M. LERCH,

O LICZBIE KLAS FORM KWADRATOWYCH DWÓJKOWYCH O WYRÓŻNIKU ZASADNICZYM DODATNIM. [1]

Formy dwójkowe o spółczynnikach całkowitych

$$ax^2 + bxy + cy^2 \quad \text{lub} \quad (a, b, c),$$

należące do tego samego wyróżnika dodatniego $D = b^2 - 4ac$, rozdzielają się na skończoną liczbę klas, którą oznaczam przez $\mathrm{Cl}(D)$. Wyróżnik nazywa się *zasadniczym*, gdy odpowiadają mu tylko formy pierwotne t. j. takie, w których spółczynniki a, b, c nie mają wspólnego dzielnika. Będziemy rozpatrywali tu tylko wyróżniki zasadnicze.

Według metod analitycznych Dirichleta, wyznaczenie liczby $\mathrm{Cl}(D)$ zależy od podstawowego rozwiązania równania Fermata:

$$T^2 - DU^2 = 4, \tag{1}$$

t. j. od rozwiązania, złożonego z najmniejszych liczb całkowitych dodatnich T, U. Niechaj $E(D)$ oznacza wielkość

$$\frac{T + U\sqrt{D}}{2};$$

---

[1]) Z „Journal de Mathémathiques pures et appliquées" 9. 1903, za upoważnieniem Autora. *S. D.*

opierając się na badaniach Dirichleta, otrzymałem był wzór następujący [1]):

$$(2)\qquad \mathrm{Cl}\,(D)\log E(D)=2\sqrt{\frac{D}{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}\int\limits_{m\sqrt{\frac{u\pi}{D}}}^{\infty}e^{-x^2}\,dx+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\int\limits_{\frac{m^2\pi}{Du}}^{\infty}e^{-x}\frac{dx}{x}\,,$$

gdzie u oznacza dowolną wielkość dodatnią, symbol zaś $\left(\frac{D}{m}\right)$ ma zwykłe znaczenie symbolu Legendre'a, uogólnionego przez Kroneckera.

Zastosowania liczebne wzoru (2), bez wprowadzenia w nim modyfikacyi, byłyby uciążliwe. Okażemy atoli w tej Nocie, że wzór (2) nadaje się do modyfikacyi, która ułatwia obliczanie liczby klas, nawet gdy wartość wyróżnika jest dość duża, w założeniu, rozumie się, że wartość wielkości $\log E(D)$ jest znana z pewnem przybliżeniem.

W tym celu wprowadzamy tu wielkość:

$$(3)\qquad S=2\sqrt{\frac{D}{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\int\limits_{m\sqrt{\frac{u\pi}{D}}}^{\infty}e^{-x^2}\,dx+\sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_{\frac{m^2\pi}{Du}}^{\infty}e^{-x}\frac{dx}{x}\,;$$

oznaczamy przez β całkowite 1, 2, 3, ..., czyniące zadość jednemu lub drugiemu z równań

$$(4)\qquad \left(\frac{D}{\beta}\right)=-1 \quad \text{lub} \quad \left(\frac{D}{\beta}\right)=0$$

i kładziemy:

$$(5)\qquad P=2\sqrt{\frac{D}{\pi}}\sum_{\beta}\frac{1}{\beta}\int\limits_{\beta\sqrt{\frac{u\pi}{D}}}^{\infty}e^{-x^2}\,dx\,,\qquad Q=\sum_{\beta}\int\limits_{\frac{\beta^2\pi}{Du}}^{\infty}e^{-x}\frac{dx}{x}\,,$$

umawiając się, by zredukować do połowy wyrazy, odpowiadające takim wartościom β, dla których $\left(\frac{D}{\beta}\right)=0$.

Wtedy, zamiast wzoru (9) mieć będziemy:

$$(2\,\mathrm{a})\qquad \mathrm{Cl}\,(D)\log E(D)=S-2P-2Q\,.$$

[1]) Rozprawa, odznaczona wielką nagrodą (Grand prix des sciences mathématiques) Akademii nauk w Paryżu w r. 1900.

Dowiedziemy, że wielkość S można otrzymać z wielkiem przybliżeniem w postaci skończonej; wyznaczymy następnie liczbę wyrazów, jakie wziąć należy w szeregach P i Q, aby przy pomocy wzoru (2 a) módz otrzymać liczbę całkowitą $\mathrm{Cl}\,(D)$. Liczba tych wyrazów jest względnie dość mała.

Równocześnie podamy tu na nowo dowód wzoru (2), ponieważ rozprawa, w której go podaliśmy, nie jest jeszcze ogłoszona drukiem.

I.

Niechaj $f(z)$ będzie funkcyą rzeczywistą dodatnią, malejącą w przedziale $(g\ldots\infty)$; będziemy rozpatrywali jedynie wartości zmiennej z, w tym przedziale zawarte. Nierówność oczywista

$$f(m)>\int\limits_{m}^{m+1}f(x)\,dx>f(m+1)$$

daje bezpośrednio:

$$\sum_{m=n}^{n+p-1}f(m)>\int\limits_{n}^{n+p}f(x)\,dx>\sum_{m=n+1}^{n+p}f(m)\,,$$

skąd wyprowadzamy twierdzenie Cauchy'ego, że szereg $\sum f(m)$ i całka $\int\limits_{n}^{\infty}f(x)\,dx$ są równocześnie zbieżnemi albo rozbieżnemi.

