RU. C y g n i (Ch. 7783).

Czerwiec	3,	$11^h\,49^m$	$8^m.7$	Gwiazdy porówn. $+53^0.2672$	$9^m.2$
Lipiec	17,	$11^h\,45^m$	$8^m.4$	$+53^0.2678$	$9^m.5$
Listopad	9,	$9^h\,3^m$	$8^m.9$	$+53^0.2680$	$7^m.6$
„	23,	$7^h\,58^m$	$9^m.1$.	$+53^0.2683$	$8^m.9$.

Maximum blasku było w Lutym, minimum w Listopadzie.

W. C e p h e i (Ch. 8116). Gwiazda nieregularna.

Czerwiec	4,	$10^h\,28^m$	$7^m.6$	pomar.		
Lipiec	17,	$11^h\,50^m$	$7^m.4$	żółta		
Listopad	5,	$10^h\,10^m$	$7^m.5$	„	Gwiazdy por. BD. $+57^0.2562$	$7^m.5$
„	9,	$10^h\,55^m$	$7^m.3$	pomar.	$+57^0.2571$	$8^m.1$
„	23,	$7^h\,47^m$	$7^m.3$	„	$+58^0.2465$	$7^m.0$.

U. L a c e r t a e (2.1902) = BD. 54.2863.

Odkrycie zmienności podane w A. N. 3774, r. 1902.

Czerwiec	4,	$10^h\,48^m$	$8^m.7$		
Lipiec	17,	$11^h\,55^m$	$8^m.6$	Gwiazdy porówn. BD. $+54^0.2854$	$8^m.8$
Listopad	5,	$10^h\,15^m$	$9^m.0$	$+54^0.2864$	$9^m.0$
„	23,	$10^h\,27^m$	$8^m.8$.	$+54^0.2865$	$8^m.5$.

Obserwacye stwierdzają zmienność i wykazują minimum w Listopadzie, oraz być może maximum w Lipcu lub Sierpniu.

V. C e p h e i (Ch. 8591).

Czerwiec	4,	$10^h\,38^m$	$6^m.8$		
Lipiec	17,	$12^h\,0^m$	$6^m.1$		
Listopad	6,	$8^h\,8^m$	$7^m.2$	Gwiazdy porówn. BD. $+82^0.735$	$8^m.2$
„	23,	$10^h\,32^m$	$7^m.5$.	$+82^0.748$	$7^m.0$.

Obserwacye znajdują się w sprzeczności z efemerydami, które przepowiadają maximum na początek Grudnia, a minimum na Kwiecień.

M. T. HUBER,

O PODSTAWACH TEORYI WYTRZYMAŁOŚCI.

I. Najogólniejszy cel nauki o wytrzymałości streszcza się w odpowiedzi na pytanie: j a k i e s i ł y z e w n ę t r z n e w y w o ł u j ą w d a n e m c i e l e s t a ł e m (w z g l ę d n i e u k ł a d z i e c i a ł s t a ł y c h) n i e b e z p i e c z e ń s t w o p ę k n i ę c i a w o z n a c z o n y m s t o p n i u?

Nie ulega wątpliwości, iż to niebezpieczeństwo zależy przedewszystkiem od s t a n u n a p i ę c i a (s t r e s s) uważanego ciała, t. j. od ogółu sił wewnętrznych (natężeń), wywołanych siłami zewnętrznemi. Granica stanu napięcia, po której przekroczeniu pęknięcie ciała nastąpić musi, określa w najogólniejszy sposób jego w y t r z y m a ł o ś ć. Ogólne zadanie teoryi wytrzymałości rozpada się przeto na dwie części:

1-o Wyznaczenie stanu napięcia, wywołanego danemi siłami zewnętrznemi.

2-o Wyznaczenie zależności niebezpieczeństwa pęknięcia od stanu napięcia.

Obadwa zagadnienia nie posiadają dotąd ścisłego ogólnego rozwiązania, chociaż w przeważnej liczbie prostych a ważnych szczególnych przypadków potrafimy za pomocą przybliżonych teoryj uzyskać wyniki, wystarczająco dokładne dla celów praktycznych. W przypadkach złożonych wychodzi jednakże często na jaw niedoskonałość teoryi i wtedy uciekamy się do kosztownego bezpośredniego doświadczenia.

II. Wymieniona pierwsza część ogólnego zadania teoryi wytrzymałości upraszcza się znakomicie, gdy o d k s z t a ł c e n i e, towarzyszące stanowi napięcia ciała, podlega uogólnionemu prawu H o o k e'a, przyjętemu za podstawę matematycznej teoryi sprężystości. Ponieważ najważniejsze ciała stałe podlegają bądź to dokładnie, bądź też w przybliżeniu, w pewnych granicach prawu H o o k e'a, więc wyznaczenie stanu napięcia za pomocą teoryi sprężystości rozwiązuje zwykle pierwszą część zagadnienia z wystarczającą dla praktyki dokładnością, zwłaszcza, że zazwyczaj nie dopuszczamy przekroczenia granicy sprężystości. Wprawdzie istnieją ciała technicznie ważne (np. żelazo lane, kamień), objawiające w granicach sprężystości znaczniejsze zboczenia od prawa H o o k e'a, wskutek czego usiłowano w nowszych czasach uzyskać większą dokładność teoryi sprężystości owych ciał użyciem wzorów empirycznych, zastępujących prawo H o o k e'a, jednakże stosowalność tych wzorów w teoryi jest już z powodu wielkich matematycznych trudności nader ograniczona.

