leqslant \dfrac{n+4}{2}$ pozostaje stale dodatnią, zatem pierwiastek $\zeta_0 > \dfrac{n+4}{2}$.

Chcąc znaleść granicę górną pierwiastka ζ_0, zauważmy, że wyrażenie B w równaniu (20) redukuje się dla $\xi = \xi_0$ do

$$B_{\xi=\xi_0} = 2u'^0_1\left[\frac{n+2}{\xi_0}u_2^0 - u'^0_2\right] = \frac{2}{n+2}u'^0_1\left[\frac{(n+2)^2}{\xi_0}u_2 - (n+2)u'^0_2\right].$$

Ale, jak łatwo sprawdzić: $u_2 > (n+2)\,u'_2$. Jeżeli więc tylko $n+2>0$ i $\dfrac{(n+2)^2}{\xi_0} \geqslant 1$, to czynnik przy $u'^{\,0}_1$ jest dodatni, a ponieważ $u'^{\,0}_1 < 0$, więc wówczas $B_{\xi=\xi_0} < 0$, tak iż $\zeta_0 < \xi_0$. Z nierówności $\dfrac{(n+2)^2}{\xi_0} \geqslant 1$ wynika $\xi_0 \leqslant (n+2)^2$. Lecz widzieliśmy, że

$$\xi_0 < \frac{n+3\,.\,n+5}{2}\,.$$

Jeżeli więc $(n+3)\,.\,(n+5) \leqslant 2\,(n+2)^2$, czyli $n \geqslant \sqrt{7}$, to wszystkim warunkom staje się napewno zadość i wówczas $\zeta_0 < \xi_0$.

Ograniczenie to $n \geqslant \sqrt{7}$ wynikło z niedokładności granic dla ξ_0 i ζ_0. Łatwo sprawdzić rachunkiem, że $\zeta_0 < \xi_0$ także dla $n = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}$. Mianowicie:

dla $n=0$ mamy $\xi_0 = 5{,}32$, $\zeta_0 = 3{,}69$ [1])

$n = \frac{1}{2}$ $\quad \xi_0 = 6{,}96$, $\zeta_0 = 4{,}01$

$n = 1$ $\quad \xi_0 = 8{,}72$, $\zeta_0 = 4{,}46$ [1])

$n = \frac{3}{2}$ $\quad \xi_0 = 10{,}63$, $\zeta_0 = 4{,}83$

$n = 2$ $\quad \xi_0 = 12{,}76$, $\zeta_0 = 5{,}28$

$n = \frac{5}{2}$ $\quad \xi_0 = 15{,}02$, $\zeta_0 = 5{,}73$.

A więc dla $n = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}$ i w ogóle $n \geqslant \sqrt{7}$ jest zawsze $\zeta_0 < \xi_0$.

Ponieważ $x = \dfrac{\xi}{\lambda}$, zaś $\xi_0 = l\,\lambda_0$, więc odległość x_0, w której zachodzi w pręcie największa dylatacya Δ, jest: $x_0 = \dfrac{\zeta_0}{\lambda_0} = \dfrac{\zeta_0}{\xi_0}\,l < l$ [2]), według (16) mamy:

$$\Delta = a\,\frac{\xi_0}{l^2}\left(\xi\,\frac{d^2u}{d\xi^2}\right)_{\xi=\zeta_0},$$

czyli według (18′):

$$\Delta = a\,\frac{\xi_0\,\zeta_0}{l^2}\,C_2\,[u''_1(\zeta_0)\,u'_2(\xi_0) - u''_2(\zeta_0)\,u'_1(\xi_0)]\,.$$

---

[1]) Por. Kirchhoff l. c.

[2]) Największa dylatacya w pręcie o przekroju stałym zachodzi w odległości $x_0 = l$.

Uważając dylatacyę Δ za znaną, znajdziemy z ostatniego wzoru stałą C_2:

$$C_2 = \frac{l^2\,\Delta}{a\,\xi_0\,\zeta_0\,[u''_1(\zeta_0)\,u'_2(\xi_0) - u''_2(\zeta_0)\,u'_1(\xi_0)]}\,. \tag{21}$$

Dla wychyleń końca pręta $x=0$, czyli dla $\xi=0$ znajdziemy:

$$u = C_2\,[u_1(0)\,u'_2(\xi_0) - u_2(0)\,u'_1(\xi_0)]\,,$$

albo ponieważ: $u_1(0) = u_2(0) = \dfrac{1}{\Gamma(n+2)}$,

$$u(0) = C_2\,\frac{u'^{\,0}_2 - u'^{\,0}_1}{\Gamma(n+2)}\,.$$

Największe wychylenie odpowiadać oczywiście będzie wartości C_2, podanej przez wzór (21), tak, iż wówczas to wychylenie

$$u(0) = \frac{\Delta\,l^2}{a\,\xi_0}\cdot\frac{1}{\Gamma(n+2)}\,\frac{u'_2(\xi_0) - u'_1(\xi_0)}{\zeta_0\,[u''_1(\zeta_0)\,u'_2(\xi_0) - u''_2(\zeta_0)\,u'_1(\xi_0)]}\,,$$

albo według (9′):

$$u(0) = \frac{\Delta}{a\,\alpha_0}\sqrt{\frac{k_0\,\varepsilon}{q_0\,\mu}}\;M_0\,, \tag{22}$$

gdzie

$$M_0 = \frac{1}{\Gamma(n+2)}\,\frac{u'_2(\xi_0) - u'_1(\xi_0)}{\zeta_0\,[u''_1(\zeta_0)\,u'_2(\xi_0) - u''_2(\zeta_0)\,u'_1(\xi_0)]}\,.$$

Wychylenie pręta o przekroju stałym, posiadającego toż samo $a, \Delta, \ldots$ przedstawia się przez

$$\overline{u}(0) = \frac{\Delta}{a\,\alpha_0}\sqrt{\frac{k_0\,E}{q_0\,\mu}}\,,$$

a więc:

$$u(0) = \overline{u}(0)\,.\,M_0\,.$$

Dla ocenienia wartości M_0 zauważymy, że według (19)

$$u''_1(\zeta_0)\,u'_2(\xi_0) - u''_2(\zeta_0)\,u'_1(\xi_0) = \frac{-1}{n+2}\Big[u'_1(\zeta_0)\,u'_2(\xi_0) + u'_2(\zeta_0)\,u'_1(\xi_0)\Big]\,,$$

tak, iż

$$M_0 = \frac{n+2}{\Gamma(n+2)}\;\frac{u'_2(\xi_0) - u'_1(\xi_0)}{-\zeta_0\,[u'_1(\zeta_0)\,u'_2(\xi_0) + u'_2(\zeta_0)\,u'_1(\xi_0)]}\,.$$

Lecz $-u'_1(\xi_0) = -u'^0_1 > 0$, a ponieważ $\zeta_0 < \xi_0$, więc także $-u'_1(\zeta_0) > 0$; że zaś $u'_2(\xi_0) > u'_2(\zeta_0) > 0$, oraz $u'_2(\xi_0) > -u'_1(\xi_0)$, więc:

$$M_0 > \frac{n+2}{\Gamma(n+2)} \, \frac{1}{\zeta_0\,[-u'_1(\zeta_0) - u'_1(\xi_0)]} \,.$$

Ponieważ funkcya $-u'_1(\xi)$ jest dla $0 < \xi < \alpha'_0$ stale malejąca, zaś $\frac{n+4}{2} < \zeta_0 < \xi_0 < \alpha'_0 < \frac{(n+3)(n+5)}{2}$, więc $-u'_1(\zeta_0) > -u'_1(\xi_0)$, tak iż

$$M_0 > \frac{n+2}{2\,\Gamma(n+2)\,\zeta_0} \cdot \frac{1}{-u'_1(\zeta_0)} > \frac{n+2}{(n+3)(n+5)\,\Gamma(n+2)} \cdot \frac{1}{-u'_1\left(\frac{n+4}{2}\right)} \,.$$