W przypadku zbieżności mamy nierówności:

$$\sum_{m=n}^{\infty}f(m)>\int\limits_{n}^{\infty}f(x)\,dx>\sum_{m=n+1}^{\infty}f(m)$$

i wyprowadzamy stąd, że:

$$(6)\qquad \sum_{\nu=n+1}^{\infty}f(\nu)=\int\limits_{n}^{\infty}f(x)\,dx-\vartheta f(n)\qquad (0<\vartheta<1)$$

i także:

$$\sum_{\nu=n}^{\infty}f(\nu)=\int\limits_{n}^{\infty}f(x)\,dx+\vartheta' f(n)\,.\qquad (0<\vartheta'<1)$$

Cytować będziemy te dwa równania pod nazwą twierdzenia pomocniczego Cauchy'ego. Spożytkujemy to twierdzenie dla wyprowadzenia związku, podanego przez Kinkelina [1]), mianowicie:

$$\lim_{\varrho=0}\left\{-\frac{1}{\varrho}+\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(w+\nu)^{1+\varrho}}\right\}=-\frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)}, \tag{7}$$

gdzie ϱ dąży do zera, przechodząc przez wartości dodatnie.

Ponieważ funkcya:

$$f(x)=\frac{1}{(w+x)^{1+\varrho}}$$

jest malejącą, to na mocy twierdzenia pomocniczego Cauchy'ego wnosimy, że:

$$\sum_{\nu=n}^{\infty}\frac{1}{(w+\nu)^{1+\varrho}}=\frac{1}{\varrho}\,\frac{1}{(w+n)^{\varrho}}+\frac{\vartheta}{(w+n)^{1+\varrho}}. \qquad (0<\vartheta<1)$$

Wynika stąd, w założeniu, że w jest dodatnie:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(\omega+\nu)^{1+\varrho}}-\frac{1}{\varrho}=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{1}{(w+\nu)^{1+\varrho}}+\frac{(w+n)^{-\varrho}-1}{\varrho}+\frac{\vartheta}{(w+n)^{1+\varrho}}. \tag{a}$$

Kładąc na chwilę:

$$G(\varrho)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{1}{(\omega+\nu)^{1+\varrho}}+\frac{(w+n)^{-\varrho}-1}{\varrho},\qquad F(\varrho)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(w+\nu)^{1+\varrho}}-\frac{1}{\varrho},$$

otrzymamy z równania (a):

$$F(\varrho)=G(\varrho)+\frac{\vartheta}{(w+n)^{1+\varrho}}. \tag{a'}$$

Wnosimy stąd najprzód, że wyrażenie $F(\varrho)$ jest oznaczone dla ϱ nieskończonostkowego. Niechaj, w samej rzeczy, δ będzie wielkością tak małą, jak się podoba; wyznaczamy całkowitą n przy pomocy nierówności

[1]) „Allgemeine Theorie der harmonischen Reihen mit Anwendung auf die Zahlentheorie“ (Progr. der Gewerbeschule Basel 1861—1862).

$$\frac{1}{w+n}<\frac{1}{2}\,\delta$$

i tworzymy różnicę:

$$F(\varrho)-F(\varrho')=[G(\varrho)-G(\varrho')]+\left[\frac{\vartheta}{(w+n)^{1+\varrho}}-\frac{\vartheta'}{(w+n)^{1+\varrho'}}\right],$$

gdzie ϑ' jest, podobnie jak ϑ, wielkością dodatnią, mniejszą od 1. Wtedy wartość bezwzględna wielkości, zawartej w drugim nawiasie po stronie drugiej, będzie mniejsza od $\frac{1}{2}\,\delta$ i można podać granicę ϱ'' taką, aby było $|\,G(\varrho)-G(\varrho')\,|<\frac{1}{2}\,\delta$, jeżeli tylko obie wielkości dodatnie ϱ i ϱ' pozostają mniejsze od ϱ''. Wypływa to z ciągłości funkcyi $G(\varrho)$, która jest przestępną całkowitą. Będzie tedy:

$$|\,F(\varrho)-F(\varrho')\,|<\delta,$$

skoro tylko $\varrho<\varrho''$ i $\varrho'<\varrho''$.

Wynika stąd, że wyrażenie $\lim\limits_{\varrho=0}F(\varrho)$ jest zbieżne, a równanie (a') wskazuje, że wielkość ϑ dąży do granicy oznaczonej ϑ_0 dla ϱ nieskończonostkowego; ponieważ zaś:

$$G(0)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{1}{w+\nu}-\log(w+n),$$

otrzymujemy więc, że:

$$\lim_{\varrho=0}F(\varrho)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{1}{w+\nu}-\log(w+n)+\frac{\vartheta_0}{w+n}. \qquad (0\leqq\vartheta_0\leqq 1)$$

Przechodząc do granicy dla n rosnącego nieograniczenie, znajdujemy:

$$\lim_{\varrho=0}F(\varrho)=\lim_{n=\infty}\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{1}{w+\nu}-\log(w+n)\right\},$$

lub

$$\lim_{\varrho=0}F(\varrho)=-\frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)};$$

jest to właśnie twierdzenie Kinkelina.

II.

W dalszym ciągu będziemy korzystali z wzoru, występującego w teoryi szeregu Malmstena:

$$F(x, s, u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[(x+m)^2+u]^{\frac{1}{2}s}}. \tag{8}$$

Na badanie tego wzoru, należącego do klasy przestępnych, którą zajmowałem się wielokrotnie, naprowadziła mnie rozprawa Appella [1]). Zakładamy, że u jest rzeczywiste i dodatnie, dalej, że $0 < x < 1$, jakkolwiek nie jest to koniecznem.