III. Na drugą zasadniczą kwestyę teoryi wytrzymałości (sub 2-o) posiadamy ścisłą odpowiedź tylko w najprostszym, nader zresztą ważnym przypadku j e d n o s t a j n e g o r o z c i ą g a n i a lub ś c i s k a n i a (l i n i o w e g o stanu napięcia) ciała doskonale jednorodnego i niekrystalicznego. Niebezpieczeństwo pęknięcia zależy wtedy tylko od wielkości natężenia, a wytrzymałość może być określona jedną stałą, danemu materyałowi właściwą, podającą wielkość natężenia, po którego przekroczeniu ciało pęka. Tę stałą nazywają powszechnie spółczynnikiem wytrzymałości na ciągnienie, względnie ciśnienie.

W początkach teoryi wytrzymałości stosowano ten wynik do ogólnego stanu napięcia w przypuszczeniu, iż niebezpieczeństwo pęknięcia zachodzi zawsze tam, gdzie natężenie ma największą wartość. Da się to uzasadnić tylko w pewnych przypadkach prostego zgięcia lub skręcenia, w ogóle jednak prowadzi do sprzeczności, jak się okazuje choćby tylko z jaskrawego przykładu stałego wszechstronnego ciśnienia na ciało równokierunkowe. W tym bowiem przypadku nie ma powodu, aby największe nawet ciśnienie wywołało zniszczenie spójności (pęknięcie ciała), a jedynym skutkiem takiego stanu napięcia może być tylko trwałe odkształcenie objętościowe. Potwierdzają to bezpośrednio lub pośrednio doświadczenia, dokonane między innemi przez F ö p p l a w Monachium („Festigkeitslehre“, Lipsk 1900, str. 71).

IV. Innego zdania w powyższej kwestyi był C o u l o m b, a po nim T r e s c a. Podług nich mierzy niebezpieczeństwo pęknięcia, czyli w y t ę ż e n i e m a t e r y a ł u (d i e A n s t r e n g u n g), największa zmiana kąta między dwoma przekrojami ciała, wywołana odkształceniem. To zapatrywanie nie sprzeciwia się doświadczeniu w przytoczonym przypadku wszechstronnego ciśnienia, albowiem odkształcenie zmienia wówczas geometryczny ustrój ciała na podobny sobie, wskutek czego kąty nie ulegają zmianie; atoli nie da się pogodzić z oczywistością, iż dostatecznie wielkie wszechstronne ciągnienia mogą przy dowolnie małej zmianie kąta wywołać pęknięcie.

Trzecią odpowiedź dali P o n c e l e t i de S a i n t - V e n a n t, twierdząc, iż miarą wytężenia materyału jest jednostkowe wydłużenie (względnie skrócenie) λ, czyli, że niebezpieczeństwo pęknięcia zachodzi wówczas, gdy λ osiąga pewną wartość, właściwą materyałowi. To zapatrywanie, rozpowszechnione w niemieckiej literaturze technicznej przez G r a s h o f a i W i n k l e r a, posiada po dziś dzień najwięcej zwolenników, pomimo, że w latach ostatnich wyłoniły się nowe w tym względzie poglądy[1]). Na pozór wydaje się nawet, iż trudno o niem powątpiewać, gdyż największemu wydłużeniu powinno odpowiadać największe rozsunięcie drobin położonych na kierunku tego wydłużenia, a więc największe niebezpieczeństwo ich wzajemnego oddalenia się poza obręb wspólnej sfery sił międzycząstkowych; jednakże zastanawiając się nad tą kwestyą dokładniej, przy pomocy schematycznego obrazu rozkładu drobin w odkształconem ciele (Fig. 1, 1*a*, 1*b*) doszedłem do przekonania, że nie tylko rozsunięcie drobin, leżących na kierunku największego wydłużenia ma wpływ na niebezpieczeństwo pęknięcia, lecz także zmiana wzajemnej odległości drobin, położonych na wszystkich kierunkach (czyli wydłużenie we wszystkich kierunkach), przez uważany punkt ciała przechodzących. Rzut oka na rysunek wystarcza, aby rozpoznać, że przy tem samem wydłużeniu w kierunku y i z (z prostopadłe do płaszczyzny rysunku) zachodzi mniejsze niebezpieczeństwo pęknięcia w przypadku przedstawionym na Fig. 1*a*, niż na Fig. 1*b*, albowiem w sferze działania dowolnej drobiny m znajduje się w pierwszym przypadku więcej drobin, aniżeli w drugim[2]).

