G. RICCI,

WZORY ZASADNICZE W TEORYI OGÓLNEJ ROZMAITOŚCI I ICH KRZYWIZNY.[1]

Zamierzam tu przy pomocy metod Rachunku różniczkowego bezwzględnego[2]) wyprowadzić wzory zasadnicze teoryi rozmaitości n-wymiarowych natury jakiejkolwiek, uważanych za znajdujące się w jakiejkolwiek innej rozmaitości $(n+m)$-wymiarowej.

Prof. Bianchi w niemieckim przekładzie swojej „Geometryi różniczkowej", wyprowadził te wzory dla przypadku $m=1$ metodą prostą i wytworną, lecz z trudnością zastosować się dającą do przypadku ogólnego. W przypadku tym wzory te są co do swojej istoty podane w rozprawie Vossa w t. **16** Math. Ann., lecz w sposób, mało nadający się do zastosowań geometrycznych. Dla tego to uważam za właściwe powrócić do tego przedmiotu, by wzory te przedstawić w postaci prostszej, przy pomocy znakowań, właściwych metodom przezemnie stosowanym, i aby wyprowadzić z nich niektóre wnioski, dotyczące krzywizny w jakiejkolwiek rozmaitości.

Co się tyczy znakowań i metod Rachunku różniczkowego bezwzględnego, odsyłam czytelnika do wykładu tegoż, ogłoszonego w t. **12** „Prac matematyczno-fizycznych", którą to pracę cytować będziemy w skróceniu literą P, dodając do niej liczby odpowiedniego rozdziału, paragrafu i ewentualnie wzoru.

---

[1]) Z „Rendiconti della R. Accademia dei Lincei" (1902); przekład za upoważnieniem Autora.

[2]) G. Ricci i T. Levi-Civita. Metody rachunku różniczkowego bezwzględnego „Prace matematyczno-fizyczne", t. **12**, str. 11—94.

1. Niechaj:

$$\varphi = \sum_1^n a_{rs}\, dx_r\, dx_s\ , \quad \psi = \sum_1^{n+m}{}_{uv}\, c_{uv}\, dy_u\, dy_v\ ,$$

będą dwie formy różniczkowe dodatnie. Aby rozmaitość V_n, określona przez pierwszą z tych form, była zawarta w rozmaitości V_{n+m}, określonej przez drugą, jest koniecznem i dostatecznem, by można było wyznaczyć $y_1, y_2, \ldots, y_{n+m}$ w funkcyi wielkości $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tak, aby spełniały się równania:

$$\text{(I)} \qquad \sum_1^{n+m}{}_{uv}\, c_{uv}\, y_{u/r}\, y_{v/s} = a_{rs}\ .\ ^{1})$$

Biorąc pochodne spółzmiennicze tych równań względem φ, otrzymamy równania, którym równoważne są następujące:

$$\text{(1)} \qquad \sum_1^{n+m}{}_u\, c_{u/r} \sum_1^{n+m}{}_v \left(c_{uv}\, y_{v/st} + \sum_1^{n+m}{}_w\, c_{vw,u}\, y_{v/s}\, y_{w/t}\right) = 0\ ,$$

gdzie symbole $c_{vw,u}$ są spółczynnikami Christoffela pierwszego gatunku, należącemi do formy ψ.

Niechaj $\varepsilon_{\alpha\beta}$ oznacza zero albo jedność, stosownie do tego, czy α i β są różne albo równe; wyznaczmy wyrażenia $z_{\alpha/u}$ w ten sposób, aby spełniały się równania:

$$\text{(2)} \qquad \sum_1^{n+m}{}_u\, y_{u/v}\, z_{\alpha,u} = 0\ ,$$

$$\text{(3)} \qquad \sum_1^{n+m}{}_{uv}\, c^{(uv)}\, z_{\alpha/u}\, z_{\beta/v} = \varepsilon_{\alpha\beta}\ ,$$

gdzie $c^{(uv)}$ są spółczynniki formy wzajemnej z formą ψ.