Lecz:

$$-u'_1\left(\frac{n+4}{2}\right) = \frac{1}{\Gamma(n+3)}\left[1 - \frac{n+4}{2(n+3)}\right.$$

$$\left. + \frac{(n+4)^2}{8(n+3)(n+4)} - \left(\frac{\left(\frac{n+4}{2}\right)^3}{3!\,n+3\,.\,n+4\,.\,n+5} - \frac{\left(\frac{n+4}{2}\right)^4}{4!\,(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}\right) - \ldots\right].$$

Wyrażenia w nawiasach – jak to łatwo sprawdzić można – są dodatnie, a więc:

$$-u'_1\left(\frac{n+4}{2}\right) < \frac{1}{\Gamma(n+3)}\left[1 - \frac{n+4}{2(n+3)} + \frac{(n+4)^2}{8(n+3)(n+4)}\right],$$

czyli

$$-u'_1\left(\frac{n+4}{2}\right) < \frac{(5n+12)}{8\,\Gamma(n+4)} \,.$$

Jest więc:

$$M_0 > \frac{(n+2)^2}{(n+5)\,\Gamma(n+4)} \cdot \frac{8\,\Gamma(n+4)}{(5n+12)} \,,$$

czyli

$$M_0 > \frac{(n+5)(5n+12)}{8(n+2)^2} \,.$$

Prawa strona jest dla $n \geqslant 4$ większa od jedności, a zatem dla $n \geqslant 4$ jest $M_0 > 1$.

Rachunkiem łatwo sprawdzić, że ta nierówność istnieje także dla $n = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}$; a więc dla wartości $n = 0, \ldots \frac{7}{2}$ i ogólnie

$n \geqslant 4$ wychylenia końca prętów badanych są większe niż wychylenia końca prętów [1]) o przekroju stałym i to tem większe im jest większe n.

§ 4.

W poprzednich paragrafach zajmowaliśmy się drganiami (tonami) pojedyńczemi pręta. Widzieliśmy, że tych tonów jest nieskończenie wiele i że odpowiadają one pierwiastkom dodatnim ξ_i równania (15).

Znając ξ_i, znajdziemy:

$$\lambda_i = \frac{\xi_i}{l}\,, \quad \alpha_i = \frac{\xi_i}{l^2}\sqrt{\frac{k_0 E}{q_0\,\mu}}\,, \quad U_i = u(x, \lambda_i) = C_i\,[u_2'(\xi_i)\,u_1(x, \lambda_i) - u_1'(\xi_i)\,u_2(x, \lambda_i)]\,,$$

$$u_1(x, \lambda_i) = \sum (-1)^\nu \frac{\lambda^\nu_i\, x^\nu}{\nu!\,\Gamma(\nu+n+2)}\,, \quad u_2(x, \lambda_i) = \sum \frac{\lambda^\nu_i\, x^\nu}{\nu!\,\Gamma(\nu+n+2)}\,,$$

i wówczas wychylenie przy drganiu pojedyńczem:

$$w_i = u(x, \lambda_i)\cos\alpha_i t = U_i \cos\alpha_i t\,. \tag{23}$$

Drganie złożone będzie zatem przedstawione przez:

$$w = \sum_{i=0}^{\infty} A_i\, w_i\,, \tag{24}$$

gdzie A_i są odpowiedniemi stałemi. Dla tego drgania niech będzie warunkiem początkowym:

$$\text{dla} \quad t = 0\,, \quad w = f(x)\,; \tag{γ}$$

$f(x)$ jest funkcyą ciągłą, posiadającą cztery pochodne i czyniącą zadość warunkom (α) i (β). Wówczas według (24) otrzymujemy:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i\, u(x, \lambda_i) = \sum_{i=\infty}^{\infty} A_i\, U_i\,. \tag{25}$$

Zagadnienie więc redukuje się do tego, aby okazać, że szereg, stojący po stronie prawej równania (25), jest jednostajnie zbieżny i że istotnie przedstawia funkcyę $f(x)$.

Dla prostoty przyjmiemy nadal, że długość pręta $l = 1$, przez co ogólność zagadnienia się nie zmniejszy. Wówczas:

$$0 \leqslant x \leqslant 1\,; \quad \xi_i = \lambda_i\,; \quad \alpha_i = \lambda_i\sqrt{\frac{k_0 E}{q_0\,\mu}}$$

[1]) Posiadających też same $\alpha, \alpha\Delta, \ldots$

i $\lambda_i > 0$ czyni zadość równaniu [1]):

(15'') $$u_1(\lambda)\, u_2'(\lambda) - u_2(\lambda)\, u_1'(\lambda) = 0\,,$$

gdzie

$$u_1(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\lambda^\nu}{\nu!\,\Gamma(\nu+n+2)}\,; \quad u_2(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda^\nu}{\nu!\,\Gamma(\nu+n+2)}\,.$$

W celu wyznaczenia spółczynników A_i, przypuśćmy na razie, że szereg (25) jest zbieżny i że w ogóle ta równość ma miejsce. Wówczas mnożąc (25) przez $x^{n+1} U_k$ i całkując między krańcami 0, 1, otrzymamy:

(26) $$\int_0^1 x^{n+1} f(x)\, U_k\, dx = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \int_0^1 x^{n+1} U_i\, U_k\, dx\,.$$

Lecz z równań różniczkowych, którym czynią zadość U_i, U_k:

(3') $$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^{n+3}\frac{d^2 U_i}{dx^2}\right) = \lambda_i^2 x^{n+1} U_i\,; \quad \frac{d^2}{dx^2}\left(x^{n+3}\frac{d^2 U_k}{dx^2}\right) = \lambda_k^2 x^{n+1} U_k$$

wynika:

$$(\lambda_i^2 - \lambda_k^2)\int_0^1 x^{n+1} U_i\, U_k\, dx = \int_0^1 \left[U_k \frac{d^2}{dx^2}\left(x^{n+3}\frac{d^2 U_i}{dx^2}\right) - U_i \frac{d^2}{dx^2}\left(x^{n+3}\frac{d^2 U_k}{dx^2}\right)\right] dx.$$

Całkując przez części, otrzymujemy:

$$\int_0^1 U_k \frac{d^2}{dx^2}\left(x^{n+3}\frac{d^2 U_i}{dx^2}\right) dx = \left[U_k \frac{d}{dx}\, x^{n+3}\frac{d^2 U_i}{dx^2} - \frac{dU_k}{dx}\, x^{n+3}\frac{d^2 U_i}{dx^2}\right]_0^1$$
$$+ \int_0^1 x^{n+3}\frac{d^2 U_i}{dx^2}\,\frac{d^2 U_k}{dx^2}\, dx\,,$$

czyli z uwagi na warunki (α) i (β), którym czynią zadość tak U_i jak U_k:

$$\int_0^1 U_k \frac{d^2}{dx^2}\left(x^{n+3}\frac{d^2 U_i}{dx^2}\right) dx = \int_0^1 x^{n+3}\frac{d^2 U_i}{dx^2}\,\frac{d^2 U_k}{dx^2}\,,$$

[1]) Pierwiastek $\lambda = 0$, nie mający dla nas znaczenia, wypuszczamy z rozumowania.

tak, iż jeżeli $\lambda_i \lesseqgtr \lambda_k$

(27) $$\int_0^1 x^{n+1} U_i\, U_k\, dx = 0\,; \quad \text{dla } i \lesseqgtr k\,.$$

Wskutek tego równość (26) przechodzi na

$$\int_0^1 x^{n+1} f(x)\, U_k\, dx = A_k \int_0^1 x^{n+1} U_k^2\, dx\,,$$

skąd:

$$A_k = \frac{\int_0^1 x^{n+1} f(x)\, U_k\, dx}{\int_0^1 x^{n+1} U_k^2\, dx}\,.$$

Szereg, stojący po prawej stronie (25) przy tak określonych A_i nazwijmy $F(x)$:

(28) $$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} U_i \frac{\int_0^1 x^{n+1} f(x)\, U_i\, dx}{\int_0^1 x^{n+1} U_i^2\, dx}\,;$$

okażemy najprzód, że jest on jednostajnie zbieżny w przedziale $0 \sim 1$.