Korzystajmy z wzoru:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{[(x+m)^2+u]^{\frac{1}{2}s}} = \int_0^{\infty} e^{-uz-(x+m)^2 z} z^{\frac{1}{2}s-1}\, dz,$$

zachodzącego dla wartości s, mających część rzeczywistą dodatnią, o której zakładamy najprzód, że jest większa od 1, jak tego wymaga zbieżność naszego szeregu. Będzie:

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) F(x, s, u) = \int_0^{\infty} z^{\frac{1}{2}s-1} e^{-uz}\, dz \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-(x+m)^2 z}.$$

Na tej podstawie, znany wzór z teoryi funkcyj eliptycznych:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi i}{\omega}(x+m)^2} = \sqrt{\frac{\omega}{i}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\pi i (m^2\omega + 2mx)} = \sqrt{\frac{\omega}{i}}\, \vartheta_3(x \mid \omega),$$

jeżeli położymy w nim $\omega = \frac{\pi i}{z}$, przybierze postać:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-(x+m)^2 z} = \sqrt{\frac{\pi}{z}}\, \vartheta_3\left(x \,\middle|\, \frac{\pi i}{z}\right), \tag{β}$$

[1]) Patrz List wydrukowany w „Annales de la Faculté des sciences de Toulouse", t. 3.

a wzór nasz stanie się:

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) F(x, s, u) = \sqrt{\pi} \int_0^{\infty} \vartheta_3\left(x \,\middle|\, \frac{\pi i}{z}\right) z^{\frac{s-3}{2}} e^{-uz}\, dz,$$

lub, gdy zmienimy z na $z\pi$:

$$\pi^{-\frac{1}{2}s}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) F(x, s, u) = \int_0^{\infty} \vartheta_3\left(x \,\middle|\, \frac{i}{z}\right) z^{\frac{s-3}{2}} e^{-uz\pi}\, dz. \tag{9}$$

Dla z nieskończonostkowego funkcya $\vartheta_3\left(x \,\middle|\, \frac{i}{z}\right)$ różni się nieskończenie mało od 1, istnienie całki wymaga tedy, aby część rzeczywista wielkości s była większa od 1; wzór (β) wskazuje nadto, że całka istnieje także dla $u=0$, gdy założymy, że $0 < x < 1$. Gdy uczynimy $u=0$, wzór (8) stanie się:

$$F(x, s, 0) = R(x, s) + R(1-x, s),$$

gdzie $R(x, s)$ oznacza szereg harmoniczny uogólniony:

$$R(x, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(x+m)^s}. \tag{10}$$

Jeżeli zamiast z wprowadzimy $\frac{1}{z}$, otrzymamy z powyższego wzoru (9):

$$\pi^{-\frac{1}{2}s}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) [R(x, s) + R(1-x, s)] = \int_0^{\infty} \vartheta_3(x \mid iz)\, z^{-\frac{s+1}{2}}\, dz, \tag{9^0}$$

gdzie przekształcimy jeszcze stronę drugą, tak, aby była zbieżna dla wszystkich wartości s.

W samej rzeczy, niechaj a oznacza wielkość dodatnią; rozłóżmy całkę jak następuje:

$$\int_0^{a} \vartheta_3(x \mid iz)\, z^{-\frac{s+1}{2}}\, dz + \int_a^{\infty} \vartheta_3(x \mid iz)\, z^{-\frac{s+1}{2}}\, dz;$$

w całce drugiej połóżmy $\{\vartheta_3(x \mid iz) - 1\} + 1$ zamiast $\vartheta_3(x \mid iz)$ i rozłóżmy obie całki. Ponieważ założyliśmy, że część rzeczywista wielkości $\frac{s-1}{2}$ jest dodatnia, przeto:

$$\int_a^\infty z^{-\frac{s+1}{2}}\,dz = \frac{2}{s-1}\,a^{-\frac{s+1}{2}}$$

i będzie:

$$(10^*)\quad \left\{\begin{aligned} &\pi^{-\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)[R(x,s)+R(1-x,s)] \\ &=\frac{2}{s-1}\,a^{\frac{1-s}{2}}+\int_0^a \vartheta_3(x\,|\,iz)\,z^{-\frac{s+1}{2}}\,dz+\int_a^\infty \frac{\vartheta_3(x\,|\,iz)-1}{z^{\frac{s+1}{2}}}\,dz\,. \end{aligned}\right.$$

We wzorze tym mnożymy obie strony przez $\dfrac{\pi^{\frac{1}{2}s}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$ i bierzemy $s=1+\varrho$;

będzie najprzód:

$$\frac{2\pi^{\frac{1}{2}s}}{(s-1)\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\,a^{\frac{1-s}{2}}=\frac{2}{\varrho}+\left[\log\pi-\log a-\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right]+(\varrho)\,,$$

gdzie (ϱ) oznacza wielkość, malejącą nieograniczenie wraz z wielkością ϱ.

Będziemy tym sposobem mieli wzór:

$$R(x,1+\varrho)+R(1-x,1+\varrho)-\frac{2}{\varrho}=\left[\log\pi-\log a-\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right]+(\varrho)$$

$$+\frac{\pi^{\frac{1+\varrho}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1+\varrho}{2}\right)}\left[\int_0^a \vartheta_3(x\,|\,iz)\,z^{-\frac{1}{2}\varrho-1}\,dz+\int_a^\infty \frac{\vartheta_3(x\,|\,iz)-1}{z^{1+\frac{1}{2}\varrho}}\,dz\right],$$

a ponieważ według twierdzenia **K i n k e l i n a** jest

$$\lim_{\varrho=0}\left[R(x,1+\varrho)-\frac{1}{\varrho}\right]=-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\,,$$

przeto, biorąc ϱ nieskończenie małe i stosując wzór znany

$$\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}-\log\pi=\Gamma'(1)-\log 4\pi\,,$$

otrzymamy:

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}+\frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)}=[\Gamma'(1)-\log 4\pi]+\log a \\ &\qquad-\int_0^a \vartheta_3(x\,|\,iz)\,\frac{dz}{z}-\int_a^\infty \frac{\vartheta_3(x\,|\,iz)-1}{z}\,dz\,. \end{aligned}\right.$$

Wzór ten, podany przez nas w Buletynie czesko-król. Tow. nauk w Pradze w roku 1897 („O kilku wzorach, dotyczących funkcyj eliptycznych i całek eulerowych"), ma ważność pierwszorzędną dla naszego przedmiotu.

III.