Wielkości $z_{1/u}, z_{2/u}, \ldots, z_{m/u}$ można uważać (P. II. 1) jako układy spółrzędnych spółzmienniczych m ortogonalnych kongruencyj linij, nakreślonych w rozmaitości V_{n+m} i normalnych do rozmaitości V_n. Układy spółrzędne przeciwzmiennicze tych kongruencyj będą miały elementy:

$$z_\alpha{}^{(u)} = \sum_1^{n+m}{}_v\, c^{(uv)}\, z_{\alpha/v}\ .$$

[1]) Skaźniki r, s, t, o ile im nie są nadane wartości szczególne, rozumiemy zawsze, jako przyjmujące wszystkie wartości $1, 2 \ldots n$; skaźniki u, v, w mają przybierać wartości $1, 2 \ldots n+m$; skaźniki zaś $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ wartości $1, 2 \ldots m$.

Wprowadziwszy nieoznaczone $b_{\alpha/rs} = b_{\alpha/sr}$, będzie można zamiast równań (1) wziąć następujące:

$$\text{(II)} \qquad y_{u'/rs} = \sum_1^m{}_\alpha\, z_\alpha^{(u')}\, b_{\alpha/rs} - \sum_1^{n+m}{}_{uvw}\, c^{(uu')}\, c_{vw,u}\, y_{v/r}\, y_{w/s}\ .$$

2. Z równań (2), po wzięciu ich pochodnych spółzmienniczych względem φ i uwzględnieniu równań (II), wynikają równania:

$$\sum_1^{n+m}{}_u\, y_{u/r} \left(z_{\alpha/u/s} - \sum_1^{n+m}{}_{vw}\, z_\alpha^{(v)}\, c_{uw,v}\, y_{w/s}\right) = - b_{\alpha/rs}\ ,$$

które równoważne są następującym:

$$\text{(4)} \qquad z_{\alpha/u/s} = \sum_1^{n+m}{}_{vw}\, z_\alpha^{(v)}\, c_{uw,v}\, y_{w/s} - \sum_1^{n+m}{}_v\, c_{uv} \sum_1^n{}_p\, b_{\alpha/ps}\, y_v^{(p)} + \sum_1^m{}_\beta\, u_{\alpha\beta/s}\, z_{\beta/u}\ ,$$

gdzie $\mu_{\alpha\beta/s}$ są nowe nieoznaczone, które, jak to wynika po wzięciu pochodnych równań (3), powinny być połączone związkami:

$$\text{(5)} \qquad \mu_{\alpha\beta/s} + \mu_{\beta\alpha/s} = 0\ .$$

Równaniom (4) są równoważne następujące:

$$\text{(4')} \qquad z_{\alpha/s}{}^{(u')} = - \sum_1^{n+m}{}_{uvw}\, c^{(u'u)}\, z_\alpha^{(v)}\, c_{vw,u}\, y_{w/s} - \sum_1^n{}_p\, b_{\alpha/ps}\, y_{u'}^{(p)} + \sum_1^m{}_\beta\, u_{\alpha\beta/s}\, z_\beta^{(u')}\ .$$

Weźmy pochodne wzorów (II) przy uwzględnieniu równań (4') i wyrugujmy pochodne trzecie wielkości y, stosując znane wzory (P. I, 6. (23)). Dojdziemy tym sposobem do układu wzorów, który możemy rozbić na dwie następujące grupy:

$$\text{(III)} \qquad \sum_1^m{}_\alpha \left(b_{\alpha/rt}\, b_{\alpha/ps} - b_{\alpha/rs}\, b_{\alpha/pt}\right) + \sum_1^{n+m}{}_{uu'vv'}\, c_{uu',vv'}\, y_{u/p}\, y_{u'/r}\, y_{v/s}\, y_{v'/t} = a_{pr,st}\ ;$$

$$\text{(IV)} \qquad \begin{aligned} & b_{\alpha/rst} - b_{\alpha/rts} + \sum_1^m{}_\beta \left(\mu_{\alpha\beta/s}\, b_{\beta/rt} - \mu_{\alpha\beta/t}\, b_{\beta/rs}\right) \\ & + \sum_1^{n+m}{}_{uu'vv'}\, c_{uu',vv'}\, z_\alpha^{(u)}\, y_{u'/r}\, y_{v/s}\, y_{v'/t} = 0\ , \end{aligned}$$

w których $a_{pr/st}$ i $c_{uu',vv'}$ przedstawiają symbole Riemanna, odnoszące się do form φ i ψ.

Wzory (III) i (IV) stanowią uogólnienie: pierwszy wzoru Gaussa drugi wzoru Codazzi'ego w zwyczajnej teoryi powierzchni.

