szeniu użytej przezemnie lunetki [1]), wskutek czego jaskrawość obrazu otworku była większa, aniżeli w zwykłych warunkach, t. j. przy użyciu lunety o dość znacznem, jak zwykle w spektrometrach, powiększeniu. Błąd prawdopodobny przeciętnego wyniku z analogicznego szeregu dostrzeżeń nie przekraczał niewielu jednostek trzeciego znaku dziesiętnego.

Warszawa, kwiecień 1905 r.

Pracownia Fizyczna Instytutu Politechnicznego.

---

[1]) Powiększenie jej przy ustawieniu „na półcień" równe jest mniej więcej powiększeniu zwykle używanych w sacharymetrach lunetek.

G. MITTAG-LEFFLER.

O PRZEDSTAWIENIU ANALITYCZNEM JEDNOZNACZNEJ GAŁĘZI FUNKCYI ANALITYCZNEJ. [1])

NOTA PIERWSZA. [2])

Oznaczmy przez a punkt płaszczyzny zmiennej zespolonej x i dołączmy do a ciąg nieskończony wielkości:

$$F(a),\ F^{(1)}(a),\ F^{(2)}(a),\ F^{(\mu)}(a), \ldots, \tag{1}$$

w którym każda wielkość jest dokładnie wyznaczona, skoro znamy miejsce, jakie zajmuje w ciągu. Dajmy — co będzie możliwe nieskończenie wieloma sposobami, — że te wielkości F zostały obrane w ten sposób, iż granica wyższa granicznych wartości [3]) modułów $\left|\sqrt[\mu]{\frac{1}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)}\right|$ jest liczbą skończoną, naprzykład $\frac{1}{r}$.

---

[1]) Przekład z „Acta mathematica", za upoważnieniem Autora. *S. D.*

[2]) Ta nota jest wyciągiem z różnych komunikatów przedstawionych Akademii nauk w Stockholmie w ciągu roku 1898 i ogłoszonych pod następującemi tytułami: „Om en generalisering of potensserien" (9 marca 1898), „Om den analytiska framställningen af en allmän monogen funktion. Första meddelande" (11 maja 1898), „Andra meddelande" (11 maja 1898), „Tredje meddelande" (14 września 1898).

[3]) Jeżeli P oznacza ciąg nieskończony liczb, wtedy liczbą graniczną lub wartością graniczną tych liczb nazywamy taką liczbę, że w jej sąsiedztwie tak blizkiem, jak chcemy, znajduje się nieskończoność liczb należących do P. Nieskończenie wielką nazywa się wartość graniczna szeregu wtedy, gdy w sąsiedztwie tak blizkiem zera, jak

Jeżeli przy pomocy wielkości F, jako elementów, utworzymy szereg potęgowy

$$(2) \qquad \mathfrak{P}(x \mid a) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu},$$

szereg ten będzie zbieżny, gdy x spełniać będzie warunek $|x-a| < r$; rozbieżny, gdy $|x-a| < r$ [1]).

Obszar $|x-a| < r$, który w płaszczyźnie zmiennej x jest kołem o środku w punkcie a i promieniu równym wielkości dodatniej r, jest kołem zbieżności szeregu $\mathfrak{P}(x \mid a)$ [2]).

W teoryi funkcyj analitycznych, zbudowanej przez Weierstrassa, funkcya jest określona przez szereg $\mathfrak{P}(x \mid a)$ i przez przeprowadzenie (przedłużenie) analityczne tego szeregu. Każda funkcya analityczna jest dokładnie wyznaczona, gdy dane są elementy $F(a), F^{(1)}(a), F^{(2)}(a), \ldots, F^{(\mu)}(a)$. Oznaczamy ogólnie przez $F(x)$ funkcyę, która całkowicie jest określona przez te elementy.

Jeżeli K jest kontynuum jednospójnem, nie pokrywającem nigdzie samego siebie, zawierającem punkt a i takiem, że gałąź funkcyi $F(x)$, utworzona przez szereg $\mathfrak{P}(x \mid a)$ i jego przeprowadzenie analityczne wewnątrz K, pozostaje jednokształtna i regularna, wtedy gałąź tę oznaczać będziemy przez $FK(x)$.

Zagadnienie, jakiem zająć się mamy, polega na znalezieniu przedstawienia analitycznego gałęzi $FK(x)$, obranej tak rozciągle, jak można.

Z samej definicyi funkcyi analitycznej $F(x)$ i definicyi gałęzi $FK(x)$ wynika bezpośrednio rodzaj przedstawienia analitycznego w mowie będącej gałęzi $FK(x)$.

---

chcemy, znajduje się nieskończenie wiele liczb, będących odwrotnościami liczb, należących do ciągu P. Jeżeli ciąg P jest utworzony z jakichkolwiek liczb rzeczywistych i jeżeli pomiędzy temi liczbami istnieje jedna nie mniejsza od żadnej innej, liczba ta nazywa się granicą wyższą ciągu P. Jeżeli pomiędzy liczbami, należącemi do P, istnieją większe od wszelkiej liczby danej, wtedy granica wyższa ciągu P nazywa się nieskończonością. Jeżeli żaden z tych dwóch przypadków nie zachodzi, istnieje zawsze, jak tego dowiódł Weierstrass w sposób ścisły, liczba większa od wszystkich liczb, należących do P, i taka, że w każdem sąsiedztwie tej liczby istnieje nieskończenie wiele wartości, należących do P. Ta liczba nazywa się wtedy granicą wyższą ciągu P. Granica niższa ciągu P może być określona w sposób analogiczny.

[1]) Patrz Cauchy, Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique, 1-re partie. Analyse algébrique, Paris. 1821, Chap. 9 § 2, théorème I, p. 286.

[2]) Uważamy obwód koła za nie należący do samego koła.

W rzeczy samej, aby otrzymać przedstawienie tej gałęzi, dość uskutecznić odliczalną liczbę przeprowadzeń analitycznych szeregu $\mathfrak{P}(x \mid a)$, naprzykład:

$$\mathfrak{P}_\nu(x \mid a_\nu) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\mu}} \left(\frac{d^\mu FK(x)}{dx^\mu}\right)_{x=a_\nu} (x-a_\nu)^\mu,$$

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots; \quad a_0 = a; \quad \mathfrak{P}_0(x \mid a) = \mathfrak{P}(x \mid a).$$

Szeregi $\mathfrak{P}(x \mid a_\nu)$ są utworzone przy pomocy elementów:

$$\left(\frac{d^\mu FK(x)}{dx^\mu}\right)_{x=a_\nu}; \qquad \left(\begin{smallmatrix}\mu=0,1,2\ldots\\ \nu=0,1,2\ldots\end{smallmatrix}\right)$$

a same te elementy mogą być obliczone przy pomocy elementów pierwotnych

$$F^\mu(a); \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots; \quad F^{(0)}(a) = F(a)).$$

Lecz, aby wykonać ten rachunek, trzeba znać promień zbieżności każdego szeregu $\mathfrak{P}_\nu(x \mid a_0)$, albowiem niepodobna uskutecznić bezpośrednio przeprowadzenia takiego szeregu, nie znając promienia zbieżności. Wymieniliśmy już twierdzenie Cauchy'ego, dające nam ten promień zbieżności, wyrażony przez odwrotność granicy wyższej wielkości dodatnich

$$\left| \sqrt[\mu]{\frac{1}{\underline{|\mu}} \left(\frac{d^\mu FK(x)}{dx^\mu}\right)} \right|_{x=a_\nu}; \qquad \mu = 0, 1, 2, \ldots$$

widzimy, że ten sposób przedstawienia gałęzi $FK(x)$ za pomocą wyrażeń analitycznych jest nadzwyczajnie skomplikowany i wysoce przestępny. Zdaje się zresztą, że Weierstrass uważa przeprowadzenie analityczne jedynie za sposób definicyi funkcyi analitycznej. Znane są pożytki tej definicyi i nie ma potrzeby zatrzymywać się nad tem.

Na pierwszy rzut oka wydaje się, że teorya Cauchy'ego, zbudowana na całkiem odmiennych zasadach niż teorya Weierstrassa, posiada znaczną wyższość nad tą ostatnią, jeżeli chodzi o przedstawienie analityczne gałęzi $FK(x)$. Istotnie, przedstawienie to daje nam wzór:

$$(3) \qquad FK(x) = \int^{S} \frac{FK(z)}{z-x}\, dz,$$

gdzie całka jest wzięta po obwodzie zamkniętym S, znajdującym się wewnątrz kontynuum K i tak blizkiem ograniczenia tego kontynuum, jak chcemy. Z definicyi zaś całki jest widoczne, że całkę (3) można zastąpić sumą nieskończenie wielu funkcyj wymiernych zmiennej x, których spółczynniki wyrażają się przez wartości specyalne tej zmiennej w liczbie odliczalnej, i przez odpowiednie wartości gałęzi $FK(x)$. To spostrzeżenie było punktem wyjścia magistralnej pracy M. Rungego „Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen" ogłoszonej w t. VI dziennika „Acta mathematica" (§ 1, str. 229—239). Przedstawienie analityczne, które w ten sposób otrzymujemy, wymaga zatem, aby była znana wartość gałęzi $FK(x)$ w nieskończonej i odliczalnej liczbie punktów, które mogą zbliżać się nieograniczenie do obwodu kontynuum K. Otóż, w zwykłych problematach Analizy, te wartości nie są wcale znane. W ogóle, danym tylko bywa szereg wartości $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, $F^{(2)}(a) \ldots$ Jeżeli stajemy na zwykłym punkcie widzenia, to tak jest, naprzykład, w rozległym problemacie całkowania równań różniczkowych.

Gdy więc będzie szło o znalezienie przedstawienia analitycznego gałęzi $FK(x)$, trzeba będzie wywieść je z elementów (1) i starać się przy pomocy jedynie tych elementów zbudować wzór, przedstawiający całkowitą gałąź $FK(x)$.

Oznaczmy przez C koło zbieżności szeregu (2). Wyrażenie

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\mu}} F^{\mu}(a)\,(x-a)^{\mu}$$

da nam wtedy przedstawienie analityczne funkcyi $FC(x)$, równość zaś

$$FC(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)\,(x-a)^{\mu}$$

zachodzi dla wszystkich punktów koła C.

Wyrażenie to jest zbudowane przy pomocy elementów

$$F(a)\,,\ F^{(1)}(a)\,,\ F^{(2)}(a)\,,\ldots$$

oraz liczb wymiernych $\frac{1}{\underline{|\mu}}$, niezależnych od wyboru tych elementów.

Czy jest możebne otrzymać dla gałęzi $FK(x)$, mającej największą możliwą rozciągłość, przedstawienie analityczne tej natury? Zobaczymy, że odpowiedź jest twierdząca, że można tedy wypełnić lukę teoryi funkcyj analitycznych. W samej rzeczy, do tej pory nie umiano dać dla gałęzi ogólnej $FK(x)$ przedstawienia analitycznego podobnego do tego, które w samych początkach teoryi znaleziono dla gałęzi $FC(x)$.

Aby z gruntu zbadać postawione pytanie, należy określić obszar K, tak rozległy, jak można. Uczynimy to, wprowadzając nowe pojęcie geometryczne: gwiazdę.

Niechaj w płaszczyźnie zmiennej x będzie pole, utworzone w sposób następujący: na około punktu stałego a obróćmy raz jeden wektor (półprostą) l; na każdym wektorze wyznaczmy w sposób jednoznaczny punkt, dajmy na to a_l, którego odległość od punktu stałego a będzie większa od pewnej danej wielkości dodatniej, tej samej dla wszystkich wektorów. Ten punkt a_l będzie mógł być położony w odległości skończonej lub nieskończonej od punktu a. W przypadku, gdy odległość punktu a od punktu a_l jest skończona, wyłączymy z płaszczyzny x tę część wektora, która rozciąga się od a_l do nieskończoności. Nadajemy nazwę gwiazdy obszarowi, który pozostaje po wykonaniu wszystkich tych cięć w płaszczyźnie zmiennej x.

Widzimy, że tak określona gwiazda jest kontynuum, utworzonem z jednej sztuki i jednospójnem.

Dołączmy teraz do a elementy

$$F(a)\,,\ F^{(1)}(a)\,,\ F^{(2)}(a)\,,\ldots,F^{(\mu)}(a)\ldots$$

i utwórzmy szereg:

$$\mathfrak{P}(x\,|\,a) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\mu}} F^{\mu}(a)\,(x-a)^{\mu}\,.$$

Wykonajmy przeprowadzenie analityczne szeregu $\mathfrak{P}(x\,|\,a)$ wzdłuż wektora, wychodzącego z punktu a.

Zajść może, że każdy punkt tego wektora należy do koła zbieżności szeregu, który jest właśnie tem przeprowadzeniem analitycznem funkcyi $\mathfrak{P}(x\,|\,a)$, otrzymanem wzdłuż wektora; ale jest też możliwe, że, idąc wzdłuż wektora, napotkamy pierwszy punkt, który nie jest położony wewnątrz koła zbieżności żadnego z przeprowadzeń analitycznych funkcyi $\mathfrak{P}(x\,|\,a)$ wzdłuż wektora. W tym ostatnim przypadku wyłączymy z płaszczyzny zmiennej x część wektora, zawartą pomiędzy tym punktem a nieskończonością. Obracając raz jeden wektor około punktu a, otrzymamy gwiazdę taką, jak była określona poprzednio.

Ponieważ gwiazda ta jest dana w sposób jednoznaczny, skoro tylko są ustalone elementy (1), nazwiemy ją gwiazdą należącą do elementów [1]). Oznaczać ją będziemy w ogóle przez A, pierwszą literą wyrazu greckiego ἀστήρ.

---

[1]) Wprowadziłem poraz pierwszy pojęcie gwiazdy należącej do elementów (1) w cytowanej już niżej nocie: „Om en generalisering etc.".

Określając gwiazdę, obraliśmy jako wektory półproste. Łatwo widzieć, że można było wziąć także linie krzywe, określone w odpowiedni sposób.

W zupełnej analogii z terminologią: „gwiazda, należąca do elementów (1)" mówić będziemy o kole, należącem do tych elementów, które jest właśnie kołem zbieżności szeregu:

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)\,.\,(x-a)^{\mu}\,. \tag{2}$$

Mówić też będziemy o funkcyi $F(x)$ i o gałęzi funkcyjnej $FA(x)$, należącej do tych elementów.

Po tym wstępie możemy wypowiedzieć twierdzenie główne, które będzie później udowodnione.

Gałąź $FA(x)$ może być zawsze przedstawiona przez szereg

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} G_{\mu}(x)\,,$$

w którym $G_{\mu}(x)$ oznaczają funkcye całkowite wymierne zmiennej x:

$$G_{\mu}(x) = \sum_{(\nu)} c_{\nu}^{(\mu)} F^{\nu}(a)\,(x-a)^{\nu}\,,$$

gdzie spółczynniki $c_{\nu}^{(\mu)}$ są dane a priori, niezależnie od wyboru wielkości a i $F^{\nu}(a)$ $(\nu = 0, 1, 2 \ldots \infty)$.

Ten szereg $\sum_{\mu=0}^{\infty} G_{\mu}(x)$ jest zbieżny dla każdego punktu gwiazdy A i jednostajnie zbieżny w każdym obszarze, znajdującym się wewnątrz A.

W Nocie pierwszej podajemy dowodzenie tego twierdzenia, godne uwagi ze względu na bardzo prostą formę spółczynników $c_{\nu}^{(\mu)}$. W następnych Notach podamy inne dowodzenia, różniące się przedewszystkiem odmiennem wyznaczeniem spółczynników $c_{\nu}^{(\mu)}$. Zajmiemy się także i innemi pytaniami, należącemi do tego przedmiotu oraz ich zastosowaniami.

W dowodzeniu, które chcemy wyłożyć w tej Nocie, dogodnem będzie użycie konstrukcyi geometrycznej, odnoszącej się do jakiejkolwiek gwiazdy, dajmy na to E, która nie jest całkowitą płaszczyzną zmiennej x.

Niechaj a będzie środek gwiazdy E i niechaj n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Określmy gwiazdę $E^{(n)}$ w sposób następujący. Ustalmy

wektor l, wychodzący z punktu a. Jeżeli oznaczymy przez r wielkość dodatnią, dostatecznie małą i ograniczymy wektor do długości $(n-1)\,r$, wtedy każde koło o promieniu r, opisane przez jakikolwiek punkt tego ograniczonego wektora, jako ze środka, stanowić będzie część gwiazdy E. Jeżeli oznaczymy przez ϱ granicę wyższą promienia r, odetniemy na wektorze l długość $n\varrho$ i obrócimy raz jeden wektor l około punktu a, otrzymamy gwiazdę $E^{(n)}$. Widzimy, że gwiazda $E^{(1)}$ jest kołem, że gwiazda $E^{(n+1)}$ obejmuje w sobie gwiazdę $E^{(n)}$ i że wszystkie gwiazdy $E^{(1)}, E^{(2)}, E^{(3)}, \ldots$ są częściami składowemi gwiazdy E.

Niechaj dalej będzie α wielkością rzeczywistą dodatnią, mniejszą od jedności. Łącznie z gwiazdą $E^{(n)}$ rozważać będziemy n innych gwiazd $E_{\mu}^{(n)}$ $(\mu = 1, 2 \ldots n)$, które otrzymujemy, zastępując ϱ kolejno przez

$$\varrho_{\mu} = \alpha^{\mu} \varrho\,. \tag{4}$$

Widzimy, że gwiazda $E_{\mu}^{(n)}$ jest położona wewnątrz gwiazdy

$$E_{\mu-1}^{(n)}\,(\mu = 1, 2 \ldots n\,;\; E_{0}^{(n)} = E^{(n)})\,.$$

Niechaj teraz $\mathfrak{E}$ będzie gwiazdą jakąkolwiek, X zaś obszarem skończonym wewnątrz $\mathfrak{E}$; będzie można zawsze znaleść gwiazdę skończoną E spółśrodkową z $\mathfrak{E}$, leżącą całkowicie wewnątrz $\mathfrak{E}$ i obejmującą w swem wnętrzu cały obszar X.

W samej rzeczy, niechaj X' będzie gwiazdą spółśrodkową z $\mathfrak{E}$ i opisaną na X. Tak oznaczymy gwiazdę zamkniętą, utworzoną w sposób następujący: Jeżeli z punktu a poprowadzimy jakikolwiek wektor i oznaczymy przez R granicę wyższą odległości od punktu a do punktów tego wektora, należących do obszaru X [1]), wszystkie punkty wektora, których odległość od a jest mniejsza od R lub równa R, należeć będą do X'; nie należeć zaś będą do X' punkty, których odległość od a jest większa od R.

Jest widoczne, że gwiazda X' jest skończona, gdy obszar X jest skończony.

Łatwo też widzieć, że gwiazda X' jest położona wewnątrz gwiazdy $\mathfrak{E}$, jeżeli ten przypadek zachodzi dla obszaru X. W rzeczy samej, niechaj δ będzie wielkością dodatnią dość małą, aby „otoczenie δ" jakiegokolwiek punktu obszaru X stanowiło część składową gwiazdy $\mathfrak{E}$. Niechaj x będzie jakimkolwiek punktem obszaru X', r zaś odległością punktu a od x. Niech,

1) O obszarze skończonym X mówimy, że leży wewnątrz innego obszaru X', jeżeli istnieje wielkość dodatnia r taka, że gdy x jest jakimkolwiek punktem należącym do X, wtedy wszystkie punkty x', dla których $|x'-x| > r$, należą do X'; wyrażamy to niekiedy, mówiąc, że „otoczenie r" zmiennej x należy do X'.

jak poprzednio, R będzie należącą do X' częścią wektora, wychodzącego z punktu a i przechodzącego przez punkt x. Ponieważ punkt na krańcu tego wektora znajduje się na ograniczeniu obszaru X, jego otoczenie δ stanowi część składową gwiazdy $\mathfrak{C}$; a ponieważ $\mathfrak{C}$ jest gwiazdą, mającą środek w punkcie a, przeto otoczenie $\frac{r}{R}\delta$ zmiennej x stanowić będzie część gwiazdy $\mathfrak{C}$. Niechaj $\mathfrak{R}$ będzie granicą wyższą wielkości R, k zaś wielkością dodatnią, ustaloną w jakikolwiek sposób; można będzie powiedzieć a fortiori, że otoczenie $\frac{k}{\mathfrak{R}}\delta$ punktu x jest częścią gwiazdy $\mathfrak{C}$, jeżeli tylko r, to jest odległość a od x, nie jest mniejsza od k. Ustalmy teraz, co jest zawsze możliwe, k w ten sposób, aby koło, opisane z punktu a jako środka promieniem

$$k\left(1+\frac{\delta}{\mathfrak{R}}\right)=k+\frac{k}{\mathfrak{R}}\delta,$$

było częścią gwiazdy $\mathfrak{C}$. Wtedy otoczenie $\delta'=\frac{k}{\mathfrak{R}}\delta$ punktu x będzie częścią gwiazdy $\mathfrak{C}$, nawet gdy r jest mniejsze od k, i to samo będzie przeto dla wszystkich położeń punktu x wewnątrz X'. A zatem X', jak to powiedzieliśmy, leży wewnątrz gwiazdy $\mathfrak{C}$.

Niechaj będzie teraz E gwiazdą X', powiększoną w proporcyi $\mathfrak{R}$ do $\mathfrak{R}+\frac{1}{2}\delta'$; gwiazda E będzie leżała całkowicie wewnątz $\mathfrak{C}$ i sama znów zawierać będzie w swem wnętrzu obszar X.

Możemy pójść jeszcze dalej. Można zawsze znaleść liczbę $\bar{n}$ dostatecznie wielką, aby obszar X znajdował się wewnątrz gwiazdy $E^{(n)}$, skoro tylko $n\geqq\bar{n}$. W samej rzeczy, oznaczmy przez δ granicę niższą odległości pomiędzy punktem wewnątrz gwiazdy E a punktem na ograniczeniu obszaru X; δ będzie wielkością dodatnią i większą od zera. Niechaj nadto $\mathfrak{R}$ będzie promieniem koła, mającego środek swój w punkcie a i obejmującego w sobie cały obszar X. Dość wziąć $\bar{n}$ większe od $\frac{\mathfrak{R}}{\delta}$, aby być pewnym, że cały obszar X leżeć będzie wewnątrz $E^{(n)}$, skoro tylko $n\geqq\bar{n}$.

Wybrawszy liczbę $\bar{n}$, spełniającą ten warunek, można będzie wybrać a w ten sposób, aby nietylko $E^{(n)}$ lecz i $E_n^{(n)}$ obejmowało w swem wnętrzu cały obszar X. W istocie, jeżeli uczynimy a zależnem od n w ten sposób, aby a^n zdążało do jedności, gdy n rośnie nieograniczenie, wtedy zawsze, począwszy od pewnej wartości n, gwiazda $E_n^{(n)}$ obejmować będzie w swem wnętrzu obszar X.

Po tych uwagach wstępnych, załóżmy, że X jest jakimkolwiek obszarem skończonym, położonym wewnątrz gwiazdy A, należącej w znaczeniu

wyżej wyjaśnionem do elementów $F(a), F'(a), F''(a)\ldots$ Otóż odnośnie do tej gwiazdy A utworzymy tak gwiazdę skończoną E, zawierającą w swem wnętrzu obszar X i położoną wewnątrz gwiazdy A, jak i gwiazdę $E^{(n)}$ oraz n gwiazd dołączonych $E_1^{(n)}, E_2^{(n)},\ldots, E_n^{(n)}$, gdzie liczba całkowita n jest obrana dowolnie.

Przyjmiemy, że n jest dostatecznie wielkie, by gwiazda $E_n^{(n)}$ obejmowała w swem wnętrzu obszar X.

Wewnątrz i na ograniczeniu gwiazdy E granica wyższa wartości $|FA(x)|$ będzie wielkością skończoną, którą oznaczymy przez g.

W celu uproszczenia wzorów, niżej podać się mających, pisać będziemy ξ zamiast $\frac{x-a}{n}$, ξ_μ zamiast $a+\mu\frac{x-a}{n}$, a przez $F^{(\mu)}(x)$ rozumieć będziemy $\frac{d^\mu FA(x)}{dx^\mu}$.