V. Powyższe elementarne rozważanie przemawia przeciw hypotezie P o n c e l e t a i de S a i n t - V e n a n t a, prowadząc równocześnie do nowego zapatrywania na zasadniczą kwestyę teoryi wytrzymałości, które można wyrazić słowami:

N i e b e z p i e c z e ń s t w o p ę k n i ę c i a (w y t ę ż e n i e m a t e r y a ł u) w p e w n e m m i e j s c u c i a ł a o k r e ś l a o g ó ł w y d ł u ż e ń j e d n o s t k o w y c h, w e w s z y s t k i c h k i e r u n k a c h z o w e g o m i e j s c a p o p r o w a d z o n y c h. Albo krócej: O d k s z t a ł c e n i e e l e m e n t u c i a ł a o k r e ś l a j e g o w y t ę ż e n i e.

---

[1]) Mam tu na myśli pracę O. M o h r a p. t.: „W e l c h e U m s t ä n d e b e d i n g e n d i e E l a s t i c i t ä t s g r e n z e u n d d e n B r u c h e i n e n M a t e r i a l e s?“ (Zeitschr. des Ver. deut. Ing. 1900, slr. 1524), którą skrytykował ostro W. V o i g t w „Annalen d. Physik“ (1901, str. 567).

[2]) To rozumowanie zawodzi, jak łatwo zauważyć w przypadku ściskania, czyli gdy zachodzą wydłużenia ujemne, które, o ile nie są we wszystkich kierunkach równe, wywołać mogą również pęknięcie materyału; nie mając jednakże zamiaru opierać na niem wyłącznie nowego zapatrywania, rezygnuję na razie z potrzebnych uogólnień, zwłaszcza, że wobec nieznajomości szczegółowej budowy materyi, ma rozważanie powyższe charakter ogółowej oceny i oryentacyi, bez pretensyi do ścisłości naukowej.

Do wyznaczenia wytężenia elementu ciała należy zatem w ogóle podać sześć od siebie niezależnych wielkości, określających jednorodne odkształcenie, t. j. trzy wydłużenia $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ i trzy posunięcia $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ w kierunkach osi prostokątnego układu spółrzędnych [1]). Gdy x, y, z mają kierunki wydłużeń głównych $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, to $\lambda_x = \lambda_1$, $\lambda_y = \lambda_2$, $\lambda_z = \lambda_3$; $\varphi_x = 0$, $\varphi_y = 0$, $\varphi_z = 0$, czyli do określenia wytężenia materyału (przy odkształceniu jednorodnem) wystarczają wartości trzech wydłużeń głównych. Miarą wytężenia będzie przeto pewna funkcya Φ wydłużeń głównych, względnie wydłużeń i posunięć w dowolnych trzech wzajemnie prostopadłych kierunkach. Ponieważ każdemu stanowi odkształcenia elementu ciała odpowiada jednoznacznie okreś-

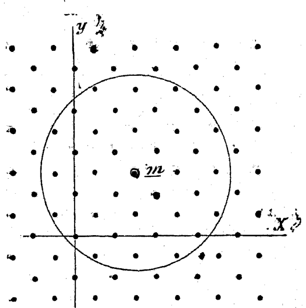


Fig. 1. Stan naturalny.

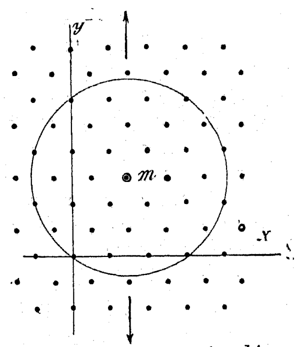


Fig. 1a. Rozciąganie w kier. y

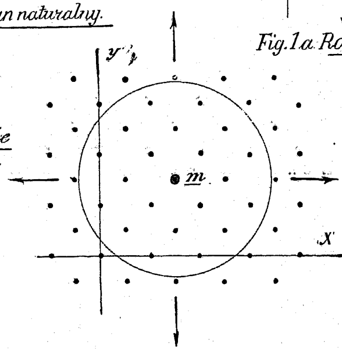


Fig. 1b. Rozciąganie w kier. x i y

[1]) J. N. Franke. Mechanika teoretyczna. Art. 177 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

lony stan napięcia tegoż elementu, przeto Φ jest zarazem funkcyą trzech natężeń głównych ν_1, ν_2, ν_3, względnie składowych normalnych ν_x, ν_y, ν_z i stycznych $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ stanu napięcia w uważanem miejscu ciała [1]). Nadto możemy o funkcyi Φ powiedzieć co następuje:

1-o Przy dodatnich wartościach wszystkich argumentów $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ rośnie i maleje Φ wraz z niemi, przy ujemnych rośnie i maleje wraz z ich bezwzględną wartością; w szczególności staje się Φ zerem, gdy $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

2-o Parametry funkcyi Φ zależą tylko od budowy materyi w naturalnym stanie ciała i temperatury, są zatem przy jednolitej budowie materyi i stałej temperaturze stałemi, właściwemi danemu ciału.