Jakoż, widzieliśmy poprzednio, że pierwiastki λ_i wraz z wskaźnikiem i rosną nieograniczenie i stają się większemi niż kwadraty liczb szeregu naturalnego. Wskutek tego szereg:

(29) $$\sum_0^{\infty} \frac{1}{\lambda_i}\,, \quad \text{a tembardziej szereg} \quad \sum_0^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2}\,,$$

jest szeregiem bezwarunkowo zbieżnym. Wiedząc to, ocenimy granicę, do której zbliżają się nieograniczenie wyrazy szeregu (28) dla bardzo wielkich λ.

Według (12) i (13) mamy:

(30) $$u_1(x, \lambda_i) = \frac{1}{2^{n+1}\lambda_i^{\frac{n+1}{2}}}\,\frac{I^{n+1}(2\sqrt{\lambda_i x})}{x^{\frac{n+1}{2}}}\,, \quad u_2 = \frac{1}{i^{n+1}\,2^{n+1}\lambda_i^{\frac{n+1}{2}}}\,\frac{I^{n+1}(2i\sqrt{\lambda_i x})}{x^{\frac{n+1}{2}}}\,,$$
$$u_1'(1, \lambda_i) \doteq \frac{-1}{2^{n+2}\lambda_i^{\frac{n}{2}}}\, I^{n+2}(2\sqrt{\lambda_i})\,, \quad u_2'(1, \lambda_i) = \frac{1}{i^{n+2}\,2^{n+2}\lambda^{\frac{n}{2}}}\, I^{n+2}(2i\sqrt{\lambda_i})\,,$$

a więc:

$$U_i = C_i \left[u_2{}'(1, \lambda_i)\, u_1(x, \lambda_i) - u_1{}'(1, \lambda_i)\, u_2(x, \lambda_i) \right],$$

(31) $$U_i = \frac{C_i}{i^{n+2}\, 2^{2n+3}\, \lambda_i^{\,n+\frac{1}{2}}\, x^{\frac{n+1}{2}}} \Big[I^{n+2}(2i\sqrt{\lambda_i})\, I^{n+1}(2\sqrt{\lambda_i x})$$

$$+ i\, I^{n+2}(2\sqrt{\lambda_i})\, I^{n+1}(2i\sqrt{\lambda_i x}) \Big].$$

Lecz jak wiadomo, funkcye Bessela można dla bardzo wielkiego argumentu z dodatniego przedstawić asymptotycznie[1]) w następujący sposób:

$$I^\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{2z} \sin\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right) + \ldots$$

(32) $$I^\nu(iz) \sim \frac{i^\nu}{\sqrt{2\pi z}} e^z - \frac{i^\nu}{\sqrt{2\pi z}}\, \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{2z} e^z + \ldots$$

Stosując te wzory do U_i i ograniczając się do pierwszych wyrazów, otrzymamy:

$$x^{n+1+\frac{1}{4}}\, U_i \sim \frac{C_i}{2^{2n+4}\, \pi\, \lambda_i^{n+1}} \Big[e^{2\sqrt{\lambda_i}} \cos\left(2\sqrt{\lambda_i x} - \frac{2n+3}{4}\pi\right)$$

$$+ e^{2\sqrt{\lambda_i x}} \sin\left(2\sqrt{\lambda_i} - \frac{2n+3}{4}\pi\right) \Big],$$

a więc dla[2]) $0 < x < 1$, i λ_i bardzo wielkiego

(33) $$\lim U_i = \frac{A\, C_i}{2^{2n+4}\, \pi}\, \frac{e^{2\sqrt{\lambda_i}}}{\lambda_i^{n+1}},$$

gdzie A jest liczbą skończoną niezależną od λ_i, x[3])

---

[1]) Por. Niels-Nielsen l. c., str. 156.

[2]) Dla $x = 0$ wzór poprzedni przestaje mieć swoje znaczenie; dla $x = 1$ jest $U(1, \lambda_i) = 0$, a więc:

$$\lim_{\lambda_i = \infty} \cos\left(2\sqrt{\lambda_i} - \frac{2n+3}{4}\pi\right) + \sin\left(2\sqrt{\lambda_i} - \frac{2n+3}{4}\pi\right) = 0,$$

skąd wynika:

$$\lim \lambda = \left(k + \frac{n+1}{4}\right)^2 \pi^2.$$

[3]) Równość ta oznacza. że lewa strona dla dostatecznie wielkiego λ_i różni się dowolnie mało od strony prawej.

Z kolei zajmiemy się całką:

(34) $$\int_0^1 x^{n+1}\, U_i\, f(x)\, dx$$

w przypuszczeniu, że $f(x)$ jest skończone i ciągłe, posiada cztery pierwsze pochodne, oraz czyni zadość warunkom (β):

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = 0.$$

[Warunki (α): $x^{n+3} f''(x)_{x=0} = 0$, $\dfrac{d}{dx}\left(x^{n+3} f''(x)\right) = 0$ są wówczas dla $n \geqslant -1$ same przez się spełnione].

Podstawiając w (31) według równania różniczkowego (3):

$$x^{n+1}\, U_i = \frac{1}{\lambda_i^2}\, \frac{d^2}{dx^2}\left(x^{n+3} \frac{dU_i}{dx^2}\right),$$

całkując przez części i uwzględniając warunki (α) i (β), którym czynią zadość U_i i $f(x)$, otrzymamy:

$$\int_0^1 x^{n+1}\, U_i\, f(x)\, dx = \frac{1}{\lambda_i^2} \int_0^1 U_i\, \frac{d^2}{dx^2}\left(x^{n+3} \frac{d^2 f}{dx^2}\right) dx,$$

czyli:

$$\int_0^1 x^{n+1}\, U_i\, f(x)\, dx = \frac{1}{\lambda_i^2} \int_0^1 x^{n+1}\, U_i\, g(x)\, dx,$$

gdzie:

$$g(x) = x^2 \frac{d^4 f}{dx^4} + 2(n+3)\, x \frac{d^3 f}{dx^3} + (n+3)(n+2) \frac{d^2 f}{dx^2}.$$

Podstawiając tu zamiast U_i wyrażenie (31), otrzymamy:

$$\int_0^1 x^{n+1}\, U_i\, f(x)\, dx = \frac{C_i}{i^{n+2}\, 2^{2n+3}\, \lambda_i^{\,n+\frac{5}{2}}} \Big[I^{n+2}(2i\sqrt{\lambda_i}) \int_0^1 x^{\frac{n+1}{2}}\, I^{n+1}(2\sqrt{\lambda_i x})\, g(x)\, dx$$

$$+ i\, I^{n+2}(2\sqrt{\lambda_i}) \int_0^1 x^{\frac{n+1}{2}}\, I^{n+1}(2i\sqrt{\lambda_i x})\, g(x)\, dx \Big]$$

czyli, gdy przyjmiemy $x = z^2$:

$$\int_0^1 x^{n+1} U_i f(x)\,dx = \frac{C_i}{i^{n+2}\, 2^{2n+2}\, \lambda_i^{n+\frac{5}{2}}} \Big[I^{n+2}(2i\sqrt{\lambda_i}) \int_0^1 z^{n+\frac{3}{2}} g(z^2) \,.\, \sqrt{z}\, I^{n+1}(2\sqrt{\lambda_i}\, z)\, dz$$

$$+\, i\, I^{n+2}(2\sqrt{\lambda_i}) \int_0^1 z^{n+\frac{3}{2}} g(z^2) \,.\, \sqrt{z}\, I^{n+1}(2i\sqrt{\lambda_i}\, z)\, dz \Big].$$

