C. NEUMANN,

O PEWNYM GATUNKU CAŁEK, ROZPOSTARTYCH NA POWIERZCHNI KULI. [1]

§ 1.

O FUNKCYACH $J_n(x, y, z)$, TU ROZWAŻAĆ SIĘ MAJĄCYCH, I O BEZPOŚREDNIO WIDOCZNYCH WŁASNOŚCIACH TYCH FUNKCYJ.

Jeżeli daną elipsę o osiach $2a$ i $2b$ rozłożymy z jej środka na nieskończenie wązkie wycinki i dodamy następnie pola tych wycinków, otrzymamy w ten sposób następujące wyrażenie na pole elipsy danej:

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\left(\frac{1}{a}\right)^2\cos^2\varphi+\left(\frac{1}{b}\right)^2\sin^2\varphi}.$$

Wyrażenie to musi być równe πab; kładąc zatem $\left(\frac{1}{a}\right)^2 = A$, $\left(\frac{1}{b}\right)^2 = B$, znajdziemy wzór:

$$(1) \qquad \int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{A\cos^2\varphi+B\sin^2\varphi}=\frac{2\pi}{\sqrt{AB}}.$$

[1]) Berichte d. math.-phys. Klasse d. Königl. Sächs. Gesell. der Wiss. 1 sierpnia 1903 r. Przekład za upoważnieniem Czcigodnego Autora. *S. D.*

Całkę tę nazwać można **całką kołową**. Można bowiem uważać $d\varphi$ jako element linii kołowej o promieniu **jeden**; wtedy $\cos\varphi$ i $\sin\varphi$ można uważać jako dostawy kierunkowe promienia koła, idącego ku elementowi $d\varphi$.

Jeżeli w podobny sposób obliczymy objętość **elipsoidy** przez rozkład jej ze środka na nieskończenie cienkie stożki, dojdziemy do następującego wzoru, analogicznego do wzoru (1):

$$\int \frac{d\omega}{(A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4\pi}{\sqrt{ABC}}\,. \tag{2}$$

Całka ta może być nazwana **całką kulistą** (właściwie: rozpostartą na powierzchni kuli), albowiem rozciąga się na wszystkie elementy $d\omega$ powierzchni kulistej o promieniu **jeden**; α, β, γ oznaczają wtedy dostawy kierunkowe promienia kuli, idącego ku elementowi $d\omega$.

Wzór (2) przyjmiemy za podstawę do zbadania innych całek kulistych

$$J_n = \int (x\alpha^2 + y\beta^2 + z\gamma^2)^n\, d\omega\,, \tag{3}$$

gdzie $d\omega, \alpha, \beta, \gamma$ jak i znak całkowy mają mieć to samo znaczenie, co we wzorze (2); x, y, z mają oznaczać **dowolne zmienne**, tak że J_n jest funkcyą zmiennych x, y, z. Przyczem n ma być **stałą rzeczywistą, dowolnie daną**.

Przypadki szczególne. Kładąc $n=0$, otrzymamy:

$$J_0 = \int d\omega = 4\pi\,; \tag{3 a}$$

a więc J_0 jest **stałą**. Kładąc następnie $n=1, 2, 3, \ldots$, znajdujemy bez trudności:

$$J_1 = \frac{4\pi}{3}(x+y+z)\,,$$

$$J_2 = \frac{4\pi}{3\,.\,5}\left[(x+y+z)^2 + 2(x^2+y^2+z^2)\right], \tag{3 b}$$

i t. d., i t. d.,

tak że $J_1, J_2, J_3 \ldots$ będą wszystkie funkcyami całkowitemi jednorodnemi zmiennych x, y, z.

W ogólności wszakże n **ma być stałą dowolną**; wtedy istotne obliczanie funkcyi J_n, t. j. wykonywanie całkowań, wskazanych we wzorze (3), nie będzie zbyt łatwe.

Ale jakąkolwiek wartość mieć będzie stała n, z wzoru (3) znajdziemy w każdym razie przez różniczkowanie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_n}{\partial x} &= n\int (x\alpha^2+y\beta^2+z\gamma^2)^{n-1}\,\alpha^2\, d\omega\,, \\ \frac{\partial J_n}{\partial y} &= n\int (x\alpha^2+y\beta^2+z\gamma^2)^{n-1}\,\beta^2\, d\omega\,, \\ \frac{\partial J_n}{\partial z} &= n\int (x\alpha^2+y\beta^2+z\gamma^2)^{n-1}\,\gamma^2\, d\omega\,; \end{aligned} \tag{4}$$

skąd, mnożąc przez x, y, z i dodając, otrzymamy:

$$x\frac{\partial J_n}{\partial x} + y\frac{\partial J_n}{\partial y} + z\frac{\partial J_n}{\partial z} = nJ_n\,. \tag{5}$$

[n jest stałą dowolną rzeczywistą]

Lecz $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, gdyż α, β, γ są dostawy kierunkowe; uwzględniając to, otrzymujemy przez dodanie trzech równań (4) wzór następujący:

$$\frac{\partial J_n}{\partial x} + \frac{\partial J_n}{\partial y} + \frac{\partial J_n}{\partial z} = nJ_{n-1}\,. \tag{6}$$

[n jest stałą dowolną rzeczywistą]

Jest to t. zw. **równanie zwrotne**, przy pomocy którego można z funkcyi J_n obliczyć funkcyę J_{n-1}. Pytamy, czy nie możnaby odwrotnie z funkcyi J_{n-1} obliczyć funkcyi J_n, lub (co wychodzi na to samo) z funkcyi J_n wyprowadzić funkcyi J_{n+1}. Na pytanie to odpowiada w paragrafie następującym wzór (13).

Równanie zwrotne (6) **odmawia usługi** w przypadku $n=0$ z powodu czynnika n, znajdującego się po stronie prawej, t. j. przy pomocy tego równania **nie** będzie można z funkcyi J_0 wyprowadzić funkcyi J_{-1}. Natomiast będzie można przy pomocy tego równania z funkcyi J_{-1} wyprowadzić kolejno funkcye $J_{-2}, J_{-3}, J_{-4}, \ldots$ Zauważmy przytem, że funkcya

$$J_{-1} = \int \frac{d\omega}{x\alpha^2+y\beta^2+z\gamma^2} \tag{6 a}$$

daje się przedstawić przez następującą **całkę eliptyczną**:

$$J_{-1} = 2\pi \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{(1+xs)(1+ys)(1+zs)}}\,; \tag{6 b}$$

dalsze tego rozwinięcie uważamy za zbyteczne.

§ 2.

NOWE WŁASNOŚCI FUNKCYJ $J_n(x, y, z)$.