We wzorze, dopiero co wyprowadzonym, zastąpmy w pierwszej całce po stronie drugiej wielkość $\vartheta_3(x\,|\,iz)$ przez jej wartość

$$\frac{1}{\sqrt{z}}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{z}(x+m)^2}$$

i zmieńmy następnie z na $\frac{1}{z}$; jeżeli przez C oznaczymy stałą **E u l e r a** $\Gamma'(1)=0{,}577215\ldots$, i położymy dla skrócenia:

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=\psi(x)\,,$$

wzór nasz przybierze postać:

$$(11^*)\quad \left\{\begin{aligned} &-C-\log 4\pi+\log a-\psi(x)-\psi(1-x) \\ &=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{\frac{1}{a}}^{\infty} e^{-(x+m^2)z\pi}\,\frac{dz}{\sqrt{z}}+2\sum_{n=1}^{\infty}\cos 2nx\pi\int_a^\infty e^{-n^2 z\pi}\,\frac{dz}{z}\,. \end{aligned}\right.$$

Przypomnijmy jeszcze następujący wynik z klasycznego wzoru Dirichleta:

$$\sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\psi\left(\frac{h}{D}\right)=-\sqrt{D}\,\mathrm{Cl}(D)\log E(D)\,. \tag{12}$$

Niechaj D będzie wyróżnikiem zasadniczym dodatnim; połóżmy we wzorze (11*) $x=\frac{h}{D}$ i pomnożywszy obie strony przez symbol Legendre'a $\left(\frac{D}{h}\right)$, dodajmy wyniki dla $h=1, 2\ldots, D-1$.

Na zasadzie związków

$$\left(\frac{D}{D-h}\right)=\left(\frac{D}{h}\right),\quad \sum_{1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)=0$$

i uwzględniając wzór (12), znajdziemy równanie:

$$2\sqrt{D}\,\mathrm{Cl}(D)\log E(D)=\sum_{h=0}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{\frac{1}{a}}^{\infty}e^{-(h+mD)^2\frac{z\pi}{D^2}}\frac{dz}{\sqrt{z}}$$

$$+2\sqrt{D}\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\int_{a}^{\infty}e^{-n^2z\pi}\frac{dz}{z}\,,$$

gdzie skorzystaliśmy ze znanego wzoru:

$$\sum_{n=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\cos\frac{2nh\pi}{D}=\left(\frac{D}{n}\right)\sqrt{D}\,,$$

zachodzącego dla wyróżników zasadniczych dodatnich.

Podwójne sumowanie po drugiej stronie wzoru wykonamy, kładąc $h+mD=n$ i pamiętając, że

$$\left(\frac{D}{h}\right)=\left(\frac{D}{n}\right);$$

otrzymujemy tym sposobem:

$$2\sqrt{D}\,\mathrm{Cl}(D)\log E(D)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\int_{\frac{1}{a}}^{\infty}e^{-\frac{n^2z\pi}{D^2}}\frac{dz}{\sqrt{z}}+2\sqrt{D}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\int_{a}^{\infty}e^{-n^2z\pi}\frac{dz}{z}\,.$$

Wyrazy szeregu pierwszego są parami równe; następnie podstawienia $z=\frac{D^2x^2}{n^2\pi}$, $z=\frac{x}{n^2\pi}$ dają:

$$\int_{\frac{1}{a}}^{\infty}e^{-\frac{n^2z\pi}{D^2}}\frac{dz}{\sqrt{z}}=\frac{2D}{n\sqrt{\pi}}\int_{\frac{n}{D}\sqrt{\frac{\pi}{a}}}^{\infty}e^{-x^2}dx;\quad \int_{a}^{\infty}e^{-n^2z\pi}\frac{dz}{z}=\int_{n^2a\pi}^{\infty}e^{-x}\frac{dx}{x};$$

kładąc więc dla symetryi $a=\frac{1}{Du}$, otrzymamy:

$$\mathrm{Cl}(D)\log E(D)=2\sqrt{\frac{D}{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n}\int_{n\sqrt{\frac{u\pi}{D}}}^{\infty}e^{-x^2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\int_{\frac{n^2\pi}{Du}}^{\infty}e^{-x}\frac{dx}{x}\,,$$

gdzie u oznacza wielkość dodatnią dowolną. Jest to właśnie wzór (2), o którym mówimy na początku tej pracy.

IV.

Wróćmy do wzoru (11*) i zbadajmy, czem on się staje, gdy x jest nieskończonostką. Mamy najprzód:

$$\psi(x)=\psi(1+x)-\frac{1}{x}\,,$$

skąd wynika, że dla x nieskończenie małego pierwsza strona wzoru (11*) staje się:

$$C-\log 4\pi+\log a+\frac{1}{x}\,. \tag{γ}$$

Co się tyczy strony drugiej, to wszystkie jej wyrazy pozostają skończone dla $x=0$, z wyjątkiem wyrazu pierwszej sumy, dla którego $m=0$; tym wyrazem jest:

$$\int_{\frac{1}{a}}^{\infty}e^{-x^2z\pi}\frac{dz}{\sqrt{z}}=\frac{1}{x\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x^2\pi}{a}}^{\infty}e^{-z}\frac{dz}{\sqrt{z}}=\frac{1}{x\sqrt{\pi}}\left[\int_{0}^{\infty}e^{-z}\frac{dz}{\sqrt{z}}-\int_{0}^{\frac{x^2\pi}{a}}e^{-z}\frac{dz}{\sqrt{z}}\right],$$

lub:

$$-\frac{1}{x}-\frac{2}{\sqrt{a}}+(x),$$

gdzie (x) oznacza nieskończonostkę. Znosząc po obu stronach wyraz $\frac{1}{x}$ i przechodząc do granicy, dostaniemy:

$$C-\log 4\pi+\log a=-\frac{2}{\sqrt{a}}+2\sum_{m=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{u}}^{\infty} e^{-m^2 z\pi}\frac{dz}{\sqrt{z}}+2\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-n^2 z\pi}\frac{dz}{z}.$$