Niechaj teraz będzie x punktem obszaru X. Ustalmy wektor, wychodzący z punktu a i przechodzący przez punkt x, oraz wielkość dodatnią ϱ, odpowiadającą temu wektorowi w sposób wskazany powyżej (str. 7). Jeżeli wielkość z czyni zadość warunkowi

$$(5)\qquad |z-\xi_{n-1}|\leqq\varrho,$$

wtedy z znajdować się będzie wewnątrz gwiazdy E lub na jej ograniczeniu; będzie:

$$(6)\qquad FA(z)=\sum_{\lambda_1=0}^{\infty}\frac{1}{\underline{|\lambda_1}}F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})\,(z-\xi_{n-1})^{\lambda_1}.$$

Stąd, na zasadzie znanego twierdzenia Weierstrassa, podanego w r. 1841 w rozprawie „Zur Theorie der Potenzreihen" (Werke. Bd. 1, s. 67) będzie:

$$(7)\qquad \left|\frac{1}{\underline{|\lambda_1}}F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})\right|\leqq g\varrho^{-\lambda_1}.$$

Punkt x, należąc do obszaru X, należeć będzie równocześnie do gwiazdy $E_1^{(n)}$ i będzie $|\xi|<\varrho_1$, gdzie ϱ_1 jest określone przez wzór (4). A zatem:

$$(8)\qquad \left|\frac{1}{\underline{|\lambda_1}}F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})\,\xi^{\lambda_1}\right|\leqq g\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right)^{\lambda_1}=ga^{\lambda_1}.$$

Jeżeli x należy do gwiazdy $E_1^{(n)}$ i jeżeli z i z_1 obrano zgodnie z warunkami:

$$(9)\qquad |z_1-\xi_{n-2}|\leqq\varrho_1,\quad |z-z_1|\leqq\varrho-\varrho_1,$$

odległość punktu z od punktu ξ_{n-2}, położonego na wektorze, idącym od a do x, jest co najwyżej równa ϱ, z zaś należy do wnętrza lub do ograniczenia gwiazdy E. Będzie zatem dla wszystkich wartości z, czyniących zadość warunkowi (9):

$$FA(z) = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(z_1)(z-z_1)^{\lambda_1}, \tag{10}$$

a więc, na mocy twierdzenia Weierstrassa:

$$\left| \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(z_1) \right| \leqq g\,(\varrho-\varrho_1)^{-\lambda_1}. \tag{11}$$

Mnożąc przez $|(z_1-\xi_{n-2})^{\lambda_1}| \leqq \varrho_1^{\lambda_1}$, otrzymujemy bezpośrednio:

$$\left| \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(z_1)(z_1-\xi_{n-2})^{\lambda_1} \right| \leqq g \left(\frac{\varrho_1}{\varrho-\varrho_1}\right)^{\lambda_1} = g\left(\frac{a}{1-a}\right)^{\lambda_1}. \tag{12}$$

Mamy:

$$F^{(\lambda_1)}(z_1) = \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_2}} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-1})(z_1-\xi_{n-2})^{\lambda_2}, \tag{13}$$

a zatem:

$$\frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(z_1)(z_1-\xi_{n-2})^{\lambda_1} = \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})(z_1-\xi_{n-2})^{\lambda_1+\lambda_2}. \tag{14}$$

Stosując jeszcze raz twierdzenie Weierstrassa, otrzymujemy na zasadzie wzorów (12) i (14):

$$\left| \frac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2}) \right| \leqq g\left(\frac{a}{1-a}\right)^{\lambda_1} \varrho_1^{-(\lambda_1+\lambda_2)}. \tag{15}$$

Ponieważ punkt x leży nie tylko wewnątrz $E_1^{(n)}$, ale także wewnątrz $E_2^{(n)}$, przeto $\xi = \frac{x-a}{n}$ jest co do wartości liczebnej mniejsze od ϱ_2, i będzie:

$$\left| \frac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\,\xi^{\lambda_1+\lambda_2} \right| \leqq g\left(\frac{a}{1-a}\right)^{\lambda_1} a^{\lambda_1+\lambda_2}. \tag{16}$$

Idąc w tenże sposób dalej, będziemy mieli ostatecznie do rozważania następujący ciąg zmiennych $z_{n-1}, z_{n-2}, \ldots, z_1, z$, poddanych warunkom:

$$\begin{gathered} |z_{n-1}-a| \leqq \varrho_{n-1}, \quad |z_{n-2}-z_{n-1}| \leqq \varrho_{n-2}-\varrho_{n-1}, \ldots, \\ |z_1-z_2| \leqq \varrho_1-\varrho_2, \quad |z-z_1| \leqq \varrho-\varrho_1. \end{gathered} \tag{17}$$

Jest widoczne, że dopuszczalne wartości wszystkich tych zmiennych należą wszystkie do wnętrza lub do ograniczenia obszaru E.

Otrzymamy kolejno:

$$\left\{\begin{aligned}
& FA(z) = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(z_1)(z-z_1)^{\lambda_1}, \\
& \left| \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(z_1) \right| \leqq g\,.\,(\varrho-\varrho_1)^{-\lambda_1}, \\
& \left| \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(z_1)(z_1-z_2)^{\lambda_1} \right| \leqq g\left(\frac{\varrho_1-\varrho_2}{\varrho-\varrho_1}\right)^{\lambda_1} = g a^{\lambda_1}, \\
& \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(z_1)(z-z_1)^{\lambda_1} = \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(z_2)(z_1-z_2)^{\lambda_1+\lambda_2}, \\
& \left| \frac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(z_2) \right| \leqq g a^{\lambda_1}(\varrho_1-\varrho_2)^{-(\lambda_1+\lambda_2)}, \\
& \left| \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} \frac{1}{\underline{|\lambda_2}} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(z_2)(z_2-z_3)^{\lambda_1+\lambda_2} \right| \leqq g a^{\lambda_1}\,.\,a^{\lambda_1+\lambda_2}, \\
& \frac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(z_2)(z_2-z_3)^{\lambda_1+\lambda_2} = \sum_{\lambda_3=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\,\underline{|\lambda_3}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}(z_3)(z_2-z_3)^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}, \\
& \left| \frac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\,\underline{|\lambda_3}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}(z_3) \right| \leqq g a^{\lambda_1} a^{\lambda_1+\lambda_2}(\varrho_2-\varrho_3)^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \left| \frac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\ldots\underline{|\lambda_{n-1}}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-1})}(z_{n-1}) \right| \leqq g a^{\lambda_1}\,.\,a^{\lambda_1+\lambda_2}\ldots \\
& \qquad\qquad \ldots a^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-2}}(\varrho_{n-2}-\varrho_{n-1})^{-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-1})}, \\
& \left| \frac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\ldots\underline{|\lambda_{n-1}}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-1})}(z_{n-1})(z_{n-1}-a)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-1}} \right| \leqq g a^{\lambda_1}\,.\,a^{\lambda_1+\lambda_2}\ldots \\
& \qquad\qquad \ldots a^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-2}}\left(\frac{a}{1-a}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-1}}, \\
& \frac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\ldots\underline{|\lambda_{n-1}}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-1})}(z_{n-1})(z_{n-1}-a)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-1}} \\
& \qquad = \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\ldots\underline{|\lambda_n}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a)(z_{n-1}-a)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}, \\
& \left| \frac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\ldots\underline{|\lambda_n}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a) \right| \leqq g a^{\lambda_1} a^{\lambda_1+\lambda_2}\ldots \\
& \qquad\qquad \ldots a^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-2}}\left(\frac{a}{1-a}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-1}} .\,\varrho_{n-1}^{-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)},
\end{aligned}\right. \tag{18}$$

wreszcie, ponieważ x należy do $E_n^{(n)}$,

$$(19)\quad \left| \frac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\ldots\underline{|\lambda_n}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}(a)\, \xi^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n} \right| \leqq g a^{\lambda_1} . a^{\lambda_1+\lambda_2}\ldots$$
$$\ldots a^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-2}} \left(\frac{a}{1-a}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-1}} a^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n} .$$

Ponieważ warunek (5) spełnia się dla $z=x$, więc z wzoru (6) dostajemy:

$$(20)\quad FA(x) = \sum_{\lambda_1=0}^{m_1} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})\, \xi^{\lambda_1} + \varepsilon_1 ,$$

gdzie:

$$(21)\quad \varepsilon_1 = \sum_{\lambda_1=m_1+1}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})\, \xi^{\lambda_1} .$$

Na mocy wzoru (8) będzie tedy:

$$(22)\quad |\varepsilon_1| \leqq g \sum_{\lambda_1=m_1+1}^{\infty} a^{\lambda_1} = g\, \frac{a^{m_1+1}}{1-a} .$$

Dalej, ponieważ warunki (9) spełniają się, gdy $z_1=\xi_{n-1}$, $z=z_1$, otrzymujemy, wykonywając we wzorze (14) sumowanie od $\lambda_1=0$ do $\lambda_1=m_1$:

$$(23)\quad \sum_{\lambda_1=0}^{m_1} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})\, \xi^{\lambda_1} = \sum_{\lambda_1=0}^{m_1}\sum_{\lambda_2=0}^{m_2} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\, \xi^{\lambda_1+\lambda_2} + \varepsilon_2 ,$$

gdzie:

$$(24)\quad \varepsilon_2 = \sum_{\lambda_1=0}^{m_1}\sum_{\lambda_2=m_2+1}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\, \xi^{\lambda_1+\lambda_2} .$$

Będzie zatem na mocy wzoru (16):

$$(25)\quad |\varepsilon_2| \leqq g \sum_{\lambda_1=0}^{m_1}\sum_{\lambda_2=m_1+1}^{\infty} \frac{a^{2\lambda_1+\lambda_2}}{(1-a)^{\lambda_1}} = g\, \frac{\left(\frac{a^2}{1-a}\right)^{m_1}}{1-\frac{1-a}{a^2}} \left(1-\left(\frac{1-a}{a^2}\right)^{m_1+1}\right) \frac{a^{m_2+1}}{1-a} .$$

W tenże sam sposób udowodnimy wzory następujące:

$$(26)\quad FA(x) = \sum_{\lambda_1=0}^{m_1}\sum_{\lambda_2=0}^{m_2}\ldots\sum_{\lambda_n=0}^{m_n} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\ldots\underline{|\lambda_n}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}(a) \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}$$
$$+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_\mu+\ldots+\varepsilon_n ,$$

gdzie:

$$(27)\quad |\varepsilon_\mu| \leqq g\, \frac{\left(\frac{a^\mu}{1-a}\right)^{m_1}}{1-\frac{1-a}{a^\mu}} \cdot \frac{\left(\frac{a^{\mu-1}}{1-a}\right)^{m_2}}{1-\frac{1-a}{a^{\mu-1}}} \cdots \frac{\left(\frac{a^2}{1-a}\right)^{m_{\mu-1}}}{1-\frac{1-a}{a^2}}$$
$$\times\left(1-\left(\frac{1-a}{a^\mu}\right)^{m_1+1}\right)\left(1-\left(\frac{1-a}{a^{\mu-1}}\right)^{m_2+1}\right)\ldots\left(1-\left(\frac{1-a}{a^2}\right)^{m_{\mu-1}+1}\right) \frac{a^{m_\mu+1}}{1-a} .$$

Ostatni wzór można tak napisać:

$$(28)\quad |\varepsilon_\mu| \leqq g\, \frac{\prod_{\nu=1}^{\mu-1}\left(1-\left(\frac{1-a}{a^{\mu-(\nu-1)}}\right)^{m_\nu+1}\right)}{\prod_{\nu=1}^{\mu-1}\left(1-\frac{1-a}{a^{\mu-(\nu-1)}}\right)}\, \frac{a^{m_1+1}}{1-a} \cdot \frac{a^{m_1+m_2}}{(1-a)^{m_1}} \cdot \frac{a^{m_1+m_2+m_3}}{(1-a)^{m_2}} \cdots \frac{a^{m_1+m_2+\ldots+m_\mu}}{(1-a)^{m_{\mu-1}}} .$$

Uczyniliśmy następujące założenie o wielkości a: jest to wielkość dodatnia, mniejsza od jedności, niezależna od x, od a i od stałych (1), lecz zależna od liczby n i to w ten sposób, że a^n dąży nieograniczenie do jedności, gdy równocześnie liczba n rośnie nieograniczenie.

Połóżmy teraz:

$$(29)\quad a = e^{-\frac{1}{n\omega(n)}} ,$$

gdzie $\omega(n)$ jest wielkością dodatnią, zależną od n w ten sposób, że $\lim_{n=\infty}\omega(n)=\infty$. Będzie:

$$(30)\quad 1-a < \frac{1}{n\omega(n)} ,$$

gdy n staje się dostatecznie wielkiem, i równocześnie:

$$a^{-\lambda} = e^{\frac{1}{n\omega(n)}} \leqq e^{\frac{1}{\omega(n)}} \quad \text{dla} \quad \lambda=2,3,\ldots,n .$$

Stąd:

$$\frac{1-a}{a^{\lambda}} \leqq \frac{e^{\frac{1}{\omega(n)}}}{n\omega(n)}, \quad \frac{1}{1-\frac{1-a}{a^{\lambda}}} \leqq \frac{1}{1-\frac{e^{\frac{1}{\omega(n)}}}{n\omega(n)}}$$

i nakoniec:

$$\frac{1}{\prod\limits_{\nu=1}^{\mu-1}\left(1-\frac{1-a}{a^{\mu-(\nu-1)}}\right)} \leqq \left(1-\frac{e^{\frac{1}{\omega(n)}}}{n\omega(n)}\right)^{-n},$$

gdzie dla n nieskończenie wielkiego granica strony drugiej jest jednością. Ponieważ:

$$\prod_{\nu=1}^{\mu-1}\left(1-\left(\frac{1-a}{a^{\mu-(\nu-1)}}\right)^{m_\nu+1}\right) < 1,$$

widzimy, że gdy k jest jakąkolwiek wielkością rzeczywistą, większą od jedności, będzie dla n dostatecznie wielkiego:

$$|\varepsilon_\mu| < gk \, \frac{a^{m_1+1}}{1-a} \cdot \frac{a^{m_1+m_2}}{(1-a)^{m_1}} \cdot \frac{a^{m_1+m_2+m_3}}{(1-a)^{m_2}} \cdots \frac{a^{m_1+m_2+\ldots+m_\mu}}{(1-a)^{m_{\mu-1}}}. \tag{31}$$

Ponieważ jest

$$\frac{a}{1-a} < n\omega(n), \tag{32}$$

przeto z wzoru (31) poznajemy wprost, że kładąc:

$$\left\{\begin{array}{l} m_1 \geqq 2n\omega(n)\log n\omega(n), \\ m_2 \geqq m_1 \,.\, n\omega(n)\log n\omega(n), \\ m_1+m_3 \geqq m_2 \,.\, n\omega(n)\log n\omega(n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_1+m_2+\ldots+m_{\mu-2}+m_\mu \geqq m_{\mu-1} \,.\, n\omega(n)\log n\omega(n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_1+m_2+\ldots+m_{n-1}+m_n \geqq m_{n-1} \,.\, n\omega(n)\log n\omega(n), \end{array}\right. \tag{33}$$

dostaniemy:

$$|\varepsilon_\mu| \leqq gk \,.\, \frac{1}{n\omega(n)}; \quad \mu = 1, 2 \ldots n, \tag{34}$$

a stąd:

$$|\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n| < gk \,.\, \frac{1}{\omega(n)}. \tag{35}$$

Jeżeli całkowite $m_1, m_2 \ldots m_n$ uczynimy zależnemi od n w ten sposób, aby sprawdzały się nierówności (33), przynajmniej dla wielkich wartości na n, wyrażenie

$$g_n(x) = \sum_{\lambda_1=0}^{m_1}\sum_{\lambda_2=0}^{m_2}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{m_n} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}\;\underline{|\lambda_2}\ldots\underline{|\lambda_n}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}(a)\left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n} \tag{36}$$

mające postać:

$$\sum_{(\nu)} c_\nu^{(n)} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu, \tag{37}$$

gdzie spółczynniki $c_\nu^{(n)}$ są liczbami wymiernemi, zależnemi jedynie od n i ν, będzie miało następującą godną uwagi własność:

Jeżeli A jest gwiazdą, należącą do elementów $F(a)$, $F'(a)$, $F^{(2)}(a)\ldots$, X — obszarem jakimkolwiek, położonym wewnątrz A, σ zaś wielkością dodatnią daną, będzie można znaleść liczbę $\bar{n}$ taką, aby nierówność

$$|FA(x) - g_n(x)| < \sigma$$

sprawdzała się dla wszystkich wartości x, należących do obszaru X, o ile tylko n jest większe od $\bar{n}$.

Otrzymany wynik możemy streścić w następującem twierdzeniu:

Twierdzenie 1. Oznaczmy przez A gwiazdę, odpowiadającą elementom $F(a)$, $F'(a)$, $F^{(2)}(a)\ldots$, przez $FA(x)$ odpowiednią gałąź funkcyjną, należącą do tych elementów, i niechaj X będzie jakimkolwiek obszarem skończonym wewnątrz A, σ zaś wielkością dodatnią tak małą, jak się podoba.

Zawsze można znaleść liczbę całkowitą $\overline{n}$ taką, aby różnica pomiędzy $FA(x)$ a wielomianem

(38) $$g_n(x) = \sum_{\nu} c_\nu^{(n)} F^{(\nu)}(a)\,(x-a)^\nu$$

była, dla wartości n większych od $\overline{n}$, mniejsza co do wartości bezwzględnej od σ dla wszystkich wartości x, należących do obszaru X.

Spółczynniki $c_\nu^{(n)}$ mogą być obrane a priori i są zupełnie niezależne od a, od $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, $F^{(2)} \dots$ i od x.

Z wyrażenia (36) otrzymujemy następujący wzór na spółczynniki $c_\nu^{(n)}$:

(39) $$c_\nu^{(n)} = \frac{1}{n^\nu} \sum_{(\nu)} \frac{1}{|\underline{\lambda_1}\,|\underline{\lambda_2} \dots |\underline{\lambda_n}},$$

gdzie $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ przebiegają wszystkie liczby całkowite, włączając w nie zero, czyniące zadość warunkom:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \nu,$$

$$\lambda_1 \leqq m_1, \quad \lambda_2 \leqq m_2, \dots, \lambda_n \leqq m_n,$$

gdzie $m_1, m_2, \dots, m_n$ są liczbami całkowitemi dodatniemi, zależnemi od n.

Zależność liczb $m_1, m_2, \dots, m_n$ od liczby n może być ustanowiona nieskończenie wieloma różnemi sposobami; należy je tylko obrać tak, aby sprawdzała się nierówność (35).

Widzieliśmy, że nierówność (35) zachodzi wtedy, gdy $m_1, m_2, \dots, m_n$ są obrane tak, że czynią zadość nierównościom (33).

Nierówności te utrzymują się dla wartości dostatecznie wielkich na n, jeżeli położymy:

(40) $$m_\mu = n^{2\mu}; \quad \mu = 1, 2 \dots n$$

Przy takim wyborze liczb m_μ, wielomian $g_n(x)$ przybiera postać bardzo prostą:

$$g_n(x) = \sum_{\lambda_1=0}^{n^2} \sum_{\lambda_2=0}^{n^4} \dots \sum_{\lambda_n=0}^{n^{2n}} \frac{1}{|\underline{\lambda_1}\,|\underline{\lambda_2} \dots |\underline{\lambda_n}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)}(a) \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n}.$$

Otrzymana przez nas wyżej forma (39) na spółczynniki $c_\nu^{(n)}$ nie jest bynajmniej jedyną możliwą. Przeciwnie, istnieje nieoznaczenie wiele innych form, odpowiadających warunkom specyalnym. Między innemi są wyrażenia tych spółczynników, utworzone przy pomocy dwu sławnych przestępnych e i π [1]).

Teraz łatwo otrzymać twierdzenie, które postawiliśmy na czele tej pracy.

W samej rzeczy, połóżmy:

(42) $$\begin{cases} G_0(x) = g_0(x) = F(a), \\ G_\mu(x) = g_\mu(x) - g_{\mu-1}(x); \quad \mu = 1, 2 \dots, \infty \end{cases}$$

Będzie:

(43) $$\sum_{\mu=0}^{n} G_\mu(x) = g_n(x).$$

A zatem, gdy x jest jakimkolwiek punktem wewnątrz gwiazdy A, σ wielkością dodatnią tak małą, jak chcemy, będzie dla n dostatecznie wielkiego:

(44) $$\left| FA(x) - \sum_{\mu=0}^{n} G_\mu(x) \right| < \sigma.$$

Równość

(45) $$FA(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} G_\mu(x)$$

ma zatem miejsce dla każdego punktu wewnątrz A.

Szereg

(46) $$\sum_{\mu=0}^{\infty} G_\mu(x)$$

---

[1]) Takie wyrażenia były badane w dwóch notach już wspomnianych: „Om en generalisering of potensserien“ et „Om den analytiska framställningen af en allmän monogen funktion“, Tredje meddelandet.

jest jednostajnie zbieżny dla każdego obszaru wewnątrz A. Istotnie, dla takiego obszaru mamy równocześnie:

$$
(47)\quad \begin{cases} \left| FA(x) - \sum\limits_{\mu=0}^{n} G_\mu(x) \right| < \sigma, & \text{gdy } n \text{ jest dostatecznie wielkie,} \\ \left| FA(x) - \sum\limits_{\mu=0}^{n+m} G_\mu(x) \right| < \sigma, & \text{gdy } m \text{ jest jakąkolwiek liczbą całkowitą dodatnią,} \end{cases}
$$

a zatem:

$$
(48)\quad \left| \sum_{\mu=n+1}^{n+m} G_\mu(x) \right| < 2\sigma .
$$

Otrzymaliśmy tedy twierdzenie następujące:

Twierdzenie 2. Oznaczmy przez A gwiazdę, należącą do elementów $F(a), F^{(1)}(a), F^{(2)}(a) \ldots$, przez $FA(x)$ zaś gałąź funkcyjną odpowiednią, należącą do tych elementów.

Tę gałąź będzie można zawsze przedstawić przez szereg

$$
(46)\quad \sum_{\mu=0}^{\infty} G_\mu(x),
$$

gdzie $G_\mu(x)$ są wielomiany postaci:

$$
G_\mu(x) = \sum_{(\nu)} c_\nu^{(\mu)} F^{(\nu)}(a)\,(x-a)^\nu ,
$$

każdy zaś spółczynnik $c_\nu^{(\mu)}$ jest liczbą wymierną określoną, zależną tylko od ν i od μ.

Szereg

$$
\sum_{\mu=0}^{\infty} G_\mu(x)
$$

jest zbieżny dla każdej wartości na x wewnątrz gwiazdy A i jest jednostajnie zbieżny dla każdego obszaru, znajdującego się wewnątrz A.

Wewnątrz gwiazdy A jest wszędzie:

$$
\sum_{\mu=0}^{\infty} G_\mu(x) = \lim_{n=\infty} g_n(x),
$$

gdzie $g_n(x)$ oznacza ten sam wielomian co w twierdzeniu **1**.

NOTA DRUGA.

W pierwszej naszej nocie wprowadziliśmy nowe pojęcie geometryczne: gwiazdę.

W płaszczyźnie zmiennej x utwórzmy pole w sposób następujący: w około punktu stałego a obracamy raz jeden wektor (półprostą); na każdym wektorze wyznaczamy w sposób jednoznaczny punkt, dajmy na to a_l, którego odległość od punktu a jest większa od pewnej danej wielkości dodatniej, tej samej dla wszystkich wektorów. W przypadku, w którym odległość od a do a_l jest skończona, wyłączamy z płaszczyzny zmiennej x część wektora, która rozciąga się od a_l do nieskończoności. Gwiazda jest obszarem, który pozostaje po wykonaniu wszystkich tych cięć w płaszczyźnie zmiennej x. Punkt stały a oznaczamy jako środek gwiazdy. Należy punkty a_l nazwać wierzchołkami gwiazdy i wprowadzić następującą definicyę:

Gwiazda jest wpisana w inną, która jest opisaną na tamtej, jeżeli wszystkie punkty pierwszej gwiazdy należą do drugiej i jeżeli obie gwiazdy mają wierzchołki wspólne.

W celu streszczenia wyników otrzymanych w pierwszej Nocie, używać będziemy pojęcia: wyrażenie graniczne [1]).

---

[1]) Phragmén w kursie, czytanym w roku 1870 w Uniwersytecie Stockholmskim, wziął za podstawę pojęcie wyrażenia granicznego. Jego punkt wyjścia stanowiła następująca definicya:

Niechaj $u_1, u_2, u_3 \ldots$ będzie ciąg nieskończony liczb wymiernych, mających następującą własność: ustaliwszy liczbę dodatnią δ, będzie można wydzielić z ciągu skończoną liczbę wyrazów w ten sposób, aby wartość bezwzględna różnicy pomiędzy dwoma pozostającemi wyrazami była zawsze mniejsza od δ. Ciąg określa wtedy w sposób jednoznaczny wielkość, którą oznacza się przez $\lim\limits_{n=\infty} u_n$.