Jeżeli we wzorze (2) położymy: $A = 1 - \varepsilon x$, $B = 1 - \varepsilon y$, $C = 1 - \varepsilon z$, gdzie ε ma być bardzo małym czynnikiem dodatnim, otrzymamy odrazu[1]):

$$(7) \qquad \frac{1}{\sqrt{(1-\varepsilon x)(1-\varepsilon y)(1-\varepsilon z)}} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{d\omega}{[1-\varepsilon(x\alpha^2+y\beta^2+z\gamma^2)]^{\frac{3}{2}}},$$

lub, gdy stronę prawą wyobrazimy sobie rozwiniętą według potęg czynnika ε:

$$(8) \qquad \frac{1}{\sqrt{(1-\varepsilon x)(1-\varepsilon y)(1-\varepsilon z)}} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n \varepsilon^n,$$

gdzie wielkości H_n mają wartości następujące:

$$H_0 = \frac{1}{4\pi}\int d\omega,$$

$$H_1 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{3}{2}\right)\int (x\alpha^2+y\beta^2+z\gamma^2)\, d\omega,$$

$$H_2 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{3.5}{2.4}\right)\int (x\alpha^2+y\beta^2+z\gamma^2)^2\, d\omega,$$

$$H_3 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{3.5.7}{2.4.6}\right)\int (x\alpha^2+y\beta^2+z\gamma^2)^3\, d\omega, \ldots$$

i t. d., i t. d.

Te wartości H_n dają się łatwo wyrazić przy pomocy wielkości J_n (wzór (3)); znajdujemy:

$$(9) \qquad \begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{4\pi} J_0, \quad \text{stąd } H_0 = 1 \ [\text{porówn. } (3\text{a})] \\ H_1 &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{3}{2}\right) J_1, \\ H_2 &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{3.5}{2.4}\right) J_2, \\ H_3 &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{3.5.7}{2.4.6}\right) J_3, \end{aligned}$$

i t. d., i t. d.

[1]) Należy pamiętać, że α, β, γ są dostawy kierunkowe, że więc $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

Z wzoru (8), wziąwszy pochodne cząstkowe względem x, otrzymujemy:

$$(10) \qquad \frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon x)\sqrt{(1-\varepsilon x)(1-\varepsilon y)(1-\varepsilon z)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial H_n}{\partial x}\varepsilon^n;$$

a z wzorów (8) i (10) przez wyeliminowanie wyrażenia zawierającego pierwiastek:

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n \varepsilon^n = 2\left(\frac{1-\varepsilon x}{\varepsilon}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial H_n}{\partial x}\varepsilon^n.$$

Jeżeli porównamy spółczynniki przy ε^{-1} po obu stronach, znajdziemy:

$$O = 2\frac{\partial H_0}{\partial x},$$

co nie daje nam nic nowego, gdyż $H_0 = 1$ [porówn. (9)]; porównywając w dalszym ciągu spółczynniki przy $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots$, otrzymamy równania:

$$H_n = 2\frac{\partial H_{n+1}}{\partial x} - 2x\frac{\partial H_n}{\partial x}. \qquad [\text{dla } n = 0, 1, 2, 3, \ldots]$$

Zamiast wielkości H_n można tu wprowadzić przy pomocy wzorów (9) wielkości J_n; będzie:

$$J_n = 2\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)\frac{\partial J_{n+1}}{\partial x} - 2x\frac{\partial J_n}{\partial x}. \qquad [n = 0, 1, 2, 3, \ldots]$$

lub, co na jedno wychodzi:

$$(11) \qquad J_n + 2x\frac{\partial J_n}{\partial x} = 2\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)\frac{\partial J_{n+1}}{\partial x}. \qquad [n = 0, 1, 2, 3, \ldots]$$

Analogiczne do tego wzory otrzymamy, biorąc pochodne względem zmiennych y, z; tym sposobem dochodzimy do następującego wyniku:

Twierdzenie. Dla badanych tu funkcyj J_n [wzór (3)] zachodzą następujące równania:

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} J_n + 2x\frac{\partial J_n}{\partial x} &= 2\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)\frac{\partial J_{n+1}}{\partial x}, \\ J_n + 2y\frac{\partial J_n}{\partial y} &= 2\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)\frac{\partial J_{n+1}}{\partial y}, \\ J_n + 2z\frac{\partial J_n}{\partial z} &= 2\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)\frac{\partial J_{n+1}}{\partial z}. \end{aligned} \right. \qquad [n = 0, 1, 2, 3, \ldots]$$

Jeżeli pomnożymy te równania przez x, y, z, następnie dodamy i uwzględnimy wzór (5), znajdziemy odrazu:

$$(13)\qquad (x+y+z)\,J_n + 2\left(x^2\frac{\partial J_n}{\partial x} + y^2\frac{\partial J_n}{\partial y} + z^2\frac{\partial J_n}{\partial z}\right) = (2n+3)\,J_{n+1}\,. \qquad [n=0,1,2,3,\ldots]$$

Wzory (12) i (13) nazywać będziemy równaniami zwrotnemi; w każdym razie zasługuje na tę nazwę wzór (13), ponieważ przy jego pomocy z funkcyi J_n możemy obliczyć funkcyę J_{n+1}.

Gdy wzory poprzednie (5) i (6) zachodziły oczywiście dla wszelkich wartości stałej rzeczywistej n, wzory (12) i (13) są tymczasem dowiedzione tylko dla wartości $n=0, 1, 2, 3\ldots$ Pytamy tedy, czy wzory te (12) i (13) stosują się także np. w razie gdy $n=-3$, albo $n=\frac{1}{4}$ albo ogólnie, gdy $n=\lambda$, gdzie λ jest zupełnie dowolną stałą rzeczywistą.

§ 3.

DALSZE BADANIE RÓWNAŃ ZWROTNYCH (12) i (13), ZNALEZIONYCH W PARAGRAFIE POPRZEDZAJĄCYM.

Z wzoru (3), gdy w nim zamiast n napiszemy λ, mamy:

$$(14)\qquad J_\lambda = \int (x\alpha^2 + y\beta^2 + z\gamma^2)^\lambda\, d\omega\,.$$

Połóżmy następnie:

$$(15)\qquad f = J_\lambda + 2x\frac{\partial J_\lambda}{\partial x} - 2\left(\frac{2\lambda+3}{2\lambda+2}\right)\frac{\partial J_{\lambda+1}}{\partial x}\,.$$

To wyrażenie f staje się na mocy równań (12) zerem dla $\lambda = 0, 1, 2, 3\ldots$ Chcemy zbadać, czy staje się także zerem, wtedy, gdy przez λ rozumiemy dowolną stałą rzeczywistą.