Połóżmy $a=\frac{1}{v}$ i przekształćmy całki, jak wyżej; otrzymamy związek:

$$(13)\qquad \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\int_{m\sqrt{v\pi}}^{\infty} e^{-x^2}dx+\sum_{m=1}^{\infty}\int_{\frac{m^2\pi}{v}}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x}=\frac{C-\log 4\pi}{2}+\sqrt{v}-\frac{1}{2}\log v,$$

który posłuży nam do wyznaczenia wartości sum:

$$(14)\qquad S_1=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\int_{m\sqrt{\frac{u\pi}{D}}}^{\infty} e^{-x^2}dx,\quad S_2=\sum_{m=1}^{\infty}\int_{\frac{m^2\pi}{Du}}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x}.$$

W samej rzeczy, z wzoru (13), gdy w nim położymy $v=\frac{u}{D}$, wynika:

$$S_1=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\int_{m\sqrt{\frac{u\pi}{D}}}^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{C-\log 4\pi}{2}+\sqrt{\frac{u}{D}}-\log\sqrt{\frac{u}{D}}-\sum_{m=1}^{\infty}\int_{\frac{m^2D\pi}{u}}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x};$$

gdy zaś weźmiemy $v=Du$, będzie:

$$S_2=\sum_{m=1}^{\infty}\int_{\frac{m^2\pi}{Du}}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x}=\frac{C-\log 4\pi}{2}+\sqrt{Du}-\log\sqrt{Du}-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\int_{m\sqrt{Du\pi}}^{\infty} e^{-x^2}dx.$$

Zauważmy, że równania, które znajdujemy, całkując przez części

$$\int_{a}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x}=\frac{e^{-a}}{a}-\int_{a}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x^2},\quad \int_{a}^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{e^{-a^2}}{2a}-\frac{1}{2}\int_{a}^{\infty} e^{-x^2}\frac{dx}{x^2},$$

dają nam następujące nierówności:

$$(15)\qquad \sum_{m=1}^{\infty}\int_{\frac{m^2D\pi}{u}}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x}<\frac{u}{D\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{m^2D\pi}{u}}}{m^2};\quad \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\int_{m\sqrt{Du\pi}}^{\infty} e^{-x^2}dx<\frac{1}{Du\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-m^2Du\pi}}{m}.$$

Jeżeli wybierzemy u w ten sposób, aby Du oraz równocześnie $\frac{D}{u}$ były dostatecznie wielkiemi (np. $u=1$), strony drugie nierówności (15) będą miały wartości niewielkie, a wielkości (14) będą dane ze znacznem przybliżeniem przez wzory:

$$(14\,a)\qquad \begin{cases} S_1=\dfrac{C-\log 4\pi}{2}+\sqrt{\dfrac{u}{D}}+\log\sqrt{\dfrac{D}{u}}, \\ S_2=\dfrac{C-\log 4\pi}{2}+\sqrt{Du}-\log\sqrt{Du}. \end{cases}$$

Suma S, określona przez wzór (3), która jest równa

$$(16)\qquad S=S_1\sqrt{D}+S_2,$$

ma wartość przybliżoną następującą:

$$(16^*)\qquad \begin{aligned} S=&\frac{1}{2}\sqrt{D}\,(\log D+C-\log 4\pi+2\sqrt{u}-\log u) \\ &-\frac{1}{2}(\log D-C+\log 4\pi+\log u-2\sqrt{u}). \end{aligned}$$

Część zależna od parametru dowolnego u, t. j.:

$$(1+\sqrt{D})\,(\sqrt{u}-\log\sqrt{u}),$$

staje się najmniejszą dla $u=1$; założenie to zawsze czynić będziemy. Znajdziemy tedy następujący wzór przybliżony w założeniu, że $u=1$:

$$(17)\qquad S=\frac{1}{2}\sqrt{D}\,(\log D+0{,}046181)-\frac{1}{2}\log D+0{,}023090;$$

w praktyce będzie można stronę drugą zastąpić wielkością

$$\frac{1}{2}\sqrt{D}\log D-\frac{1}{2}\log D,$$

skoro tylko wyróżnik D przekracza pewną granicę, w założeniu, rozumie się, że wielkość $\log E(D)$ ma także wartość znaczną.

V.

Wyznaczymy obecnie granicę wyższą błędu, jaki wprowadzamy do rachunku, biorąc skończoną liczbę r, odpowiednio r' wyrazów w szeregach:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}\int_{m\sqrt{\frac{u\pi}{D}}}^{\infty}e^{-x^2}dx,\qquad \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\int_{\frac{m^2\pi}{Du}}^{\infty}e^{-x}\frac{dx}{x}.$$

Błędy te będą w każdym razie mniejsze odpowiednio od wielkości:

$$a_r=\sum_{\nu=r+1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\int_{\nu\sqrt{\frac{u\pi}{D}}}^{\infty}e^{-x^2}dx,\qquad b_{r'}=\sum_{\nu=\nu'+1}^{\infty}\int_{\frac{\nu^2\pi}{Du}}^{\infty}e^{-x^2}\frac{dx}{x}.$$

Funkcye:

$$f(z)=\frac{1}{z}\int_{az}^{\infty}e^{-x^2}dx \quad \text{i} \quad f(z)=\int_{a^2z^2}^{\infty}e^{-x^2}\frac{dx}{x},$$

są malejącemi; stosując więc do nich twierdzenie pomocnicze C a u c h y'ego

$$\sum_{\nu=m+1}^{\infty}f(\nu)=\int_{m}^{\infty}f(z)\,dz-\vartheta f(m),\quad (0<\vartheta<1)$$

otrzymujemy bezpośrednio:

$$a_r=\int_{r}^{\infty}\frac{dz}{z}\int_{az}^{\infty}e^{-x^2}dx-\frac{\vartheta}{r}\int_{ar}^{\infty}e^{-x^2}dx,$$

$$b_{r'}=\int_{r'}^{\infty}dz\int_{a'^2z^2}^{\infty}e^{-x}\frac{dx}{x}-\vartheta'\int_{a'^2r'^2}^{\infty}e^{-x}\frac{dx}{x},$$

gdzie położono:

$$a=\sqrt{\frac{u\pi}{D}},\quad a'=\sqrt{\frac{\pi}{Du}}$$

i gdzie $0<\vartheta<1$, $0<\vartheta'\leqq 1$.