Zdaje nam się oczywistem, że zyskujemy na prostocie, opierając teoryę funkcyj na pojęciu wyrażenia granicznego. Tym sposobem z jednego punktu widzenia obejmujemy szeregi nieskończone, iloczyny nieskończone, całki i t. d.

Niechaj $f_\alpha(xyz\ldots)$ będzie dla nieskończenie wielu wartości na α funkcyą określoną zmiennych $xyz\ldots$ Niechaj α_0 będzie punktem granicznym wartości α. Dajmy, że gdy $xyz\ldots$ jest punktem, danym w obszarze zmiennych, każdej liczbie dodatniej σ odpowiada inna liczba dodatnia δ taka, że

$$|f_{\alpha'} - f_{\alpha''}| < \sigma,$$

skoro

$$|\alpha' - \alpha_0| < \delta, \quad |\alpha'' - \alpha_0| < \delta.$$

W tem założeniu symbol

$$\lim_{\alpha=\alpha_0} f(xyz\ldots)$$

ma znaczenie zupełnie określone.

Mówimy, że $\lim\limits_{\alpha=\alpha_0} f_\alpha(xyz\ldots)$ jest zbieżne w punkcie $xyz\ldots$

Gdy $\alpha_0=\infty$, należy $|\alpha'-\alpha_0|<\delta$, $|\alpha''-\alpha_0|<\delta$ zastąpić przez

$$\left|\frac{1}{\alpha'}\right| < \delta, \quad \left|\frac{1}{\alpha''}\right| < \delta.$$

Gdy nierówność $|f_{\alpha'}-f_{\alpha''}|<\delta$ zachodzi dla obszaru X zmiennych $xyz\ldots$, mówimy, że wyrażenie graniczne $\lim\limits_{\alpha=\alpha_0} f_\alpha(xyz\ldots)$ jest jednostajnie zbieżne w tym obszarze.

Możemy teraz nadać następującą postać naszemu twierdzeniu I.

Twierdzenie I a. Niechaj $F(a)$, $F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\mu)}(a)$ będzie ciąg stałych, poddanych warunkowi Cauchy'ego; oznaczmy przez $G_n(x\,|\,a)$ wielomian o zmiennej x:

$$\sum_{\lambda_1=0}^{n^2} \sum_{\lambda_2=0}^{n^4} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{n^{2n}} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\ldots\underline{|\lambda_n}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}(a) \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n},$$

utworzony przy pomocy tych stałych.

Rozważmy wyrażenie graniczne

$$\lim_{n=\infty} G_n(x\,|\,a).$$

[1]) Patrz wyżej str. 1, 2.

Istnieje gwiazda A o środku a, dana w sposób jednoznaczny, gdy stałe $F(a), F'(a), \ldots, F^{(\mu)}(a)$ są ustalone, i posiadająca względem wyrażenia granicznego $\lim\limits_{n=\infty} G_n(x\,|\,a)$ następujące własności:

Wyrażenie to jest jednostajnie zbieżne dla każdego obszaru wewnątrz A, lecz nie jest nigdy jednostajnie zbieżne dla żadnego kontynuum, obejmującego w sobie jeden z wierzchołków gwiazdy A. Określa ono dla wnętrza gwiazdy A gałąź $FA(x)$ funkcyi monogenicznej. Gałąź ta jest regularna dla wnętrza gwiazdy A, lecz staje się osobliwą dla jej wierzchołków. Posiada ona jeszcze własność:

$$\left(\frac{d^\mu FA(x)}{dx^\mu}\right)_{x=a} = F^{(\mu)}(a); \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots$$

Gałąź funkcyjna $FA(x)$ może być określona nie tylko przez $G_n(x\,|\,a)$, lecz także przez nieskończenie wiele innych wielomianów

$$g_n(x\,|\,a) = \sum_{(\nu)} c_\nu^{(n)} F^{(\nu)}(a)\,(x-a)^\nu,$$

w których, gdy ustalimy skaźniki ν i n, każdy ze spółczynników $c_\nu^{(n)}$ jest wielkością liczbową, niezależną od a, $F(a)$, $F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\mu)}(a)\ldots$ i od x, i które posiadają względem gwiazdy A te same własności, co $G_n(x\,|\,a)$.

Należy zauważyć, że własności, przypisane wyrażeniu granicznemu $\lim\limits_{n=\infty} G_n(x\,|\,a)$, zupełnie nie stoją na przeszkodzie temu, by to wyrażenie przy odpowiednim wyborze stałych $F(a)$, $F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\mu)}(a)\ldots$ było zbieżnem zewnątrz gwiazdy A. Nie jest nawet wykluczony przypadek, w którym wyrażenie to mogłoby być jednostajnie zbieżnem dla całego kontynuum zewnątrz gwiazdy A. W tym ostatnim przypadku byłoby możliwem, że przedstawiałoby ono dla tego kontynuum funkcyę analityczną, która nie byłaby przedłużeniem gałęzi $FA(a)$. Dla form specyalnych gwiazdy A zachodzić będzie okoliczność, że kontynuum jednospójne będzie mogło w części znajdować się wewnątrz, w części zewnątrz gwiazdy A, nie obejmując równocześnie wierzchołka tej gwiazdy. Nie jest też wyłączony przypadek, w którym wyrażenie graniczne $\lim\limits_{n=\infty} G_n(x\,|\,a)$ jest jednostajnie zbieżne dla takiego obszaru. Przedstawia ono wtedy dla tego obszaru przeprowadzenie analityczne gałęzi $FA(x)$. Może jeszcze zdarzyć się, że wyrażenie $\lim\limits_{n=\infty} G_n(x \mid a)$ jest jednostajnie zbieżne dla obszaru liniowego, utworzonego przez część wektora, zawartą pomiędzy środkiem a i punktem, znajdującym się zewnątrz gwiazdy A. Gdyby udało się wyznaczyć stałe $F(a), F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\mu)}(a)$ w ten sposób, aby ta własność utrzymała się, mielibyśmy wtedy bezsprzecznie gatunek uogólnienia pojęcia funkcyi analitycznej, gdyż funkcya analityczna mogłaby być określona, jak to widzieliśmy równie dobrze przez wyrażenie graniczne $\lim\limits_{n=\infty} G_n(x \mid a)$ jak i przez szereg Taylora. Pierwsza definicya byłaby ogólniejsza; dopuszczałaby gatunek przeprowadzenia liniowego funkcyi analitycznej, zachowującego własności istotne funkcyi [1]).

Byłoby wszakże błędem mniemać, że w tem spostrzeżeniu tkwi zasada nowej teoryi analitycznej, obejmującej funkcye analityczne jako przypadek szczególny, a mającej równocześnie ograniczenie naturalne i ustalone teoryi dawnej. Aby to módz przyznać, dość zauważyć, że jak to pokazaliśmy, można wielomian $G_n(x \mid a)$ zastąpić nieskończenie wieloma sposobami przez inny wielomian $g_n(x \mid a)$, absolutnie równoważny pierwszemu, skoro idzie jedynie o określenie właściwych funkcyj analitycznych, lecz istotnie od niego różny, gdy idzie o uogólnienie teoryi takiej, o jakiej była mowa.

Jeżeli w naszej pierwszej Nocie daliśmy pierwszeństwo przedstawieniu gałęzi $FA(x)$ za pośrednictwem wielomianu $G_n(x \mid a)$ lub wielomianu podobnego, mimo niedogodności, tkwiącej w tym sposobie przedstawienia, powody tego były następujące:

Uogólnienie dla jakiejkolwiek liczby zmiennych niezależnych otrzymuje się bezpośrednio. Spółczynniki wielomianu przedstawiają się w postaci nadzwyczaj prostej z punktu widzenia formalnego. Dowód naszych twierdzeń jest niezależny od wyboru wektorów. Te wektory mogą być w rzeczywistości jakiemikolwiek liniami krzywemi (patrz wyżej str. 5), określonemi w ten sposób, aby ich ogół pokrył całą płaszczyznę poza kołem, należącem do stałych $F(a), F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\mu)}(a)\ldots$ przyczem dwie krzywe specyalne nie spotykają się nigdzie poza tem kołem.

Należy wymienić jeszcze jeden powód, mianowicie, że ten sposób przedstawienia wiąże się ściśle z nadzwyczaj prostem uogólnieniem wzoru Taylora, które chcemy wyłożyć w tej drugiej Nocie.

W rzeczy samej, pomiędzy gwiazdami, które można wpisać w gwiazdę A, należy wyróżnić w sposób specyalny koło C o środku a, którego obwód,

[1]) Porówn. E. Borel: „Sur la généralisation du prolongement analytique" (Comp. Rend. 23 kwietnia 1900, str. 1115).

na mocy naszej definicyi, przejdzie zawsze przez wierzchołek gwiazdy A, najbliższy środka. Temu kołu odpowiada wyrażenie graniczne

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\underline{|\nu}} F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu},$$

znane pod nazwą szeregu Taylora. Szereg Taylora posiada względem koła te same własności, jakie wyrażenie

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\lambda_1=0}^{n^2} \sum_{\lambda_2=0}^{n^4} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{n^{2n}} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\ldots\underline{|\lambda_n}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a)\left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}$$

posiada względem gwiazdy A, z jednym wyjątkiem bardzo ważnym. Każdy wierzchołek gwiazdy A był punktem osobliwym gałęzi funkcyjnej $FA(x)$. Nie ma to miejsca dla koła C względem gałęzi $FC(x)$. Nie można w ogóle twierdzić nic ponad to, że istnieje przynajmniej jeden wierzchołek na linii C (= punkt na okręgu C), który będzie punktem osobliwym gałęzi $FC(x)$.

Lecz szereg Taylora posiada z drugiej strony względem koła C własność, której nie można przypisać, jak to widzieliśmy, wyrażeniu granicznemu

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\lambda_1=0}^{n^2} \sum_{\lambda_2=0}^{n^4} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{n^{2n}} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\ldots\underline{|\lambda_n}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a)\left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}$$

względem A. Nie jest ono nigdy zbieżne dla żadnego punktu zewnątrz C.

Tymczasem pomiędzy C i A istnieje nieskończenie wiele gwiazd pośrednich K, z których każda jest opisana na poprzednich, i takich, że każdej z nich odpowiada wartość graniczna, posiadająca względem gwiazdy wszystkie własności, jakie ma szereg Taylora względem koła C. Te nowe wyrażenia graniczne obejmują w sobie szereg Taylora jako przypadek specyalny.

Istnieją różne klasy wyrażeń, spełniających te warunki. W Nocie niniejszej chcemy zbadać jednę z tych klas, mających specyalny związek z wyrażeniem granicznem $\lim\limits_{n=\infty} G_n(x \mid a)$.

Dochodzimy do niej w sposób następujący.

Niechaj:

$$f_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0, 1, 2 \ldots \infty \\ \lambda_2 = 0, 1, 2 \ldots \infty \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \lambda_n = 0, 1, 2 \ldots \infty \end{array} \right\}$$

będzie ciąg n-krotny funkcyj pewnej liczby zmiennych.

Definicyę szeregu wielokrotnego

$$\sum_{\lambda_1=0}^{\infty}\sum_{\lambda_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{\infty} f_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}$$

ustanawiamy w ogólności, przyrównywając ten szereg do szeregu pojedyńczego, którego pojedyńcze wyrazy są różnemi funkcyami $f_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}$, związanemi według pewnej zasady z liczbami całkowitemi $0, 1, 2\ldots$

Ale jest rzeczą pożyteczną wprowadzenie do badania takiego szeregu innego punktu widzenia, który, mimo wielką swą prostotę i korzyść, jaką zapewnia, nie zwrócił na siebie dostatecznie uwagi geometrów [1]).

Wprowadzimy następującą definicyę. Przyjmiemy, że szeregi

$$f_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}} = \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} f_{\lambda_1\ldots\lambda_n},$$

$$f_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}} = \sum_{\lambda_{n-1}=0}^{\infty} f_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}},$$

. . . .

$$f_{\lambda_1} = \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} f_{\lambda_1\lambda_2},$$

$$f = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} f_{\lambda_1},$$

są wszystkie zbieżne dla pewnej wartości zmiennej. Powiemy wtedy, że szereg

$$f = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty}\sum_{\lambda_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{\infty} f_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}$$

jest szeregiem n-krotnie nieskończonym, zbieżnym dla tej wartości.

[1]) Patrz: „Om den analytiska framställningen etc. Första meddelandet" 11 maja 1898. Vet. Ak. Öfversigt.

Przyjmiemy jeszcze, że szeregi

$$f_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}},\quad f_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-2}},\ldots,\ f_{\lambda_1\lambda_2},\quad f_{\lambda_1},\quad f$$

są wszystkie jednostajnie zbieżne dla wspólnego obszaru K wewnątrz obszaru istnienia funkcyj $f_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}$. Powiemy wtedy, że szereg f jest szeregiem n-krotnie nieskończonym, jednostajnie zbieżnym dla obszaru K.

Podawszy tę definicyę, możemy wypowiedzieć następujące twierdzenie [1]):

Gdy funkcye $f_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}$ $\begin{Bmatrix} \lambda_1 = 0, 1, 2\ldots\infty \\ \lambda_2 = 0, 1, 2\ldots\infty \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \lambda_n = 0, 1, 2\ldots\infty \end{Bmatrix}$ są dla kontynuum K funkcyami analitycznemi, jednoznacznemi i regularnemi zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_m$, szereg zaś

$$f = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty}\sum_{\lambda_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{\infty} f_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}(x_1\ldots x_m)$$

jest szeregiem n-krotnie nieskończonym, jednostajnie zbieżnym dla tego obszaru K, to szereg przedstawia zawsze dla tegoż obszaru funkcyę jednoznaczną regularną zmiennych $x_1\ldots x_m$.

Łatwo widzieć, że pojęcie szeregu n-krotnie nieskończonego jest bardzo różne od ogólnie przyjętego pojęcia szeregu n-krotnego i że obszar zbieżności pierwszego jest w ogóle daleko rozleglejszy od obszaru zbieżności drugiego.

Weźmy naprzykład

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Oznaczając przez ζ punkt rzeczywisty pomiędzy 0 i -1, mamy:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\nu}}\, f^{(\nu)}(\zeta)\,(x-\zeta)^{\nu}.$$

[1]) Twierdzenie to jest bezpośrednim wynikiem twierdzenia, dowiedzionego przez Weierstrassa w jego rozprawie „Zur Functionenlehre" § 2, Werke. Bd. 2, str. 205—208.

Ta równość ma miejsce dla $|x-\zeta| \leqq |\zeta|$; przeto:

$$f(2\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} f^{\nu}(\zeta)\,\zeta^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!\,\mu!} f^{(\nu+\mu)}(0)\,\zeta^{\nu+\mu}.$$

Gdy szereg $\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!\,\mu!} f^{\nu+\mu}(0)\,\zeta^{\nu+\mu}$ uważać będziemy jako szereg podwójny w zwykłem znaczeniu tych słów, będzie:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!\,\mu!} f^{\nu+\mu}(0)\,\zeta^{\nu+\mu} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda!} f^{\lambda}(0)\,(2\zeta)^{\lambda}$$

i ten szereg będzie zbieżny jedynie dla $0 \geqq \zeta > -\frac{1}{2}$. Lecz gdy przeciwnie, uważamy szereg $\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!\,\mu!} f^{\nu+\mu}(0)\,\zeta^{\nu+\mu}$ za szereg dwukrotnie nieskończony, zbieżność zachodzi dla $0 \geqq \zeta > -1$. Stosując to nasze pojęcie szeregu n-krotnie nieskończonego w przypadku, gdy w funkcyach $f_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$ występuje tylko jedna zmienna x, otrzymamy klasę wyrażeń granicznych, mających poprzednio zaznaczone własności.

Pokazaliśmy w Nocie poprzedzającej, jak zbudować gwiazdę skończoną E, położoną wewnątrz gwiazdy $\mathfrak{C}$ i mającej X w swem wnętrzu, gdzie $\mathfrak{C}$ jest jakąkolwiek gwiazdą, X zaś obszarem skończonym, wewnątrz niej położonym. Pokazaliśmy także, jak zbudować gwiazdę $E^{(n)}$, stanowiącą część gwiazdy $\mathfrak{C}$ i mającą jeszcze X w swem wnętrzu, gdy liczba n całkowita dodatnia była dostatecznie wielka. Ustalamy mianowicie wektor l, wychodzący z punktu a. Oznaczając przez r wielkość dodatnią, dostatecznie małą, i ograniczając wektor do długości $(n-1)\,r$, sprawimy przez to, że każde koło o promieniu r, opisane z jakiegokolwiek punktu ograniczonego wektora, stanowić będzie część składową gwiazdy E. Odkładając na l długość $n\varrho$, gdzie ϱ jest granicą wyższą wielkości r, i obracając raz jeden l około punktu a, otrzymujemy gwiazdę $E^{(n)}$.

Oznaczywszy przez α wielkość rzeczywistą dodatnią, mniejszą od jedności, i zastępując ϱ przez $\varrho_1 = \alpha\varrho$, otrzymaliśmy nową gwiazdę $E_1^{(n)}$, położoną wewnątrz $E^{(n)}$ i obejmującą w sobie obszar X, gdy α jest wielkością dość bliską jedności.

Wybierzmy teraz za gwiazdę $\mathfrak{C}$ gwiazdę A, należącą do stałych $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, ..., $F^{(\mu)}(a)$, i połóżmy:

(1) $$\xi = \frac{x-a}{n}\,; \quad \xi_\mu = a + \mu\,\frac{x-a}{n}\,; \quad 0 < \mu \leqq n-1\,,$$

gdzie x jest punktem obszaru X. Otrzymujemy [1]):

(2) $$\begin{cases} FA(\xi_\mu + \xi) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda!} F^{(\lambda)}(\xi_\mu)\,\xi^{\lambda} + \varepsilon\,, \\ \varepsilon = \sum_{\lambda=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda!} F^{(\lambda)}(\xi_\mu)\,\xi^{\lambda}\,. \end{cases}$$

Oznaczając przez g granicę wyższą wartości $FA(x)$, gdy x należy do E, i opierając się na wzorach:

$$\left|\frac{1}{\lambda!} F^{(\lambda)}(\xi_\mu)\right| \leqq g\varrho^{-\lambda}\,, \qquad \left|\frac{1}{\lambda!} F^{(\lambda)}(\xi_\mu)\,\xi^{\lambda}\right| \leqq g\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right)^{\lambda} = g\alpha^{\lambda}\,,$$

otrzymujemy jeszcze [2]):

(3) $$|\varepsilon| \leqq g\,\frac{\alpha^{m+1}}{1-\alpha}\,.$$

Szereg

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda!} F^{(\lambda)}(\xi_\mu)\,\xi^{\lambda}$$

jest więc jednostajnie zbieżny dla obszaru X.

Przypominając sobie, że pochodna gałęzi funkcyjnej $FA(x)$ ma tę samą gwiazdę zbieżności, co sama funkcya, wnosimy, że każdy z szeregów

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda!} F^{(\lambda+\nu)}(\xi_\mu)\,\xi^{\lambda}\,; \quad \nu = 0, 1, 2 \ldots$$

---

[1]) Porówn. wzory (20) i (21) Noty pierwszej; w tych wzorach zamiast μ mamy $n-1$, lecz widać, że stosują się one i w postaci tu podanej.

[2]) Porówn. wzór (22) Noty pierwszej.

jest jeszcze jednostajnie zbieżny dla obszaru X. Będzie zatem:

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
FA(x) &= \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \frac{1}{\lfloor\lambda_1} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})\, \xi^{\lambda_1}, \\
F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1}) &= \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \frac{1}{\lfloor\lambda_2} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\, \xi^{\lambda_2}, \\
F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2}) &= \sum_{\lambda_3=0}^{\infty} \frac{1}{\lfloor\lambda_3} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}(\xi_{n-3})\, \xi^{\lambda_3}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-1})}(\xi_1) &= \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \frac{1}{\lfloor\lambda_n} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a)\, \xi^{\lambda_n},
\end{aligned}
\right.
$$

gdzie szeregi $\sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \frac{1}{\lfloor\lambda_1} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})\, \xi^{\lambda_1}, \ldots, \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \frac{1}{\lfloor\lambda_n} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a)\, \xi^{\lambda_n}$ są wszystkie jednostajnie zbieżne dla obszaru X.

Otrzymany wynik możemy tak streścić. N i e c h a j X b ę d z i e j a k i m k o l w i e k o b s z a r e m s k o ń c z o n y m w e w n ą t r z g w i a z d y A, n a l e ż ą c e j d o s t a ł y c h $F(a), F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\mu)}(a) \ldots$ B ę d z i e m o ż n a z a w s z e u s t a l i ć l i c z b ę c a ł k o w i t ą d o d a t n i ą n a j m n i e j s z ą $\overline{n}$ t a k ą, ż e g d y n j e s t i n n ą l i c z b ą c a ł k o w i t ą n i e m n i e j s z ą o d $\overline{n}$, w t e d y s z e r e g n r a z y n i e s k o ń c z o n y

$$
(5)\quad \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \frac{1}{\lfloor\lambda_1 \lfloor\lambda_2 \ldots \lfloor\lambda_n} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a) \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n},
$$

b ę d ą c j e d n o s t a j n i e z b i e ż n y d l a o b s z a r u X, p r z e d s t a w i a r ó w n o c z e ś n i e g a ł ą ź $FA(x)$ w t y m o b s z a r z e.

Ponieważ obszar X znajduje się wewnątrz koła [1]), należącego do stałych $F(a), F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\mu)} \ldots$, będzie $\overline{n} = 1$ i szereg (5) staje się dla

[1]) Patrz Notę pierwszą (str. 5). Mówić będziemy naprzemian: k o ł o z b i e ż n o ś c i stałych $F(a), F^{(1)}(a) \ldots F^{(\mu)}(a)$ lub k o ł o s t a ł y c h $F(a), F^{(1)}(a) \ldots F^{(\mu)}(a)$.

$n = \overline{n}$ szeregiem n-krotnie nieskończonym, który jest niczem innem tylko szeregiem T a y l o r a.

Widzimy, że szereg T a y l o r a

$$
\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\lfloor\lambda} F^{(\lambda)}(a)\,(x-a)^{\lambda}
$$

ma gwiazdę zbieżności (koło zbieżności) takie, że szereg, będąc jednostajnie zbieżny dla każdego obszaru wewnątrz C, nie jest nigdy zbieżny poza C.

Czy dla szeregu ogólnego

$$
\sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \frac{1}{\lfloor\lambda_1 \lfloor\lambda_2 \ldots \lfloor\lambda_n} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a) \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}
$$

istnieje obszar zbieżności o tymże charakterze?

Zobaczymy, że, gdy stałe $F(a), F'(a), \ldots F^{\mu}(a) \ldots$, są wzięte jakkolwiek, okoliczność ta nie zachodzi, wyjąwszy $n = 1, 2, 3 \ldots$, lecz z drugiej strony możnaby utworzyć nowy szereg n-krotnie nieskończony, który dla n dostatecznie wielkiego przedstawia $FA(x)$ w jakimkolwiek obszarze wewnątrz A i który, obejmując w sobie szereg T a y l o r a jako przypadek szczególny, posiada jeszcze własność, że obszar zbieżności jest natury wyżej wskazanej.

W samej rzeczy, załóżmy, że szereg (5) jest zbieżny dla $x = x'$. Połóżmy $\xi' = \frac{x'-a}{n}$, $\xi'_\mu = a + \mu\xi'$. Ponieważ każdy z szeregów

$$
\sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \frac{1}{\lfloor\lambda_n} F^{(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)}(a)\, \xi'^{\lambda_n}, \quad \sum_{\lambda_{n-1}=0}^{\infty} \frac{1}{\lfloor\lambda_{n-1}} F^{(\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-1})}(\xi')\, \xi'^{\lambda_{n-1}}, \ldots, \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \frac{1}{\lfloor\lambda_1} F^{(\lambda_1)}(\xi'_{n-1})\, \xi'^{\lambda_1}
$$

jest zbieżny, przeto istnieje oczywiście gałąź funkcyjna, zlewająca się w okolicy $x = a$ z $FA(x)$ i pozostająca jednoznaczną i regularną wewnątrz obszaru C', utworzonego z mnogości różnych punktów, należących do kół, których środki są w ξ'_μ $(\mu = 0, 1, 2 \ldots n-1)$, promień zaś jest $|\xi'|$. Niechaj teraz będzie x'' punkt, położony pomiędzy a i x' na wektorze, wychodzącym z punktu a i przechodzącym przez punkt x'. Połóżmy $\xi'' = \frac{x''-a}{n}$, $\xi''_\mu = a + \mu\xi''$ i oznaczmy przez C'' mnogość różnych punktów, należących do kół, mających środek w ξ''_μ i promień $|\xi''|$. Widzimy, że C'' leży zawsze wewnątrz C' jeżeli odległość minimum pomiędzy ξ''_{n-1} i ograniczeniem obszaru C' pozostaje większa od $|\xi''|$, lecz że C'' wystaje częścią poza C', o ile to nie zachodzi. Przypadek pierwszy ma miejsce zawsze dla $n=1,2,3$, drugi może zachodzić zawsze dla $n<3$ na skutek odpowiedniego wyboru punktu x''.