3-o Dla ciał równokierunkowych, które w niniejszej pracy wyłącznie mam na względzie, będzie funkcya Φ oczywiście symetryczną względem swoich argumentów.

VI. Nie trudno zauważyć, iż powyższe własności funkcyi Φ są identyczne z własnościami właściwej pracy odkształcenia F, która, jako zależna od stanu napięcia i odkształcenia elementu, jest również funkcyą argumentów $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$; $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$, względnie ν_x, ν_y, ν_z; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. Praca ta równa się pracy sił międzycząstkowych drobin, zawartych w jednostce objętości ciała (mierzonej w stanie naturalnym), jeżeli odkształcenie (jednorodne) jest dostatecznie powolne [3]). Ponieważ nadto praca sił międzycząstkowych jest tem większa, im większych względnych przesunięć doznają drobiny przy odkształceniu, więc nasuwa się nader prawdopodobna hypoteza, iż funkcya Φ ma ten sam kształt co F, czyli innemi słowy:

Wytężenie materyału mierzy się właściwą pracą odkształcenia. Jeżeli zatem praca odkształcenia przekroczy w pewnem miejscu ciała oznaczoną wartość zależną od materyału (przy tej samej temperaturze), to musi nastąpić trwałe rozdzielenie drobin ciała, czyli jego pęknięcie.

W pozornej sprzeczności zostaje powyższa hypoteza z omówionym już faktem, iż jednostajne wszechstronne ciśnienie nie może wywołać pęknięcia ciała jednorodnego. Wtedy jednakże, wedle wszelkiego prawdopodobieństwa,

[1]) W Mechanice Frankego p_{11}, p_{22}, p_{33}; p_{23}, p_{31}, p_{12}.

[2]) Badania getyngeńskiego fizyka W. Voigta i jego uczniów (Annalen d. Phys. 1901, str. 567 i nast.) dowodzą, iż najbardziej jednorodne ciała przyrody nie okazują jednolitości budowy ze względu na wytrzymałość, wskutek czego można z góry powiedzieć, że każda teorya wytrzymałości, oparta na założeniu doskonałej jednolitości w budowie materyi, będzie dla ciał rzeczywistych mniej lub więcej niedokładną.

[3]) Przy nagłem odkształceniu zużywa się mała część pracy na powiększenie energii kinetycznej drobin, czyli podwyższenie temperatury ciała. (Everett: „Jednostki i stałe fizyczne". Art. 144).

nie może praca odkształcenia wcale przekroczyć owej oznaczonej wartości, gdyż trudno sobie wyobrazić, aby skurczenie ciała nie miało naturalnych granic, poza któremi największe nawet ciśnienie nie powiększa pracy odkształcenia.

VII. Do wyznaczenia kształtu funkcyi F potrzebna jest oczywiście znajomość ogólnego prawa, określającego zależność stanu napięcia od odkształcenia. Takiego prawa nie posiadamy dotąd, jednakże w granicach właściwych każdemu materyałowi zastępuje je z mniejszą lub większą dokładnością prawo Hooke'a. W tych granicach będzie zatem funkcya F t. zw. potencyałem sprężystości, określonym przez równanie:

$$F = \frac{E}{2(1+\mu)}\left\{\frac{1-\mu}{1-2\mu}(\lambda_x+\lambda_y+\lambda_z)^2 + \frac{1}{2}\left[\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2-4(\lambda_x\lambda_y+\lambda_y\lambda_z+\lambda_z\lambda_x)\right]\right\}; \tag{1}$$

w którem E oznacza spółczynnik sprężystości (moduł Younga), a $\mu = \frac{1}{m}$ stałą Poissona [1]). Wyraziwszy składowe odkształcenia przez składowe stanu napięcia za pomocą wzorów:

$$\left\{\begin{aligned} \lambda_x &= \frac{1}{E}[\nu_x-\mu(\nu_y+\nu_z)], & \varphi_x &= \frac{2(1+\mu)}{E}\sigma_x \\ \lambda_y &= \frac{1}{E}[\nu_y-\mu(\nu_z+\nu_x)], & \varphi_y &= \frac{2(1+\mu)}{E}\sigma_y \\ \lambda_z &= \frac{1}{E}[\nu_z-\mu(\nu_x+\nu_y)], & \varphi_z &= \frac{2(1+\mu)}{E}\sigma_z, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

otrzymamy drugą postać funkcyi F:

$$F = \frac{1}{E}\left\{\frac{1}{2}(\nu_x+\nu_y+\nu_z)^2+(1+\mu)\left[\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2-(\nu_x\nu_y+\nu_y\nu_z+\nu_z\nu_x)\right]\right\}, \tag{3}$$

która przekształca się jeszcze na:

$$F = \frac{1}{E}\left\{\frac{1}{2}(\nu_1+\nu_2+\nu_3)^2-(1+\mu)(\nu_1\nu_2+\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1)\right\}, \tag{3a}$$

gdy x, y, z mają kierunki natężeń głównych.