Całka podwójna

$$J=\int_{r}^{\infty}\frac{dz}{z}\int_{az}^{\infty}e^{-x^2}dx,$$

odpowiada warunkom $r<z<\frac{x}{a}$ i może być przedstawiona tak:

$$J=\int_{ar}^{\infty}e^{-x^2}dx\int_{r}^{\frac{x}{a}}\frac{dz}{z}=\int_{ar}^{\infty}e^{-x^2}\left[\log x-\log(ar)\right]dx, \tag{18}$$

lub, gdy uczynimy $ar=v$:

$$J(v)=\int_{v}^{\infty}e^{-x^2}\log x\,dx-\log v\int_{v}^{\infty}e^{-x^2}dx. \tag{18^1}$$

Tym sposobem wartość wyrażenia a_r będziemy mogli napisać w postaci:

$$a_r=J(ar)-\frac{\vartheta}{r}\int_{ar}^{\infty}e^{-x^2}dx. \tag{18^2}$$

Aby przekształcić wyrażenie $b_{r'}$, zauważmy, że całka podwójna

$$J'=\int_{r'}^{\infty}dz\int_{(a'z)^2}^{\infty}e^{-x}\frac{dx}{x}$$

odpowiada warunkom $r'<z<\frac{\sqrt{x}}{a'}$, da się przeto przedstawić w postaci:

$$J'=\int_{(a'r')^2}^{\infty}e^{-x^2}\frac{dx}{x}\int_{r'}^{\frac{\sqrt{x}}{a'}}dz=\int_{(a'r')^2}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{a'}-r'\right)e^{-x}\frac{dx}{x},$$

lub też:

$$J'=\frac{2}{a'}\int_{a'r'}^{\infty}e^{-x^2}dx-r'\int_{(a'r')^2}^{\infty}e^{-x}\frac{dx}{x}.$$

7*

Jeżeli położymy więc dla skrócenia

$$(19)\qquad K(v) = 2\int_{v}^{\infty} e^{-x^2}\,dx - v\int_{v^2}^{\infty} e^{-x}\,\frac{dx}{x},$$

otrzymamy następujące wyrażenie na $b_{r'}$:

$$(19^1)\qquad b_{r'} = \frac{K(a'r')}{a'} - \vartheta'\int_{(a'r')^2}^{\infty} e^{-x}\,\frac{dx}{x}.$$

To mając, połóżmy $u = \xi^2$, aby wielkości

$$a = \xi\sqrt{\frac{\pi}{D}}, \quad a' = \frac{1}{\xi}\sqrt{\frac{\pi}{D}},$$

wyraziły się liniowo i przyjmijmy ξ za zmienną niezależną. Korzystając z łatwo sprawdzalnych związków

$$\frac{dJ}{dv} = -\frac{1}{v}\int_{v}^{\infty} e^{-x^2}\,dx, \quad \frac{dK}{dv} = -\int_{v^2}^{\infty} e^{-x}\,\frac{dx}{x},$$

znajdziemy, że pochodna względem ξ głównej części wielkości $2\sqrt{\frac{D}{\pi}}\,a_r + b_{r'}$, to jest:

$$\Phi = 2\sqrt{\frac{D}{\pi}}\,J(ar) + \frac{K(a'r')}{a'},$$

wyraża się w sposób następujący:

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = -\frac{1}{a}\int_{ar}^{\infty} e^{-x^2}\,dx + \frac{2}{a'\xi}\int_{a'r'}^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Wyrażenie to znika dla $r = r'$, $\xi = 1$; widzimy tedy, że błąd staje się prawie minimalnym, gdy weźmiemy równą liczbę wyrazów w obu szeregach i założymy, że $u = 1$. Połóżmy tedy ostatecznie:

$$a = \sqrt{\frac{\pi}{D}}, \quad v = ar,$$

tak, że wielkości a_r, b_r przybiorą postać:

$$a_r = J(v) - \frac{\vartheta}{r}\int_{v}^{\infty} e^{-x^2}\,dx, \quad b_r = \frac{K(v)}{a} - \vartheta'\int_{v^2}^{\infty} e^{-x}\,\frac{dx}{x}.$$

Będziemy jeszcze potrzebowali następującej wielkości:

$$(20)\qquad c_r = 2\sqrt{\frac{D}{\pi}}\,a_r + b_r = \frac{2a_r}{a} + b_r,$$

określającej granicę wyższą błędu, o którym mówimy, t. j. wielkości:

$$c_r = 2\sqrt{\frac{D}{\pi}}\sum_{\nu=r+1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\int_{\nu a}^{\infty} e^{-x^2}\,dx + \sum_{\nu=r+1}^{\infty}\int_{\nu^2 a^2}^{\infty} e^{-x}\,\frac{dx}{x}.$$

Przy pomocy równania (2) otrzymamy najprzód wzór:

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{Cl}(D)\log E(D) \\ &= \sum_{m=1}^{r}\left(\frac{D}{m}\right)\left[\frac{2}{am}\int_{am}^{\infty} e^{-x^2}\,dx + \int_{a^2m^2}^{\infty} e^{-x}\,\frac{dx}{x}\right] + \theta e_r \\ &(-1 < \theta < 1) \end{aligned}\right.$$

i następujące wyrażenie na c_r:

$$(20^1)\qquad c_r = \frac{2J(v) + K(v)}{a} - \frac{2\vartheta}{v}\int_{v}^{\infty} e^{-x^2}\,dx - \vartheta'\int_{v^2}^{\infty} e^{-x}\,\frac{dx}{x},$$

które posłuży nam do wyznaczenia liczby r.