W tym celu postaramy się rozwinąć wyrażenia J_λ i f według funkcyj $J_0, J_1, J_2, J_3, \ldots$, utworzonych nie dla argumentów x, y, z, lecz dla argumentów $x-1, y-1, z-1$. Rozwinięcia, o których mowa, mają tedy postępować nie według funkcyj:

$$(16)\qquad J_n = \int (x\alpha^2 + y\beta^2 + z\gamma^2)^n\, d\omega\,, \qquad [n=0,1,2,3,\ldots]$$

lecz według funkcyj:

$$(17)\qquad \mathfrak{J}_n = \int [(x-1)\,\alpha^2 + (y-1)\,\beta^2 + (z-1)\,\gamma^2]^n\, d\omega\,. \qquad [n=0,1,2,3,\ldots]$$

Zauważmy, że równania zwrotne (12), otrzymane dla funkcyj J_n, stosują się i do funkcyj $\mathfrak{J}_n$. Tak np. na mocy pierwszego z równań (12), jeżeli zastąpimy w niem x, y, z przez $x-1, y-1, z-1$, znajdziemy odrazu:

$$(18)\qquad \mathfrak{J}_n + 2(x-1)\frac{\partial \mathfrak{J}_n}{\partial x} = 2\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)\frac{\partial \mathfrak{J}_{n+1}}{\partial x}\,. \qquad [n=0,1,2,3,\ldots]$$

Jest także oczywiście:

$$(19)\qquad \mathfrak{J}_0 = 4\pi\,, \quad \text{a więc np.}\ \frac{\partial \mathfrak{J}_0}{\partial x} = 0\,.$$

Jeżeli dla skrócenia położymy chwilowo:

$$(20)\qquad \mathrm{w} = (x-1)\,\alpha^2 + (y-1)\,\beta^2 + (z-1)\,\gamma^2\,,$$

wzory (14), (16), (17) przybiorą postać [1]:

$$(21)\qquad \begin{cases} J_\lambda = \int (1+\mathrm{w})^\lambda\, d\omega\,, \\ J_n = \int (1+\mathrm{w})^n\, d\omega\,, \\ \mathfrak{J}_n = \int \mathrm{w}^n\, d\omega\,. \end{cases}$$

W rozważaniach tego i następującego paragrafu okaże się koniecznem nadawanie zmiennym x, y, z wartości zespolonych, a więc przyjęcie, że:

$$(22)\qquad x = x_R + ix_S\,,\quad y = y_R + iy_S\,,\quad z = z_R + iz_S\,,$$

gdzie $i=\sqrt{-1}$; x_R, y_R, z_R oraz x_S, y_S, z_S są liczbami rzeczywistemi.

Prócz tego jest rzeczą dogodną, przynajmniej czasowo, poddać argumenty zespolone x, y, z następującym warunkom [2]:

$$(23)\qquad \operatorname{mod}(x-1) \leqq \frac{1}{2}\,,\quad \operatorname{mod}(y-1) \leqq \frac{1}{2}\,,\quad \operatorname{mod}(z-1) \leqq \frac{1}{2}\,.$$

[1] Należy zauważyć, że α, β, γ są dostawy kierunkowe, że więc $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$. Na mocy tego otrzymamy np. z równania (20) odrazu $\mathrm{w} = (x\alpha^2 + y\beta^2 + z\gamma^2) - 1$ i t. d.

[2] Zamiast liczby $\frac{1}{2}$ możnaby w równaniach (23) wziąć jakąkolwiek inną liczbę ρ, czyniącą zadość warunkowi $0<\rho<1$. Tylko dla prostoty przyjęliśmy $\rho=\frac{1}{2}$.

Co się wreszcie tyczy wyrażenia (20) na w, to z wzoru (20) otrzymujemy odrazu

$$\mathrm{mod}\,\mathrm{w} \leqq \alpha^2 \,\mathrm{mod}\,(x-1) + \beta^2 \,\mathrm{mod}\,(y-1) + \gamma^2 \,\mathrm{mod}\,(z-1)\,,$$

gdyż α, β, γ są dostawy kierunkowe, a więc zawsze *rzeczywiste*. Z tego ostatniego wzoru ze względu na warunki (23) dla zmiennych x, y, z znajdujemy:

$$\mathrm{mod}\,\mathrm{w} \leqq (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}\,,$$

t. j.:

$$\mathrm{mod}\,\mathrm{w} \leqq \frac{1}{2}\,. \tag{24}$$

Stąd wynika, że np. $(1+\mathrm{w})^\lambda$ da się rozwinąć na szereg *zbieżny*, postępujący według potęg wielkości w:

$$(1+\mathrm{w})^\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \mathrm{w} + \lambda_2 \mathrm{w}^2 + \lambda_3 \mathrm{w}^3 + \dots\,, \tag{25}$$

w którym λ_n wyraża się w ten sposób przy pomocy znanej funkcyi *gaussowskiej* Π:

$$\lambda_n = \frac{\Pi(\lambda)}{\Pi(n)\,\Pi(\lambda-n)}\,. \tag{26}$$

Po tych wszystkich przygotowaniach łatwo będzie osiągnąć cel, który sobie założyliśmy. Jeżeli w *pierwszych* wzorach (21) podstawimy rozwinięcie *zbieżne* (25), otrzymamy:

$$J_\lambda = \int (\lambda_0 + \lambda_1 \mathrm{w} + \lambda_2 \mathrm{w}^2 + \lambda_3 \mathrm{w}^3 + \dots)\, d\omega$$

t. j.:

$$J_\lambda = \lambda_0 \int d\omega + \lambda_1 \int \mathrm{w}\, d\omega + \lambda_2 \int \mathrm{w}^2\, d\omega + \lambda_3 \int \mathrm{w}^3\, d\omega + \dots$$

lub prościej:

$$J_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lambda_n \int \mathrm{w}^n\, d\omega\right),$$

a więc przy uwzględnieniu *ostatniego* z wzorów (25):

$$J_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \mathfrak{J}_n\,, \tag{27}$$

a stąd także:

$$J_{\lambda+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+1)_n \mathfrak{J}_n\,. \tag{28}$$

Jeżeli podstawimy te wartości (27), (28) we wzorze (15), znajdziemy:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lambda_n \mathfrak{J}_n + 2x\,.\,\lambda_n \frac{\partial \mathfrak{J}_n}{\partial x} - 2\left(\frac{2\lambda+3}{2\lambda+2}\right)(\lambda+1)_n \frac{\partial \mathfrak{J}_n}{\partial x}\right),$$

lub co na jedno wychodzi:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \left[\mathfrak{J}_n + 2(x-1)\frac{\partial \mathfrak{J}_n}{\partial x}\right] + \sum_{n=0}^{\infty} \left(2\lambda_n - 2\left(\frac{2\lambda+3}{2\lambda+2}\right)(\lambda+1)_n\right)\left[\frac{\partial \mathfrak{J}_n}{\partial x}\right],$$

gdzie wyrażenia, zawarte w nawiasach klamrowych, są funkcyami jednorodnemi wielkości $x-1$, $y-1$, $z-1$ odpowiednio rzędu n-tego i $(n-1)$-go. Zamiast *pierwszego* z tych wyrażeń można podstawić wartość daną przez wzór (18) i otrzymać w ten sposób:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\,.\,2\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)\frac{\partial \mathfrak{J}_{n+1}}{\partial x} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(2\lambda_n - 2\left(\frac{2\lambda+3}{2\lambda+2}\right)(\lambda+1)_n\right)\frac{\partial \mathfrak{J}_n}{\partial x}\,,$$

gdzie w sumie drugiej zamiast skaźnika $n=0$ napisaliśmy $n=1$, co jest oczywiście dozwolone, ponieważ $\frac{\partial \mathfrak{J}_0}{\partial x}$ równa się *zeru* [porów. (19)].