Lecz według (32) jest asymptotycznie:

$$I^{n+2}(2i\sqrt{\lambda_i}) \sim \frac{i^{n+2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{2\sqrt{\lambda}}}{\lambda^{\frac{1}{4}}}, \quad I^{n+2}(2\sqrt{\lambda_i}) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\cos\left(2\sqrt{\lambda_i} - \frac{2n+5}{4}\pi\right)}{\lambda^{\frac{1}{4}}}$$

$$\sqrt{z}\, I^{n+1}(2i\sqrt{\lambda_i}\, z) \sim \frac{i^{n+1}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{2\sqrt{\lambda}\, z}}{\lambda^{\frac{1}{4}}}, \quad \sqrt{z}\, I^{n+1}(2\sqrt{\lambda_i}\, z) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\cos\left(2\sqrt{\lambda_i}\, z - \frac{2n+3}{4}\pi\right)}{\lambda^{\frac{1}{4}}}.$$

Stąd wynika z uwagi na $0 \leqslant z \leqslant 1$, iż dla λ_i bardzo wielkiego:

(35) $$\lim \int_0^1 x^{n+1} U_i f(x)\, dx = \frac{B\, C_i\, e^{2\sqrt{\lambda_i}}}{\pi\, 2^{2n+\frac{7}{2}}\, \lambda_i^{n+3}},$$

gdzie znowu B jest liczbą skończoną niezależną od λ_i, z.

Nakoniec, podstawiając w całce:

$$\int_0^1 x^{n+1} U_i^2\, dx,$$

zamiast U_i wyrażenie (31), otrzymamy:

$$\int_0^1 x^{n+1} U_i^2\, dx = (-1)^{n+2} \frac{C_i^2}{2^{2(2n+3)} \lambda_i^{2n+1}} \int_0^1 \Big[I^{n+2}(2i\sqrt{\lambda_i})\, I^{n+1}(2\sqrt{\lambda_i x})$$

$$+\, i\, I^{n+2}(2\sqrt{\lambda_i})\, I^{n+1}(2i\sqrt{\lambda_i x}) \Big]^2 dx.$$

Rozwijając po prawej stronie kwadrat, będziemy mieli do obliczenia wyrażenia

$$M = I^{n+2}(2i\sqrt{\lambda_i}) \int_0^1 \Big[I^{n+1}(2\sqrt{\lambda_i x}) \Big]^2 dx;$$

$$N = i\, I^{n+2}(2\sqrt{\lambda_i})\, I^{n+2}(2i\sqrt{\lambda_i}) \int_0^1 I^{n+1}(2\sqrt{\lambda_i}\, x)\, I^{n+1}(2i\sqrt{\lambda_i}\, x)\, dx;$$

$$P = -\, I^{n+2}(2\sqrt{\lambda_i})^2 \int_0^1 \Big[I^{n+1}(2i\sqrt{\lambda_i x}) \Big]^2 dx.$$

Podstawiając w tych całkach $\sqrt{x} = z$, stosując wzory [1]):

$$(\beta^2 - \alpha^2) \int_0^1 z\, I^{n+1}(\alpha z)\, I^{n+1}(\beta z)\, dz = \beta\, I^{n+1}(\alpha)\, I^{n+2}(\beta) - \alpha\, I^{n+1}(\beta)\, I^{n+2}(\alpha),$$

$$2\alpha \int_0^1 z \Big[I^{n+1}(\alpha z) \Big]^2 dz = I^{n+1}(\alpha)\, I^{n+2}(\beta) + \alpha \Big[I^{n+1}(\alpha) \frac{d\, I^{n+2}(\alpha)}{d\alpha} - I^{n+2}(\alpha) \frac{d\, I^{n+1}(\alpha)}{d\alpha} \Big],$$

oraz zważając na to, że według równania (15″):

$$I^{n+1}(2\sqrt{\lambda_i})\, I^{n+2}(2i\sqrt{\lambda_i}) + i\, I^{n+2}(2\sqrt{\lambda_i})\, I^{n+1}(2i\sqrt{\lambda_i}) = 0,$$

otrzymamy:

$$N = 0, \quad M + P = 2\,[I^{n+1}(2\sqrt{\lambda_i})]^2\, [I^{n+2}(2i\sqrt{\lambda_i})]^2,$$

tak, iż:

$$\int_0^1 x^{n+1} U_i^2\, dx = (-1)^n \frac{C_i^2}{2^{4n+5}\, \lambda_i^{2n+1}} \Big[I^{n+1}(2\sqrt{\lambda_i})\, I^{n+2}(2i\sqrt{\lambda_i}) \Big]^2.$$

A więc dla bardzo wielkiego λ_i:

(36) $$\lim \int_0^1 x^{n+1} U_i^2\, dx = \frac{C \,.\, C_i^2}{2^{4n+7} \pi^2} \, \frac{e^{4\sqrt{\lambda_i}}}{\lambda_i^{2n+2}},$$

gdzie C jest liczbą skończoną niezależną od x i λ.

[1]) Riemann-Weber. Partielle Diffgl. der math. Physik. Braunschweig 1900, t. I, p. 163, 164.

Na podstawie wzorów (33), (35) i (36) wynika, że

$$\lim U_i \frac{\int_0^1 x^{n+1} f(x)\, U_i\, dx}{\int_0^1 x^{n+1}\, U_i^2\, dx} = D_i \frac{1}{\lambda_i^2},$$

gdzie D_i jest skończone, niezależne od x i λ, a więc z uwagi na (29) możemy wypowiedzieć twierdzenie:

Jeżeli $f(x)$ jest skończone i ciągłe, posiada cztery pochodne i czyni zadość warunkom (β), to szereg (28)

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} U_i \frac{\int_0^1 x^{n+1} f(x)\, U_i\, dx}{\int_0^1 x^{n+1}\, U_i^2\, dx},$$

jest szeregiem bezwarunkowo i jednostajnie zbieżnym dla x zawartego w przedziale $0 \sim 1$.

§ 5.

Pozostaje jeszcze do okazania, że szereg (25) istotnie przedstawia funkcyę $f(x)$ t. j., że według (28): $F(x) = f(x)$.

W tym celu nazwijmy dla krótkości lewą stronę równania (15″) $V(\lambda)$ [1]:

$$V(\lambda) \equiv u_1(\lambda)\, u_2'(\lambda) - u_2(\lambda)\, u_1'(\lambda),$$

utwórzmy równanie różniczkowe (przy λ dowolnie zmiennem):

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^{n+3} \frac{d^2 y}{dx^2}\right) - \lambda^2 x^{n+1} y - V(\lambda)\, x^{n+1}\, \Psi(x) = 0, \tag{38}$$

[1] Wówczas $\left[u_1(x, \lambda) \frac{du_2(x, \lambda)}{dx} - u_2(x, \lambda) \frac{du_1(x, \lambda)}{dx} \right]_{x=1} = \lambda V(\lambda)$.

gdzie $\Psi(x)$ jest funkcyą skończoną i ciągłą w przedziale $0 \leqslant x \leqslant 1$ i szukajmy całki y skończonej w przedziale $0 \sim 1$, czyniącej zadość warunkom:

$$(39)\quad \begin{aligned} &(\alpha) \quad \text{dla } x = 0, \quad x^{n+3} \frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \quad \frac{d}{dx} x^{n+3} \frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \\ &(\beta) \quad \text{dla } x = 1, \quad y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0. \end{aligned}$$