Będziemy więc mieli oczywiście twierdzenie następujące:

Szereg n-krotnie nieskończony

$$\sum_{\lambda_1=0}^{\infty}\sum_{\lambda_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{\infty}\frac{1}{|\underline{\lambda_1}\,|\underline{\lambda_2}\cdots|\underline{\lambda_n}}\,F^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)}(a)\left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n}$$

w przypadku ogólnym, w którym $F(a), F^{(1)}(a), \dots, F^{\mu}(a)\dots$ są jakiemikolwiek stałemi, spełniającemi warunek Cauchy'ego, zachowuje się co do zbieżności w sposób odmienny dla $n=1,2,3$ niż dla $n>3$.

W przypadku pierwszym istnieje obszar zbieżności K taki, że szereg jest jednostajnie zbieżny dla każdego obszaru wewnątrz K, lecz przestaje być zbieżny dla każdego punktu, znajdującego się zewnątrz K. Otrzymujemy ten obszar zbieżności K, budując gwiazdę $E^{(n)}$ względem gwiazdy A (patrz wyżej str. 26). W drugim przypadku, przeciwnie, szereg (5) nie posiada podobnego obszaru zbieżności K. Przy odpowiednim wyborze elemenentów $F(a), F^{(1)}(a), \dots, F^{(\mu)}(a)$ zdarzyć się może, że szereg jest zbieżny w punkcie x' nie będąc zbieżnym w innym punkcie x'', położonym na wektorze pomiędzy a i x'.

Zanim przejdziemy do pytania o utworzeniu, zamiast szeregu (5), innego szeregu, który dla wszystkich wartości n, przy dowolnych wartościach na $F(a), F'(a), \dots, F^{(\mu)}(a)$, zachowuje tę własność, iż posiada obszar zbieżności K, taki, jaki otrzymaliśmy dotąd jedynie dla przypadków $n=1,2,3$, uczyńmy następujące spostrzeżenie.

Prawdą jest, że gwiazda $E^{(n)}\,(n>3)$, wzięta względem A, nie jest obszarem zbieżności K w przypadku ogólnym, w którym $F(a), F'(a), \dots, F^{(\mu)}(a)$ są stałemi jakiemikolwiek, poddanemi warunkowi Cauchy'ego. Lecz gdy te stałe będą obrane w sposób specyalny, zdarzy się nawet w przypadkach bardzo ogólnych, że gwiazda $E^{(n)}$ zachowuje dla wszystkich wartości n tę własność, iż jest obszarem zbieżności K.

Przyjmijmy np., że dokonano takiego wyboru tych elementów, iż gwiazda A posiada jeden tylko wierzchołek skończony, dajmy na to $x=b$. Załóżmy dalej, dla prostoty, że b jest liczbą rzeczywistą dodatnią i że środek gwiazdy A jest zerem. Będziemy mieli oczywiście ten rezultat, że gwiazda

$E^{(n)}\,(n=1,2,3\dots)$, wzięta względem A, jest w tym przypadku takim obszarem zbieżności, jaki oznaczyliśmy przez K. Ze względu na rolę centralną, którą może odgrywać w teoryi ogólnej przedstawienie analitycznego funkcyi monogenicznej funkcya $\frac{1}{1-x}$, która jest właśnie funkcyą, należącą do takiej gwiazdy A o jednym wierzchołku skończonym, nie będzie pozbawione interesu wykonanie konstrukcyi gwiazd $E^{(n)}$ w przypadku gwiazdy A o jednym wierzchołku b.

Uczynimy to łatwo w sposób następujący. Niechaj l będzie jakikolwiek wektor; oznaczmy przez ξ, η spółrzędne punktu na wektorze l, należącym do $E^{(n)}$. Połóżmy $\xi=nu$, $\eta=nv$. Dana przez nas definicya geometryczna gwiazdy $E^{(n)}$ da się przekształcić na następującą arytmetyczną:

$$(mu-b)^2+m^2v^2>b^2>u^2+v^2;\quad m=1,2\dots\;n-1.$$

Będzie więc:

$$\xi\leqq n\frac{b}{2};\quad\left(\xi-\frac{mnb}{m^2-1}\right)^2+\eta^2>\left(\frac{nb}{m^2-1}\right)^2.$$

Gwiazda $E^{(n)}$ staje się częścią wnętrza koła, mającego punkt zerowy jako środek i nb jako promień, i znajduje się po stronie lewej prostej, poprowadzonej prostopadle do osi rzeczywistej przez punkt $x=n\frac{b}{2}$, oraz okręgów mających środki w $\frac{mnb}{m^2-1}$, a promienie $\frac{nb}{m^2-1}$; $m=2,3,\dots,n-1$. Przypadki $n=1,2,3,4,5$ są podane na rysunkach 1—5.

$n=1$

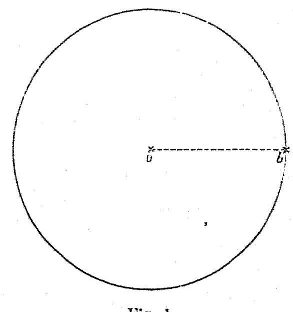

Fig. 1.

Powróćmy do zagadnienia, polegającego na utworzeniu, zamiast (5) innego szeregu n-krotnie nieskończonego, który przy stałych jakichkolwiek $F(a), F^{(1)}(a), \dots, F^{(\mu)}(a)\dots$, spełniających warunek Cauchy'ego, posiada zawsze obszar zbieżności K taki, że szereg, nie będąc nigdy zbieżnym poza K, byłby jednostajnie zbieżny dla każdego obszaru wewnątrz K.

$n = 2$

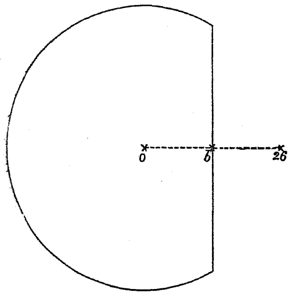

Fig. 2

$n = 3$

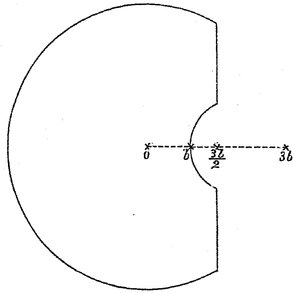

Fig. 3.

$n = 4$

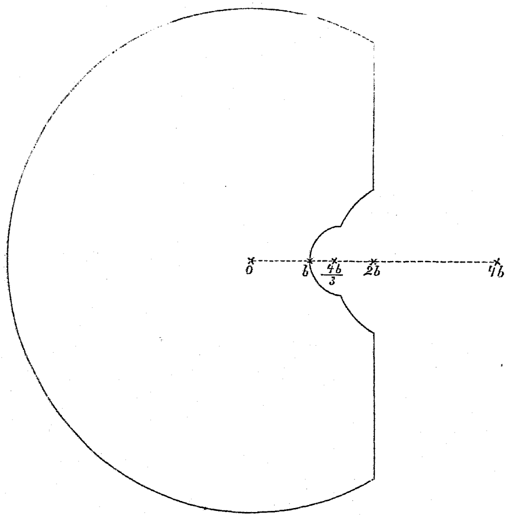

Fig. 4.

Niechaj E będzie gwiazdą o środku a. Zbudujmy względem E nową gwiazdę $E^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ w sposób następujący: Ustalmy wektor l, wychodzący z punktu a. Zbudujmy układ n okręgów, mających środki w punktach $a, \eta_1, \eta_2 \ldots \eta_{n-1}$ na wektorze l i takich, że każdy ma przechodzić przez środek poprzedzający. Oznaczmy ich promienie przez $r, r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$. Środki $\eta_1 \ldots \eta_{n-1}$ będą wybrane w ten sposób, że każdy okrąg przetnie poprzedzający w punktach, w których będzie spotkany przez proste wycho-

$n = 5$

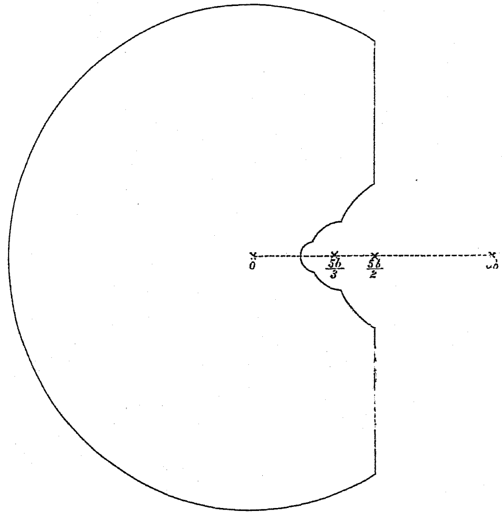

Fig. 5.

dzące z punktu a, które są do niego styczne i tak, że $|\eta_1 - a| = r = r$. Jest widoczne, że gdy promień r będzie dostatecznie mały, wtedy nasz układ kół będzie stanowił zawsze część składową gwiazdy E. Odcinając na wektorze l długość $|\eta_{n-1} - a| + r_{n-1}$, podstawiając zamiast r jego granicę wyższą ϱ i obracając l raz jeden około punktu a, otrzymujemy $E^{\left(\frac{1}{n}\right)}$.

Obszar, utworzony przez rozmaite punkty układu kół, który zbudowaliśmy naokoło wektora l, posiada ważną własność, że obszar, odpowiadający wielkości r', gdzie r' jest wartość wielkości r mniejsza od r'', leży zawsze wewnątrz obszaru zbudowanego odpowiednio do r''. Niedogodność, jaka istniała dla gwiazdy, która była poprzednio oznaczona przez $E^{(n)}$, znikła, a ponieważ gwiazda $E^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ została zbudowana względem gwiazdy A, widzimy przy pomocy rozumowań stosowanych poprzednio, że szereg n-krotnie nieskończony

$$\text{(6)}\quad \sum_{\gamma_1=0}^{\infty}\sum_{\lambda_2=0}^{\infty}\sum_{\lambda_3=0}^{\infty}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{\infty}\frac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\,\underline{|\lambda_3}\cdots\underline{|\lambda_n}}F^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\ldots+\lambda_n)}(a)\,(\eta_{n-1}-\eta_{n-2})^{\lambda_1+\lambda_2}(\eta_{n-2}-\eta_{n-3})^{\lambda_3}\ldots(\eta_1-a_1)^{\lambda}$$

gdzie

$$\text{(7)}\qquad x=\eta_{n-1}+(\eta_{n-1}-\eta_{n-2})=2\eta_{n-1}-\eta_{n-2},$$

jest jednostajnie zbieżny dla każdego obszaru wewnątrz $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ i jeżeli szereg jest zbieżny dla pewnego punktu x, ten nie będzie mógł znajdować się nigdy poza $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$.

Podana przez nas definicya geometryczna gwiazdy $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ wskazuje jeszcze bezpośrednio, że jest ona wpisana w gwiazdę główną A i że dla $n'>n$ gwiazda $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ jest wpisana w gwiazdę $A^{\left(\frac{1}{n'}\right)}$ [1]).

Chcemy teraz wyrazić wielkości $\eta_1,\ldots,\eta_{n-1}$ w sposób arytmetyczny w funkcyi zmiennej x. Oznaczmy przez α_μ kąt pomiędzy wektorem l a styczną poprowadzoną z punktu a do okręgu, mającego środek w η_μ. Będziemy mieli:

$$\text{(8)}\qquad \left\{\begin{aligned} r_\mu+1&=(r_1+r_2+\ldots+r_{\mu+1})\sin\alpha_{\mu+1},\\ r_\mu&=(r_1+r_2+\ldots+r_\mu)\sin\alpha_\mu,\\ 2\,r_{\mu+1}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\,\alpha_{\mu+1}\right)&=r_\mu,\end{aligned}\right.$$

1) Zauważmy jeszcze, że istnieje oczywiście nieskończenie wiele rozwiązań zadania geometrycznego, które rozwiązaliśmy przez konstrukcyę gwiazdy $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$. Możnaby użyć innych układów n kół albo też układów odmiennych od koła. Dla nas zasadniczą rzeczą jest raczej wykazanie, że istnieją szeregi n-krotnie nieskończone, będące uogólnieniem bezpośredniem wzoru Taylora i posiadające prawdziwą gwiazdę zbieżności, aniżeli badanie formy specyalnej takich szeregów.

skąd:

$$\frac{r_{\mu+1}}{r_\mu}=\frac{\sin\alpha_{\mu+1}}{1-\sin\alpha_{\mu+1}}\cdot\frac{1}{\sin\alpha_\mu}=\frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\,\alpha_{\mu+1}\right)}.$$

A zatem na mocy związku:

$$1-\sin\alpha_{\mu+1}=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\,\alpha_{\mu+1}\right)$$

będzie:

$$\text{(9)}\qquad \left\{\begin{aligned} \sin\alpha_{\mu+1}&=-\frac{1}{2}\sin^2\alpha_\mu+\sin\alpha_\mu\sqrt{8+\sin^2\alpha_\mu}\\ \sin\alpha_1&=1,\end{aligned}\right.$$

t. j.:

$$\sin\alpha_1=1,\quad \sin\alpha_2=\frac{1}{2},\quad \sin\alpha_3=\frac{\sqrt{33}-1}{16}\ \text{i t.d.}$$

Zauważmy jeszcze, że skoro otrzymamy $\sin\alpha_{\mu+1}$ przy pomocy wzoru (9), wtedy promień $r_{\mu+1}$ otrzymujemy z wzoru:

$$\frac{r_{\mu+1}}{r_\mu}=\frac{1}{2}\,\frac{\sin\alpha_\mu}{\sin\alpha_{\mu+1}}$$

lub

$$r_{\mu+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^\mu\frac{\sin\alpha_\mu}{\sin\alpha_{\mu+1}}.$$

Obliczenie wielkości $\eta_{\mu+1}-\eta_\mu$ uskutecznia się bezpośrednio. Mamy:

$$\frac{\eta_{\mu+1}-\eta_\mu}{x-a}=\frac{r_{\mu+1}}{r_1+r_2+\ldots+r_{n-1}+r_n}=\frac{r_{\mu+1}}{r_{n-1}}\cdot\frac{r_{n-1}}{r_1+r_2+\ldots+r_{n-1}+r_n}$$
$$=\frac{2^{n-\mu-2}\sin^2\alpha_{n-1}}{(1+\sin\alpha_{n-1})\sin\alpha_{\mu+1}}.$$

Szereg (6) przybiera przez to postać:

$$\text{(10)}\qquad \sum_{\lambda_1=0}^{\infty}\sum_{\lambda_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{\infty}c_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}(a)\,(x-a)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n},$$

gdzie:

$$
(11)\begin{cases}
c_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n} = \left(\dfrac{\sin^2 \alpha_{n-1}}{1+\sin\alpha_{n-1}}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n} \cdot \dfrac{\left(\dfrac{1}{\sin\alpha_{n-1}}\right)^{\lambda_1+\lambda_2}}{\underline{|\lambda_1}\ \underline{|\lambda_2}} \cdot \dfrac{\left(\dfrac{2}{\sin\alpha_{n-2}}\right)^{\lambda_3}}{\underline{|\lambda_3}} \cdot \dfrac{\left(\dfrac{2^2}{\sin\alpha_{n-3}}\right)^{\lambda_4}}{\underline{|\lambda_4}} \cdots \\
\qquad \cdots \dfrac{\left(\dfrac{2^{\nu-2}}{\sin\alpha_{n+1-\nu}}\right)^{\lambda_\nu}}{\underline{|\lambda_\nu}} \cdots \dfrac{(2^{n-2})^{\lambda_{n-1}+\lambda_n}}{\underline{|\lambda_{n-1}}\ \underline{|\lambda_n}}, \\
c_{\lambda_1} = \dfrac{1}{\underline{|\lambda_1}}.
\end{cases}
$$

Będziemy zatem mieli:

$$c_{\lambda_1} = \frac{1}{\underline{|\lambda_1}},$$

$$c_{\lambda_1\lambda_2} = \frac{1}{\underline{|\lambda_1}\ \underline{|\lambda_2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda_1+\lambda_2},$$

$$c_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} = \frac{1}{\underline{|\lambda_1}\ \underline{|\lambda_2}\ \underline{|\lambda_3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3},$$

$$c_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} = \frac{1}{\underline{|\lambda_1}\ \underline{|\lambda_2}\ \underline{|\lambda_3}\ \underline{|\lambda_4}} \left(\frac{\sin\alpha_3}{1+\sin\alpha_3}\right)^{\lambda_1+\lambda_2} \left(\frac{(2\sin\alpha_3)^2}{1+\sin\alpha_3}\right)^{\lambda_3+\lambda_4}$$

. . . .

. . . .

Wykazaliśmy w artykule poprzedzającym, że prócz koła C i gwiazdy A, należących do stałych $F(a), F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\mu)}(a) \ldots$ istnieją jeszcze inne gwiazdy $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$, ściśle związane z temiż stałemi. Będziemy mieli sposobność zbadania tych nowych gwiazd w Nocie następnej.

W wyznaczaniu tych wszystkich gwiazd występuje element dowolny, który nie istnieje dla gwiazdy A. I dla tego będzie rzeczą właściwą nazwać tę gwiazdę albo gwiazdą A, należącą do stałych $F(a), F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\mu)}(a)$, jak to uczyniliśmy w pierwszej Nocie, albo też gwiazdą główną stałych $F(a), F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\mu)}(a)$.

Rezultat, do którego doszliśmy, możemy streścić w następującem twierdzeniu:

Twierdzenie 3. Niechaj $F(a), F^{(1)}(a), F^{(2)}(a) \ldots$ będą stałe jakiekolwiek, spełniające warunek Cauchy'ego, i niechaj

$$\sum_{\lambda_1=0}^{\infty}\sum_{\lambda_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{\infty} c_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a)\,(x-a)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}$$

będzie szeregiem n-krotnie nieskończonym, w którym $c_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$ oznacza pewne spółczynniki liczbowe, niezależne od stałych $F(a), F^{(1)}(a), F^{(2)}(a), \ldots$ jako też od a i od x. Będzie można spółczynniki te wyznaczyć w ten sposób, aby szereg posiadał następujące własności:

Będzie miał gwiazdę zbieżności $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ taką, że szereg będzie jednostajnie zbieżny dla każdego obszaru wewnątrz $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ i nie będzie nigdy zbieżny poza $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$. Ta gwiazda $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ jest wpisana w gwiazdę główną stałych $F(a), F^{(1)}(a), F^{(2)}(a) \ldots$ i dla $n \geqq \bar{n}$, gdy liczba całkowita dodatnia $\bar{n}$ jest dostatecznie wielka, zawiera sama w swem wnętrzu jakikolwiek obszar skończony, należący do wnętrza gwiazdy A.

Gwiazda $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ jest także wpisana w gwiazdę $\left(A^{\frac{1}{n'}}\right)$, gdy $n < n'$.

Równość

$$(12)\quad FA^{\left(\frac{1}{n}\right)}(x) = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty}\sum_{\lambda_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{\infty} c_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a)\,(x-a)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}$$

zachodzi wszędzie wewnątrz $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$. Dla $n=1$ szereg staje się szeregiem Taylora.

Możnaby łatwo przekształcić szeregi n-krotnie nieskończone, stosowane w tym artykule, na szeregi pojedyńcze, zachowujące w części te same własności. W samej rzeczy, przy pomocy takich samych rozważań, jak w naszej pierwszej Nocie, otrzymujemy łatwo twierdzenie następujące:

Niechaj $F(a), F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\mu)}(a), \ldots$ będzie szereg stałych, poddanych warunkowi Cauchy'ego, i niechaj A będzie gwiazdą główną tych stałych, o środku a. Oznaczmy przez $G_m^{(n)}(x|a)$ wielomian:

$$\sum_{\lambda_1=0}^{m^2}\sum_{\lambda_2=0}^{m^2}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{m^4} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}\ \underline{|\lambda_2} \ldots \underline{|\lambda_n}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a)\left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}.$$

Istnieje gwiazda A_n, wpisana w gwiazdę A, dająca się otrzymać przy pomocy konstrukcyi wskazanej wyżej (dla otrzymania gwiazdy $E^{(n)}$ względem gwiazdy E) i posiadająca co do wyrażenia $\lim\limits_{m=\infty} G_m^{(n)}(x \mid a)$ własność następującą: wyrażenie to jest jednostajnie zbieżne dla każdego obszaru wewnątrz A_n i równocześnie przedstawia gałąź $FA_n(x)$.

Wysłowienie twierdzenia pozostaje to samo, jeżeli zamiast A_n podstawimy gwiazdę, którą otrzymujemy przy pomocy konstrukcyi, podanej na str. 32-ej, jeżeli równocześnie zamiast spółczynników $\frac{1}{\lfloor \lambda_1 \lfloor \lambda_2 \ldots \lfloor \lambda_n} \left(\frac{1}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}$ podstawimy spółczynniki $c_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n}$, dane przez wzory (11) i (9).

Istnieje ważna różnica pomiędzy wyrażeniem granicznem $\lim\limits_{m=\infty} G_m^{(n)}(x \mid a)$ a wyrażeniem granicznem $\lim\limits_{n=\infty} G_n(x \mid a)$, o którem mówiliśmy na początku tej Noty. To ostatnie wyrażenie nie mogło być nigdy jednostajnie zbieżnem dla kontynuum, obejmującego wierzchołek gwiazdy A. O wyrażeniu zaś granicznem $\lim\limits_{m=\infty} G_m^{(n)}(x \mid a)$ możemy twierdzić tylko tyle: że nie będzie ono nigdy jednostajnie zbieżne dla kontynuum, obejmującego wierzchołek gwiazdy A_n, będący równocześnie wierzchołkiem gwiazdy A. Niedoskonałości, zaznaczone przez nas co do wyrażenia $\lim\limits_{n=\infty} G_n(x \mid a)$, istnieją oczywiście a fortiori dla wyrażeń $\lim\limits_{m=\infty} G_m^{(n)}(x \mid a)$.

Zasadniczą niedogodnością wyrażenia $\lim\limits_{n=\infty} G_n(x \mid a)$, jako wyrażenia gałęzi funkcyjnej $FA(x)$, było to, że wyrażenie to mogło mieć znaczenie poza gwiazdą A, nie przedstawiając atoli przeprowadzenia (dalszego ciągu) tej gałęzi. Niedoskonałość ta nie istnieje dla wyrażeń

$$\sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \ldots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} c_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}(a)\,(x-a)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}$$

względem gwiazd $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$.

Rozszerzając nieco definicyę wyrażenia granicznego, daną na początku tej Noty, otrzymamy dla gałęzi $FA(x)$ przedstawienie analityczne, mające te same własności co przedstawienia, znalezione dla wyrażeń przedstawiających $FA^{\left(\frac{1}{n}\right)}(x)$.

W samej rzeczy:

Niechaj dla nieskończonej liczby wartości na α będzie $f_\alpha(x, y, z \ldots)$ funkcyą zmiennych $x, y, z \ldots$, określoną w sposób jednoznaczny wewnątrz obszaru K_α, stanowiącego część obszaru K i zbliżającego się doń nieograniczenie, gdy α zbliża się do punktu granicznego α_0.

Dajmy, że $x, y, z \ldots$ jest punktem danym wewnątrz K, że każdej liczbie dodatniej σ odpowiada inna liczba dodatnia δ taka, iż funkcye $f_{\alpha'}(x, y, z \ldots)$, $f_{\alpha''}(x, y, z \ldots)$ mają znaczenie, i że jest $|f_{\alpha'} - f_{\alpha''}| < \sigma$, gdy $|\alpha' - \alpha_0| < \delta$, $|\alpha'' - \alpha_0| < \delta$. Symbol $\lim\limits_{\alpha=\alpha_0} f_\alpha(x, y, z \ldots)$ posiada wtedy dla każdego punktu wewnątrz K znaczenie ściśle określone.

Mówimy, że $\lim\limits_{\alpha=\alpha_0} f_\alpha(x, y, z \ldots)$ jest zbieżne w punkcie $x, y, z \ldots$

Gdy $\alpha_0 = \infty$, zastępujemy $|\alpha' - \alpha_0| < \delta$, $|\alpha'' - \alpha_0| < \delta$ przez nierówności $\left|\frac{1}{\alpha'}\right| < \delta$, $\left|\frac{1}{\alpha''}\right| < \delta$.