Jeżeli w sumie drugiej tego wzoru zastąpimy n przez $n+1$, otrzymamy:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\,.\,2\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)\frac{\partial \mathfrak{J}_{n+1}}{\partial x} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(2\lambda_{n+1} - 2\left(\frac{2\lambda+3}{2\lambda+2}\right)(\lambda+1)_{n+1}\right)\frac{\partial \mathfrak{J}_{n+1}}{\partial x}\,,$$

to można tak napisać:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{\partial \mathfrak{J}_{n+1}}{\partial x}, \tag{29}$$

gdzie C_n ma wartość następującą:

$$C_n = 2\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)\lambda_n + 2\lambda_{n+1} - 2\left(\frac{2\lambda+3}{2\lambda+2}\right)(\lambda+1)_{n+1}.$$

Jeżeli tu zamiast λ_n, λ_{n+1} i $(\lambda+1)_{n+1}$ podstawimy wartości, wzięte z wzoru (26), znajdziemy odrazu, że $C_n = 0$. Otrzymujemy tedy z wzoru (29):

$$f = 0. \tag{30}$$

Jeżeli przypomnimy sobie, jakiem jest właściwie znaczenie wyrażenia f, zwrócimy uwagę na to, że badanie niniejsze polega zasadniczo na założeniu (23), będziemy mogli wypowiedzieć następujący

Wynik. Niechaj λ będzie stałą dowolnie daną, która może być np. dodatnia lub ujemna, całkowita lub ułamkowa. Wtedy funkcya

$$f = f(x, y, z) = J_\lambda + 2x\frac{\partial J_\lambda}{\partial x} - 2\left(\frac{2\lambda+3}{2\lambda+2}\right)\frac{\partial J_{\lambda+1}}{\partial x}, \tag{31}$$

utworzona dla jakichkolwiek rzeczywistych lub zespolonych argumentów x, y, z jest stale równa zeru, skoro tylko argumenty te x, y, z poddamy warunkom:

$$\text{abs}(x-1) \leqq \frac{1}{2}, \quad \text{abs}(y-1) \leqq \frac{1}{2}, \quad \text{abs}(z-1) \leqq \frac{1}{2}, \tag{32}$$

Dowiedliśmy tym sposobem oczywiście, że pierwsze z równań (12) zachodzi i wtedy jeszcze, gdy w niem liczbę całkowitą dodatnią n zastąpimy przez stałą dowolną λ, zawsze w założeniu, że argumenty x, y, z czynią zadość warunkom (32). Że podobnie rzecz się ma z dwoma pozostałemi z równań (12) i z równaniem (13), nie wymaga dalszego wyjaśnienia.

Ale przedewszystkiem idzie nam o usunięcie ograniczeń (32), a przynajmniej o możliwe rozszerzenie zakresu, przez warunki te ograniczonego. Uczynimy to w paragrafie następnym.

§ 4.

RÓWNANIA ZWROTNE (12) i (13) UTRZYMUJĄ SIĘ TAKŻE DLA WARTOŚCI UJEMNYCH I UŁAMKOWYCH LICZBY n, W ZAŁOŻENIU, ŻE CZĘŚCI RZECZYWISTE ARGUMENTÓW x, y, z SĄ DODATNIE.

Zmienną zespoloną:

$$x = x_R + i x_S \qquad \text{[porówn. (22)]} \tag{a}$$

można geometrycznie uważać jako punkt na płaszczyźnie zespolonej x. Wtedy x_R i x_S są spółrzędnemi tego punktu w odniesieniu do dwóch stałych (wzajemnie prostopadłych) osi R i S na tej płaszczyznie; z nich jedną nazywamy osią rzeczywistą, drugą osią boczną (lub urojoną).

Jeżeli poddamy zmienną x [podobnie jak np. we wzorach (23) i (32)] warunkowi:

$$\text{mod}(x-1) \leqq \frac{1}{2} \text{ t. j. } \text{mod}(x_R + i x_S - 1) \leqq \frac{1}{2}, \tag{b}$$

to punt x zmusimy do pozostawania w polu kołowem, opisanem w uważanej płaszczyznie około punku 1 [t. j. około punktu ($x_R = 1$, $x_S = 0$)] promieniem $\frac{1}{2}$. Z warunku (b) wynika odrazu, że spółrzędna x_R punktu x równoległa do osi R jest stale $\leqq \frac{1}{2}$, a więc np. stale dodatnia.

(33) Z warunku: $\text{mod}(x-1) \leqq \frac{1}{2}$ wynika tedy wprost: $x_R > 0$, lub mówiąc geometrycznie: pole kołowe $\text{mod}(x-1) \leqq \frac{1}{2}$ jest tylko częścią większego obszaru $x_R > 0$, lub, co na jedno wychodzi: obszar $x_R > 0$ obejmuje w sobie pole kołowe: $\text{mod}(x-1) \leqq \frac{1}{2}$.

Należy odróżnić dwa wzory $x_R > 0$ i $x_R \geqq 0$: ostatni z nich przedstawia oczywiście połowę płaszczyzny zespolonej x_R, wzór zaś $x_R > 0$ w twierdzeniu (33) przedstawia obszar, różniący się od tej połowy płaszczyzny o nieskończenie wązki pasek, ciągnący się wzdłuż osi S.

(34) Twierdzenia zupełnie analogiczne do twierdzenia (33) stosują się oczywiście do zmiennej zespolonej y i także do zmiennej zespolonej z.

Co się tyczy stałej rzeczywistej λ, wprowadzonej w paragrafie poprzedzającym, przyjmijmy dla prostoty i łatwiejszego wyobrażenia $\lambda = -8$. Wtedy według (14) i (15) będzie:

$$(35) \qquad J_{-8} = \int \frac{d\omega}{(x\alpha^2 + y\beta^2 + z\gamma^2)^8}$$

oraz

$$(36) \qquad f = f(x, y, z) = J_{-8} + 2x \frac{\partial J_{-8}}{\partial x} - 2\left(\frac{2.8-3}{2.8-2}\right)\frac{\partial J_{-7}}{\partial x}.$$

Jeżeli w tym wzorze (36) zamiast J_{-8} podstawimy wartość (35) i zamiast J_{-7} wartość analogiczną, otrzymamy wprost za pomocą rachunku elementarnego:

$$(37) \qquad f = f(x, y, z) = \int \frac{F d\omega}{(x\alpha^2 + y\beta^2 + z\gamma^2)^9},$$

gdzie:

$$(38) \qquad F = 2.8.x\alpha^2 + [1 + (2.8-3)\alpha^2][x\alpha^2 + y\beta^2 + z\gamma^2].$$

Widzimy stąd, że funkcya f [wzór (37)] wtedy tylko może stawać się nieciągłą, gdy mianownik, stojący pod znakiem całkowym staje się zerem. Mianownik ten, jeżeli spożytkujemy wprowadzone wyżej znakowanie (22), da się tak przedstawić:

$$(x\alpha^2 + y\beta^2 + z\gamma^2)^9 = [(x_R\alpha^2 + y_R\beta^2 + z_R\gamma^2) + i(x_S\alpha^2 + y_S\beta^2 + z_S\gamma^2)]^9.$$

Jeżeli założymy, że wielkości x_R, y_R, z_R są wszystkie dodatnie, to trójmian $x_R\alpha^2 + y_R\beta^2 + z_R\gamma^2$, a więc i mianownik, o którym mówimy, znikać nie może, albowiem wielkości rzeczywiste dodatnie $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ są poddane warunkowi $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, a więc muszą być takie, że najwyżej dwie z nich mogą być równe zeru.