Jako całki równania zredukowanego t. j. równania (3′) przyjmiemy (por. (12), (13)):

$$u_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\lambda^\nu x^\nu}{\nu!\, \Gamma(\nu+n+2)}, \quad u_2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda^\nu x^\nu}{\nu!\, \Gamma(\nu+n+2)},$$

oraz

$$u_3 = x^{-(n+1)} \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \frac{(n-\nu)!}{\nu!} \lambda^\nu x^\nu - \lambda^{(n+1)} u_1 \log x$$

$$+ \lambda^{n+1} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (-1)^\nu \frac{\lambda^\nu x^\nu}{\nu!\,(\nu+n+1)!} \left(\psi(\nu+1) + \psi(\nu+n+2)\right),$$

$$u_4 = x^{-(n+1)} \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (-1)^\nu \frac{(n-\nu)!}{\nu!} \lambda^\nu x^\nu - (-\lambda)^{n+1} u_2 \log x$$

$$+ (-\lambda)^{n+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda^\nu x^\nu}{\nu!\,(\nu+n+1)!} \left(\psi(\nu+1) + \psi(\nu+n+2)\right),$$

dla n całkowitego zaś

$$u_3 = x^{-(n+1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\lambda^\nu x^\nu}{\nu!\, \Gamma(\nu-n)}, \quad u_4 = x^{-(n+1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda^\nu x^\nu}{\nu!\, \Gamma(\nu-n)}$$

dla n ułamkowego.

Całki te — w powyższej formie — są widocznie funkcyami całkowitemi parametru λ, oraz — jak przypominamy — u_1, u_3 są całkami podstawowemi równania (4′), zaś u_2, u_4 całkami podstawowemi równania (4″).

Wiedząc to, znajdziemy już łatwo ogólny kształt całki y:

$$y = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + c_4 u_4 + V(\lambda) \left\{ u_1 \int_0^x \frac{x^{n+1} \psi(x) \Delta_1}{x^{n+3} \Delta} dx \right.$$

$$\left. + u_2 \int_0^x \frac{x^{n+1} \psi(x) \Delta_2}{x^{n+3} \Delta} dx + u_3 \int_0^x \frac{x^{n+1} \psi(x) \Delta_3}{x^{n+3} \Delta} dx + u_4 \int_0^x \frac{x^{n+1} \psi(x) \Delta_4}{x^{n+3} \Delta} dx \right\},$$

gdzie

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4 \\ u_1', & u_2', & u_3', & u_4' \\ u_1'', & u_2'', & u_3'', & u_4'' \\ u_1''', & u_2''', & u_3''', & u_4''' \end{vmatrix},$$

zaś Δ_i są wyznacznikami dołączonemi do elementów czwartego wiersza wyznacznika Δ. Rugując przy pomocy równań (4′) i (4″) drugie i trzecie pochodne funkcyi u_i, otrzymamy:

$$\Delta = \frac{-4\lambda^2}{x^2} (u_1 u_3' - u_3 u_1')(u_2 u_4' - u_4 u_2') = -\frac{1}{a^2} \frac{\lambda^2}{x^{2n+6}},$$

$$\Delta_1 = \frac{-2\lambda}{x} u_3 (u_2 u_4' - u_4 u_2') = a \frac{\lambda}{x^{n+3}} u_3; \quad \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{a}{\lambda} x^{n+3} u_3,$$

$$\Delta_2 = \frac{2\lambda}{x} u_4 (u_1 u_3' - u_3 u_1') = -a \frac{\lambda}{x^{n+3}} u_4; \quad \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{a}{\lambda} x^{n+3} u_4,$$

$$\Delta_3 = \frac{2\lambda}{x} u_1 (u_2 u_4' - u_4 u_2') = -a \frac{\lambda}{x^{n+3}} u_1; \quad \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{a}{\lambda} x^{n+3} u_4,$$

$$\Delta_4 = \frac{-2\lambda}{x} u_2 (u_1 u_3' - u_4 u_2') = a \frac{\lambda}{x^{n+3}} u_2; \quad \frac{\Delta_4}{\Delta} = -\frac{a}{\lambda} x^{n+3} u_2;$$

a jest spółczynnikiem stałym, niezależnym od λ i x.

Podstawiając te wyrażenia w y, otrzymamy:

$$y = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + c_4 u_4 + \frac{a}{\lambda} V(\lambda) R(x, \lambda), \tag{40}$$

gdzie:

$$R(x,\lambda) = \left[u_2 \int_0^x x^{n+1} u_4 \psi(x) dx - u_1 \int_0^x x^{n+1} u_3 \psi(x) dx \right]$$

$$- \left[u_4 \int_0^x x^{n+1} u_2 \psi(x) dx - u_3 \int_0^x x^{n+1} u_1 \psi(x) dx \right].$$

Rozważymy bliżej tę funkcyę i jej cztery pochodne; otrzymamy dla $m=1, 2, 3$:

$$\frac{d^m R}{dx^m} = \left[\frac{d^m u_2}{dx^m} \int_0^x x^{n+1} u_4 \psi(x) dx - \frac{d^m u_1}{dx^m} \int_0^x x^{n+1} u_3 \psi(x) dx \right]$$
$$- \left[\frac{d^m u_4}{dx^m} \int_0^x x^{n+1} u_2 \psi(x) dx - \frac{d^m u_3}{dx^m} \int_0^x x^{n+1} u_1 \psi(x) dx \right], \tag{40'}$$

zaś dla $m = 4$:

$$\frac{d^4 R}{dx^4} = \left[\frac{d^4 u_2}{dx^4} \int_0^x x^{n+1} u_4 \psi(x) dx - \frac{d^4 u_1}{dx^4} \int_0^x x^{n+1} u_3 \psi(x) dx \right]$$

$$- \left[\frac{d^4 u_4}{dx^4} \int_0^x x^{n+1} u_3 \psi(x) dx - \frac{d^4 u_3}{dx^4} \int_0^x x^{n+1} u_1 \psi(x) dx \right] + \frac{\lambda}{a} x^{n+1} \psi(x).$$

Owóż zauważmy najprzód, że dla $n > -1$ wyrażenia $x^{n+1} u_i \psi(x)$ są funkcyami skończonemi i ciągłemi zmiennej x w całym przedziale $0 \sim 1$. Nadto widocznem jest, że:

$$\left| \int_0^x x^{n+1} u_1 \psi(x) dx \right| < m_1 x^{n+3}, \qquad \left| \int_0^x x^{n+1} u_2 \psi(x) dx \right| < m_2 x^{n+3},$$

$$\left| \int_0^x x^{n+1} u_3 \psi(x) dx \right| < m_3 x, \qquad \left| \int_0^x x^{n+1} u_4 \psi(x) dx \right| < m_4 x.$$

m_i są liczby skończone, niezależne od x.

Wskutek tego wyrażenia:

$$\left| u_k \int x^{n+1} u_i \psi(x) dx \right| < Mx, \qquad k = 1, 2, 3, 4$$

i odpowiednio

$$\left| \frac{du_k}{dx} \int_0^x x^{n+1} u_i \psi(x)\,dx \right| < M', \qquad i=3,4,1,2$$

$$\left| x \frac{d^2 u_k}{dx^2} \int_0^x x^{n+1} u_i \psi(x)\,dx \right| < M'',$$

$$\left| x^2 \frac{d^3 u_k}{dx^2} \int_0^x x^{n+1} u_i \psi(x)\,dx \right| < M''',$$

$$\left| x^3 \frac{d^4 u_k}{dx^4} \int_0^x x^{n+1} u_i \psi(x)\,dx \right| < M^{IV},$$

gdzie M, M', M'', M''', M^{IV} są liczbami skończonemi.