Gdy nierówność $|f_{\alpha'} - f_{\alpha''}| < \sigma$ zachodzi dla obszaru X wewnątrz K, mówimy, że wyrażenie graniczne $\lim\limits_{\alpha=\alpha_0} f_\alpha(x, y, z \ldots)$ jest jednostajnie zbieżne w tym obszarze.

Definicya rozciąga się bezpośrednio na wyrażenia graniczne wielokrotne; należy wtedy uwzględnić spostrzeżenia, które poczyniliśmy o szeregach wielokrotnych.

Przypomnijmy jeszcze pojęcie gwiazdy zbieżności, wprowadzone w tej Nocie.

Jeżeli pomiędzy wyrażeniem granicznem a gwiazdą K zachodzi taki związek, że wyrażenie graniczne jest jednostajnie zbieżne dla każdego obszaru wewnątrz K, lecz nie jest nigdy zbieżne w punkcie zewnątrz K, wtedy gwiazda K jest gwiazdą zbieżności wyrażenia granicznego.

Można teraz wypowiedzieć następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1b. Niechaj $F(a), F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\mu)}(a) \ldots$ będzie szereg stałych, poddanych warunkowi Cauchy'ego, A zaś gwiazdą główną tych stałych. Niechaj będzie jeszcze:

$$S_n(x \mid a) = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \ldots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} c_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}(a)\,(x-a)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}$$

szereg n-krotnie nieskończony, w którym $c_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$ oznacza pewne spółczynniki liczbowe, niezależne od stałych $F(a)$, $F^{(1)}(a), \dots, F^{(\mu)}(a)$ oraz od a i od x.

Można będzie wyznaczyć zawsze te spółczynniki w ten sposób, aby wyrażenie graniczne $\lim\limits_{n=\infty} S_n(x \mid a)$ posiadało gwiazdę A jako gwiazdę zbieżności i równocześnie przedstawiało wewnątrz A gałąź funkcyjną $FA(x)$.

W ostatnich czasach zajmowano się wiele znaczeniem szeregów rozbieżnych. Chodzi przedewszystkiem o szereg Taylora, który ma być określony poza granicą jego zbieżności. Jest to zadanie, rozwiązane w pewnej mierze przez koncepcyę przeprowadzenia analitycznego. W innym kierunku zagadnienie to rozwiązują nasze różne twierdzenia.

Pragnęlibyśmy tu przedewszystkiem zwrócić uwagę na dwa twierdzenia tej drugiej Noty. W samej rzeczy, chodzi nam nie tylko o to, aby znaleść wyrażenie analityczne, przedstawiające funkcyę w obszarze zmieniającym się od C do A, lecz także i o to, aby znaleść wyrażenie, które, stosując się wewnątrz tego obszaru, przestało by być zbieżnem poza obszarem.

W następnych Notach podamy metody rozwiązania tego zagadnienia przy pomocy wyrażeń nowej natury.

NOTA TRZECIA.

Po pierwszej Nocie drukowanej w „Acta mathematica“ (dnia 15 marca 1899 r.) ogłosiliśmy o tymże przedmiocie w „Comptes rendus“ Akademii paryskiej (dnia 15 maja 1899 r.) komunikat [1]), w którym do naszych twierdzeń **1** i **2** dodaliśmy twierdzenie nowe.

Nadto w Nocie drugiej pokazaliśmy sposób tworzenia klasy wyrażeń granicznych, obejmującej szereg Taylora i której każdy przypadek posiada gwiazdę zbieżności. Ta gwiazda jest wpisana w gwiazdę główną stałych $F(a)$, $F^{(1)}(a), \dots, F^{(\mu)}(a), \dots$ i jest opisana na kole tych stałych. Przy dostatecznem zwiększeniu pewnej liczby całkowitej dodatniej n, ściśle związanej z gwiazdą, ta ostatnia dąży nieograniczenie ku gwieździe głównej. Dla $n=1$ zlewa się ona z kołem. Gdy n rośnie bez granic, dochodzimy do wyrażenia granicznego, którego gwiazda główna jest gwiazdą zbieżności.

W nowem twierdzeniu, ogłoszonem w „Comptes rendus“, mówimy o innej klasie wyrażeń granicznych, mających też samą własność. Zamiast liczby całkowitej n występuje tu parametr rzeczywisty i ciągły α tak, że można zmieniać gwiazdę zbieżności w sposób ciągły od koła do gwiazdy głównej.

W tej trzeciej Nocie chcemy wskazać sposób tworzenia tych nowych wyrażeń granicznych. Podamy równocześnie dwa nowe twierdzenia i utworzymy nowe wyrażenie graniczne, dla którego gwiazda główna A stałych $F(a)$, $F^{(1)}(a), \dots, F^{(\mu)}(a) \dots$ jest gwiazdą zbieżności.

---

1) Z naszą pierwszą Notą i tym artykułem wiążą się następujące prace: E. Borel. Addition an mémoire sur les séries divergentes (Ann. de l'Ec. Norm. (3), **16**, p. 132); P. Painlevé. Sur le développement d'une branche uniforme de fonction analytique (C. R. 23. V. 1899); E. Borel. Sur le calcul des séries de Taylor à rayon de convergence nul (C. R. 23. V. 1899); E. Picard. Sur les développements en série des intégrales des équations différentielles par la méthode de Cauchy (C. R. 5. VI. 1899); E. Phragmén. Sur une extension d'un théorème de M. Mittag-Leffler (C. R. 12. VI. 1899); P. Painlevé. Sur le calcul des intégrales des équations différentielles par la méthode de Cauchy-Lipschitz (C. R. 19. VI. 1899); P. Painlevé. Sur le développement d'une branche uniforme de fonction analytique en série de polynômes (C. R. 3. VII. 1899); L. Leau. Représentation des fonctions par des séries de polynômes (Bull. de la Soc. math. de France **27**, p. 194—200); P. Painlevé. Sur le développement des fonctions analytiques de plusieurs variables (C. R. 10. VII. 1899); E. Picard. Lectures on Mathematics. Clark Univ. Decennial Celebration, 1899. (przekład polski. Warszawa 1900); E. Borel. Sur la généralisation du prolongement analytique (C. R. 23. IV. 1900); Le Roy. Sur les séries divergentes (C. R. 14. V. 1900). Patrz także moje artykuły: Sulla rappresentazione analitica di un ramo uniforme di une funzione monogena (Atti della R. Acc. di Torino **34**, 23. IV. 1899); On the analytical representation of a uniform branche of a monogenic function (Cambr. Phil. Trans. Vol. 18). Rozprawa obszerna E. Borela: Sur les séries de polynômes et de fonctions rationnelles ogłoszona będzie w „Acta mathematica“ [ogłoszoną została w tomie **24**, str. 309—382].

Niechaj jak w pierwszej Nocie, będzie $\mathfrak{E}$ jakąkolwiek gwiazdą o środku a. Określimy nową gwiazdę $\mathfrak{E}^{(\alpha)}$ względem $\mathfrak{E}$ w sposób następujący:

Rozpatrzmy przedstawienie podobne (conforme), określone przez związek

$$v = e^{\int_1^u \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta \frac{du}{u}}, \tag{1}$$

gdzie β oznacza wielkość rzeczywistą, spełniającą warunek

$$0 \leqq \beta < 1. \tag{2}$$

Opiszmy około u okrąg, mający środek w początku, promień zaś równy jedności. Połóżmy, dla $0 \leqq \varphi \leqq \pi$, $u = e^{i\varphi}$; będzie:

$$\int_1^u \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta \frac{du}{u} = -\sin\beta\frac{\pi}{2}\int_0^\varphi \left(\cot g\frac{\varphi}{2}\right)^\beta d\varphi + i\cos\beta\frac{\pi}{2}\int_0^\varphi \left(\cot g\frac{\varphi}{2}\right)^\beta d\varphi.$$

Połóżmy jeszcze, dla $0 \leqq \varphi \leqq \pi$, $u = e^{-i\varphi}$; będzie:

$$\int_1^u \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta \frac{du}{u} = -\sin\beta\frac{\pi}{2}\int_0^\varphi \left(\cot g\frac{\varphi}{2}\right)^\beta d\varphi - i\cos\beta\frac{\pi}{2}\int_0^\varphi \left(\cot g\frac{\varphi}{2}\right)^\beta d\varphi.$$

Mamy jeszcze [1]):

$$\int_0^\pi \left(\cot g\frac{\varphi}{2}\right)^\beta d\varphi = \int_0^\pi \left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^\beta d\varphi = \frac{\pi}{\cos\beta\frac{\pi}{2}}.$$

A zatem, gdy u przebiega od $u=1$ do $u=-1$ część wyższą okręgu, mającego środek w początku i promień równy jedności, wtedy wielkość $Re^{i\varphi}$ opisze łuk spiralnej logarytmowej, określonej przez równanie

$$R = e^{-\operatorname{tg}\beta\frac{\pi}{2}\cdot\varphi}; \quad 0 \leqq \varphi \leqq \pi$$

Ta spiralna logarytmowa ma środek w punkcie $v=0$ i przecina oś wielkości v rzeczywistych w dwóch punktach $v=1$ i $v = -e^{-\pi\operatorname{tg}\beta\frac{\pi}{2}}$.

[1]) Patrz np. J. Bertrand. Traité de calcul différentiel et de calcul intégral; t. II, str. 125.

Z drugiej strony, gdy u przebiega od $u=1$ do $u=-1$ część niższą tegoż okręgu, $v = Re^{i\varphi}$ opisze nowy łuk spiralnej

$$R = e^{\operatorname{tg}\beta\frac{\pi}{2}\varphi}; \quad 0 \geqq \varphi \geqq -\pi,$$

symetryczny do pierwszego względem osi rzeczywistej.

Związek (1) można napisać:

$$v = u e^{\int_1^u \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta - 1\right]\frac{du}{u}}. \tag{3}$$

Widzimy więc bezpośrednio, że wnętrze koła odpowiada wnętrzu figury sercowatej, ograniczonej dwoma łukami spiralnej w ten sposób, że środek koła $u=0$ odpowiada środkowi figury sercowatej $v=0$. Połóżmy:

$$\beta = 1 - \alpha; \tag{4}$$

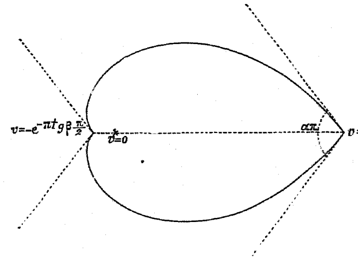

Fig. 6.

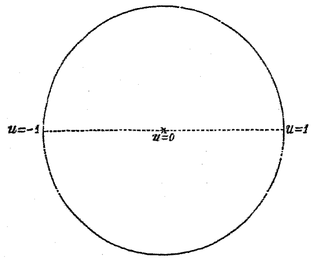

Fig. 7.

dwa łuki, ograniczające figurę sercowatą, przecinają się w punkcie $v=1$ pod kątem wewnętrznym $\alpha\pi$, i w punkcie $v = -e^{-\pi\operatorname{tg}\beta\frac{\pi}{2}}$ pod kątem wewnętrznym $(2-\alpha)\pi$.

Uczyńmy jeszcze następującą uwagę. Figura sercowata jest położona wewnątrz prostokąta, którego dwa boki, przechodzące przez punkty

$$v = -e^{-\frac{(1+\alpha)\pi}{2\operatorname{tg}\alpha\frac{\pi}{2}}}.\sin\alpha\frac{\pi}{2} \quad \text{i} \quad v = +1,$$

są prostopadłe do osi rzeczywistej, dwa zaś boki, przechodzące przez punkty

$$v = ie^{-\frac{2\pi}{2\operatorname{tg}\alpha\frac{\pi}{2}}}.\sin\alpha\frac{\pi}{2} \quad \text{i} \quad v = -ie^{-\frac{2\pi}{2\operatorname{tg}\alpha\frac{\pi}{2}}}\sin\alpha\frac{\pi}{2},$$

są równoległe do tej osi.

Zauważmy zresztą, że w punkcie, w którym styczna pionowa dotyka tej figury, promień wodzący, gdy α dąży do zera, zbliża się nieograniczenie do pionowej, poprowadzonej przez środek.

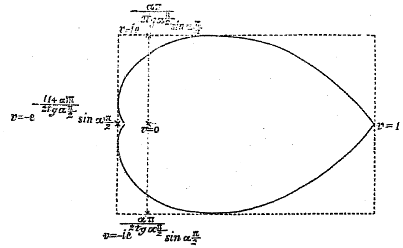

Fig. 8.

Widzimy, że przez dostateczne zmniejszenie stałej α, można sprawić, iż kontur figury tej dążyć będzie nieograniczenie ku linii prostej, prowadzącej od $v=0$ do $v=1$.

Na rysunkach 9, 10 i 11 są podane trzy różne przypadki figury sercowatej.

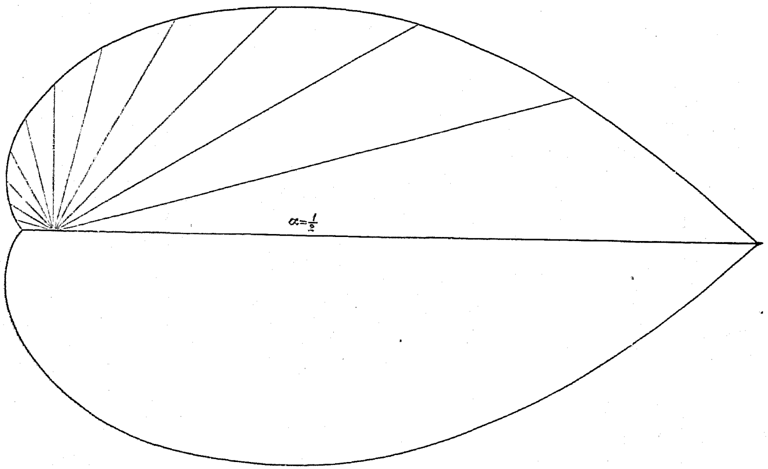

Fig. 9.

Dla dalszego wykładu potrzeba nam będzie znać rozwinięcie potęgi v^m, gdzie m jest liczbą całkowitą dodatnią, według potęg dodatnich wielkości u. Połóżmy:

$$v = u e^{-\int_0^1 \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta - 1\right]\frac{du}{u}} \cdot e^{\int_0^u \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta - 1\right]\frac{du}{u}}, \tag{5}$$

$$e^{m\int_0^u \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta - 1\right]\frac{du}{u}} = \left[1 + \frac{h_1^{(m)}(\beta)}{\underline{|1}}u + \frac{h_2^{(m)}(\beta)}{\underline{|2}}u^2 + \ldots + \frac{h_\lambda^{(m)}(\beta)}{\underline{|\lambda}}u^\lambda + \ldots\right]. \tag{6}$$

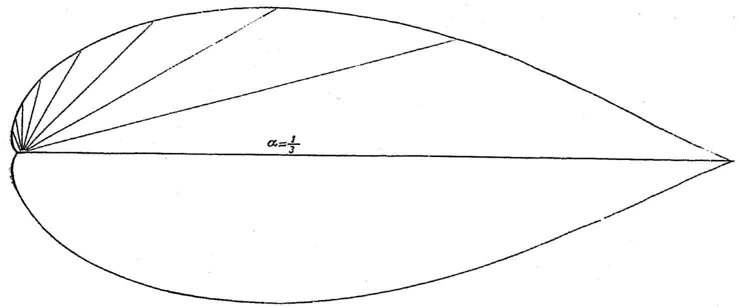

Fig. 10.

Zobaczymy, że $h_\lambda^{(m)}(\beta)$ jest funkcyą całkowitą wymierną wielkości β stopnia λ, znikającą dla $\beta=0$. Jest to funkcya nieparzysta, gdy λ jest liczbą nieparzystą, funkcya zaś parzystą, gdy λ jest liczbą parzystą. Spółczynnik przy β^μ $(\mu=1,2,\ldots,\lambda)$ jest wielomianem stopnia μ względem m o spółczynnikach wymiernych dodatnich, znikającym dla $m=0$.

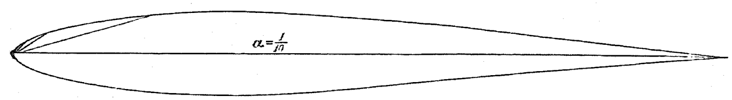

Fig. 11.

W samej rzeczy, zróżniczkujmy (6) względem u, otrzymamy:

$$m\left(1+\frac{h_1^{(m)}(\beta)}{\underline{|1}}u+\frac{h_2^{(m)}(\beta)}{\underline{|2}}u^2+\dots+\frac{h_\lambda^{(m)}(\beta)}{\underline{|\lambda}}u^\lambda+\dots\right)\cdot\left(\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta-1\right)$$

$$=h_1^{(m)}(\beta)\,u+\frac{h_2^{(m)}(\beta)}{\underline{|1}}u^2+\frac{h_3^{(m)}(\beta)}{\underline{|2}}u^3+\dots+\frac{h_\lambda^{(m)}(\beta)}{\underline{|\lambda-1}}u^\lambda+\dots$$

Kładąc zatem:

(7) $$\left[\left(\frac{1+u}{1+u}\right)^\beta-1\right]=g_1(\beta)\,u+g_2(\beta)\,u^2+g_3(\beta)\,u^3+g_4(\beta)\,u^4+\dots,$$

mieć będziemy:

(8) $$\frac{1}{\underline{|\lambda-1}}h_\lambda^{(m)}(\beta)=m\left[\frac{1}{\underline{|\lambda-1}}h^{(m)}_{\lambda-1}(\beta)\,g_1(\beta)+\frac{1}{\underline{|\lambda-2}}h^{(m)}_{\lambda-2}(\beta)\,g_2(\beta)+\dots+\frac{1}{\underline{|1}}h_1^{m}(\beta)\,g_\lambda(\beta)\right].$$

Różniczkując wzór (7) ν razy względem β, otrzymamy:

$$\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta\left(\log\frac{1+u}{1-u}\right)^\nu=\sum_{(\lambda)}\frac{d^\nu g_\lambda(\beta)}{d\beta^\nu}u^\lambda,$$

skąd:

(9) $$\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta\left(\frac{1}{2u}\log\frac{1+u}{1-u}\right)^\nu=\sum_{(\lambda)}\frac{d^{(\nu)}g_\lambda(\beta)}{d(2\beta)^\nu}u^{\lambda-\nu}$$

Mamy:

$$\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta\left(\frac{1}{2u}\log\frac{1+u}{1-u}\right)^\nu=1+u\,\mathfrak{P}(u);\quad \nu=0,1,2\dots$$

Stąd:

(10) $$\frac{d^\nu g_\lambda(\beta)}{d(2\beta)^\nu}=0,\quad \nu>\lambda;\quad \frac{d^\lambda g_\lambda(\beta)}{d(2\beta)^\lambda}=1.$$

Mamy jeszcze na mocy wzoru (7):

(11) $$g_\lambda(0)=0,$$

a zatem $g_\lambda(\beta)_{(\lambda=1,2\dots\infty)}$ jest funkcyą całkowitą wymierną stopnia λ względem β, znikającą dla $\beta=0$.

Położmy teraz:

(12) $$\left(\frac{1}{2u}\log\frac{1+u}{1-u}\right)^\nu=\sum_{\mu=0}^{\infty}(2\mu,\nu)\,u^{2\mu},$$

będziemy mieli na podstawie wzoru (9):

(13) $$\begin{cases}\left(\dfrac{d^\nu g_\lambda(\beta)}{d(2\beta)^\nu}\right)_{\beta=0}=(\lambda-\nu,\nu); & \lambda-\nu=\text{liczbie parzystej},\\[2ex] \left(\dfrac{d^\nu g_\lambda(\beta)}{d(2\beta)^\nu}\right)_{\beta=0}=0; & \lambda-\nu=\text{liczbie nieparzystej}.\end{cases}$$

A więc:

(14) $$\begin{cases}g_{2l+1}(\beta)=\dfrac{(2\beta)^{2l+1}}{\underline{|2l+1}}+(2,2l-1)\dfrac{(2\beta)^{2l-1}}{\underline{|2l-1}}+(4,2l-3)\dfrac{(2\beta)^{2l-3}}{\underline{|2l-3}}+\dots\\ \qquad\qquad+(2l-2,3)\dfrac{(2\beta)^3}{\underline{|3}}+(2l,1)\dfrac{2\beta}{\underline{|1}},\\ g_{2l+2}(\beta)=\dfrac{(2\beta)^{2l+2}}{\underline{|2l+2}}+(2,2l)\dfrac{(2\beta)^{2l}}{\underline{|2l}}+(4,2l-2)\dfrac{(2\beta)^{2l-2}}{\underline{|2l-2}}+\dots\\ \qquad\qquad+(2l-2,4)\dfrac{(2\beta)^4}{\underline{|4}}+(2l,2)\dfrac{(2\beta)^2}{\underline{|2}}.\end{cases}$$

$l=0,1,2\dots\infty$

Uwzględniając jeszcze wzór (8), widzimy ścisłość wypowiedzianego wyżej twierdzenia o wyrażeniu $h_\lambda^{(m)}(\beta)$, jako funkcyi wielkości β i m.