Jeżeli tedy wielkości x_R, y_R, z_R są wszystkie dodatnie, to znikanie uważanego mianownika, a więc i nieciągłość funkcyi f są niemożliwe; tym sposobem dochodzimy do następującego twierdzenia.

Twierdzenie I. Funkcya $f(x, y, z)$ będzie stale ciągłą, jeżeli argumenty jej x, y, z poddamy warunkom:

$$(39) \qquad x_R > 0, \quad y_R > 0, \quad z_R > 0.$$

Do tego twierdzenia na mocy wyniku, zawartego we wzorach (31), (32 możemy odrazu dołączyć następujące

Twierdzenie II. Funkcya $f(x, y, z)$ jest stale równa zeru, jeżeli jej argumenty x, y, z poddamy warunkom:

$$(40) \qquad \mathrm{mod}\,(x-1) \leqq \frac{1}{2}, \quad \mathrm{mod}\,(y-1) \leqq \frac{1}{2}, \quad \mathrm{mod}\,(z-1) \leqq \frac{1}{2}.$$

Te dwa nadzwyczaj proste i piękne twierdzenia stanowią właściwą podstawę podjętego tu badania.

Nadajmy najprzód argumentom y i z wartości stałe; niechaj te stałe y i z spełniają warunki:

$$(\alpha) \qquad \mathrm{mod}\,(y-1) \leqq \frac{1}{2} \;\text{ i }\; \mathrm{mod}\,(z-1) \leqq \frac{1}{2},$$

tak, że, na mocy tych warunków, czynią też zadość wzorom:

$$(\beta) \qquad x_R > 0 \;\text{ i }\; z_R > 0. \qquad \text{[porówn. (33) i (34)]}$$

Wtedy $f(x, y, z)$ zależy tylko od jednej zmiennej x. I ta funkcya, jedynie od zmiennej x zależna, będzie, jak to wynika z wzorów (α), na mocy twierdzenia II (40), stale

$$(\mathrm{A}) \qquad = 0 \;\text{ w kole }\; \mathrm{mod}\,(x-1) \leqq \frac{1}{2}.$$

I będzie też, jak to wynika z wzorów (β) na mocy twierdzenia II (39)

$$(\mathrm{B}) \qquad \text{ciągła w obszarze } x_R > 0.$$

Lecz jeżeli funkcya zmiennej x w płaszczyznie zespolonej x jest wewnątrz pewnego danego obszaru $\mathfrak{A}$ wszędzie równa zeru, i jeżeli wiadomo nadto, że wewnątrz większego obszaru $\mathfrak{B}$, obejmującego w sobie obszar $\mathfrak{A}$, jest wszędzie ciągłą, wtedy wynika stąd, że jest wszędzie równa zeru wewnątrz obszaru większego $\mathfrak{B}$. To twierdzenie ogólne możemy zastosować oczywiście do obszarów (A) i (B) t. j. $\mathrm{mod}\,(x-1) \leqq \frac{1}{2}$ i $x_R > 0$, wiemy bowiem [porówn. (33)], że obszar $x_R > 0$ obejmuje w sobie obszar kołowy $\mathrm{mod}\,(x-1) \leqq \frac{1}{2}$.

Z wyników (A) i (B) wypływa tedy wprost, że rozważana tu zależna od zmiennej x funkcya $f(x, y, z)$ jest zerem nie tylko w kole $\mathrm{mod}\,(x-1) \leqq \frac{1}{2}$ lecz także w obszarze większym $x_R > 0$.

Streszczając wywód powyższy, możemy powiedzieć: jeżeli dwie stałe y i z czynią zadość warunkom (α), t. j. $\operatorname{mod}(y-1) \leqq \frac{1}{2}$, $\operatorname{mod}(z-1) \leqq \frac{1}{2}$, to wynika stąd, że zależna od x funkcya $f(x, y, z)$ musi być zerem w obszarze $x_R > 0$. Albo też, mówiąc prościej:

(41) $\begin{cases} \text{Funkcya } f(x,y,z) \text{ jest stale równa zeru, jeżeli jej argumenty } x, y, z \text{ czynią zadość warunkom:} \\ x_R > 0, \quad \text{i} \quad \operatorname{mod}(y-1) \leqq \frac{1}{2}, \quad \operatorname{mod}(z-1) \leqq \frac{1}{2}. \end{cases}$

Aby uczynić krok dalszy, nadajmy teraz wartości stałe argumentom x i z; niechaj te stałe x i z będą poddane warunkom:

$$(\gamma) \qquad x_R > 0 \quad \text{i} \quad \operatorname{mod}(z-1) \leqq \frac{1}{2},$$

tak, że na mocy tych warunków, czynią one także zadość wzorom:

$$(\delta) \qquad x_R > 0 \quad \text{i} \quad z_R > 0. \qquad \text{[porówn. (33) i (34)]}$$

Wtedy funkcya $f(x, y, z)$ staje się zależną od jednej tylko zmiennej y. Ta funkcya zmiennej y, jak to wynika z wzorów (γ), na mocy dopiero co dowiedzionego twierdzenia (41), będzie:

$$(\mathrm{C}) \qquad = 0 \text{ w kole: } \operatorname{mod}(y-1) \leqq \frac{1}{2}$$

i według zaś wzorów (δ), na mocy twierdzenia I (39), będzie:

$$(\mathrm{D}) \qquad \text{ciągła w obszarze: } y_R > 0.$$

Znikanie tej funkcyi w kole (C): $\operatorname{mod}(y-1) \leqq \frac{1}{2}$ przenosi się atoli na wszelki wolny od nieciągłości obszar większy, obejmujący w sobie to koło, np. na obszar D: $y_R > 0$.