Z drugiej strony wyrażenia $x^{n+1} u_i$ są widocznie funkcyami całkowitemi parametru λ przy każdej wartości x w przedziale $0 \sim 1$, gdyż przedstawiają się przez szeregi jednostajnie zbieżne przy każdem λ skończonem, gdy $0 \leqslant x \leqslant 1$. Całkowanie zatem można wykonywać wyraz po wyrazie, a że $x^{n+1} \log x\, f(x)$ jest dla $n > -1$ funkcyą ciągłą i skończoną także dla $x=0$, więc:

$$\int_0^x x^{n+1} u_1 \log x\, \psi(x)\,dx, \quad \int_0^x x^{n+1} u_2 \log x\, \psi(x)\,dx$$

są także funkcyami całkowitemi względem λ przy każdem $0 \leqslant x \leqslant 1$. Otrzymamy zatem twierdzenie: Wyrażenia

$$\int_0^x x^{n+1} u_i \psi(x)\,dx$$

są funkcyami ciągłemi i skończonemi zmiennej x i funkcyami całkowitemi parametru λ, jednostajnie zbieżnemi przy $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Wykonywając rachunki szczegółowo, łatwo zauważyć, że wyrazy, zawierające potęgę najniższą λ t. j. λ^0 w powyżej wypisanych wyrażeniach $\frac{d^m R}{dx^m}$, dla $m=0,1,2,3,4$ znoszą się tak, iż np.:

$$R(x,\lambda) = \lambda \Big[b \Big(x \int_0^x \psi(x)\,dx - x^{-n-1} \int_0^x x^{n+2} \psi(x)\,dx \Big)$$
$$+ c \Big(\int_0^x x \psi(x)\,dx - x^{-n} \int_0^x x^{n+1} \psi(x)\,dx \Big) \Big] + \lambda^2 [\quad] + \ldots;$$

dalsze wyrazy zawierają wyższe potęgi wielkości λ i x. Mieć więc będziemy:

$$(41)\qquad \begin{aligned} R(x,\lambda) &= \lambda x^2 \varphi_0(x,\lambda), \\ \frac{dR}{dx} &= \lambda x \varphi_1(x,\lambda), \\ \frac{d^2R}{dx^2} &= \lambda \varphi_2(x,\lambda), \\ x \frac{d^3R}{dx^3} &= \lambda \varphi_3(x,\lambda), \\ x^2 \frac{d^4R}{dx^4} &= \lambda \varphi_4(x,\lambda), \end{aligned}$$

gdzie φ_i oznaczają jeszcze funkcye skończone i ciągłe zmiennej x, a całkowite zmiennej λ przy każdej wartości $0 \leqslant x \leqslant 1$. Wynika to także stąd, że przy zmianie λ na $-\lambda$ funkcya u_1 przechodzi na u_2, funkcya u_3 na u_4, $\frac{du_1}{dx}$ na $\frac{du_2}{dx}$ i t. d., a więc jest widoczne, że $R(x,\lambda)$ i jej pochodne (por. (40), (40')) są funkcyami nieparzystemi parametru λ, zaś $\varphi_i(x,\lambda)$ są funkcyami parzystemi.

Przeprowadzając podobne rozumowanie dla $n=-1$, gdzie

$$u_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\lambda^\nu x^\nu}{\nu!\,\nu!}, \quad u_2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda^\nu x^\nu}{\nu!\,\nu!}, \quad u_3 = -u_1 \log x - \sum\nolimits_3, \quad u_4 = -u_2 \log x - \sum\nolimits_4$$

(Σ_3, Σ_4 są szeregami jednostajnie zbieżnemi dla x, λ) i zważając na to, że całka $\int_0^x \log x\, dx = x(\log x - 1)$, a nawet całka $\int_0^x \psi(x) \log x\, dx$ jest jeszcze funkcyą zmiennej x skończoną i ciągłą, dojdziemy do wniosku, że:

$$(42)\qquad R(x,\lambda), \quad \frac{dR}{dx}, \quad x\frac{d^2R}{dx^2}, \quad x^2 \frac{d^3R}{dx^3}, \quad x^3 \frac{d^4R}{dx^4},$$

są także dla $n=-1$ funkcyami skończonemi i ciągłemi zmiennej x, a funkcyami całkowitemi nieparzystemi parametru λ, podzielnemi przez λ, które nadto dla $x=0$ stają się wszystkie równemi zeru.

Wiedząc to, szukajmy teraz całek skończonych y dla $0 \leqslant x \leqslant 1$, któreby czyniły zadość warunkom (α) dla $x=0$:

$$x^{n+3} \frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \frac{d}{dx}\, x^{n+3} \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Z uwagi na to, że funkcye u_1, u_2 są skończone i ciągłe względem x, oraz z uwagi na (41), (42) i kształt funkcyi u_3, u_4 wynika, że warunki (α) redukują się do $c_3 + c_4 = 0$, $c_3 - c_4 = 0$, a więc tak $c_3 = 0$, jak $c_4 = 0$. Wskutek tego całka y skończona i ciągła, czyniąca zadość warunkom (α) ma kształt:

$$y = c_1 u_1(x,\lambda) + c_2 u_2(x,\lambda) + \frac{a}{\lambda} V(\lambda)\, R(x,\lambda)\,. \tag{43}$$

Stąd wynika:

$$\frac{dy}{dx} = c_1 \frac{du_1}{dx} + c_2 \frac{du_2}{dx} + \frac{a}{\lambda} V(\lambda) \frac{dR(x,\lambda)}{dx}\,. \tag{44}$$

Przyjmując w (43) i (44) $x = 1$ i zważając na to, że

$$\frac{du_1}{dx}_{x=1} = \lambda \frac{du_1}{d\lambda}\,, \quad \frac{du_2}{dx}_{x=1} = \lambda \frac{du_2}{d\lambda}$$

zaś $V(\lambda) = u_1(\lambda)\, u'_2(\lambda) - u_2(\lambda)\, u'_1(\lambda)$, oraz kładąc

$$R(1,\lambda) = \lambda\, \varphi_0(\lambda)\,, \quad \frac{dR}{dx}_{x=1} = \lambda\, \varphi_1(\lambda)\,,$$

otrzymamy jako warunki (β):

$$c_1\ u_1(\lambda) + c_2\ u_2(\lambda) + a\, V(\lambda)\, \varphi_0(\lambda) = 0\,,$$

$$c_1 \lambda u'_1(\lambda) + c_2 \lambda u'_2(\lambda) + a\, V(\lambda)\, \varphi_1(\lambda) = 0\,,$$

skąd:

$$c_1 = \quad \varphi_0(\lambda)\, u'_2(\lambda) - \frac{1}{\lambda} \varphi_1(\lambda)\, u_2(\lambda)\,,$$

$$c_2 = - \varphi_0(\lambda)\, u'_1(\lambda) + \frac{1}{\lambda} \varphi_1(\lambda)\, u_2(\lambda)\,,$$

tak iż całka:

$$\begin{aligned} y = {} & \varphi_0(\lambda) \Big[u'_2(\lambda)\, u_1(x,\lambda) - u'_1(\lambda)\, u_2(x,\lambda) \Big] \\ & - \frac{\varphi_1(\lambda)}{\lambda} \Big[u_2(\lambda)\, u_1(x,\lambda) - u_1(\lambda)\, u_2(x,\lambda) \Big] + a\, V(\lambda) \frac{R(x,\lambda)}{\lambda}\,. \end{aligned} \tag{43'}$$

Ponieważ:

$$\varphi_0(\lambda)\,, \quad \varphi_1(\lambda)\,, \quad \frac{R(x,\lambda)}{\lambda}\,,$$

i jak łatwo sprawdzić

$$u'_2(\lambda)\, u_1(x,\lambda) - u'_1(\lambda)\, u_2(x,\lambda)\,; \quad \frac{1}{\lambda} \Big[u_2(\lambda)\, u_1(x,\lambda) - u_1(\lambda)\, u_2(x,\lambda) \Big]\cdot$$

są wszystkie funkcyami całkowitemi parzystemi parametru λ, zatem:

Całka y równania (38) skończona i ciągła względem x, czyniąca zadość warunkom (α) i (β) jest dla $n \geqslant -1$ zarazem funkcyą całkowitą parzystą parametru λ, i uporządkowana według potęg parametru λ, przedstawia się jako szereg zbieżny jednostajnie dla każdego λ skończonego przy $0 \leqslant x \leqslant 1$:

$$y = Y_0 + \lambda^2 Y_1 + \lambda^4 Y_2 + \ldots$$

[Y_i są funkcyami skończonemi i ciągłemi w przedziale $0 \sim 1$].