---

[1]) Franke. Mech. teor., str. 483.

W powyższych postaciach może funkcya F określać wytężenie materyału oczywiście tylko w granicach sprężystości (wedle prawa Hooke'a). W ogóle zatem nie może być mowy o użyciu jej do ścisłego wyznaczenia bezpośredniego niebezpieczeństwa pęknięcia. Ale w praktyce technicznej nie dopuszczamy zazwyczaj odkształceń trwałych, chodzi nam przeto nie tyle o niebezpieczeństwo pęknięcia, ile o niebezpieczeństwo przekroczenia granicy sprężystości, które wedle wszelkiego prawdopodobieństwa mierzy również właściwa praca odkształcenia t. j. funkcya F.

Wyraziwszy w ten sposób uzupełnienie nowej hypotezy, należy się zastanowić nad warunkami jej stosowalności. Biorąc mianowicie pod uwagę dwa stany napięcia o składowych, odpowiednio równych co do bezwzględnej wartości ale przeciwnego znaku, dochodzimy dla obu stanów do tej samej wartości funkcyi F. Ażeby zatem F było ścisłą miarą niebezpieczeństwa przekroczenia granicy sprężystości, musi materyał dla obu stanów napięcia mieć tę samą granicę sprężystości. Warunek ten jest zapewne identyczny z warunkiem posiadania równych granic sprężystości dla ciągnienia i ciśnienia. W razie niespełnienia warunku przez dany materyał, określałaby funkcya F niebezpieczeństwo przekroczenia granicy sprężystości, chyba przy pomocy hypotez dodatkowych.

VIII. Rozważanie schematycznego rozkładu drobin w odkształconem ciele, które służyło wyżej do pierwszego umotywowania nowego poglądu na zależność wytężenia materyału od stanu napięcia, nie ma, jak już zaznaczyłem, pretensyi do ścisłości naukowej. Dałem temu wyraz, używając dla tego poglądu miana hypotezy i zwracam się obecnie do szczegółowego zbadania jego konsekwencyi, nadających się do porównania z doświadczeniem, które w ostatniej instancyi rozstrzyga o losach każdej hypotezy.

Przy liniowym stanie napięcia, określonym przez jedno tylko natężenie główne, np. ν będzie:

$$F = \frac{\nu^2}{2E}. \tag{4}$$

Z porównania tej wartości F z wartością przy ogólnym stanie napięcia wynika związek:

$$\nu = \sqrt{(\nu_1+\nu_2+\nu_3)^2-2(1+\mu)(\nu_1\nu_2+\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1)}, \tag{5}$$

który określa proste ciągnienie lub ciśnienie ν, wywołujące tę samą pracę odkształcenia, czyli to samo wytężenie materyału, co dany trójwymiarowy stan napięcia o składowych ν_1, ν_2, ν_3, względnie $\nu_x, \nu_y, \nu_z; \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. Natężenie ν może oczywiście służyć za wygodną miarę wytężenia materyału, podobnie jak się to dzieje na podstawie panującego obecnie zapatrywania [1]. Odpowiednią dlań nazwą będzie natężenie sprowadzone ν_{red}. A zatem:

$$
(6)\quad \begin{aligned} \nu_{red}^2 &= (\nu_1+\nu_2+\nu_3)^2 - 2(1+\mu)(\nu_1\nu_2+\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1) \\ &= \nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2 - 2\mu(\nu_1\nu_2+\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1), \end{aligned}
$$

albo też:

$$
(7)\quad \begin{aligned} \nu_{red}^2 &= (\nu_x+\nu_y+\nu_z)^2 + 2(1+\mu)[\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2 - (\nu_x\nu_y+\nu_y\nu_z+\nu_z\nu_x)] \\ &= \nu_x^2+\nu_y^2+\nu_z^2+2(1+\mu)(\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2) - 2\mu(\nu_x\nu_y+\nu_y\nu_z+\nu_z\nu_x). \end{aligned}
$$