Jeżeli tedy stałe x i z są poddane warunkom (γ), t. j. warunkom $x_R > 0$ i $\operatorname{mod}(z-1) \leqq \frac{1}{2}$, to wypływa stąd, że zależna od zmiennej y funkcya $f(x, y, z)$ musi być zerem w obszarze $y_R > 0$. Innemi słowy:

(42) $\begin{cases} \text{Funkcya } f(x,y,z) = 0 \text{ jest stale zerem, jeżeli jej argumenty } x, y, z \text{ czynią zadość warunkom:} \\ x_R > 0, \quad y_R > 0 \quad \text{i} \quad \operatorname{mod}(z-1) \leqq \frac{1}{2}. \end{cases}$

Aby wreszcie osiągnąć ostatni stopień obecnego rozważania, pomyślmy teraz oba argumenty x i y jako stałe. Te stałe x, y niechaj będą poddane warunkom:

$$(\varepsilon) \qquad x_R > 0 \quad \text{i} \quad y_R > 0.$$

Wtedy $f(x, y, z)$ zależy tylko od jednej zmiennej z, z wzorów zaś (ε), na mocy dopiero co dowiedzionego twierdzenia (42), wypływa, że ta funkcya zmiennej z będzie:

$$(\mathrm{E}) \qquad = 0 \text{ w kole: } \operatorname{mod}(z-1) \leqq \frac{1}{2};$$

będzie ona też — jak to wypływa z tychże wzorów (ε), na mocy twierdzenia I (39),

$$(\mathrm{F}) \qquad \text{ciągła w obszarze: } z_R > 0.$$

Znikanie w kole (E): $\operatorname{mod}(z-1) \leqq \frac{1}{2}$ przenosi się atoli na każdy wolny od nieciągłości obszar większy, obejmujący w sobie to koło, a więc np. na obszar (F): $z_R > 0$.

Jeżeli zatem obie stałe x i y podlegają warunkom: $x_R > 0$ i $y_R > 0$, wyrażonym przez wzory (ε), to wypływa stąd, że funkcya $f(x, y, z)$, zależna od zmiennej z, musi być równa zeru w obszarze: $z_R > 0$, lub mówiąc prościej:

(43) $\begin{cases} \text{Funkcya } f(x,y,z) \text{ będzie stale równa zeru, skoro tylko jej argumenty } x, y, z \text{ czynią zadość warunkom:} \\ x_R > 0, \quad y_R > 0, \quad z_R > 0. \\ \text{Przez } f(x,y,z) \text{ rozumiemy tu [porówn. (36)] następującą funkcyę:} \\ f(x,y,z) = \left[J_n + 2x \frac{\partial J_n}{\partial x} - 2\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right) \frac{\partial J_{n+1}}{\partial x} \right]_{n=-8} \\ \text{tak, że twierdzenie (przynajmniej dotąd) stosuje się specyalnie do przypadku } n = -8. \end{cases}$

To twierdzenie (43) pokazuje oczywiście, że pierwsze z równań zwrotnych (12) zachodzi dla $n = -8$, w założeniu, że ograniczamy się do argumentów x, y, z, czyniących zadość warunkom $x_R > 0$, $y_R > 0$, $z_R > 0$. Zaledwie tu potrzeba dodać, że tożsamo powiedzieć można o drugiem i trzeciem z tych równań zwrotnych (12).

Przykładowo tylko rozważaliśmy tu przypadek $n=-8$. Dojdziemy, rzecz oczywista, do zupełnie takich samych wyników, jeżeli za n weźmiemy dowolną liczbę całkowitą ujemną, tak że możemy wypowiedzieć:

Wynik badania. Równania zwrotne (12), udowodnione w paragrafie drugim dla $n=0,1,2,3,\ldots$, mianowicie równania:

$$(44)\qquad \begin{cases} J_n+2x\dfrac{\partial J_n}{\partial x}-2\left(\dfrac{2n+3}{2n+2}\right)\dfrac{\partial J_{n+1}}{\partial x}=0\,, \\ J_n+2y\dfrac{\partial J_n}{\partial y}-2\left(\dfrac{2n+3}{2n+2}\right)\dfrac{\partial J_{n+1}}{\partial y}=0\,, \\ J_n+2z\dfrac{\partial J_n}{\partial z}-2\left(\dfrac{2n+3}{2n+2}\right)\dfrac{\partial J_{n+1}}{\partial z}=0 \end{cases}$$

zachodzą także dla $n=-1,-2,-3,\ldots$ w założeniu, że ograniczamy się do argumentów x, y, z, których części rzeczywiste są dodatnie.

Toż samo powiedzieć należy o równaniu zwrotnem (13):

$$(45)\qquad (x+y+z)\,J_n+2\left(x^2\frac{\partial J_n}{\partial x}+y^2\frac{\partial J_n}{\partial y}+z^2\frac{\partial J_n}{\partial z}\right)-(2n+3)\,J_{n+1}=0\,,$$

albowiem wynika ono bezpośrednio z równań (44) przez pomnożenie ich odpowiednio przez x, y, z i następne dodanie [porówn. (12, 13)].

Twierdzenie dodatkowe. Z przeprowadzonych rozważań wynikłoby też jasno, że równania (44) i (45) zachowują moc swoją, gdy w nich przez n rozumiemy jakąkolwiek stałą rzeczywistą (np. jakikolwiek ułamek dodatni lub ujemny), zawsze w założeniu, że ograniczamy się do argumentów x, y, z, których części rzeczywiste są dodatnie.

Przykład. Pierwsze z równań (44) brzmi:

$$(46)\qquad J_n+2x\frac{\partial J_n}{\partial x}=2\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)\frac{\partial J_{n+1}}{\partial x}\,,$$

lub. gdy w niem zamiast J_n, J_{n+1} wprowadzimy wartości tych wyrażeń:

$$J_n=\int(x\alpha^2+y\beta^2+z\gamma^2)^n\,d\omega\,,\quad J_{n+1}=\int(x\alpha^2+y\beta^2+z\gamma^2)^{n+1}\,d\omega$$

$$(47)\qquad \begin{aligned} &\int(x\alpha^2+\ldots)^n\,d\omega+2n\,x\int(x\alpha^2+\ldots)^{n-1}\,\alpha^2\,d\omega \\ &\qquad=(2n+3)\int(x\alpha^2+\ldots)^n\,\alpha^2\,d\omega\,; \end{aligned}$$

skąd, np. dla $n=-1$, otrzymujemy:

$$(48)\qquad \int\frac{d\omega}{x\alpha^2+y\beta^2+z\gamma^2}-2x\int\frac{\alpha^2\,d\omega}{(x\alpha^2+y\beta^2+z\gamma^2)^2}=\int\frac{\alpha^2\,d\omega}{x\alpha^2+y\beta^2+z\gamma^2}\,,$$

gdzie znowu zakładamy, że części rzeczywiste argumentów x, y, z są dodatnie.

Z tego wzoru (48) uczynimy użytek w paragrafie następnym.

§ 5.

ZASTOSOWANIE DO PRZYCIĄGANIA ELIPSOIDY JEDNORODNEJ.