Otrzymujemy liczby wymierne:

$$(2\mu,\nu+1);\qquad \left[\begin{matrix}\mu=0,1,2\dots\infty\\ \nu=1,2,3\dots\infty\end{matrix}\right]$$

za pomocą bardzo prostego wzoru zwrotnego. Różniczkując (12) względem u, znajdziemy:

$$(\nu+1)\left(\frac{1}{2u}\log\frac{1+u}{1-u}\right)^\nu\cdot\frac{1}{1-u^2}=\sum_{\mu=0}^{\infty}(\nu+1+2\mu)\,(2\mu,\nu+1)\,.\,u^{2\mu},$$

skąd:

$$(\nu+1)\left(\frac{1}{2u}\log\frac{1+u}{1-u}\right)^\nu=\sum\left[(\nu+1+2\mu)\,(2\mu,\nu+1)-(\nu-1+2\mu)\,(2\mu-2,\nu+1)\right]u^{2\mu},$$

przeto:

(15) $$\begin{cases}(\nu+1+2\mu)\,(2\mu,\nu+1)=(\nu+1)\,(2\mu,\nu)+(\nu-1+2\mu)\,(2\mu-2,\nu+1)\\ (0,\nu+1)=1,\quad (2\mu,1)=\dfrac{1}{2\mu+1}\\ \mu=1,2\dots\infty,\quad \nu=1,2,3.\end{cases}$$

Rachunek pierwszych siedmiu funkcyj $g_\lambda(\beta)$ i $h_\lambda^{(m)}(\beta)$ daje:

$$\left\{\begin{aligned}
g_1(\beta) &= 2\beta\,,\\
g_2(\beta) &= \frac{1}{\underline{|2}}(2\beta)^2\,,\\
g_3(\beta) &= \frac{1}{\underline{|3}}(2\beta)^3+\frac{1}{3}(2\beta)\,,\\
g_4(\beta) &= \frac{1}{\underline{|4}}(2\beta)^4+\frac{1}{3}(2\beta)^2\,,\\
g_5(\beta) &= \frac{1}{\underline{|5}}(2\beta)^5+\frac{1}{6}(2\beta)^3+\frac{1}{5}(2\beta)\,,\\
g_6(\beta) &= \frac{1}{\underline{|6}}(2\beta)^6+\frac{1}{18}(2\beta)^4+\frac{23}{90}(2\beta^2)\,,\\
g_7(\beta) &= \frac{1}{\underline{|7}}(2\beta)^7+\frac{1}{72}(2\beta)^5+\frac{7}{45}(2\beta)^3+\frac{1}{7}(2\beta)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right. \tag{16}$$

$$\left\{\begin{aligned}
h_1^{(m)}(\beta) &= m\,.\,(2\beta)\,,\\
h_2^{(m)}(\beta) &= \left(m^2+\frac{1}{2}m\right).(2\beta)^2\,,\\
h_3^{(m)}(\beta) &= \left(m^3+\frac{3}{2}m^2+\frac{1}{3}m\right).(2\beta)^3+\frac{2}{3}m\,.\,(2\beta)\,,\\
h_4^{(m)}(\beta) &= \left(m^4+3m^3+\frac{25}{12}m^2+\frac{1}{4}m\right).(2\beta)^4+8\left(\frac{1}{3}m^2+\frac{1}{4}m\right).(2\beta)^2\,,\\
h_5^{(m)}(\beta) &= \left(m^5+5m^4+\frac{85}{12}m^3+\frac{35}{12}m^2+\frac{1}{5}m\right).(2\beta)^5\,,\\
&\quad+20\left(\frac{1}{3}m^3+\frac{2}{3}m^2+\frac{1}{5}m\right).(2\beta)^3+\frac{24}{5}m\,.\,(2\beta)\,,\\
h_6^{(m)}(\beta) &= \left(m^6+\frac{15}{2}m^5+\frac{215}{12}m^4+\frac{125}{8}m^3+\frac{1507}{360}m^2+\frac{1}{6}m\right).(2\beta)^6\\
&\quad+40\left(\frac{1}{3}m^4+\frac{5}{4}m^3+\frac{391}{360}m^2+\frac{1}{6}m\right).(2\beta)^4\\
&\quad+184\left(\frac{187}{1035}m^2+\frac{1}{6}m\right).(2\beta)^2\,,\\
h_7^{(m)}(\beta) &= \left(m^7+\frac{21}{2}m^6+\frac{455}{12}m^5+\frac{455}{8}m^4+\frac{12187}{360}m^3+\frac{371}{60}m^2+\frac{1}{7}m\right).(2\beta)^7\\
&\quad+70\left(\frac{1}{3}m^5+2m^4+\frac{611}{180}m^3+\frac{101}{60}m^2+\frac{1}{7}m\right).(2\beta)^5\\
&\quad+784\left(\frac{53}{315}m^3+\frac{167}{420}m^2+\frac{1}{7}m\right).(2\beta)^3+\frac{720}{7}m\,.\,(2\beta)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right. \tag{17}$$

Do kontroli można będzie użyć wzoru:

$$\frac{h_\lambda^{m}(1)}{\underline{|\lambda}} = [(1-u)^{-2m}]_{u^\lambda} = \frac{2m(2m+1)\dots(2m+\lambda-1)}{\underline{|\lambda}}\,. \tag{18}$$

Otrzymaliśmy spółczynniki wielomianów $g_\lambda(\beta)$ za pomocą wzoru zwrotnego. Lecz można też łatwo otrzymać wzór wyraźny na te wielomiany. Opierając się na wzorach (4) i (2), t. j. $\beta=1-\alpha$ i $0\leqq\beta\leqq1$, mieć będziemy:

$$\frac{1}{2\beta}\int_0^u\left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta-1\right]\frac{du}{u} = \frac{1}{2\beta}\int_0^u\frac{(1+u)^\beta-(1-u)^\beta}{(1-u)^\beta}\,\frac{du}{u}$$

$$=\int_0^u\frac{du}{(1-u)^\beta}\left[1+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\underline{|3}}u^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{\underline{|5}}u^4+\dots\right]$$

$$=u+\frac{\beta}{\underline{|1}}\,\frac{u^2}{2}+\left[\frac{\beta(\beta+1)}{\underline{|2}}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\underline{|3}}\right]\frac{u^3}{3}+\left[\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\underline{|3}}+\frac{\beta}{\underline{|1}}\cdot\frac{\alpha(\alpha+1)}{\underline{|3}}\right]\frac{u^4}{4}$$

$$+\;\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+\left[\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+2l-1)}{\underline{|2l}}+\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+2l-3)}{\underline{|2l-2}}\cdot\frac{\alpha(\alpha+1)}{\underline{|3}}\right.$$

$$+\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+2l-5)}{\underline{|2l-4}}\cdot\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{\underline{|5}}+\dots$$

$$\left.+\frac{\beta(\beta+1)}{\underline{|2}}\,\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+2l-3)}{\underline{|2l-1}}+\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2l-1)}{\underline{|2l+1}}\right]\frac{u^{2l+1}}{2l+1}$$

$$+\left[\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+2l)}{\underline{|2l+1}}+\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+2l-2)}{\underline{|2l-1}}\cdot\frac{\alpha(\alpha+1)}{\underline{|3}}\right.$$

$$+\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+2l-4)}{\underline{|2l-3}}\cdot\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{\underline{|5}}+\dots$$

$$\left.+\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\underline{|3}}\cdot\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2l-3)}{\underline{|2l-1}}+\frac{\beta}{\underline{|1}}\cdot\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2l-1)}{\underline{|2l+1}}\right]\frac{u^{2l+2}}{2l+2}\,.$$

Porównywając z wzorem (7), otrzymamy:

$$
(19)\quad \left\{
\begin{aligned}
g_{2l+1}(\beta) &= 2\beta\Big[\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+2l-1)}{\lfloor 2l}+\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+2l-3)}{\lfloor 2l-2}\cdot\frac{\alpha(\alpha+1)}{\lfloor 3}\\
&\quad+\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+2l-5)}{\lfloor 2l-4}\cdot\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{\lfloor 5}+\dots\\
&\quad+\frac{\beta(\beta+1)}{\lfloor 2}\cdot\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+2l-3)}{\lfloor 2l-1}+\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2l-1)}{\lfloor 2l+1}\Big],\\
g_{2l+2}(\beta) &= 2\beta\Big[\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+2l)}{\lfloor 2l+1}+\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+2l-2)}{\lfloor 2l-1}\cdot\frac{\alpha(\alpha+1)}{\lfloor 3}\\
&\quad+\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+2l-4)}{\lfloor 2l-3}\cdot\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{\lfloor 5}+\dots\\
&\quad+\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\lfloor 3}\cdot\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2l-3)}{\lfloor 2l-1}+\frac{\beta}{\lfloor 1}\cdot\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2l-1)}{\lfloor 2l+1}\Big].
\end{aligned}\right.
$$

Wróćmy do wzoru (5), t. j. do wzoru

$$v = u\,e^{-\int_0^1\left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta-1\right]\frac{du}{u}}\cdot e^{\int_0^u\left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta-1\right]\frac{du}{u}}.$$

Widzimy, że stała

$$(20)\qquad \int_0^1\left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta-1\right]\frac{du}{u},$$

zależna od wyboru wielkości β, gra ważną rolę w przedstawieniu podobnem, określonem przez równość (1), t. j. przez

$$v = e^{\int_1^u\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta\frac{du}{u}};$$

wartoby przeto znaleść nowe wyrażenie tej stałej przez β. Wyrażenie takie otrzymujemy łatwo w sposób następujący:

Mamy:

$$\frac{1}{2\beta}\int_0^1\left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta-1\right]\frac{du}{u}$$

$$=\int_0^1\frac{du}{(1-u)^\beta}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\lfloor 3}\int_0^1\frac{u^2\,du}{(1-u)^\beta}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{\lfloor 5}\int_0^1\frac{u^4\,du}{(1-u)^\beta}+\dots$$

Oznaczmy przez $B(a,b)$ całkę Eulerową pierwszego gatunku; będzie:

$$\int_0^1\frac{du}{(1-u)^\beta}=B(1,\alpha),\quad \int_0^1\frac{u^2\,du}{(1-u)^\beta}=B(3,\alpha),\quad \int_0^1\frac{u^4\,du}{(1-u)^\beta}=B(5,\alpha),\dots$$

Na mocy wzorów (patrz np. Cours de M. Hermite 1882, rédigé par Andoyer, 4 édit. 1891, chap. 14):

$$B(1,\alpha)=\frac{1}{\alpha},\quad B(3,\alpha)=\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1\,.\,2},\quad B(5,\alpha)=\frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)},\dots$$

otrzymamy żądane wyrażenie:

$$
(21)\quad
\begin{aligned}
&\int_0^1\left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta-1\right]\frac{du}{u}=2\beta\left[\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{3(\alpha+2)}+\frac{1}{5(\alpha+4)}+\dots\right]\\
&=2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+n}-\frac{1}{\frac{1}{2}\alpha+n}\right)=2\left(\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}-\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}\right).
\end{aligned}
$$

Po tych przygotowaniach damy definicyę gwiazdy $\mathfrak{S}^{(\alpha)}$ odnośnie do gwiazdy $\mathfrak{S}$, która jest gwiazdą jakąkolwiek o środku a.

Połóżmy:

$$(22)\qquad f(u\mid\alpha)=K\,u\,e^{\int_0^u\left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta-1\right]\frac{du}{u}},$$

gdzie (4), t. j. $\alpha=1-\beta$, ma sprawdzać nierówność (2), t. j. $0<\alpha\leqq 1$, i gdzie K oznacza niezależną od u stałą, którą wyznaczymy w sposób odpowiedni. Ustalmy wektor, dajmy na to l, pomiędzy a i x i połóżmy

$$(23)\qquad \frac{z-a}{x-a}=f(u\mid\alpha).$$

Gdy u opisuje okrąg, mający środek w początku i promień równy jedności, wtedy z opisze wokoło osi symetryi l figurę sercowatą taką, jaką zbadaliśmy poprzednio. Oś symetryi jest przez figurę sercowatą przecięta w dwóch punktach

$$z=a+Ke^{\int_0^1\left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta-1\right]\frac{du}{u}}\,.\,(x-a),\quad z=a-Ke^{\int_0^1\left[\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^\beta-1\right]\frac{du}{u}}\,.\,(x-a),$$

odpowiadających punktom $u=1$ i $u=-1$ okręgu. Kąt wewnętrzny figury sercowatej równa się $\alpha\pi$ w pierwszym punkcie, $(2-\alpha)\pi$ w drugim.

Niechaj teraz będzie wielkość dodatnia r, mniejsza od jedności. Połóżmy

$$K = \frac{1}{r} e^{-\int_0^r \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\beta} - 1\right] \frac{du}{u}} . \tag{24}$$

Gdy u opisuje koło o promieniu r spółśrodkowe z pierwszem, z opisze figurę — oznaczmy ją przez Z — symetryczną względem osi l, położoną wewnątrz figury sercowatej i zbliżającą się do niej nieograniczenie, gdy wielkość r zbliża się nieograniczenie do jedności. Kontur figury Z przecina wektor l w dwóch punktach

$$z = x, \quad z = a - e^{-\int_0^r \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\beta} - \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{-\beta}\right] \frac{du}{u}} . (x - a), \tag{25}$$

odpowiadających punktom $u = r$ i $u = -r$ na okręgu koła o promieniu r.

Niechaj teraz $\mathfrak{E}$ będzie jakąkolwiek gwiazdą, mającą środek w punkcie a. Figura sercowata, mająca oś l, jest położona wewnątrz prostokąta którego dwa boki prostopadłe do l przecinają l w punktach

$$z = a + Ke^{\int_0^1 \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\beta} - 1\right] \frac{du}{u}} . (x - a),$$

$$z = a + Ke^{\int_0^1 \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\beta} - 1\right] \frac{du}{u}} . e^{-\frac{1+\alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha \frac{\pi}{2}}} . \sin \alpha \frac{\pi}{2} . (x - a)$$

i którego dwa drugie boki, równoległe do l przechodzą przez punkty

$$z = a + iKe^{\int_0^1 \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\beta} - 1\right] \frac{du}{u}} . e^{-\frac{\alpha\pi}{2 \operatorname{tg} \alpha \frac{\pi}{2}}} . \sin \alpha \frac{\pi}{2} . (x - a),$$

$$z = a - iKe^{\int_0^1 \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\beta} - 1\right] \frac{du}{u}} . e^{-\frac{\alpha\pi}{2 \operatorname{tg} \alpha \frac{\pi}{2}}} . \sin \alpha \frac{\pi}{2} . (x - a);$$

widzimy więc, że gdy x jest dostatecznie blizkie a, wtedy figura Z będzie stanowiła część składową gwiazdy $\mathfrak{E}$.

Niechaj teraz $(x - a)$ będzie granicą wyższą wartości $|x - a|$, dla których figura odpowiednia stanowi część składową gwiazdy $\mathfrak{E}$. Oznaczmy przez $\mathfrak{E}^{(\alpha)}$ gwia-

zdę, którą otrzymujemy, obracając raz jeden l około a i której kontur stanowi mnogość punktów $\overline{x}$.

Ponieważ nie zbadaliśmy dotąd dokładniej postaci figury Z, pozostaje przeto jeszcze przekonać się, czy, gdy x jest punktem na wektorze l, bliższym środka a niż punkt $\overline{x}$, nie byłoby możliwe, aby odpowiednia figura Z nie stanowiła części składowej gwiazdy $\mathfrak{E}$. Otóż łatwo widzieć, że tak nie jest. Niechaj $\frac{x - a}{\overline{x} - a} = \gamma$ będzie wielkością rzeczywistą dodatnią, mniejszą od jedności; zmniejszmy $\mathfrak{E}$ w stosunku γ, aby otrzymać $\mathfrak{E}_{\gamma}$. Figura Z stanowi część składową gwiazdy $\mathfrak{E}_{\gamma}$. Z drugiej strony, $\mathfrak{E}_{\gamma}$ stanowi część składową gwiazdy $\mathfrak{E}$. A więc figura Z jest częścią składową gwiazdy $\mathfrak{E}$.

Będzie rzeczą dogodną wprowadzić następującą definicyę: figurę Z nazywać będziemy figurą tworzącą, funkcyę zaś $f(u \mid \alpha)$ funkcyą tworzącą gwiazdy $\mathfrak{E}^{(\alpha)}$.

Ponieważ figura sercowata jest wpisana w prostokąt, o którym była mowa, widzimy przeto przy pomocy rozważań analogicznych dostosowanych na str. 6 pierwszej Noty, że, gdy X jest jakimkolwiek obszarem wewnątrz $\mathfrak{E}$, zawsze będzie można wybrać α dostatecznie małe, tak, aby gwiazda $\mathfrak{E}^{(\alpha)}$ obejmowała w sobie całkowicie obszar X. Wystarczy w tym celu ustanowić pomiędzy stałemi r i α zależność taką, aby r dążyło nieograniczenie do jedności, gdy α dąży nieograniczenie do zera. Prostokąt zbliża się wtedy jak chcemy do linii prostej, idącej od a do x, a figura tworząca Z, gdy zmniejszymy dostatecznie stałą α, zbliża się nieograniczenie do prostokąta.

Zauważmy jeszcze, że dla $\alpha = 1$ figura tworząca staje się kołem, mającem środek w punkcie a i przechodzącem przez punkt x, że przeto gwiazda $\mathfrak{E}^{(1)}$ jest kołem spółśrodkowem z gwiazdą $\mathfrak{E}$, przechodzącem przez wierzchołek gwiazdy $\mathfrak{E}$, najbliższy punktu a. Zauważmy jeszcze, że gwiazda $\mathfrak{E}^{(\alpha)}$ dla wszystkich wartości α pozostaje wpisaną w gwiazdę $\mathfrak{E}$. Wynika to bezpośrednio z tego, że figura tworząca, jak tego łatwo dowieść, jest wpisana w koło, mające środek w a i promień $|x - a|$ oraz z tego, że kontur gwiazdy $\mathfrak{E}^{(\alpha)}$ przechodzi przynajmniej przez wierzchołek gwiazdy $\mathfrak{E}$ najbliższy początku.

Weźmy za gwiazdę $\mathfrak{E}$ gwiazdę główną A stałych $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, $F^{(2)}(a) \ldots, F^{(\mu)}(a), \ldots,$ poddanych warunkowi Cauchy'ego, wymagającemu, by granica wyższa wartości granicznych modułów $\left| \sqrt[\mu]{\frac{1}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)} \right|$ była liczbą skończoną.

Postarajmy się znaleść wyrażenie analityczne dla gałęzi $FA^{(\alpha)}(x)$, stosujące się do tej gwiazdy $A^{(\alpha)}$ i takie, aby $A^{(\alpha)}$ było gwiazdą zbieżności tego wyrażenia.

Zobaczymy w samej rzeczy, że takie wyrażenie istnieje.

Dla ułatwienia badania wprowadźmy gwiazdy pomocnicze, określone względem gwiazdy $A^{(a)}$. Niechaj r' będzie nową wielkością dodatnią taką, że

$$r < r' < 1 . \tag{26}$$

Jeżeli u opisuje nowy okrąg, mający środek w początku i promień r', wtedy z opisze kontur figury Z', symetrycznej względem l, położonej wewnątrz naszej figury sercowatej i nazewnątrz figury tworzącej Z, zbliżający się nieograniczenie do konturu figury sercowatej, gdy r' zbliża się nieograniczenie do jedności i zbliżający się nieograniczenie do konturu figury Z, gdy r' zbliża się nieograniczenie do r. Punkty

$$u = -r' ; \quad z = a - \frac{r'}{r} e^{\int\limits_r^{r'} \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta - 1\right] \frac{du}{u}} . e^{-\int\limits_0^{r} \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta - \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{-\beta}\right] \frac{du}{u}} . (x-a)$$

$$u = r' ; \quad z = a + \frac{r'}{r} e^{\int\limits_r^{r'} \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta - 1\right] \frac{du}{u}} . (x-a)$$

odpowiadają sobie. Wiadomo, że, gdy X jest jakimkolwiek obszarem wewnątrz $A^{(a)}$, wtedy można zawsze utworzyć gwiazdę E, obejmującą w sobie całkowicie obszar X, położoną wewnątrz $A^{(a)}$ (patrz str. 6 Noty pierwszej).

Oznaczymy przez E' gwiazdę, utworzoną z punktów

$$x' = a + \frac{r'}{r} e^{\int\limits_r^{r'} \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta - 1\right] \frac{du}{u}} . (x-a) , \tag{27}$$

gdzie x należy do E. Widzimy, że, gdy obierzemy r' dość blizkie r, wtedy gwiazda E' będzie położona całkowicie wewnątrz $A^{(a)}$. Widzimy jeszcze, że gdy r' jest dostatecznie blizkie r, wtedy obszar $\bar{E}'$, utworzony przez mnogość wszystkich punktów różnych, należących do obszarów Z', jest położony całkowicie wewnątrz gwiazdy A. Nazwiemy przez g granicę wyższą gałęzi $FA(z)$, gdy Z pozostaje zawarte w $\bar{E}'$.

Zastosujmy teraz do gałęzi $FA(z)$ podstawienie (patrz (22), (23) i (24)):

$$z - a = (x-a) f(u \mid a) = \frac{x-a}{H} . \frac{u}{r} . e^{\int\limits_0^{u} \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta - 1\right] \frac{du}{u}} , \tag{28}$$

$$H = e^{\int\limits_0^{r} \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta - 1\right] \frac{du}{u}} , \tag{29}$$

gdzie x jest jakimkolwiek punktem obszaru X wewnątrz $A^{(a)}$. Jest jasne, że $FA(z)$ da nam także funkcyę zmiennej u, regularną dla $|u| \leqq r$ i jeszcze regularną dla $|r| \leqq r'$, gdzie r' podlega warunkowi (26) i równocześnie jest dostatecznie blizkie r. W samej rzeczy, gdy u pozostaje zawarte w obszarze $|u| \leqq r'$, z jest funkcyą regularną zmiennej u, i przedstawia się przy pomocy figury Z', zawartej w obszarze $\bar{E}'$, który, według założenia uczynionego o r', jest położony wewnątrz A.

Gdy więc mamy:

$$FA(z) = F(a) + \frac{1}{\underline{|1}} F^{(1)}(a) . (z-a) + \frac{1}{\underline{|2}} F^{(2)}(a) . (z-a)^2 + \ldots$$

i przekształcimy ten wzór przy przy pomocy (patrz (6)):

$$(z-a)^m = \left(\frac{x-a}{H}\right)^m \left(\frac{u}{r}\right)^m . e^{m \int\limits_0^{u} \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta - 1\right] \frac{du}{u}} \tag{30}$$

$$= \left(\frac{x-a}{rH}\right)^m . u^m \left[1 + \frac{h_1^{(m)}(\beta)}{\underline{|1}} u + \frac{h_2^{(m)}(\beta)}{\underline{|2}} u^2 + \ldots + \frac{h_\lambda^{(m)}(\beta)}{\underline{|\lambda}} u^\lambda + \ldots\right] ,$$

będzie:

$$FA(z) = F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x-a) \left(\frac{u}{r}\right)^\nu , \tag{31}$$

gdzie:

$$G_\nu(x-a) = \frac{r^{\nu-1} h^{(1)}{}_{\nu-1}(\beta)}{\underline{|1}\ \underline{|\nu-1}} F^{(1)}(a) \frac{x-a}{H} + \frac{r^{\nu-2} h^{(2)}{}_{\nu-2}(\beta)}{\underline{2}\ \underline{|\nu-2}} F^{(2)}(a) \left(\frac{x-a}{H}\right)^2 + \ldots$$

$$+ \frac{r h_1^{(\nu-1)}(\beta)}{\underline{|\nu-1}\ \underline{|1}} F^{(\nu-1)}(a) \left(\frac{x-a}{H}\right)^{\nu-1} + \frac{1}{\underline{|\nu}} F^{(\nu)}(a) \left(\frac{x-a}{H}\right)^\nu . \tag{32}$$

Szereg $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x-a) \left(\frac{u}{r}\right)^\nu$, gdzie x należy do obszaru X, znajdującego się wewnątrz $A^{(a)}$, będzie zbieżny dla $|u| \leqq r'$. A zatem:

$$\left| G_\nu(x-a) \frac{1}{r^\nu} \right| \leqq g (r')^{-\nu}$$

i

$$| G_\nu(x-a) | \leqq g \left(\frac{r}{r'}\right)^\nu . \tag{33}$$

[1]) Weierstrass. Werke. Bd. 1, str. 67.

Szereg

$$(34)\qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x-a)$$

jest więc zbieżny dla każdego punktu wewnątrz $A^{(\alpha)}$; jest on jednostajnie zbieżny dla każdego obszaru X wewnątrz $A^{(\alpha)}$.

Widzieliśmy, że, kładąc $u=r$, otrzymujemy $z=x$; jest przeto:

$$(35)\qquad FA^{(\alpha)}(x)=F(a)+\sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x-a)\,;$$

równość ta zachodzi dla każdego punktu, położonego wewnątrz $A^{(\alpha)}$.

Załóżmy teraz odwrotnie, że $x=x_0$ jest wartością, dla której szereg $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x-a)$ jest zbieżny. Wtedy, według twierdzenia Abela (Oeuvres, nouvelle édition, p. 283, Théorème V), szereg $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x-a)\left(\frac{u}{r}\right)^\nu$ będzie zbieżny dla $|u|<r$. Określi on przy pomocy związków (22), (23) i (24) funkcyę zmiennej z, regularną wewnątrz obszaru Z, zbudowaną na wektorze, idącym od a do x_0. Funkcya ta jest tożsamą z funkcyą $FA(x)$, co wynika z tworzenia wielomianów $G_\nu(x-a)$. Punkt x_0 jest tedy albo punktem wewnątrz $A^{(\alpha)}$, albo przynajmniej wierzchołkiem gwiazdy $A^{(\alpha)}$.

Oznaczmy teraz przez $S_\alpha(x\mid a)$ szereg $F(a)+\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x-a)$. Widzimy bezpośrednio, że wyrażenie graniczne $\lim\limits_{\alpha=0} S_\alpha(x\mid a)$ jest gwiazdą zbieżności, która jest właśnie gwiazdą główną A i że równość

$$(36)\qquad FA(x)=\lim_{\alpha=0} S_\alpha(x\mid a)$$

zachodzi wszędzie wewnątrz A.

Wyniki dotąd otrzymane możemy streścić w następującem twierdzeniu:

Twierdzenie 4. Oznaczmy przez A gwiazdę o środku a, przez α wielkość dodatnią, niewiększą od jedności, przez $A^{(\alpha)}$ gwiazdę spółśrodkową z gwiazdą A i wpisaną w A, utworzoną przez funkcyę tworzącą $f(u\mid\alpha)$. Można będzie wybrać zawsze tę funkcyę tak, aby gdy α jest dostatecznie małe, gwiazda $A^{(\alpha)}$ obejmowała w swem wnętrzu obszar dany, położony wewnątrz A i taki, że dla $\alpha=1$ gwiazda $A^{(1)}$ staje się kołem spółśrodkowem z A i wpisanem w A.

Można będzie jeszcze wybrać $f(u\mid\alpha)$ tak, aby, gdy A jest gwiazdą główną ciągu stałych $F(a), F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\mu)}(a)\ldots$, poddanych warunkowi Cauchy'ego, szereg

$$S_\alpha(x\mid a)=F(a)+\sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x-a)\,,$$

gdzie

$$G\ (x-a)=\frac{h^{(1)}{}_{\nu-1}}{\underline{|1}\ \underline{|\nu-1}}F^{(1)}(a)(x-a)+\frac{h^{(2)}{}_{\nu-2}}{\underline{|1}\ \underline{|\nu-2}}F^{(2)}(a)(x-a)^2+\ldots$$
$$+\frac{h_1{}^{(\nu-1)}}{\underline{|\nu-1}\ \underline{|1}}F^{(\nu-1)}(a)(x-a)^{\nu-1}+\frac{h_0{}^{(\nu)}}{\underline{|\nu}}F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu$$

i gdzie $h_{\nu-\mu}\left(\begin{smallmatrix}\mu=1,2\ldots\nu\\ \nu=1,2,3\ldots\infty\end{smallmatrix}\right)$ są stałe dodatnie oznaczone, zależne tylko od funkcyi tworzącej, aby szereg ten, powiadamy, posiadał gwiazdę zbieżności tożsamą z $A^{(\alpha)}$, aby równość $FA(x)=S_\alpha(x\mid a)$ zachodziła wszędzie wewnątrz $A^{(\alpha)}$ i aby szereg $S_\alpha(x\mid a)$ dla $\alpha=1$ stawał się szeregiem Taylora.