Obecnie obliczają natężenie sprowadzone (w myśl hypotezy największego wydłużenia) z wzoru:

$$
(\alpha)\quad \nu_{red}^* = \nu_I - \mu(\nu_{II}+\nu_{III}),
$$

w którym $\nu_I, \nu_{II}, \nu_{III}$ oznacza natężenia główne, wzięte w takim porządku, aby ν_{red} wypadło największe. Wskutek tego zastrzeżenia jest wzór (α) mniej wygodny w zastosowaniu niż wzór (6). Jeszcze jaskrawiej występuje ta różnica na korzyść nowego wzoru, gdy stan napięcia jest określony przez ogólne składowe ν_x, ν_y, ν_z; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. Wtedy bowiem są natężenia główne, jak wiadomo, pierwiastkami równania sześciennego

$$
(8)\quad \begin{vmatrix} \nu_x-\nu & \sigma_z & \sigma_y \\ \sigma_z & \nu_y-\nu & \sigma_x \\ \sigma_y & \sigma_x & \nu_z-\nu \end{vmatrix} = 0 \;{}^{2)},
$$

czyli:

$$
(8a)\quad \nu^3-(\nu_x+\nu_y+\nu_z)\nu^2+(\nu_y\nu_z+\nu_z\nu_x+\nu_x\nu_y-\sigma_x^2-\sigma_y^2-\sigma_z^2)\nu - \begin{vmatrix} \nu_x & \sigma_z & \sigma_y \\ \sigma_z & \nu_y & \sigma_x \\ \sigma_y & \sigma_x & \nu_z \end{vmatrix} = 0,
$$

które trzeba rozwiązać w każdym przypadku obliczenia ν_{red}^*. Ogólne rozwiązanie dałoby oczywiście wzory zbyt zawiłe. Pewne uproszczenie daje wprawdzie związek:

$$
\nu_x+\nu_y+\nu_z = \nu_I+\nu_{II}+\nu_{III},
$$

[1]) Föppl. „Festigkeitslehre" § 11.

[2]) Helmholtz. „Dynamik cont. verbr. Massen". Lipsk 1902, str. 84). (W „Mechanice teor." Frankego znajduje się tylko analogiczne równanie dla wydłużeń głównych. Art. 180).

dzięki któremu wzór (α) przybiera postać:

$$
\nu_{red}^* = (1+\mu)\nu_I - \mu(\nu_x+\nu_y+\nu_z),
$$

wymagającą obliczenia jednego tylko pierwiastka (ν_I) [1]), który daje największą bezwzględną wartość ν_{red}^*, mimo to jednak nie miałby ogólny rachunek praktycznego znaczenia.

IX. Dla zbadania konsekwencyi wzoru (6) przyjmijmy na chwilę, że dwa natężenia główne ν_1 i ν_2 są stałe i obliczmy wpływ trzeciego natężenia na ν_{red} (a więc na wytężenie materyału).

Napisawszy w tym celu wzór (6) w postaci:

$$
\nu_{red}^2 = (\nu_1^2+\nu_2^2-2\mu\nu_1\nu_2) + [\nu_3^2 - 2\mu(\nu_1+\nu_2)\nu_3]
$$

widzimy, iż:

1-o ν_3 zmniejsza wytężenie, gdy ma ten sam znak co $(\nu_1+\nu_2)$, a zarazem $|\nu_3| < |2\mu(\nu_1+\nu_2)|$;

2-o ν_3 nie wpływa na wytężenie, gdy $= 2\mu(\nu_1+\nu_2)$;

3-o ν_3 zwiększa wytężenie zawsze, gdy ma znak przeciwny niż $(\nu_1+\nu_2)$; przy tym samym zaś znaku, gdy $|\nu_3| > |2\mu(\nu_1+\nu_2)|$.

Analogiczne badanie wzoru (α) nie jest praktycznie wykonalne; dla porównania zatem wyników obu hypotez przy trójwymiarowym stanie napięcia nie pozostaje nic innego, jak obliczenie szeregu przykładów liczebnych.

W szczególności, gdy wszystkie trzy natężenia główne są równe ν, to:

$$
\nu_{red} = \nu\sqrt{3(1-2\mu)},
$$

[1]) Z teoryi równania (8) wynika nadto następujące ułatwienie w obliczaniu jego pierwiastków.

Wyznaczywszy pierwiastki równania pomocniczego

$$
(\xi-\nu_x)(\xi-\nu_y) - \sigma_z^2 = 0,
$$

a więc:

$$
\xi_1 = \frac{1}{2}(\nu_x+\nu_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\nu_x-\nu_y)^2+4\sigma_z^2}.
$$

$$
\xi_2 = \frac{1}{2}(\nu_x+\nu_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(\nu_x-\nu_y)^2+4\sigma_z^2};
$$

wiemy, że

$$
\nu_I > \xi_1, \quad \xi_1 > \nu_{II} > \xi_2, \quad \nu_{III} < \xi_2.
$$

(Mathiessen. „Grundzüge der ant. u. mod. Algebra". Lipsk 1878 § 196).

a zatem dla

$$\mu = \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6},$$

jest:

$$\frac{\nu_{\mathrm{red}}}{\nu} = 1,\ 1{,}22,\ 1{,}34,\ 1{,}41\ .$$

Natomiast:

$$\nu^*_{\mathrm{red}} = \nu\,(1-2\,\mu)\,,$$

a więc dla

$$\mu = \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6};$$

jest:

$$\frac{\nu^*_{\mathrm{red}}}{\nu} = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}.$$

Otóż porównanie tych rezultatów przemawia stanowczo przeciw panującemu zapatrywaniu na korzyść nowej hypotezy. Trudno bowiem wyobrazić sobie, aby wytężenie materyału wskutek wszechstronnego jednostajnego ciągnienia było mniejsze, niż przy ciągnieniu w jednym kierunku, a do takiego wniosku prowadzi zapatrywanie de Saint-Venanta.