Potencyał Newtonowski elipsoidy jednorodnej względem jej punktu wewnętrznego (x, y, z) można obliczyć w ten sposób, że elipsoidę tę, z tego punktu, dzielimy na nieskończenie wązkie stożki, zbieramy razem po dwa stożki wprost przeciwległe (wierzchołkowe) i t. d.. Dochodzimy tą drogą — którą szczegółowo rozwijać tu zbyteczna — do następującego wyrażenia na ten potencyał V:

$$(49)\qquad V=\frac{q}{2}\,(Gx^2+Hy^2+Jz^2+K)\,,$$

gdzie q oznacza gęstość elipsoidy; G, H, J, K są pewne stałe, zależne jedynie od osi $2a$, $2b$, $2c$ elipsoidy; tak np. stałe G i K mają wartości następujące:

$$(50)\qquad G=A\left[2A\int\frac{\alpha^2\,d\omega}{(A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2)^2}-\int\frac{d\omega}{A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2}\right],$$

$$(51)\qquad K=\int\frac{d\omega}{A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2}\,,$$

gdzie A, B, C wyrażają się w ten sposób:

$$(52)\qquad A=\left(\frac{1}{a}\right)^2,\quad B=\left(\frac{1}{b}\right)^2,\quad C=\left(\frac{1}{c}\right)^2;$$

znaki całkowania we wzorach (50), (51), a także wielkości $d\omega, \alpha, \beta, \gamma$ mają te same znaczenia, jak w całej tej rozprawie [porówn. np. (2), (3)]. Wyrażenia trzech stałych G, H, J można znacznie uprościć przy pomocy wyłożonej tu teoryi ogólnej. W samej rzeczy z wzoru (48) wypływa wprost, że wyrażeniu (50) na G można nadać postać następującą:

$$(53)\qquad G=-A\int\frac{\alpha^2\,d\omega}{A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2}\,.$$

Analogiczne wartości otrzymamy na H i J, tak że w ten sposób znajdziemy np.

$$G+H+J=-\int d\omega=-4\pi. \tag{54}$$

Według wzoru (49) wyrażenie różniczkowe Laplace'a t. j. ΔV ma wartość $\Delta V=q(G+H+J)$; tym sposobem ze związku (54) otrzymujemy wzór: $\Delta V=-4\pi q$, zgodnie ze znanem twierdzeniem Poissona.

Przy pomocy przedstawionej tu teoryi ogólnej byliśmy w stanie wyrażenie (50) przekształcić z łatwością na wyrażenie (53).

Wreszcie co się tyczy obu wyrażeń (50) i (53) na stałą G, zauważmy jeszcze co następuje: otrzymujemy na G wyrażenie (50), obliczając bezpośrednio potencyał (na drodze wskazanej); wyrażenie zaś (53) na G otrzymujemy, wyznaczając najprzód składowe siły, a potem dopiero z nich (przez całkowanie) sam potencyał.

§ 6.

O STOSOWALNOŚCI PRAWA NEWTONA DO BARDZO WIELKICH ODLEGŁOŚCI.

Jeżeli X, Y, Z są siły, z jakiemi rozważana elipsoida jednorodna działa na jakiś punkt wewnętrzny (x, y, z), wtedy:

$$X=k^2\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y=k^2\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z=k^2\frac{\partial V}{\partial z}, \tag{55}$$

gdzie k^2 oznacza czynnik dodatni stały (oznaczony przez K u Gaussa); zakładamy przytem, że masa punktu podległego działaniu jest równa 1. Jeżeli podstawimy tu zamiast potencyału V jego wartość (49), znajdziemy odrazu:

$$X=k^2qGx, \quad Y=k^2qHy, \quad Z=k^2qJz, \tag{56}$$

gdzie np. G [porówn. (53) i (52)] jest stała, zależna jedynie od półosi elipsoidy a, b, c, mianowicie:

$$G=(-1)\int\frac{\left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 d\omega}{\left(\frac{\alpha}{a}\right)^2+\left(\frac{\beta}{b}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{c}\right)^2}, \tag{57}$$

H i J mają znaczenie analogiczne; wreszcie q jest gęstością elipsoidy.

Oczywiście tedy stałe G, H, J, a więc i siły X, Y, Z pozostaną zupełnie bez zmiany, jeżeli zastąpimy a, b, c odpowiednio przez $\lambda a, \lambda b, \lambda c$, przynajmniej, gdy $\lambda > 1$.

Ta prosta uwaga prowadzi do dziwnych wyników, gdy pozostajemy pod wpływem zwykłego wyobrażenia, że cała przestrzeń świata aż w nieskończoność wypełniona jest jednostajnie gwiazdami; że więc morze gwiazd rozciąga się na wszystkie strony w nieskończoność i zarazem posiada stałą gęstość średnią. Wtedy bowiem możnaby sobie wystawić wszechświat np. jako nieskończenie wielką elipsoidę jednorodną. A także możnaby, gdy a, b, c są stałe skończone dodatnie, dowolnie obrane, przyjąć, że osiami tej elipsoidy są $\lambda a, \lambda b, \lambda c$, gdzie λ jest czynnikiem nieskończenie wielkim. Ale wtedy doszlibyśmy do wyniku, że ta elipsoida nieskończenie wielka, przedstawiająca wszechświat, działałaby na pojedyńcze gwiazdy jak np. Słońce, Ziemię, Marsa i t. d. z siłą, zależącą zasadniczo od owych dowolnie obranych stałych a, b, c, co jest oczywiście niedorzecznością.

Te proste uwagi nasunęły mi się były już dawno (1854—1857), lecz wtedy nie śmiałem wyprowadzać z nich żadnego wniosku na niekorzyść prawa Newtona. W późniejszym czasie wielokrotnie podejmowałem na nowo te rozważania, upraszczając je zarazem.

W elipsoidzie nieskończenie wielkiej nieoznaczoność w mowie będących sił wynika z trzech przyczyn: po pierwsze, z zupełnie dowolnych wartości stałych a, b, c; po drugie, z dowolnych również kierunków osi elipsoidy; po trzecie z dowolnego obioru położenia środka elipsoidy. Ta ostatnia przyczyna wystarcza już sama przez się, aby rzeczone siły uczynić zupełnie nieoznaczonemi; można zatem przyjąć, że $a=b=c$. Lecz wtedy wszechświat przedstawi się jako nieskończenie wielka kula jednorodna, której środek C można obrać we wszechświecie w położeniu dowolnem. Wówczas siły, z jakiemi ta nieskończenie wielka, przedstawiająca wszechświat, kula działać będzie na pojedyncze gwiazdy, będą skierowane wszystkie do tego dowolnie obranego punktu C, a natężenia tych sił będą proporcyonalne do odległości pojedyńczych gwiazd od punktu C.

W ten to sposób wyraziłem moje wątpliwości co do prawa Newtona najprzód w swoich wykładach, a następnie w rozprawie elektrodynamicznej [Rozprawy król. Tow. Saskiego nauk 1874, str. 98]. Moje słowa ówczesne brzmiały prawie, jak następuje:

„Jeżeli przyjmiemy, że morze gwiazd rozciąga się na wszystkie strony w nieskończoność i że gęstość średnia tego morza jest stała, wtedy — skoro przyjmiemy prawo Newtona — siła, wywierana przez to morze gwiazdowe na naszą kulę ziemską, będzie zupełnie nieoznaczona, mianowicie będzie mogła posiadać wszelki kierunek i wszelkie natężenie.