Połóżmy dla skrócenia:

$$2J(v) + K(v) = \Lambda(v)$$

tak, że Λ będzie funkcyą, określoną przez wyrażenie

$$(22)\qquad \Lambda(v) = 2\int_{v}^{\infty} e^{-x^2}\log x\,dx + (2 - 2\log v)\int_{v}^{\infty} e^{-x^2}\,dx - v\int_{v^2}^{\infty} e^{-x}\,\frac{dx}{x};$$

położmy jeszcze:

(22¹) $$\Omega(v) = \frac{2}{v}\int_v^\infty e^{-x^2}\,dx + \int_{v^2}^\infty e^{-x}\frac{dx}{x},$$

wtedy z wzoru (20¹) wyniknie:

(20²) $$c_r = \frac{\Lambda(v)}{a} - \vartheta''\,\Omega(v). \qquad (0 < \vartheta'' < 1)$$

To mając, na mocy wiadomej parzystości liczby $\mathrm{Cl}\,(D)$ dość będzie wybrać liczbę r zgodnie z warunkiem

$$c_r < \log E(D),$$

któremu stanie się zadość a fortiori według (20²), gdy przyjmiemy:

(23) $$\Lambda\,(v) \leqq a \log E(D). \qquad (v = ar)$$

Dla wyznaczenia liczby ν, wystarczy ułożyć tablicę wartości funkcyi $\Lambda\,(v)$, dającej się łatwo obliczyć przy pomocy wzoru:

(24) $$\left\{\begin{aligned} &\Lambda(v) = (2 - C - \log 4)\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &+ (2v - \sqrt{\pi})\log v + Cv + \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu \frac{(4\nu+1)\,v^{2\nu+1}}{\nu!\,\nu\,(2\nu+1)^2}, \end{aligned}\right.$$

lub też:

$$\Lambda(v) = 0{,}0323 + (2v - 1{,}7724)\log v + 0{,}5772\,v - \frac{5}{9}v^3 + \frac{9}{10}v^5 - \frac{13}{882}v^7 + \ldots$$

Mamy naprzykład:

$$\Lambda\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}7896, \quad \Lambda\left(\frac{1}{3}\right) = 1{,}4091, \quad \Lambda\left(\frac{1}{4}\right) = 1{,}9319,$$

$$\Lambda\left(\frac{1}{5}\right) = 2{,}3519, \quad \Lambda\left(\frac{1}{6}\right) = 2{,}7044, \quad \Lambda\left(\frac{1}{7}\right) = 3{,}0060, \quad \Lambda\left(\frac{1}{8}\right) = 3{,}2690.$$

Jakkolwiek liczba r wyrazów, która zawiera wzór (21) nie ma być zbyt

wielka, mimo to daleko dogodniej będzie oddzielić wyrazy, odpowiadające wartościom $m = \beta$, dla których

(25⁰) $$\left(\frac{D}{\beta}\right) = -1 \quad \text{albo} \quad \left(\frac{D}{\beta}\right) = 0 \qquad (\beta = \beta_0)$$

i wziąć:

(25) $$P_r = \sum_{\beta \leqq r}\frac{2}{a\beta}\int_{a\beta}^\infty e^{-x^2}\,dx, \quad Q_r = \sum_{\beta \leqq r}\int_{a^2\beta^2}^\infty e^{-x}\frac{dx}{x},$$

przy umówieniu się, by sprowadzić do połowy każdy wyraz $\beta = \beta_0$, odpowiadający wartości β takiej, dla której $\left(\frac{D}{\beta_0}\right) = 0$. Wtedy strona druga wzoru (21) staje się:

$$\sum_{m=1}^{r}\left(\frac{2}{am}\int_{an}^\infty e^{-x^2}\,dx + \int_{a^2m^2}^\infty e^{-x}\frac{dx}{x}\right) - 2\,(P_r + Q_r) + \theta\,c_r,$$

a ponieważ suma, która występuje na pierwszem miejscu ma wartość $S - c_r$, będziemy mieli:

(26) $$\mathrm{Cl}\,(D)\log E(L) = S - 2\,(P_r + Q_r) - (1-\theta)\,c_r,$$

gdzie S ma wartość następującą:

(26⁰) $$S = \frac{1}{2}\sqrt{D}\,(\log D + 0{,}046181) - \frac{1}{2}\log D + 0{,}023090,$$

tak jak podaje wzór (17).

Ponieważ wielkość $1 - \theta$ zawiera się pomiędzy 0 i 2, wzór (26) można wyrazić przez nierówność, wypływającą nadto z warunku $c_r < \log E(D)$:

(26*) $$\frac{S - 2\,(P_r + Q_r)}{\log E(D)} - 2 < \mathrm{Cl}\,(D) < \frac{S - 2\,(P_r + Q_r)}{\log E(D)}$$

i ta ostatnia nierówność określa całkowitą $\mathrm{Cl}\,(D)$ nie dwuznacznie, jeżeli znamy z góry jej parzystość. Nie będą też rzadkiemi przypadki, w których sama tylko nierówność

$$\mathrm{Cl}\,(D)\log E(D) < S$$

wystarcza do wyznaczenia liczby klas.

Zanotujmy jeszcze raz, że położyliśmy $a = \sqrt{\frac{\pi}{D}}$, $ar = v$ i że liczba r jest określona przy pomocy warunku (23).

Nieoznaczoność wzoru (26) ścieśnia się, jeżeli zastąpimy w nim c_r przez wartość, obliczoną za pomocą wzoru (20^2).

Wszelkie tedy trudności zagadnienia sprowadzają się do wyznaczenia podstawowego rozwiązania równania Fermata:

$$T^2 - DU^2 = 4\,,$$

którego teorya zdaje się nie być jeszcze dostatecznie posunięta.

Aby okazać użytek praktyczny powyższych wywodów, wyznaczymy liczbę klas wyróżnika pierwszego $D = 9817$. Tylko wyróżniki formy $8k+5$ mogą mieć T i U nieparzyste, dla innych jest $T = 2x$, $U = 2y$, $x^2 - Dy^2 = 1$. Z cytaty Konena zapożyczam fakt, wykryty przez A. Martina, że całkowita x ma 97 cyfr; wielkość $\log E(D)$ jest prawie równa $\log T = \log 2x$, będzie zatem przybliżenie $\log E(D) = 222$; a ponieważ w naszym przypadku $a = 0{,}01788$, więc warunek, dotyczący liczby wyrazów staje się:

$$\Lambda(v) \leqq a \log E(D) = 4\,.$$

Wartość $\Lambda\left(\frac{1}{8}\right) = 3{,}269$ pozwala wnieść, że wystarczy wziąć $ar \geqq \frac{1}{8}$, skąd $r = 7$.

