TREŚĆ.

P. H. SCHOUTE,

SUR UNE SÉRIE DE CYCLIDES PARALLÈLES DE DUPIN.

(O SZEREGU CYKLID RÓWNOLEGŁYCH DUPINA).

1. Considérons (Fig. 1) l'ellipse α et l'hyperbole β, situées en des plans perpendiculaires entre eux de manière que la droite d'intersection de ces deux plans est un axe de symétrie des deux coniques à centre commun O et supposons que les foyers réels d'une quelconque de ces coniques sont des sommets de l'autre. Soit $OA=a$, $OB=b$ le couple des demi-axes de

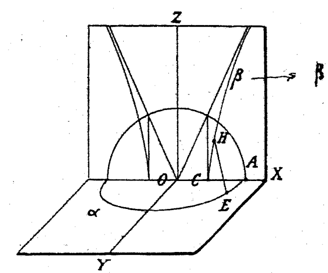

Fig. 1.

l'ellipse et $OC=c=\sqrt{a^2-b^2}$ le demi-axe réel de l'hyperbole. Représentons les coordonnées des points E et H de α et β par rapport aux axes indiqués dans la figure sous la forme:

$$E \ldots (a \cos\varphi, \quad b \sin\varphi, \quad 0), \qquad H \ldots (c \sec\psi, \quad 0, \quad b \operatorname{tg}\psi)$$

Alors nous trouvons:

$$\overline{EH}^2 = (a\cos\varphi - c\sec\psi)^2 + b^2\sin^2\varphi + b^2\operatorname{tg}^2\psi = (a\sec\psi - c\cos\varphi)^2\,,$$

et donc, faisant attention au signe:

$$EH = a\sec\psi - c\cos\varphi\,. \tag{1}$$

Cette propriété, bien connue des coniques α et β formant les focales réelles d'un faisceau tangentiel de quadriques confocales, est notre point de départ.

2. Imaginons-nous les sphères à centres E, H dont celle au centre E admet le rayon $c\cos\varphi + \varkappa$, celle au centre H le rayon $a\sec\psi + \varkappa$, où $\varkappa$ représente une constante. D'après la relation 1) ces deux sphères se touchent et ce contact est un contact intérieur ou extérieur à mesure que les expressions $c\cos\varphi + \varkappa$, $a\sec\psi + \varkappa$ s'accordent ou ne s'accordent pas en signe. En faisant varier φ et ψ nous engendrons deux séries de sphères (E) et (H), jouissant de la propriété que toutes les sphères (E) touchent toutes les sphères (H). Le lieu des points de contact ou bien l'enveloppe des sphères (E) ou bien l'enveloppe des sphères H est, comme on sait, une cyclide de Dupin [1]). Il est bien facile d'en obtenir l'équation. En effet, l'équation de la sphère (E) est:

$$(x - a\cos\varphi)^2 + (y - b\sin\varphi)^2 + z^2 = (c\cos\varphi + \varkappa)^2\,,$$

ou bien:

$$2\,[(ax + c\varkappa)\cos\varphi + b\,y\sin\varphi] = x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - \varkappa^2\,. \tag{2}$$

En différentiant par rapport à φ on trouve:

$$2\,[-(ax + c\varkappa)\sin\varphi + b\,y\cos\varphi] = 0\,. \tag{3}$$

Ainsi en élévant au carré les équations 2) et 3) et ajoutant, on obtient l'équation de la cyclide sous la forme:

$$4\,[(ax + c\varkappa)^2 + b^2y^2] = (x^2 + y^2 + z^2 - b^2 - \varkappa^2)^2\,. \tag{4}$$

Dans ce qui suit nous nous occupons de la série de cyclides parallèles, représentée par l'équation 4), si l'on y considère $\varkappa$ comme paramètre [2]).

[1]) Comparez p. e. dans la „Geometrie der Lage" de M. Th Reye, tome I, la série des problèmes sous l'entête: „Das Princip der reciproken Radien".

[2]) Si l'on ne fait varier qu'un seul des deux paramètres φ, ψ, on trouve les deux séries de lignes de courbure planes de la cyclide, les points de contact des sphères de l'une quelconque des deux séries avec une sphère déterminée de l'autre formant en même temps les points communs à cette dernière sphère et à la sphère immédiatement suivante. On en déduit sans aucun calcul que les cônes de révolution passant par α (β) ont leurs sommets sur β (α) et que l'axe de chacun de ces cônes est la tangente à la conique β (α) en ce sommet.

3. Cherchons les nombres caractéristiques n_1, n_2, n_3 de la série (n_1, n_2, n_3) des cyclides parallèles c. à d., le nombre n_1 de ces cyclides qui passent par un point donné et les nombres n_2, n_3 de ces cyclides qui touchent respectivement une droite et un plan donnés.

Si P est le point de contact de deux sphères (E), (H), les trois points E, H, P sont en ligne droite; on en déduit que les normales de la série des cyclides se composent des droites qui s'appuient à la fois sur α et β. Donc n_1 est le nombre des sécantes communes de α et β passant par un point donné P, n_2 est le nombre de ces sécantes coupant orthogonalement une droite donnée d et n_3 est le nombre de ces sécantes coupant orthogonalement un plan donné π ou passant par un point P_∞ à l'infini. Ainsi l'on trouve tout de suite $n_1 = n_3 = 4$; car les deux cônes à sommet commun P ou les deux cylindres à sommet commun P_∞ dont α, β sont les courbes directrices, admettent quatre génératrices communes [1]). Et n_2 a la valeur huit. Car les droites qui s'appuient sur d et α et qui coupent d sous un angle droit, engendrent un conoïde droit du quatrième ordre et cette surface gauche rencontre la conique β en huit points. La série en question est donc un système (4, 8, 4).

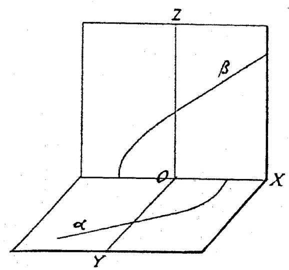

Fig. 2.

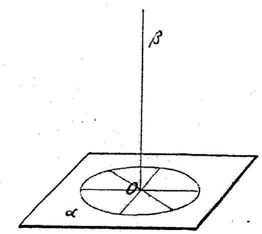

Fig. 3.

4. Nous mentionnons encore les deux cas particuliers possibles. Si α et β sont des paraboles (Fig. 2), la série des cyclides cubiques est un système (3, 6, 3). Et si α est un cercle et β l'axe de ce cercle (Fig. 3), la série des tores est un système (2, 4, 2).

[1]) Le résultat $n_1 = 4$ se déduit aussi de l'équation 4) qui est du quatrième ordre en $\varkappa$.