Wyrażenie graniczne $\lim\limits_{\alpha=0} S_\alpha(x\mid a)$ ma gwiazdę zbieżności, tożsamą z gwiazdą A, a równość

$$FA(x)=\lim_{\alpha=0} S_\alpha(x\mid a)$$

zachodzi wszędzie wewnątrz A.

Widzieliśmy wyżej, że gdy X jest obszarem skończonym jakimkolwiek wewnątrz A, będzie zawsze można wybrać α dostatecznie małe, aby gwiazda $A^{(\alpha)}$ zawierała X w swem wnętrzu. Otrzymaliśmy jeszcze, że gdy wielkość r' $(1>r'>r>0)$ jest dostatecznie blizka r, zachodzi nierówność (33) $|G_\nu(x-a)|<g\left(\frac{r}{r'}\right)^\nu$ dla całego obszaru X. Mamy więc w tym całym obszarze:

$$(37)\quad \begin{cases} FA(x) = F(a) + \sum\limits_{\nu=1}^{m} G_\nu(x-a) + \varepsilon, \\ \varepsilon = \sum\limits_{\nu=m+1}^{\infty} G_\nu(x-a), \end{cases}$$

$$(38)\quad |\varepsilon| \leqq g \frac{\left(\frac{r}{r'}\right)^{m+1}}{1-\frac{r}{r'}}.$$

Ustanówmy teraz pomiędzy r' i a taką zależność, aby $\frac{r}{r'}$ dążyło nieograniczenie ku jedności, gdy a dąży nieograniczenie do zera. Połóżmy naprzykład:

$$(39)\quad r' = r e^{\frac{1}{\omega(a)}},$$

gdzie $\omega(a)$ jest wielkością dodatnią, zależną od a w ten sposób, że

$$(40)\quad \lim_{a=0} \omega(a) = \infty.$$

Będzie:

$$\frac{\frac{r}{r'}}{1-\frac{r}{r'}} < \omega(a),$$

$$(41)\quad |\varepsilon| \leqq g \,.\, \omega(a) \,.\, e^{-\frac{m}{\omega(a)}}.$$

Biorąc za m liczbę całkowitą dodatnią taką, aby było

$$(42)\quad m \geqq 2\omega(a) \log \omega(a),$$

otrzymujemy:

$$(43)\quad |\varepsilon| < \frac{g}{\omega(a)}.$$

Jeżeli więc uczynimy całkowitą m zależną w ten sposób od a, aby sprawdzała się nierówność (42), wtedy, przynajmniej dla małych wartości wielkości a, wyrażenie $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x-a)$ będzie miało następującą własność:

G d y σ j e s t w i e l k o ś c i ą d o d a t n i ą o z n a c z o n ą, b ę d z i e m o ż n a z n a l e ś ć z a w s z e i n n ą w i e l k o ś ć d o d a t n i ą $\bar{a}$ t a k ą, a b y n i e r ó w n o ś ć

$$\left| FA(x) - \sum_{\nu=1}^{m} G_\nu(x-a) \right| < \sigma$$

s p r a w d z a ł a s i ę d l a w s z y s t k i c h w i e l k o ś c i x, n a l e ż ą c y c h d o X, b y l e b y a b y ł o m n i e j s z e o d $\bar{a}$.

Ale jest to właśnie nasze twierdzenie **1** w Nocie pierwszej, dowiedzione, jak widzimy, w sposób znacznie odmienny od poprzedniego.

Dowiódłszy twierdzenia **1**, otrzymujemy bezpośrednio twierdzenie **2** za pomocą tych samych rozważań, co w Nocie pierwszej.

Zatrzymajmy się na chwilę w celu ustalenia formy wyrażenia $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} G_\nu(x-a)$. Ponieważ funkcya tworząca jest

$$(44)\quad \begin{cases} f(u \mid a) = \dfrac{u}{rH} e^{\int_0^r \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta - 1\right] \frac{du}{u}}, \\ H = e^{\int_0^r \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta - 1\right] \frac{du}{u}}, \\ 0 < r < 1, \end{cases}$$

mamy przeto wzór:

$$(45)\quad \begin{cases} \sum\limits_{\nu=0}^{m} G_\nu(x-a) = F(a) + \dfrac{1}{\underline{|1}} \left(\sum\limits_{\nu=1}^{m} \dfrac{h^{(1)}{}_{\nu-1}(\beta)}{\underline{|\nu-1}} r^{\nu-1} \right) . F^{(1)}(a) \dfrac{x-a}{H} \\ \quad + \dfrac{1}{\underline{|2}} \left(\sum\limits_{\nu=2}^{m} \dfrac{h^{(2)}{}_{\nu-1}(\beta)}{\underline{|\nu-2}} r^{\nu-2} \right) . F^{(2)}(a) \left(\dfrac{x-a}{H}\right) + \dots \\ \quad + \dfrac{1}{\underline{|m-1}} \left(\sum\limits_{\nu=m-1}^{m} \dfrac{h^{(m-1)}{}_{\nu-(m-1)}(\beta)}{\underline{|\nu-(m-1)}} r^{\nu-(m-1)} \right) . F^{(m-1)}(a) \left(\dfrac{x-a}{H}\right)^{m-1} \\ \quad + \dfrac{1}{\underline{|m}} F^{(m)}(a) \left(\dfrac{x-a}{H}\right)^{m}, \end{cases}$$

gdzie $h^{(\mu)}{}_{\nu-\mu}(\beta)$; $\left(\begin{smallmatrix}\mu=1,2\ldots\infty \\ \nu=\mu,\,\mu+1\ldots\infty\end{smallmatrix}\right)$; $h^{u}{}_{0}(\beta)=1$ są wielomianami ze zmienną β, których własności zasadnicze wyżej podaliśmy.

Nierówność (42) spełnia się, gdy położymy w niej $a=\frac{1}{n}$, $m=n^2$, gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią. Połóżmy więc:

$$
(46)\quad \left\{\begin{aligned}
&\bar{G}_n(x \mid a) = F(a) \\
&+\frac{1}{\underline{|1}}\left(\frac{1}{H}\right)\sum_{\nu=1}^{n^2}\frac{h^{(1)}{}_{\nu-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)}{\underline{|\nu-1}}\,.\,r^{\nu-1}\Bigg)\,F^{(1)}(a)\,.\,(x-a) \\
&+\frac{1}{\underline{|2}}\left(\frac{1}{H^2}\right)\sum_{\nu=2}^{n^2}\frac{h^{(2)}{}_{\nu-2}\left(\frac{n-1}{n}\right)}{\underline{|\nu-2}}\,.\,r^{\nu-2}\Bigg)\,F^{(2)}(a)\,.\,(x-a)^2 \\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+\frac{1}{\underline{|n^2-1}}\left(\frac{H^{n^2-1}}{1}\sum_{\nu=n^2-1}^{n^2}\frac{h^{(n^2-1)}{}_{\nu-(n^2-1)}\left(\frac{n-1}{n}\right)}{\underline{|\nu-(n^2-1)}}\,.\,r^{\nu-(n^2-1)}\right)F^{(n^2-1)}(a)\,(x-a)^{n^2-1} \\
&+\frac{1}{\underline{|n^2}}\,\frac{1}{H^{n^2}}\,F^{(n^2)}(a)\,.\,(x-a)^{n^2} \\
&h^{u}{}_{0}\left(\frac{n-1}{n}\right)=1.
\end{aligned}\right.
$$

Możemy w naszem twierdzeniu **1** (Nota druga) podstawić nowy wielomian $\bar{G}_n(x \mid a)$ zamiast $G_n(x \mid a)$. Brzmienie twierdzenia pozostaje bez zmiany.

Dla udowodnienia twierdzenia **4** użyliśmy funkcyi tworzącej o formie specyalnej (44). Jest widoczne, że możnaby zamiast $f(u \mid a)$ wziąć inne funkcye. W wyborze funkcyi $f(u \mid a)$ wprowadziliśmy znaczne ograniczenie przez warunek, aby stałe $h^{(\mu)}{}_{\nu-\mu}$ były wszystkie d o d a t n i e i przez drugi warunek, aby szereg otrzymany stawał się dla $a=1$ szeregiem T a y l o r a. Usuwając te ograniczenia, otrzymamy oczywiście większą swobodę w wyborze funkcyi tworzącej.

Funkcyą bardzo elementarną, spełniającą te dwa warunki, jest:

$$
(47)\quad \left\{\begin{aligned}
&f(u \mid a)=\frac{a+\varepsilon}{1-\varepsilon}\cdot\frac{(1+u)^a-(1-u)^a}{a\,(1+u)^a+(1-u)^a}, \\
&\varepsilon=\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^a.
\end{aligned}\right.
$$

Ta funkcya posiada następującą własność. Gdy u opisuje koło, mające środek swój w początku i promień równy jedności, f opisze figurę klinowatą,

symetryczną względem osi rzeczywistej i ograniczoną przez dwa łuki kołowe, przecinające się pod kątem $a\pi$ w dwu punktach

$$
f(-1,\,a)=-\frac{a+\varepsilon}{1-\varepsilon}\,,\quad f(1,\,a)=\frac{a+\varepsilon}{a\,(1-\varepsilon)}\,.
$$

Wnętrze figury klinowatej odpowiada wnętrzu koła i dwa punkty $u=0$, $f=0$ odpowiadają sobie wzajemnie. Kładąc

$$
\frac{z-a}{x-a}=f(u \mid a),
$$

otrzymujemy, gdy u opisuje okrąg koła o środku w początku i o promieniu r, figurę tworzącą Z. Punkty

$$
u=-r\,;\quad z=a-\frac{a+\varepsilon}{1+a\,\varepsilon}\,(x-a)
$$

$$
u=r\,,\quad z=x
$$

odpowiadają sobie wzajemnie [1]).

Wróćmy do wzoru (43). Mamy w nim, prócz stałej a, jeszcze stałą r. Można zapytać, czy szereg (35) zachowa wypowiedziane w naszem twierdzeniu własności, gdy uczynimy w nim $r=1$, t. j. gdy zamiast figury Z, zamkniętej we wnętrzu naszej figury sercowatej, weźmiemy tę figurę sercowatą za figurę tworzącą. Tak jest istotnie, ale by tego dowieść, trzeba zastosować rozważania natury odmiennej od stosowanych dotychczas.

P. P h r a g m é n przedstawił nam w tym przedmiocie komunikat, który tu dosłownie powtarzamy:

„Jeżeli chcemy użyć figury sercowatej, jako figury tworzącej, winniśmy zbadać kwestyę zbieżności szeregu całkowitego na okręgu jego koła zbieżności.

W samej rzeczy, określmy gwiazdę $A^{(a)}$ przez warunek, aby — gdy x oznacza punkt tej gwiazdy — cała figura sercowata, podobna do figury tworzącej i mająca za oś prostą pomiędzy a i x, należała do gwiazdy A; nie-

[1]) Użyłem tej figury klinowatej na początku badań moich o przedstawieniu funkcyj monogenicznych ogólnych. W odpowiedzi na list p. Vito V o l t e r r a, datowany z Pizy dnia 9 kwietnia 1899 r., w którym tenże zakomunikował mi dowód, oparty na stosowaniu figury klinowatej, odpowiedziałem listem w dniu następnym z Peruzy, w którym podałem mój własny sposób dowodzenia.

W następnym wykładzie będzie dostatecznie wyjaśniona korzyść, jaką osiągamy przez stosowanie figury sercowatej zamiast klinowatej.

chaj wtedy x będzie punktem położonym wewnątrz tej gwiazdy $A^{(a)}$. To mając, jeżeli zamiast argumentu z funkcyi $FA(z)$ podstawimy funkcyę u, określoną przez wzór

$$\frac{z-a}{x-a} = u e^{\int_0^u \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{1-\alpha}-1\right]\frac{du}{u}},$$

będziemy mieli funkcyę zmiennej u, regularną wewnątrz koła, którego środek znajduje się w początku, promień zaś równa się jedności. Zresztą, gdy tylko $\alpha < 1$, funkcya ta ma koniecznie dwa punkty osobliwe, położone na okręgu tego koła, mianowicie punkty $u=1$ i $u=-1$. A zatem rozwinięcie tej funkcyi według potęg zmiennej u, rozwinięcie, które napiszemy w postaci

$$(1') \qquad \sum_0^\infty{}_\nu\, G_\nu(x-a)\, u^\nu$$

ma jako koło zbieżności koło o promieniu 1.

Otóż można dowieść, co uczynimy zaraz, że szereg ten jest też zbieżny i na okręgu swego koła zbieżności, i to jednostajnie, na całym okręgu, a także jednostajnie dla wszystkich wartości x, położonych w obszarze X, danym dowolnie we wnętrzu gwiazdy $A^{(a)}$. Można tedy położyć w tem rozwinięciu $u=1$ i otrzymamy w ten sposób rozwinięcie

$$(2') \qquad FA(x) = \sum_0^\infty{}_\nu\, G_\nu(x-a),$$

zbieżne jednostajnie w obszarze X.

Aby dowieść z wypowiedzianego twierdzenia o jednostajnej zbieżności szeregu (1'), przypomnijmy sobie klasyczne twierdzenie Lipschitza o rozwijaniu funkcyi rzeczywistej na szeregi trygonometryczne (Crelle's Journal, t. **63**). Twierdzenie to [wyrażając je nieco dokładniej] da się wysłowić jak następuje:

Niechaj $\varphi(\theta)$ będzie funkcyą rzeczywistą i jednowartościową argumentu rzeczywistego θ i ciągłą dla $\theta=\theta_0$. Dajmy, że umiemy dla $\delta \leqq \frac{2m+1}{2n+1}\pi$, gdzie m i n oznaczają dwie liczby całkowite, z których pierwsza jest mniejsza od drugiej, wyznaczyć pewną funkcyę

$\psi(\delta)$ argumentu rzeczywistego δ taką, aby dla dwóch wartości θ' i θ'' kąta θ, położonych razem już to pomiędzy θ_0 i $\theta_0-\pi$, już to pomiędzy θ_0 i $\theta_0+\pi$ i czyniących zadość nierówności $|\theta'-\theta''| < \delta$, było

$$|\varphi(\theta')-\varphi(\theta'')| < \psi(\delta).$$

Dajmy jeszcze, że umiemy wyznaczyć wielkość dodatnią M taką, że dla wszystkich wartości rzeczywistych na θ jest $|\varphi(\theta)| < M$.

Przy tych założeniach różnica pomiędzy $\varphi(\theta_0)$ a sumą

$$(3') \qquad \begin{aligned} &a_0 + a_1\cos\theta_0 + a_2\cos 2\theta_0 + \ldots + a_n \cos n\theta_0 \\ &\quad + b_1 \sin\theta_0 + b_2 \sin 2\theta_0 + \ldots + b_n \sin n\theta_0, \end{aligned}$$

gdzie:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi}\varphi(\theta)\,d\theta, \ldots, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi}\varphi(\theta)\cos n\theta\,d\theta,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi}\varphi(\theta)\sin n\theta\,d\theta,$$

—zakładamy, że całki te mają znaczenie—jest mniejsza od

$$4M\left(\frac{1}{2m+1}+\frac{\pi}{(2m+1)^2}\right)+9\psi\left(\frac{2m+1}{2n+1}\pi\right)+4\psi\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)\log\frac{4(2n+1)}{\pi}.$$

Jeżeli $\varphi(\theta)$ jest funkcyą peryodyczną o peryodzie 2π, tak że spółczynniki $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ są niezależne od θ_0 i że wzór (3') daje początek jej rozwinięciu na szereg Fouriera, jeżeli dla wszystkich wartości θ_0 można stosować tę samą funkcyę $\psi(\delta)$, jeżeli nadto ta funkcya jest taką, że $\psi(\delta)\log\frac{4}{\delta}$ zmierza do zera wraz z δ, wtedy wynika z tego twierdzenia, że rozwinięcie funkcyi $\varphi(\theta)$ na szereg Fouriera jest jednostajnie zbieżne dla wszystkich wartości θ.

Rozpatrzmy teraz mnogość skończoną lub nieskończoną funkcyj θ, o których, dla prostoty załóżmy, że są peryodyczne i mają peryod 2π.

Przyjmijmy, że, ustaliwszy wartość $\theta=\theta_0$, możemy użyć tej samej funkcyi $\psi(\delta)$ dla wszystkich tych funkcyj $\varphi(\theta)$ i że ta funkcya $\psi(\delta)$ jest taką, że $\psi(\delta) \log \frac{4}{\delta}$ dąży do zera wraz z δ. Jest widoczne, że w tym przypadku szereg Fouriera

$$a_0 + a_1 \cos \theta_0 + a_2 \cos 2\theta_0 + \dots$$
$$+ b_1 \sin \theta_0 + a_2 \sin 2\theta_0 + \dots$$

jest jednostajnie zbieżny dla wszystkich funkcyj $\varphi(\theta)$, należących do danej mnogości [1]).

Aby módz zastosować te twierdzenia do części rzeczywistej i urojonej funkcyi zmiennej u, otrzymanej przez podstawienie, zamiast argumentu z funkcyi $FA(z)$, funkcyi u, określonej przez wzór

$$\frac{z-a}{x-a} = u\, e^{\int\limits_1^u \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{1-\alpha} - 1\right] \frac{du}{u}},$$

zauważmy, że gdy z' i z'' oznaczają dwie wartości zmiennej z, odpowiadającej wartościom $e^{\theta' i}$ i $e^{\theta'' i}$ na u, będzie koniecznie:

$$(4') \qquad |z'' - z'| < K\,|x-a|\,.\,|\theta'' - \theta'|^{\alpha},$$

gdzie K oznacza stałą, zależną tylko od α [2]). Z drugiej strony, dla wszystkich wartości z' i z'', należących do X, będzie:

$$(5') \qquad |FA(z'') - FA(z')| < K_1\,.\,|z'' - z'|,$$

gdzie K_1 oznacza stałą, większą od wartości bezwzględnych funkcyi $FA(z)$ w obszarze X.

Będzie tedy:

$$(6') \qquad |FA(z'') - FA(z')| < K\,.\,K_1\,|x-a|\,.\,|\theta'' - \theta'|^{\alpha}.$$

---

[1]) Zdaje się, że w ogólności nie oceniano należycie doniosłości twierdzenia Lipschitza. Najczęściej przedstawiane ono bywa jako uzupełnienie sławnego twierdzenia Dirichleta, mogące posłużyć do badania zbieżności szeregu Fouriera w sąsiedztwie punktów, w których funkcya dana posiada nieskończenie wiele maximów i minimów. Rozważywszy rzecz zasadniczo, widzimy, że z tych dwóch twierdzeń twierdzenie Lipschitza jest głębsze, pożyteczniejsze i bardziej elementarne, twierdzenie zaś Dirichleta należy raczej do dziedziny Arytmetyki wyższej.

[2]) Jeżeli θ' i θ'' czynią zadość jedno i drugie już to nierówności $0 < \theta < \pi$, już to nierówności $0 > \theta > -\pi$, będzie można wziąć $K = \frac{2^{1-\alpha}}{\alpha}$. Można będzie wziąć $K = \frac{4^{1-\alpha}}{\alpha}$,

A zatem warunki, aby rozwinięcie Fouriera było jednostajnie zbieżne dla θ, są widocznie spełnione tak dla części rzeczywistej jak i części urojonej funkcyi $FA(z)$, uważanych za funkcye kąta rzeczywistego, wprowadzonego przez dwa podstawienia (4′) i przez $u = e^{\theta i}$.

Rozpatrzmy teraz

$$(7') \qquad RFA(z) = a_0 + \sum (a_n \cos n\theta - b_n \sin n\theta)$$

t. j. rozwinięcie części rzeczywistej tej funkcyi na szereg Fouriera. Jest widoczne, że dla $u = r e^{\theta i}$ jest też

$$(8') \qquad RFA(z) = a_0 + \sum (a_n r^n \cos n\theta - b_n r^n \sin n\theta).$$

---

jeżeli θ' i θ'' są dowolne, byleby tylko było $|\theta'' - \theta'| \leqq \frac{\pi}{2}$. W samej rzeczy, napiszmy dla prostoty v zamiast $\frac{z-a}{x-a}$, aby było

$$\log v = \int\limits_1^u \left(\frac{1+u}{1-a}\right)^{1-\alpha} \frac{du}{u}.$$

Jeżeli przy $0 < \theta < \pi$ uczynimy, jak wyżej, $u = e^{\theta i}$, będzie:

$$\log v = e^{-i\alpha\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\theta} \left(\operatorname{cotg} \frac{\theta}{2}\right)^{1-\alpha} d\theta.$$

Jeżeli przeto θ' i θ'' są dwie wartości na θ, zawarte pomiędzy 0 i π, i jeżeli v' i v'' są odpowiadające im wartości na v, będzie:

$$(a) \qquad \log v'' - \log v' = \int\limits_{\theta'}^{\theta''} \left(\operatorname{cotg} \frac{\theta}{2}\right)^{1-\alpha} d\theta.$$

Lecz dla rozważanych wartości θ jest $\frac{2}{\theta} > \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} > 0$, a zatem $\left(\frac{2}{\theta}\right)^{1-\alpha} > \left(\operatorname{cotg} \frac{\theta}{2}\right)^{1-\alpha}$ oraz

$$\int\limits_{\theta'}^{\theta''} \left(\frac{2}{\theta}\right)^{1-\alpha} d\theta > \int\limits_{\theta'}^{\theta''} \left(\operatorname{cotg} \frac{\theta}{2}\right)^{1-\alpha} d\theta,$$

co, po wykonaniu całkowania po stronie pierwszej i uwzględnieniu równości (a), daje:

$$\frac{2^{1-\alpha}}{\alpha} (\theta''^{\alpha} - \theta'^{\alpha}) > \log v'' - \log v'.$$

W samej rzeczy, według twierdzenia A b e l a, strona druga jest jednostajnie zbieżna dla $r \leqq 1$, przedstawia przeto, jak i pierwsza, funkcyę harmoniczną w kole $r \leqq 1$. Otóż ponieważ na zasadzie wzoru (8′) obie te funkcye są identyczne na okręgu, są więc także identycznemi wewnątrz koła i to daje nam właśnie wzór (9′). Funkcye harmoniczne sprzężone mogą tedy różnić się tylko o stałą, przeto:

(9′) $$IFA(z) = \sum (a_n r^n \cos n\theta + b_n r^n \sin n\theta) + \text{const},$$

gdzie $IFA(z)$ oznacza część rzeczywistą funkcyi $\frac{1}{i} FA(z)$.

Pisząc teraz ξ zamiast $\log v$, mamy:

$$v'' - v' = \int_{\log v'}^{\log v''} e^{\xi}\, d\xi = \int_{\log v'}^{\log v''} v\, d\xi,$$

a ponieważ $|v| < 1$, przeto:

$$|v'' - v'| < |\log v'' - \log v'|.$$

Z drugiej strony jest $x^\alpha + y^\alpha > (x+y)^\alpha$ dla dodatnich x i y i dla $0 < \alpha < 1$, o czem przekonać się można bezpośrednio, biorąc pochodne obu stron względem x i y, a zatem:

$$\theta''^\alpha - \theta'^\alpha < (\theta'' - \theta')^\alpha;$$

otrzymujemy więc:

$$|v'' - v'| < \frac{2^{1-\alpha}}{\alpha} \cdot |\theta'' - \theta'|^\alpha.$$

Dowodzi się, że nierówność ta utrzymuje się, jeżeli obie wartości θ' i θ'' są zawarte pomiędzy 0 i $-\pi$.