X. Rozpatrywany dotychczas trójwymiarowy stan napięcia przytrafia się dość rzadko w zastosowaniach teoryi wytrzymałości. (Zachodzi on np. w materyale zamkniętego naczynia, wytrzymującego ciśnienie cieczy lub gazu). O wiele częstszym jest przypadek dwuwymiarowego stanu napięcia o natężeniach głównych ν_1 i ν_2. Wtedy:

$$\nu^2_{\mathrm{red}} = \nu_1^2 + \nu_2^2 - 2\,\mu\,\nu_1\,\nu_2\,, \tag{9}$$

$$\nu^*_{\mathrm{red}} = \nu_{\mathrm{I}} - \mu\,\nu_{\mathrm{II}}\,, \quad (|\nu_1| \geqq |\nu_2|)\,. \tag{β}$$

Równanie (9) prowadzi do bardzo prostej interpretacyi geometrycznej (Fig. 2). Wykreślmy kąt AOB, którego dostawą jest μ i odetnijmy na jednem jego ramieniu $\nu_1 = \overline{OA}$, na drugiem zaś $\nu_2 = \overline{OB}$, wtedy trzeci bok trójkąta AOB, t. j. $\overline{AB} = \nu_{\mathrm{red}}$, jeżeli obadwa natężenia ν_1 i ν_2 mają ten sam znak; w razie przeciwnym należy oczywiście jedno z natężeń np. ν_2 odciąć na przedłużeniu ramienia OB, a $\nu_{\mathrm{red}} = \overline{AB'}$. Przyjmując stałe ν_1 i zmieniając ν_2, widzimy, że

1-o ν_2 zmniejsza wytężenie tylko wtedy, gdy będąc tego samego znaku co ν_1, czyni zarazem zadość warunkowi $\nu_2 < 2\,\mu\,\nu_1$;

2-o ν_2 nie wpływa na wytężenie, gdy $= 2\,\mu\,\nu_1$;

3-o ν_2 zwiększa wytężenie zawsze, gdy ma znak przeciwny znakowi ν_1, przy tym samym zaś znaku wtedy, gdy $\nu_2 > 2\,\mu\,\nu_1$.

W porównaniu do tych wyników wyraża wzór (β), iż ν_2 zawsze zwiększa wytężenie, gdy jest przeciwnego znaku niż ν_1, a zmniejsza przy znaku tym samym. To ostatnie jest również nieprawdopodobne, jak wynik uzyskany poprzednio.

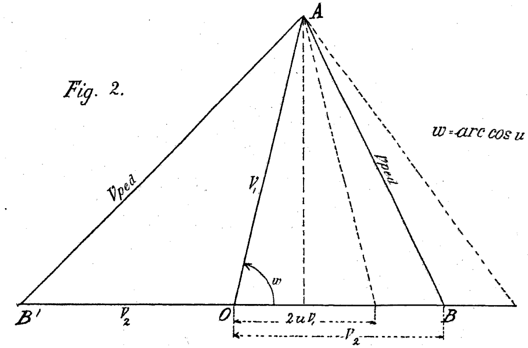


Fig. 2.

W szczególności dla $\nu_1 = -\nu_2 = \sigma$ (samo ścinanie) jest:

$$\nu_{\mathrm{red}} = \sigma\sqrt{2\,(1+\mu)}\,, \quad \nu^*_{\mathrm{red}} = \sigma\,(1+\mu)\,,$$

a zatem dla

$$\mu = \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6}\,,$$

$$\frac{\nu_{\mathrm{red}}}{\sigma} = 1{,}63 \quad 1{,}58 \quad 1{,}55 \quad 1{,}53\,,$$

$$\frac{\nu^*_{\mathrm{red}}}{\sigma} = \frac{4}{3} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{6}{5} \quad \frac{7}{6}\,.$$

Stosunek $\nu_{\mathrm{red}} : \sigma$ jest zarazem stosunkiem t. zw. natężeń dopuszczalnych przy ciągnieniu (względnie ciśnieniu) i ścinaniu ($\nu_{\mathrm{dop}} : \sigma_{\mathrm{dop}}$), a zatem nowa hypoteza wymaga mniejszego natężenia dopuszczalnego przy samem ścinaniu niż dawna, co wydaje się zgodnem z doświadczeniem.