A zatem prawo Newtona — skoro przyjmiemy, że morze gwiazdowe rozciąga się na wszystkie strony w nieskończoność z gęstością stałą średnią — prowadzi do całkiem niedorzecznego wyniku".

Też samą wątpliwość co do prawa Newtona wypowiedziałem na nowo w pracy mojej o Zasadzie Newtonowskiej działań na odległość [1]).

Krótko mówiąc, stoimy przed alternatywą: albo należy porzucić przyjęcie, że morze gwiazdowe rozciąga się na wszystkie strony w nieskończoność ze stałą gęstością średnią; albo też zgodzić się na to, że prawo Newtona wymaga jakiejś modyfikacyi dla odległości bardzo wielkich.

Przy tej sposobności podałem nawet propozycyę takiej modyfikacyi. Gdyby mianowicie morze gwiazdowe miało sięgać ze wszystkich stron w nieskończoność z gęstością średnią stałą, to, jak okazałem, możnaby, mimo to, nie stawiać zarzutu (natury wyżej wskazanej) prawu Newtona, gdyby tylko zawartą w tem prawie funkcyę potencyalną $\frac{1}{r}$ zastąpić przez $\frac{1}{r}e^{-\alpha r}$, rozumiejąc przez α stałą dodatnią, której wartość byłaby dowolnie mała. Przyjmując tak zmodyfikowane prawo Newtona, znaleźlibyśmy, że nieskończenie wielka kula jednorodna nie wywiera żadnej siły na punkty wewnętrzne. [Porówn. cyt. wyżej rozprawę. Lipsk 1896, Twier. na str. 122].

Seeliger, zupełnie niezależnie odemnie, doszedł do podobnego wniosku. W r. 1894 ukazały się jego wielce cenne i głębsze badania astronomiczne [Astr. Nachrichten 1894. T. 137, str. 3272]. Właściwa myśl podstawowa Seeligera jest ta sama co moja, ale badania jego różnią się w tem zasadniczo od moich, że obok rozważanej przezemnie możliwości, iż morze gwiazd rozciąga się w nieskończoność ze stałą gęstością średnią, rozważa on także inne możliwości. Tym sposobem argument mój przeciw prawu Newtona stanowi tylko przypadek specyalny argumentów Seeligera przeciw temu prawu. [Porów. Seeliger „Ueber das Newtonische Gravitationsgesetz" 1896 w Sprawozdaniach z posiedzeń Akad. bawarskiej. T. XXVI, str. 273].

Zresztą Seeliger, zwróciwszy uwagę na publikacyę moją z r. 1874, wspomnianą w dziele z r. 1896 (i bez jakiegokolwiek osobistego mojego udziału), uznał pierwszeństwo moje w rozważaniach tego rodzaju,

[1]) „Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen". Leipzig. Teubner 1896, str. 1—2. W dziele tem na str. 117 należy sprostować błąd, mianowicie przekreślić „Uwagę" (złożoną z 12 wierszy).

uczynił to w artykule z r. 1896 [Viert. Jahr.-Schr. der Astron. Ges. Jahrg. XXXI. Zesz. 3, str. 177].

Seeliger w artykule tym poddaje dzieło moje z r. 1896 [Allg. Untersuch. i t. d.] szczegółowemu i pochlebnemu rozbiorowi, za co niechaj mi będzie wolno wyrazić publicznie temu wybitnemu astronomowi serdeczną wdzięczność; obawiam się wszakże, że zasługi moje zostały przez niego przecenione.

Przy sposobności pozwolę sobie nadmienić, że w dziele mojem z r. 1896 [„Allgem. Unters. i t. d."] podniosłem był jeszcze i drugi zarzut przeciwko prawu Newtona. Zarzut ten polega na rozważaniach elektrostatycznych, ma przeto mniejsze znaczenie, niż omówiony wyżej zarzut pierwszy. Albowiem takie rzeczy hypotetyczne, jak płyny elektryczne, trudno brać pod rozwagę, gdy idzie o stwierdzenie praw, według których poruszają się ciała niebieskie. Właśnie, dla względnej nieważności tego drugiego zarzutu, nie życzyłbym sobie ustąpić pierwszeństwa w postawieniu zarzutu pierwszego. Wspominam o tem dla tego, że prof. D-r Oppenheim w niedawno ogłoszonej pracy, poświęconej krytyce prawa Newtona [„Kritik des Newton'schen Gravitationsgesetzes". Praga, Haase 1903] przypisuje mi właśnie autorstwo zarzutu drugiego, nie zaś pierwszego.

UWAGA DODATKOWA.

Rozważania na stronicach 13 (73)—16 (76) dadzą się łatwo uogólnić, przez co nawet stają się prostszemi i przejrzystszemi.

Niechaj $f(x, y, z)$ będzie funkcyą trzech argumentów zespolonych x, y, z. Weźmy na płaszczyźnie zespolonej x dwa obszary $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{a}$ takie, że drugi leży w pierwszym, a przynajmniej ma z pierwszym pewną część wspólną. Niechaj dalej $\mathfrak{B}$ i $\mathfrak{b}$ mają analogiczne znaczenie w płaszczyźnie zespolonej y i także $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{c}$ w płaszczyźnie zespolonej z. Wtedy zachodzi twierdzenie następujące:

Niechaj funkcya $f(x, y, z)$ będzie wszędzie ciągła w obszarach $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ i niechaj będzie wiadome, że w obszarach $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ jest wszędzie zerem; wtedy będzie równa zeru wszędzie w obszarach $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$.

TREŚĆ.

P. H. SCHOUTE,

SUR UNE SÉRIE DE CYCLIDES PARALLÈLES DE DUPIN.

(O SZEREGU CYKLID RÓWNOLEGŁYCH DUPINA).

1. Considérons (Fig. 1) l'ellipse α et l'hyperbole β, situées en des plans perpendiculaires entre eux de manière que la droite d'intersection de ces deux plans est un axe de symétrie des deux coniques à centre commun O et supposons que les foyers réels d'une quelconque de ces coniques sont des sommets de l'autre. Soit $OA = a$, $OB = b$ le couple des demi-axes de

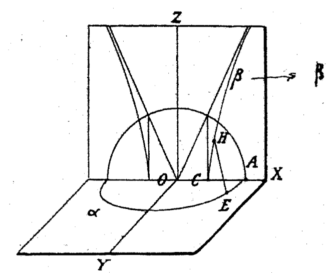

Fig. 1.

l'ellipse et $OC = c = \sqrt{a^2 - b^2}$ le demi-axe réel de l'hyperbole. Représentons les coordonnées des points E et H de α et β par rapport aux axes indiqués dans la figure sous la forme :

$$E \ldots (a \cos\varphi, \quad b \sin\varphi, \quad 0), \qquad H \ldots (c \sec\psi, \quad 0, \quad b \operatorname{tg}\psi)$$