Jeżeli θ' i θ'' znajdują się po jednej i po drugiej stronie wartości $\theta = 0$, będzie:

$$|v''| < \frac{2^{1-\alpha}}{\alpha} \cdot |\theta''|^\alpha, \quad |v'| < \frac{2^{1-\alpha}}{\alpha} \cdot |\theta'|^\alpha,$$

a zatem:

$$|v'' - v'| < \frac{2^{1-\alpha}}{\alpha} (|\theta''|^\alpha + |\theta'|^\alpha).$$

Dla $\alpha < 1$ i dla x i y dodatnich jest $x^\alpha + y^\alpha \leqq 2^{1-\alpha}(x+y)^\alpha$, co wynika stąd, że dla $x + y =$ stałej jest maximum $x^\alpha + y^\alpha$ dla $x = y$. Otrzymujemy więc:

$$|v'' - v'| < \frac{4^{1-\alpha}}{\alpha} (|\theta''| + |\theta'|)^\alpha = \frac{4^{1-\alpha}}{\alpha} |\theta'' - \theta'|^\alpha.$$

Z drugiej strony, dla $u = e^{\theta i}$ mamy rozwinięcie jednostajnie zbieżne na szereg F o u r i e r a:

(10′) $$IFA(z) = a_0' + \sum (a_n' \cos n\theta - b_n' \sin n\theta);$$

rozumując więc jak wyżej, otrzymujemy dla $u = re^{\theta i}$ następujące rozwinięcie zbieżne dla $r \leqq 1$:

(11′) $$IFA(z) = a_0' + \sum (a_n' r^n \cos n\theta - b_n' r^n \sin n\theta).$$

Porównywając to rozwinięcie z rozwinięciem (10′), dostajemy $a_n' = b_n$, $b_n' = -a_n$, a zatem dla $|u| \leqq 1$ jest:

$$FA(z) = a_0 + i a_0' + \sum (a_n + i a_n') u^n,$$

i to rozwinięcie jest jednostajnie zbieżne na okręgu $|u| = 1$.

Z drugiej strony, z tego, co powiedziano, jest widoczne, że ta zbieżność jest jednostajna nie tylko odnośnie kąta θ, ale odnośnie wielkości x, występującej we wzorze na podstawienie, byleby tylko ta wielkość pozostawała wewnątrz obszaru X.

Przyjmijmy wreszcie, że tak θ' jak i θ'' różni się od π przynajmniej o $\frac{\pi}{2}$. W tym razie można napisać:

$$v = v_0 e^{\int_{-1}^{u} \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{1-\alpha} \frac{du}{u}},$$

a więc dla $u = e^{\theta i}$ będzie:

$$\log(v - v_0) = \int_{\pi}^{\theta} \left(\operatorname{cotg} \frac{\theta}{2}\right)^{1-\alpha} d\theta \cdot e^{-i\alpha\frac{\pi}{2}}.$$

Otrzymujemy bezpośrednio:

$$|\log(v - v_0)| < |\pi - \theta|,$$

skąd łatwo dostajemy:

$$|v'' - v'| < |\log(v'' - v_0) - \log(v' - v_0)| < |\theta'' - \theta'|.$$

Otóż jest widoczne, że

$$|\theta'' - \theta'| < \frac{4^{1-\alpha}}{\alpha} |\theta'' - \theta'|^\alpha.$$

Oto jest wszystko, co było potrzebne do udowodnienia rozwinięcia

$$FA(x) = F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x-a)$$

i okazania, że jest ono jednostajnie zbieżne dla wartości x wewnątrz obszaru X^u.

Dowiedziono zatem, że można użyć, jako funkcyi tworzącej, funkcyi

$$(48)\qquad f(u \mid a) = \frac{u}{\omega} e^{\int_0^u \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{1-\alpha} - 1\right]\frac{du}{u}}$$

lub

$$(49)\qquad \omega = e^{\int_0^1 \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{1-\alpha} - 1\right]\frac{du}{u}},$$

a, jako figury tworzącej, figury sercowatej, określonej przez wzór

$$z = a + (x-a) f(u \mid a),$$

gdy u opisuje okrąg, którego środek znajduje się w początku, promień zaś równa się jedności. Wielomiany $G_\nu(x-a)$ stają się w tym przypadku:

$$(50)\qquad \begin{aligned} G_\nu(x-a) = {} & \frac{h^{(1)}{}_{\nu-1}(\beta)}{\underline{|1}\ \underline{|\nu-1}} F^{(1)}(a)\frac{x-a}{\omega} + \frac{h^{(2)}{}_{\nu-2}(\beta)}{\underline{|2}\ \underline{|\nu-2}} F^{(2)}(a)\left(\frac{x-a}{\omega}\right)^2 + \dots \\ & + \frac{h_1^{(\nu-1)}(\beta)}{\underline{|\nu-1}\ \underline{|1}} F^{(\nu-1)}(a)\left(\frac{x-a}{\omega}\right)^{\nu-1} + \frac{1}{\underline{|\nu}} F^{(\nu)}(a)\left(\frac{x-a}{\omega}\right)^{\nu}. \end{aligned}$$

Przypomnijmy sobie wzór (21) i zauważmy równocześnie równość

$$(51)\qquad \omega = \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^{\frac{2}{\alpha}}\,(1 + \alpha\,\mathfrak{P}(\alpha)),$$

która z niego wynika bezpośrednio i wskazuje w jaki sposób ω dąży do nieskończoności, gdy α znika. Z równości (6) otrzymujemy także $u=1$ wzór godny uwagi:

$$(52)\qquad \omega^\mu = 1 + \frac{h_1^{(\mu)}(\beta)}{\underline{|1}} + \frac{h_2^{(\mu)}(\beta)}{\underline{|2}} + \dots + \frac{h_\nu^{(\mu)}(\beta)}{\underline{|\nu}} + \dots$$

lub czyniąc $h_0^\mu(\beta) = 1$,

$$\omega^u = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{h_\nu^{(\mu)}(\beta)}{\underline{|\nu}}.$$

Dla dostatecznie tedy małych wartości x będziemy mieli następującą tożsamość:

$$(53)\qquad \left\{ \begin{aligned} F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x-a) &= F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{h^{(\mu)}{}_{\nu-\mu}(\beta)}{\underline{|\mu}\ \underline{|\nu-\mu}} F^{(\mu)}(a)\left(\frac{x-a}{\omega}\right)^\mu \\ &= F(a) + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)\left(\frac{x-a}{\omega}\right)^\mu \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{h_\lambda^{(\mu)}(\beta)}{\underline{|\lambda}} \\ &= F(a) + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{F^{(\mu)}(a)}{\underline{|\mu}} (x-a)^\mu. \end{aligned} \right.$$

Wielomian $G_\nu(x-a)$ jest względem x stopnia ν i równocześnie względem β stopnia $\nu-1$ (patrz str. 61). Rozważania, wyżej przez nas stosowane w celu udowodnienia zbieżności szeregu $\sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x-a)$, pokazują wprost, że, gdy x jest jakimkolwiek punktem wewnątrz A, istnieje zawsze wartość na β, dajmy na to β_0, taka, że szereg

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x-a) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{h^{(\mu)}{}_{\nu-\mu}(\beta)}{\underline{|\mu}\ \underline{|\nu-\mu}} F^{(\mu)}(a)\left(\frac{x-a}{\omega}\right)^\mu$$

jest jednostajnie zbieżny względem β dla każdego obszaru $0 \leqq \beta \leqq \beta' < \beta_0 < 1$.

Wzór (53) okazuje nam w sposób interesujący prawdziwą rolę, jaką odgrywa wielkość β w naszym sposobie przedstawienia. Szereg $\sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x-a)$ nie jest, właściwie mówiąc, funkcyą wielkości β, ponieważ jego wartość, gdy szereg jest zbieżny, jest bezwzględnie niezależna od β. Wielkość β służy zatem jedynie do regulowania rozległości

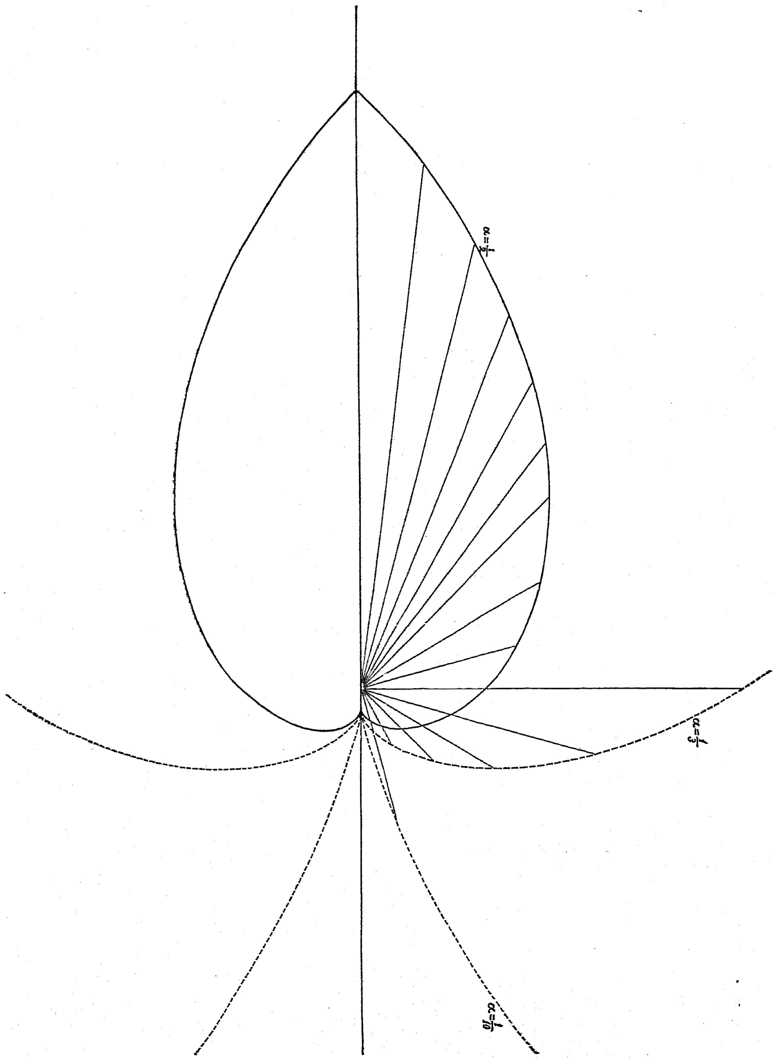

Fig. 12.

z b i e ż n o ś c i, k t ó r a z w i ę k s z a s i ę t e m b a r d z i e j, i m β j e s t b l i ż s z e j e d n o ś c i.

Przypomnijmy sobie konstrukcyę gwiazdy $A^{(\alpha)}$. Widzimy, że gdy obierzemy figurę sercowatą za figurę tworzącą, wtedy $A^{(\alpha)}$ przybiera postać bardzo prostą.

Weźmy naprzykład:

$$F(x) = \frac{1}{1-x}.$$

W tym przypadku, gdy punkt $x=0$ obierzemy za środek, gwiazda $A^{(\alpha)}$ staje się figurą sercowatą, mającą za oś symetryi oś rzeczywistą; wierzchołek rozwarty figury jest w punkcie $x=1$, wierzchołek ostry w punkcie $x = -e^{-\pi \operatorname{tg}(1-\alpha)\frac{\pi}{2}}$. Na fig. 12-ej mamy trzy różne postaci gwiazdy $A^{(\alpha)}$. Zauważmy, że gdy zmniejszamy α, gwiazda $A^{(\alpha)}$ zbliża się z wielką szybkością ku gwieździe A, która jest w tym przypadku całkowitą płaszczyzną z wyłączeniem półprostej $(1\ldots+\infty)$.

Aby dać inny przykład, przyjmijmy, że gwiazda A, mając środek w punkcie $x=0$, ma tylko dwa wierzchołki skończone $x=1$, $x=-1$. Gwiazda $A^{(\alpha)}$ staje się wtedy obszarem położonym wewnątrz dwu figur sercowatych o tym samym parametrze α, mających obie oś rzeczywistą jako oś symetryi i z których jedna ma wierzchołek rozwarty w punkcie $x=1$, druga zaś w punkcie $x=-1$.

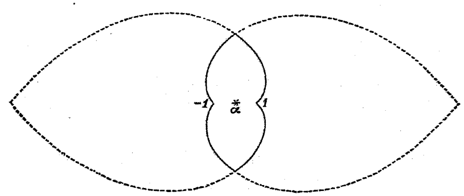

Fig. 13.

Widzieliśmy, że szereg $\sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x-a)\,u^\nu$, uważany jako szereg potęgowy względem u, posiada promień zbieżności równy jedności. Stąd na zasadzie twierdzenia C a u c h y'ego (patrz Nota pierwsza str. 3) granica wyższa wartości granicznych wyrażenia $\left|\sqrt[\nu]{G_\nu(x-a)}\right|$, $\nu = 1, 2 \ldots \infty$, jest jednością. Własność ta utrzymuje się dopóty, dopóki x należy do wnętrza gwiazdy $A^{(\alpha)}$. Z drugiej strony, ponieważ szereg $\sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x-a)$ jest rozbieżny, gdy x jest punktem zewnątrz $A^{(\alpha)}$, granica wyższa wartości granicznych wyrażenia $\left|\sqrt[\nu]{G_\nu(x-a)}\right|$ jest koniecznie większa od jedności, gdy x znajduje się zewnątrz $A^{(\alpha)}$. Jeżeli zauważymy jeszcze, że każdy punkt x, znajdujący się wewnątrz A, będzie zawarty w $A^{(\alpha)}$, gdy nadamy wielkości α wartość dostatecznie małą, otrzymamy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5. *Można zawsze wybrać funkcyę tworzącą w ten sposób, aby zachowały się wszystkie własności, podane w twierdzeniu 4, i aby nadto:*

1-o *Gdy α jest dane, granica wyższa wartości granicznych wyrażenia* $\left|\sqrt[\nu]{G_\nu(x-a)}\right|$, $\nu=1, 2\ldots\infty$ *była równa jedności, gdy x należy do wnętrza gwiazdy i była większa od jedności, gdy x znajduje się zewnątrz $A^{(\alpha)}$.*

2-o *Gdy punkt x jest położony wewnątrz gwiazdy A, istnieje zawsze wielkość $\alpha_0 < 1$ taka, że gdy α jest mniejsze od α_0, granica wyższa wartości granicznych* $\left|\sqrt[\nu]{G_\nu(x-a)}\right|$, $\nu=1, 2, 3\ldots\infty$ *jest równa jedności, gdy zaś x jest położone zewnątrz A, to granica wyższa jest zawsze większa od jedności, jakiemkolwiek będzie α.*

Widzimy, że twierdzenie to daje cenne kryteryum do znalezienia wierzchołków gwiazdy A. Aby być pewnym, że punkt x nie może być położony wewnątrz A, wystarcza w samej rzeczy pokazać, że, gdy obierzemy wielkość α dostatecznie małą i wielkość M tak wielką jak chcemy, będą zawsze takie skaźniki ν, że $|G_\nu(x-a)| > M$. Z drugiej strony, jeżeli x jest położone zewnątrz $A^{(\alpha)}$, mamy pewność, że istnieją takie skaźniki.

W przypadkach zwykłych zajdzie to, że zawsze będzie skaźnik ν_0 taki, że $|G_\nu(x-a)| > M$, gdy $\nu > \nu_0$. Z drugiej strony, gdy x jest położone wewnątrz $A^{(\alpha)}$, to przy δ dowolnie małem i α dostatecznie małem, znajdzie się skaźnik ν_0 taki, że $|G_\nu(x-a)| < \delta$, skoro $\nu > \nu_0$.

W innej Nocie powrócę do pytania, dotyczącego szukania wierzchołków gwiazdy A.

Figura sercowata, określona przez

$$z = a + (x-a)\, f(u \mid \alpha)\,,$$

gdy funkcya tworząca $f(u \mid \alpha)$ jest dana przez równości (48) i (49), gdzie zmienna u przebiega po okręgu o środku w początku i o promieniu równym jedności, posiada następującą godną uwagi własność. Uważajmy figurę, jako utworzoną przez promień obracający się około środka a. Jeden z kątów, jakie promień tworzy z konturem figury, jest zawsze $\frac{1}{2}\alpha\pi$, prócz w punkcie

$$z = a - e^{\int_0^1 \left[\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^{1-\alpha} - \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{1-\alpha}\right]\frac{du}{u}} \cdot (x-a)\,,$$

gdzie oba kąty są $\pi - \frac{1}{2}\alpha\pi$.

Przypomnijmy sobie definicyę gwiazdy $A^{(\alpha)}$. Ustalmy wektor i uważajmy figurę sercowatą wokoło tego wektora, wpisaną w gwiazdę A. *Wierzchołki wspólne tej figury sercowatej i gwiazdy A* są równocześnie, na mocy własności figury sercowatej, o której mowa, *wierzchołkami gwiazdy $A^{(\alpha)}$.*

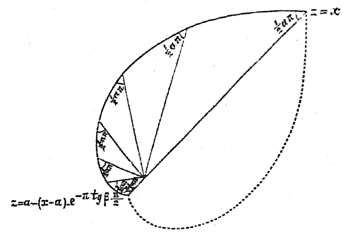

Fig. 14.

Jeżeli więc E jest gwiazdą spółśrodkową i homotetyczną z gwiazdą $A^{(\alpha)}$, która leży w jej wnętrzu, jeżeli $\overline{E}$ jest mnogością wszystkich punktów, należących do różnych figur sercowatych, zbudowanych wokoło wektorów pomiędzy punktem a a punktem wewnętrznym lub znajdującym się na konturze gwiazdy E, wtedy gwiazda $\overline{E}$ będzie identyczna z gwiazdą E.

Wiadomo, że granica wyższa wyrażenia $|FA^{(\alpha)}(x)|$ wewnątrz lub na konturze gwiazdy E jest tożsama z granicą wyższą wyrażenia $|FA^{(\alpha)}(x)|$ na konturze. Nazwijmy tę granicę przez g. Granica wyższa wyrażenia $|FA^{(\alpha)}(x)|$, gdy z należy do figury sercowatej, zbudowanej wokoło osi symetryi (ax), gdy x należy do konturu gwiazdy E, nie jest tedy wyższa od g. Mamy:

$$FA^{(\alpha)}(z) = F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(z-a)\,u^\nu\,;$$

stąd:

$$|G_\nu(x-a)| < g\,,$$

możemy więc wypowiedzieć twierdzenie:

Twierdzenie 6. Można wybrać funkcyę tworzącą w ten sposób, aby zachowały się wszystkie własności, wyrażone w twierdzeniach 4 i 5, i nadto własność następująca:

Jeżeli oznaczymy przez E gwiazdę spółśrodkową homotetyczną i znajdującą się wewnątrz $A^{(\alpha)}$, przez x punkt, znajdujący się na konturze gwiazdy E, przez g granicę wyższą wyrażenia $|FA^{(\alpha)}(x)|$, gdy x przebiega ten kontur, wtedy, jeżeli:

$$FA^{(\alpha)}(x) = F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x-a)\,,$$

gdzie $G_\nu(x-a)$ ma to samo znaczenie, co w twierdzeniu 4, będzie:

$$|G_\nu(x-a)| < g\,; \quad \nu = 1, 2, 3 \ldots \infty$$

Widzieć łatwo, że, gdybyśmy zastosowali figurę klinowatą zamiast sercowatej, otrzymalibyśmy twierdzenie daleko bardziej skomplikowane.

Kładąc $\alpha = 1$, otrzymujemy z twierdzenia 6:

Niechaj $\mathfrak{C}$ będzie kołem zbieżności, r wielkością dodatnią, mniejszą od promienia zbieżności szeregu Taylora

$$F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\nu}} F^{(\nu)}(a)\,.\,(x-a)^\nu\,,$$

niechaj dalej g będzie granicą wyższą wyrażenia $|FC(x)|$

na okręgu koła, którego środkiem jest a, promieniem r; jeżeli x jest punktem na tym okręgu, będzie:

$$\left|\frac{1}{\underline{|\nu}} F^{(\nu)}(a)\,.\,(x-a)^\nu\right| < g\,; \quad (\nu = 1, 2 \ldots \infty)$$

Jestto to samo twierdzenie, z którego tak często korzystaliśmy w naszej pierwszej Nocie [1]) i które wyraża się ogólnie w postaci:

$$\left|\frac{1}{\underline{|\nu}} F^{(\nu)}(a)\right| < g r^{-\nu}\,.$$

Nie możemy zamknąć tego artykułu nie wspomniawszy o pewnym godnym uwagi wyniku, do którego doszedł p. Borel, a wcześniejszym od prac naszych.

Borel (Fondements de la théorie des séries divergentes sommables. Journal de Math. (5), **2.** 1896, p. 103—122) dowiódł równości

$$FK(x) = \lim_{k=\infty} e^{-k} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{k^\lambda}{\underline{|\lambda}} \left[F(a) + \frac{1}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots + \frac{1}{\underline{|\lambda}} F^{(\lambda)}(a)(x-a)^\lambda \right],$$

gdzie k oznacza wielkość dodatnią, K zaś jest gwiazdą zbieżności, opisaną na kole stałych $F(a), F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\mu)}(a) \ldots$ Wykazał on przez to, że istnieje wyrażenie analityczne ogólne, zbudowane jak szereg Taylora z samych elementów $F(a), F^{(1)}(a), F^{(2)}(a) \ldots$, wziętych z funkcyi, lecz stosowalne do gwiazdy zbieżności, opisanej na kole tych elementów i zawierającej w swem wnętrzu każdy punkt tego koła, w którym funkcya pozostaje regularną. O ile mogliśmy się przekonać, on pierwszy podał ten ważny wynik w teoryi przedstawienia analitycznego funkcyi monogenicznych.

W czasie druku tej Noty dowiedziałem się o nowym wielce ważnym wyniku, osiągniętym przez p. Borela.

Wyrażenie graniczne, przez które wyraziliśmy $FA(x)$ i dla którego gwiazda A jest gwiazdą zbieżności, może być napisane w postaci

$$\lim_{\alpha=0} \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{n} G_\nu(x-a)\,.$$

[1]) Patrz Weierstrass. Werke. Bd. 1, str. 67. P. Hurwitz zakomunikował mi w czasie odwiedzin u niego w Zurychu w maju roku zeszłego (1900), że oddawna w kursie swym zwykł podawać twierdzenie Weierstrassa w postaci, która jest przypadkiem szczególnym mego twierdzenia 6.

Jest to w rzeczywistości wyrażenie graniczne podwójne. Lecz znaleźliśmy w pierwszej Nocie, że można zawsze wyrazić $FA(x)$ przez wyrażenie graniczne pojedyńcze $\lim\limits_{n=\infty} g_n(x \mid a)$. To wyrażenie graniczne pojedyńcze jest niedogodne z tego względu, że gwiazda A nie jest koniecznie jego gwiazdą zbieżności. Zachodzi pytanie, czy nie można wyznaczyć wielomianu $g_n(x \mid a)$ tak, aby wyrażenie $\lim g_n(x \mid a)$ miało gwiazdę A za gwiazdę zbieżności. P. Borel za pomocą głębokiej analizy, którą niezadługo ogłosimy drukiem, wykazał, że tak nie jest.

A zatem wyrażenie analityczne najprostsze, przedstawiające gałąź $FA(x)$ wewnątrz gwiazdy A i dla którego ta gwiazda jest gwiazdą zbieżności, jest koniecznie wyrażeniem granicznem podwójnem, jak i to, które podaliśmy w twierdzeniu **4** Noty niniejszej.

R. MERECKI,

Wpływ zmiennej działalności słońca na nieokresowe ruchy atmosfery ziemskiej i temperaturę powietrza strefy pozarównikowej.

CZĘŚĆ II.[1]

W celu uzupełnienia mego poprzedniego studyum o falach ciśnienia (Prace matem.-fizyczn., t. XIV) w związku z zmienną działalnością słońca, starałem się zebrać możliwie największy materyał obserwacyjny długoletni, lecz pomimo wyzyskania wszystkich dostępnych mi źródeł, jedynie dla Europy i przeważnej części Azyi znalazłem dostateczne dane. Przebieg fal z kilkunastu miejscowości został już ogłoszony w „Meteorologische Zeitschrift“ z r. 1904 (Die Sonnentätigkeit und die unperiodischen Luftdruckänderungen); w dalszym ciągu przytoczymy te dane łącznie z nowo opracowanemi stacyami, nadmieniając, iż poprzednie liczby z Irkucka i Tyflisu uległy niewielkiej zmianie z przyczyny przybrania do obliczeń znacznie większej liczby lat obserwacyi.

Przebieg całkowitych fal ciśnienia w okresie rocznym podajemy w Tablicy I-ej, z uwagą, że Vardö i Bodö są krańcowemi punktami na północy Europy; Aleksandrowska, Korsakowska i Rykowskoje — 3 poblizkie stacye na Sachalinie, w dalszym ciągu traktowane jako jedna miejscowość (Sachalin), wreszcie Gudaur jest stacyą meteorologiczną górską na wysokości 2000 m. w pobliżu Tyflisu. Codzienny stan barometru brany był według spostrzeżeń, ogłaszanych w ogólnie znanych Rocznikach meteorologicznych z Wiednia, Petersburga i Sztokholmu; niektóre lata zostały mi przesłane w wyciągu z Archiwum Głównego Obserwatoryum fizycznego w Petersburgu.

---

[1]) Część I w tomie XIV Prac matemat.-fizycznych, str. 219—246.