W innym szczególnym przypadku, t. j. gdy $\nu_1 = \nu_2$ jest:

$$\nu_{\text{red}} = \nu \sqrt{2(1-\mu)}\,, \quad \nu^*_{\text{red}} = \nu\,(1-\mu)\,,$$

a więc dla

$$\mu = \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6}\,,$$

$$\frac{\nu_{\text{red}}}{\nu} = 1{,}16 \quad 1{,}22 \quad 1{,}26 \quad 1{,}29\,,$$

$$\frac{\nu^*_{\text{red}}}{\nu} = \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{5}{6}\,.$$

Wedle nowej hypotezy jest zatem $\nu_{\text{red}} > \nu$, zaś wedle dawniejszej $\nu_{\text{red}} < \nu$, co podobnie, jak wyniki poprzednie na korzyść nowej hypotezy przemawia.

XI. Ze względu na potrzeby praktyki wypada jeszcze obliczyć ν_{red} dla dwuwymiarowego stanu napięcia, określonego składowemi ogólnemi ν_x, ν_y i σ. Podstawiwszy w równaniu (7) $\nu_z = 0$, $\sigma_x = \sigma_y = 0$, $\sigma_z = \sigma$, znajdziemy wzór:

$$\nu^2_{\text{red}} = \nu_x^2 + \nu_y^2 - 2\mu\,\nu_x\nu_y + 2\,(1+\mu)\,\sigma^2\,, \tag{10}$$

z którego zarazem wynika prosta konstrukcya wykreślna do wyznaczenia ν_{red} (Fig. 3), jeżeli uwzględnimy związek

$$1 + \cos\omega = 2\cos^2\frac{\omega}{2}\,,$$

czyli:

$$2\,(1+\mu) = \left(2\cos\frac{\omega}{2}\right)^2.$$

Analogiczny wzór wyprowadza się z dawnej hypotezy, obliczając natężenia główne z równania (8), które z powodu, że $\nu_z = 0$ i $\sigma_x = \sigma_y = 0$ przekształca się na:

$$(\nu - \nu_x)(\nu - \nu_y) - \sigma^2 = 0$$

i wstawiając je w równanie (β). A zatem:

$$\nu_{\text{I}} = \frac{1}{2}(\nu_x + \nu_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\nu_x - \nu_y)^2 + 4\sigma^2}\,,$$

$$\nu_{\text{II}} = \frac{1}{2}(\nu_x + \nu_y) \mp \frac{1}{2}\sqrt{(\nu_x - \nu_y)^2 + 4\sigma^2}\,,$$

$$\nu^*_{\text{red}} = \frac{1}{2}(1-\mu)(\nu_x + \nu_y) \pm \frac{1}{2}(1+\mu)\sqrt{(\nu_x - \nu_y)^2 + 4\sigma^2}\,, \tag{γ}$$

W myśl uwagi do równania (β) uwzględnia się ten znak drugiego wyrazu, który prowadzi do większej bezwzględnej wartości ν^*_{red}.

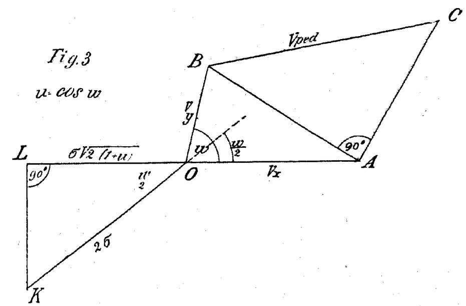
Gdy nadto i $\nu_y = 0$ (jak np. w skrajnych włóknach wału, narażonego na skręcenie i zgięcie), to

$$\nu^2_{\text{red}} = \nu^2 + 2\,(1+\mu)\,\sigma^2\,, \tag{11}$$

zaś

$$\nu^*_{\text{red}} = \frac{1-\mu}{2}\,\nu \pm \frac{1+\mu}{2}\sqrt{\nu^2 + 4\sigma^2}\,. \tag{δ}$$

Jak widać, odznaczają się nowe wzory większą prostotą i łatwością w zastosowaniu niż dawne.



Na zakończenie winienem zaznaczyć, iż po opracowaniu głównego pomysłu, rozwiniętego w niniejszej pracy, znalazłem w życiorysie Beltrami'ego, zamieszczonym w VI tomie „Wiadomości matematycznych“ (Warszawa 1902), między innemi krótki referat o pracy tego matematyka p. t.: „Sulle condizioni di resistenza dei corpi elastici“ (Rend. Ist. Lomb. ser. II. vol. XVIII. 1885) osnutej (jak wnoszę z owego referatu) na takim samym pomyśle.

Dziwna zaprawdę rzecz, że w nowszej literaturze tego przedmiotu, którą starałem się poznać dokładnie przed napisaniem niniejszej rzeczy, nie napotkałem nigdzie śladu wymienionej rozprawy Beltrami'ego, mimo, że od czasów jego ziomka Castigliano'a gra pojęcie pracy odkształcenia tak ważną rolę w zastosowaniach teoryi sprężystości.

Kraków w październiku 1903 r.