Stąd wynika, że funkcya:

$$z = \frac{y}{V(\lambda)}\,,$$

czyniąca zadość równaniu

$$\frac{d^2}{dx^2}\, x^{n+3} \frac{d^2 z}{dx^2} - \lambda^2 x^{n+1} z - x^{n+1} \Phi(x) = 0 \tag{45}$$

i warunkom dla $x = 0$:

$$x^{n+3} \frac{d^2 z}{dx^2} = 0\,, \quad \frac{d}{dx}\, x^{n+3} \frac{d^2 z}{dx^2} = 0\,, \tag{α}$$

dla $x = 1$:

$$z = 0\,, \quad \frac{dz}{dx} = 0\,, \tag{β}$$

jest dla $n \geqslant -1$, $\Phi(x)$ ciągłego i skończonego funkcyą skończoną i ciągłą zmiennej x, a funkcyą — w ogóle mówiąc —

meromorficzną parzystą[1]) parametru λ, posiadającą jako bieguny, pierwiastki λ_i równania

$$V(\lambda) \equiv u_1(\lambda)\, u'_2(\lambda) - u_2(\lambda)\, u'_1(\lambda) = 0 \,.$$

Zachodzi pytanie czy i pod jakimi warunkami funkcya z traci swój biegun λ_i, t. j. staje się w okolicy λ_i holomorficzną.

Rozwijając funkcyę y na szereg idący według potęg różnicy $(\lambda - \lambda_i)$ i zważając, że według (38):

$$y_{\lambda=\lambda_i} = C_i U_i \,,$$

otrzymamy:

$$y = C_i U_i + (\lambda - \lambda_i)\, U_i^{(1)} + \ldots$$

skąd, z uwagi na to, że λ_i jest pierwiastkiem pojedyńczym równania $V(\lambda) = 0$, a więc $V'(\lambda) \lesseqgtr 0$

$$z = \frac{C_i}{V'(\lambda_i)} \frac{U_i}{\lambda - \lambda_i} + \frac{C_i^{(1)}}{V'(\lambda_i)} U_i^{(1)} + \ldots$$

Stąd wynika, że jeżeli z ma być funkcyą holomorficzną w obszarze λ_i, to $C_i = 0$. Z drugiej strony jednak utwórzmy:

$$\int_0^1 U_i \frac{d^2}{dx^2}\left(x^{n+3} \frac{d^2 y}{dx^2}\right) dx = \lambda^2 \int_0^1 x^{n+1} U_i\, y\, dx + V(\lambda) \int_0^1 x^{n+1} U_i\, \psi(x)\, dx \,. \tag{46}$$

Całkując przez części po stronie lewej i zważając na warunki (α) i (β), którym czynią zadość U_i i y, mieć będziemy:

$$\int_0^1 U_i \frac{d^2}{dx^2}\left(x^{n+3} \frac{d^2 y}{dx^2}\right) dx = \int_0^1 y \frac{d^2}{dx^2}\left(x^{n+3}\, U_i\right) dx \,,$$

albo ponieważ według równania (3'):

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^{n+3} \frac{d^2 U_i}{dx^2}\right) = \lambda_i^2 x^{n+1} U_i \,, \quad \int_0^1 U_i \frac{d^2}{dx^2}\left(x^{n+3} \frac{d^2 y}{dx^2}\right) dx = \lambda_i^2 \int_0^1 x^{n+1} U_i\, y\, dx \,.$$

[1]) $V(\lambda)$ i y są funkcyami parzystemi parametru λ.

Jest więc według (46):

$$\int_0^1 x^{n+1} U_i\, y\, dx = -\frac{V(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_i^2} \int_0^1 x^{n+1} U_i\, \psi(x)\, dx \,,$$

a w granicy dla $\lambda = \lambda_i$:

$$C_i \int_0^1 x^{n+1} U_i^2\, dx = -\frac{V'(\lambda_i)}{2\lambda_i} \int_0^1 x^{n+1} U_i\, \psi(x)\, dx \,.$$

Ponieważ tu tak $V'(\lambda) \lesseqgtr 0$ jak i widocznie $\int_0^1 x^{n+1} U_i^2\, dx > 0$, więc gdy:

$$\int_0^1 x^{n+1} U_i\, \psi(x)\, dx = 0 \,, \quad \text{to} \quad C_i = 0 \,, \text{ a zatem:}$$

Jeżeli zachodzą równości

$$\int_0^1 x^{n+1} U_i\, \psi(x)\, dx = 0 \tag{47}$$

dla każdego i, to funkcya z jest funkcyą holomorficzną parametru λ.

Lecz, jeżeli z ma być funkcyą holomorficzną, to ponieważ jest funkcyą parzystą, będzie:

$$z = Z_0 + \lambda^2 Z_1 + \lambda^4 Z_2 + \ldots \tag{48}$$

gdzie Z_i są funkcyami x skończonemi i ciągłemi w przedziale $0 \sim 1$, posiadającemi pochodne, podobnie jak y. Podstawiając to wyrażenie w (45), otrzymamy szereg potęgowy względem λ równy zeru przy każdem λ, skąd wynikają równania różniczkowe dla Z_i:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dx^2}\left(x^{n+3} \frac{d^2 Z_0}{dx^2}\right) - x^{n+1}\, \psi(x) = 0 \,, \\
&\frac{d^2}{dx^2}\left(x^{n+3} \frac{d^2 Z_1}{dx^2}\right) - x^{n+1} Z_0 = 0 \,, \\
&\frac{d^2}{dx^2}\left(x^{n+3} \frac{d^2 Z_2}{dx^2}\right) - x^{n+1} Z_1 = 0 \,, \\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\frac{d^2}{dx^2} x^{n+3} \frac{d^2 Z_m}{dx^2} - x^{n+1} Z_{m-1} = 0 \,, \\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{49}$$

przy warunkach

$$(50)\quad \begin{aligned} &\alpha)\quad x^{n+3}\frac{d^2 Z_m}{dx^2}=0, \quad \frac{d}{dx}\,x^{n+3}\frac{d^2 Z_m}{dx^2}=0, \quad \text{dla } x=0,\\ &\beta)\quad Z_m=0, \quad \frac{dZ_m}{dx}=0, \quad \text{dla } x=1. \end{aligned}$$

Z równości tych (49) i (50) wynika, że jeżeli na odcinku $0\sim 1$ jedna z funkcyi $\psi(x), Z_0,\ldots,Z_m,\ldots$ jest stale równa zeru np. $Z_m=0$, to wszystkie inne funkcye Z i ψ są również równe zeru. Jakoż, że wówczas $Z_{m-1},\ldots,\psi(x)$ są równe zeru, jest odrazu widoczne. Że zaś także $Z_m=0$, wynika stąd, iż

$$\frac{d^2}{dx^2}\,x^{n+3}\frac{d^2 Z}{dx^2}=0, \quad \text{a więc } \frac{d}{dx}\,x^{n+3}\frac{d^2 Z_m}{dx^2}=c_0.$$

Lecz według drugiego warunku $\alpha)$ $c_0=0$, zatem $x^{n+3}\frac{d^2 Z_m}{dx^2}=c_1$; według pierwszego warunku $\alpha)$ jest jednak $c_1=0$ i t. d..

