płytkami kondensatora wynosiła $1\frac{1}{3}$ mm. Szybkość drgań odpowiednich mierzyłem tą samą metodą, o której wyżej. Połowa fali wynosiła 10,5 metr., a zatem czas odpowiadający temu wynosił około $= \frac{1}{30\,000\,000}$ sek. Zjawisko obserwowane podążało więc za tak szybkiemi drganiami, a zatem, jeżeli nawet zachodziło tu działanie następcze, czas trwania jego powinien być krótszym od $\frac{1}{30\,000\,000}$ sekundy.

Wniosek: Jeżeli założymy, że w zjawisku Kerra i zjawisku skręcania magnetycznego płaszczyzny polaryzacyi w cieczach nie ma działania następczego, to żaden ze znanych dotąd w tej dziedzinie faktów nie zdoła temu założeniu zaprzeczyć.

Monachium w Kwietniu
Warszawa w Październiku 1904 r.

D-r ELISABETH STEPHANSEN.

Eine Bemerkung zur Theorie der linearen Differenzengleichungssysteme mit constanten Coefficienten.

(UWAGA DO TEORYI RÓWNAŃ RÓŻNICOWYCH LINIOWYCH O SPÓŁCZYNNIKACH STAŁYCH).

Es ist von Herrn Guldberg in dieser Zeitschrift in einer Arbeit über lineare Differenzengleichungen [1]) gezeigt worden, dass, wenn ein lineares Differenzengleichungssystem von der Form

$$(1) \qquad y_{x+1}^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\, y_x^{(k)}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

gegeben ist, wo die Coefficienten A_{ik} Constanten sind, die allgemeine Lösung dieses Systems durch die n Gleichungen

$$(2) \qquad y_x^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} c_k\, c_{ik}\, a_k^x, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

geliefert wird. Es sind hier die Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die Wurzeln der Gleichung

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} A_{11}-a, & A_{12}, & \ldots, & A_{1n} \\ A_{21}, & A_{22}-a, & \ldots, & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & & \ldots, & A_{nn}-a \end{vmatrix} = 0,$$

[1]) Prace mat.-fiz., t. 15, p. 23—28.

und die $e_{\alpha\beta}$ werden aus den Gleichungen

$$(4)\qquad \begin{cases} (A_{11}-a)\,e_1 + A_{12}\,e_2 + \ldots + A_{1n}\,e_n = 0 \\ A_{21}\,e_1 + (A_{22}-a)\,e_2 + \ldots + A_{2n}\,e_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{n1}\,e_1 + A_{n2}\,e_2 \qquad + \ldots + (A_{nn}-a)\,e_n = 0 \end{cases}$$

bestimmt.

Da die Grössen $e_{\alpha\beta}$ rationale Funktionen der a sind, kann man die Lösungen (2) auch in der Form

$$(5)\qquad y_x^{(i)} = \sum_{k=1}^{k=n} c_k\, f_i(a_k)\, a_k^x, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

schreiben.

Diese Form der allgemeinen Lösung setzt inzwischen voraus, dass die Wurzeln der Gleichung (3) sämmtlich von einander verschieden sind.

Wir wollen daher untersuchen, welche Form die allgemeine Lösung des Systems (1) hat, wenn die Gleichung (3) m e h r f a c h e Wurzeln besitzt.

Zu diesem Zwecke werden wir zunächst voraussetzen, dass zwei der Wurzeln der Gleichung (3) zusammenfallen. Wir nehmen dann eine der Gleichungen (5), z. B. die erste, und suchen sie so umzuformen, dass der Ausdruck für $y_x^{(1)}$ unbestimmt wird, wenn wir $a_2 = a_1$ setzen. Wir schreiben daher:

$$y_x^{(1)} = C_1 f_1(a_1)\, a_1^x + C_2 \frac{f_1(a_2)\, a_2^x - f_1(a_1)\, a_1^x}{a_2 - a_1} + c_3 f_1(a_3)\, a_3^x + \ldots + c_n f_1(a_n)\, a_n^x,$$

wo $C_1 = c_1 + e_2$ und $C_2 = (a_2 - a_1)\, e_2$ als neue, willkürliche Constanten anzusehen sind.

Das zweite Glied lässt sich jetzt für $a_2 = a_1$ durch einen Grenzübergang bestimmen, und man erhält:

$$y_x^{(1)} = C_1 f_1(a_1)\, a_1^x + C_2 \frac{\partial (f_1(a_1))}{\partial a_1}\, a_1^x + c_3 f_1(a_3)\, a_3^x + \ldots + c_n f_1(a_n)\, a_n^x$$

oder

$$y_x^{(1)} = c_1 e_{11}\, a_1^x + c_2 \frac{\partial (e_{11}\, a_1^x)}{\partial a_1} + c_3 e_{13}\, a_3^x + \ldots + c_n e_{1n}\, a_n^x,$$

und ähnlich für die übrigen Gleichungen.

In derselben Weise geht man vom Fall einer doppelten zu dem einer dreifachen Wurzel über, u. s. w. Man erhält, wenn die Gleichung (3) die Wurzel a_1 r_1—fach, die Wurzel a_2 r_2—fach ..., die Wurzel a_λ r_λ—fach enthält, die allgemeine Lösung des Differenzengleichungssystems (1) in der folgenden Gestalt:

$$y_x^{(1)} = \sum_{\nu=0}^{r_1-1} c_{1\nu} \frac{\partial^\nu (e_{11}\, a_1^x)}{\partial a_1^\nu} + \sum_{\nu=0}^{r_2-1} c_{2\nu} \frac{\partial^\nu (e_{12}\, a_2^x)}{\partial a_2^\nu} + \ldots + \sum_{\nu=0}^{r_\lambda-1} c_{\lambda\nu} \frac{\partial^\nu (e_{1\lambda}\, a_\lambda^x)}{\partial a_\lambda^x},$$

$$y_x^{(2)} = \sum_{\nu=0}^{r_1-1} c_{1\nu} \frac{\partial^\nu (e_{21}\, a_1^x)}{\partial a_1^\nu} + \sum_{\nu=0}^{r_2-1} c_{2\nu} \frac{\partial^\nu (e_{22}\, a_2^x)}{\partial a_2^\nu} + \ldots + \sum_{\nu=0}^{r_\lambda-1} c_{\lambda\nu} \frac{\partial^\nu (e_{2\lambda}\, a_\lambda^x)}{\partial a_\lambda^x},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_x^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{r_1-1} c_{1\nu} \frac{\partial^\nu (e_{n1}\, a_1^x)}{\partial a_1^\nu} + \sum_{\nu=0}^{r_2-1} c_{2\nu} \frac{\partial^\nu (e_{n2}\, a_2^x)}{\partial a_2^\nu} + \ldots + \sum_{\nu=0}^{r_\lambda-1} c_{\lambda\nu} \frac{\partial^\nu (e_{n\lambda}\, a_\lambda^x)}{\partial a_\lambda^\nu}.$$

Die Grössen $c_{1\nu}, c_{2\nu}, \ldots, c_{\lambda\nu}$ bedeuten für $\nu = 0, \ldots, r_1 - 1;\ 0 \ldots r_2 - 1; \ldots;\ 0 \ldots r_{\lambda-1}$, willkürliche Constanten, deren Anzahl n ist.

Christiania.