Ponieważ równanie $\left(\frac{D}{\beta}\right) = -1$ ma tylko rozwiązania $\beta = 5$, $\beta = 7$, przeto w przedziale od $\beta = 1$ do $\beta = r = 7$ sumy P_r i Q_r zawierają każda po dwa wyrazy, które zresztą łatwo obliczyć się dają.

Lecz znajdujemy $S = 450{,}5$, skąd:

$$\mathrm{Cl}\,(D) < \frac{450}{222}\,,$$

a stąd:

$$\mathrm{Cl}\,(D) = 1\,, \quad (D = 9817)\,,$$

gdyż liczba klas wyznacznika pierwszego musi być nieparzysta.

VI.

Jeżeli wyróżnik D ma jako czynniki liczbę 2 lub 3, wartości β_0 są bardzo liczne i rachunek mógłby się stać uciążliwy. I dla tego to zaleciłbym zmodyfikowanie wzoru przez wyrzucenie najprzód wartości m, zawierających jeden lub drugi z tych czynników.

Niechaj tedy będzie $D = 4m$ wyznacznikiem parzystym; suma, występująca po stronie drugiej wzoru (21), zawiera faktycznie tylko wyrazy rzędu nieparzystego i można będzie napisać:

$$S' - 2\,(P'_r + Q'_r) + (\theta - 1)\,c'_r\,,$$

gdzie P'_r i Q'_r są sumami P_r i Q_r, ograniczonemi do wyrazów pochodzących od nieparzystych wartości β, i gdzie:

$$S' = \sum_{\mu} \left(\frac{2}{a\mu} \int_{a\mu}^{\infty} e^{-x^2}\,dx + \int_{a^2\mu^2}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x} \right). \quad (\mu = 1, 3, 5, 7 \ldots)$$

To mając, połóżmy:

$$S'' = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{2}{2\nu a} \int_{2\nu a}^{\infty} e^{-x^2}\,dx + \int_{4\nu^2 a^2}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x} \right);$$

będzie widocznie:

$$S' = S - S''\,,$$

gdzie S jest wyżej badanym szeregiem. Aby otrzymać wielkość S'', zauważmy, że:

$$S'' = \frac{1}{2} \sqrt{D}\, S''_1 + S''_2\,,$$

gdzie:

$$S''_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \int_{2\nu a}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\,, \quad S''_2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{4\nu^2 a^2}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x}\,.$$

Te dwie wielkości otrzymać można z wielkiem przybliżeniem przy pomocy wzorów (14) i (14a), w których należy wziąć $u=4$ i $u=\frac{1}{4}$. Pisząc $D=4m$, otrzymamy:

$$S''_1=\frac{C-\log 4\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{m}}+\frac{1}{2}\log m\,,\quad S''_2=\frac{C-\log 4\pi}{2}+\sqrt{m}-\frac{1}{2}\log m.$$

Kładąc na chwilę $\frac{C-\log 4\pi}{2}=A$, mamy tym sposobem:

$$S''=\frac{1}{2}\sqrt{m}\log m+\sqrt{m}\,(A+1)-\frac{1}{2}\log m+A+1\,,$$

a ponieważ według (16*) dla $D=4m$, $u=1$ jest:

$$S=\sqrt{m}\,(\log m+2A+2+\log 4)-\frac{1}{2}\log m+A+1-\log 2\,,$$

znajdziemy więc, odejmując:

$$S'=\frac{1}{2}\sqrt{m}\,(\log m+C-\log\pi+2+2\log 2)-\log 2 \tag{27}$$

lub:

$$S'=\frac{1}{2}\sqrt{m}\,(\log m+2{,}818770)-0{,}693147. \tag{27'}$$

Liczba klas będzie tedy określona przez nierówności:

$$\frac{S'-2P'_r-2Q'_r}{\log E(D)}>\mathrm{Cl}\,(D)>\frac{S'-2P'_r-2Q'_r}{\log E(D)}-2\,,\quad (D=4m)\,. \tag{28}$$

Niechaj będzie np. $D=4m=4.859=3436$; będzie:

$$\frac{1}{2}T=7024.10^{18}\,,$$

skąd

$$\log E(D)=53{,}28\,,$$

następnie

$$\alpha=0{,}0308$$

i wreszcie:

$$\alpha\log E(D)=1{,}64\,;$$

zważywszy, że $\Delta\left(\frac{1}{3}\right)=1{,}409$, będzie można wziąć $\alpha r\geqq\frac{1}{3}$, skąd $r=11$, i będziemy mieli tylko jedno rozwiązanie równania $\left(\frac{D}{\beta}\right)=-1$, mianowicie $\beta=7$.

Znajdujemy:

$$\log m+2{,}82=9{,}57\,,\quad \sqrt{m}=29{,}30\,,$$

skąd:

$$S'<150\,,\quad \mathrm{Cl}\,(D)<\frac{150}{53{,}28}\,,$$

a zatem:

$$\mathrm{Cl}\,(D)=2\,,$$

bo liczba klas musi tu być parzysta.

Czytelnik sam spostrzeże, w jaki sposób modyfikuje się wzór ogólny w przypadku $D=3m$ lub $D=12m$.

Wyłożona tu metoda, oparta na wzorze (2), daje się zastosować i do innych rozwinięć, podanych przez nas w uwieńczonej rozprawie, tak dla wyznaczników dodatnich jak i dla ujemnych. Przy innej sposobności powrócę do szeregów warunkowo-zbieżnych, występujących w tym ostatnim przypadku, i okażę, że metody analityczne mają istotną wyższość nad metodą elementarną, polegającą na wyznaczaniu form zredukowanych.