Wiedząc to, pomnóżmy równość (48) przez $x^{n+1}\psi$ i całkujmy ją między krańcami 0, 1. Ponieważ szereg (48) jest jednostajnie zbieżny przy $0\leqslant x\leqslant 1$, dla każdego λ, więc całkowanie można wykonać wyraz po wyrazie:

$$(51)\quad \int_0^1 x^{n+1} z\,\psi(x)\,dx=\int_0^1 x^{n+1}Z_0\,\psi(x)\,dx+\lambda^2\int_0^1 x^{n+1}Z_1\,\psi(x)\,dx+\ldots$$

i szereg ten będzie oczywiście znowu szeregiem jednostajnie zbieżnym. Spółczynniki tego szeregu można jeszcze inaczej przedstawić. Według (49)

$$\int_0^1 x^{n+1}Z_m\,\psi(x)\,dx=\int_0^1 Z_m\frac{d^2}{dx^2}\left(x^{n+3}\frac{d^2 Z_0}{dx^2}\right)dx,$$

a więc, całkując przez części i uwzględniając (50), otrzymamy:

$$I_m=\int_0^1 x^{n+1}Z_m\,\psi(x)\,dx=\int_0^1 x^{n+1}Z_{m-1}\,Z_0\,dx=\int_0^1 x^{n+1}Z_{m-2}\,Z_1\,dx=\;.$$

ogólnie:

$$(52)\quad I_m=\int_0^1 x^{n+1}Z_{m-i}\,Z_{i-1}\,dx=\int_0^1 x^{n+1}Z_{m-i-1}\,Z_i\,dx.$$

Stąd wynika: dla $m=2\nu$ (parzystego), $i=\nu$

$$I_{2\nu}=\int_0^1 x^{n+1}Z_\nu Z_{\nu-1}\,dx=\int_0^1 Z_\nu\frac{d^2}{dx^2}\left(x^{n+3}\frac{d^2 Z_\nu}{dx^2}\right)dx=\int_0^1 x^{n+3}\left(\frac{d^2 Z_\nu}{dx^2}\right)^2 dx>0,$$

zaś dla $m=2\nu+1$ (nieparzystego), $i=\nu$:

$$(53)\quad I_{2\nu+1}=\int_0^1 x^{n+1}Z_{\nu-1}Z_{\nu+1}=\int_0^1 x^{n+1}Z_\nu^2\,dx>0.$$

Zatem, szereg (51), który napiszemy w postaci:

$$(51')\quad \int_0^1 x^{n+1} z\,\psi(x)\,dx=I_0+\lambda^2 I_1+\lambda^4 I_2+\ldots+\lambda^{2\nu n} I_m+\ldots$$

jest nie tylko jednostajnie ale także bezwarunkowo zbieżny dla każdej wartości λ. Staje się on identycznie równy zeru wówczas, gdy któryś ze spółczynników $I_m=0$. Wtedy bowiem widocznie jedna z funkcyj $Z_\nu=0$ w całym przedziale $0\sim 1$, a więc według powyżej okazanego twierdzenia $\psi(x)\equiv 0$ dla $0\leqslant x\leqslant 1$. Wyłączywszy ten przypadek, mamy z powodu zbieżności, począwszy od pewnego m już stale:

$$\lambda^2\frac{I_m}{I_{m-1}}<1$$

dla każdego λ, a więc począwszy od pewnego $m=2\nu$, musi być już stale

$$(54)\quad \frac{I_{2\nu}}{I_{2\nu-1}}>\frac{I_{2\nu+1}}{I_{2\nu}}>\frac{I_{2\nu+2}}{I_{2\nu+1}}>\frac{I_{2\nu+3}}{I_{2\nu+2}}>\ldots \quad \text{skąd } I^2_{2\nu+1}>I_{2\nu}I_{2\nu+2}>I_{2\nu-1}I_{2\nu+3}$$

w przeciwnym bowiem razie możnaby znaleść takie λ, że, począwszy od pewnego m:

$$\lambda^2\frac{I_m}{I_{m-1}}\geqslant 1$$

i szereg (51′) byłby rozbieżny.

Z drugiej jednak strony już z nierówności:

$$\int_0^1 x^{n+1}(\alpha Z_{\nu-1}+\beta Z_{\nu+1})^2\,dx<0,$$

czyli według (53) z nierówności:

$$\alpha^2 \int_0^1 x^{n+1} Z^2_{\nu-1}\, dx + 2\alpha\beta \int_0^1 x^{n+1} Z_{\nu-1} Z_{\nu+1}\, dx + \beta^2 \int_0^1 x^{n+1} Z^2_{\nu+1}\, dx$$

$$= \alpha^2 I_{2\nu-1} + 2\alpha\beta I_{2\nu+1} + \beta^2 I_{2\nu+3} > 0,$$

przy dowolnych α, β wynika, że wyróżnik powyższej formy kwadratowej:

$$I_{2\nu-1} I_{2\nu+3} - I^2_{2\nu+1} \geqslant 0,$$

czyli, że zachodzi nierówność:

$$I^2_{2\nu+1} \leqslant I_{2\nu-1} I_{2\nu+3},$$

sprzeczna z nierównością (54). Sprzeczność ta tylko wówczas przestaje istnieć, gdy $I_i = 0$, a więc gdy także $\psi(x) = 0$ w całym przedziale $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Tym sposobem dochodzimy do następującego twierdzenia:

Jeżeli funkcya $\psi(x)$ jest ciągła i nadto jeżeli dla każdego $i = 0, 1, 2, \ldots$

$$\int_0^1 x^{n+1} U_i \psi(x) = 0,$$

to funkcya $\psi(x)$ jest w całym przedziale $0 \leqslant x \leqslant 1$ identycznie równa zeru.

Wiedząc to, weźmy wreszcie pod uwagę szereg (28), o którym okazaliśmy, że jest jednostajnie zbieżny. Mnożąc równość tę (28) przez $x^{n+1} U_k$ i całkując między krańcami 0, 1 wyraz po wyrazie (co jest oczywiście dozwolone), otrzymamy:

$$\int_0^1 x^{n+1} U_k F(x)\, dx = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\int_0^1 x^{n+1} U_i f(x)\, dx}{\int_0^1 x^{n+1} U_i^2\, dx} \int_0^1 x^{n+1} U_i U_k\, dx,$$

albo z uwagi, że

$$\text{dla } i \lesseqgtr k: \int_0^1 x^{n+1} U_i U_k\, dx = 0,$$

mieć będziemy:

$$\int_0^1 x^{n+1} U_k F(x)\, dx = \int_0^1 x^{n+1} U_k f(x)\, dx,$$

czyli:

$$\int_0^1 x^{n+1} U_k [F(x) - f(x)]\, dx = 0$$

dla każdego $k = 0, 1, 2, \ldots$ Ponieważ $f(x)$ z założenia, zaś $F(x)$, określone szeregiem zbieżnym, są funkcyami ciągłemi, przeto na podstawie ostatniego twierdzenia:

$$\psi(x) = F(x) - f(x) = 0, \qquad \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 1$$

czyli jest identycznie:

$$F(x) = f(x)$$

w całym przedziale $0 \sim 1$.

To zaś pozostawało do okazania w tym ustępie.

Nakoniec zauważymy, że jeżeli szereg (25) jest jednostajnie zbieżny, to zbieżny jednostajnie będzie także szereg (24):

$$W = \sum A_i U_i \cos \alpha_i t$$

dla $0 \leqslant x \leqslant 1$ i każdej wartości t.