Jeżeli rozmaitość V_{n+m} ma krzywiznę stałą K, wzory (III) i (IV) przybierają odpowiednio postać:

$$\sum_1^m {}_\alpha (b_{\alpha/rt}\, b_{\alpha/ps} - b_{\alpha/rs}\, b_{\alpha/pt}) + K(a_{ps}\, a_{rt} - a_{pt}\, a_{rs}) = a_{pr,st} \,,$$

$$b_{\alpha/rst} - b_{\alpha/rst} + \sum_1^m {}_\beta (\mu_{\alpha\beta/s}\, b_{\beta/rt} - \mu_{\alpha\beta/t}\, b_{\beta/rs}) = 0 \,.$$

Aby rozmaitość V_n można było uważać jako zawartą w rozmaitości V_{n+m}, w przypadku tym będzie konieczne i dostateczne, by można było wyznaczyć $b_{\alpha/rs}$ i $\mu_{\alpha\beta/r}$ w ten sposób, aby czyniły zadość tym równaniom.

3. Do wzorów (I), (II), (III) i (IV) można zastosować dla każdej liczby m przekształcenie, wyłożone przezemnie w przypadku $m=1$ (P. IV. 4).

Przyjmijmy w rozmaitości n-kongruencyę ortogonalną odniesienia [1], [2] . . . [n] i niechaj $\lambda_{1/r}, \lambda_{2/r}, \ldots, \lambda_{n/r}$ będą układy spółrzędne spółzmiennicze składających ją kongruencyj. Połóżmy:

(A) $$y_{u/r} = \sum_1^n {}_i\, \xi_i^{(u)}\, \lambda_{i/r} \,,$$

(6) $$b_{\alpha/rs} = \sum_1^n {}_{hk}\, \omega_{\alpha hk}\, \lambda_{h/r}\, \lambda_{k/s} \,,$$

(7) $$\lambda_{i/rs} = \sum_1^n {}_{hk}\, \gamma_{ihk}\, \lambda_{h/r}\, \lambda_{k/s} \,.$$

Na mocy wzoru (A) wzory (I) przybiorą postać:

$$\sum_1^n {}_{hk}\, \lambda_{h/r}\, \lambda_{k/s} \sum_1^{n+m} {}_{uv}\, c_{uv}\, \xi_h^{(u)}\, \xi_k^{(v)} = a_{rs} \,,$$

albo (P. II. 1. (4')):

$$\sum_1^{n+m} {}_{uv}\, c_{uv}\, \xi_h^{(u)}\, \xi_k^{(v)} = \varepsilon_{hk} \,.[1]$$

A ponieważ wzory te wyrażają wprost, że $\xi_1^{(u)}, \xi_2^{(u)}, \ldots, \xi_n^{(u)}$ są układami spółrzędnych spółzmienniczych n kongruencyj liniowych, zawartych w rozmaitości V_{n+m} (które, jak to wynika z wzorów (A), dla punktów rozmaitości

[1]) Skaźniki i, h, k to i w następstwie mogą przybierać wartości 1, 2 . . . n.

V_n zlewają się odpowiednio z ([1], [2] ,..., [n]), możemy zamiast nich podstawić wzory (A), byleby w nich wielkości $\xi_i^{(u)}$ miały znaczenie dopiero co ustanowione.

Wzory (II), przy uwzględnieniu wzorów (A) i równań (6), przybierają postać:

$$\sum_1^n {}_{rs}\, \lambda_h^{(r)}\, \lambda_k^{(s)}\, y_{u'/rs} = \sum_1^m {}_\alpha\, z_\alpha^{(u')}\, \omega_{\alpha hk} - \sum_1^{n+m} {}_{uvw}\, c^{(uu')}\, \xi_h^{(v)}\, \xi_k^{(v)}\, c_{vw,u} \,;$$

z wzorów zaś (A), gdy weźmiemy ich pochodne spółzmiennicze względem φ i uwzględnimy równania (7), znajdziemy:

$$\sum_1^n {}_{rs}\, \lambda_h^{(r)}\, \lambda_k^{(s)}\, y_{u'/rs} = \sum_1^n {}_i\, \xi_i^{(u')}\, \gamma_{ihk} + \frac{d\,\xi_h^{(u')}}{ds_k} \,.$$

Wzory (II) przekształcają się przeto na następujące:

(B) $$\frac{d\,\xi_h^{(u')}}{ds_k} = \sum_1^m {}_\alpha\, z_\alpha^{(u')}\, \omega_{\alpha hk} - \sum_1^n {}_i\, \xi_i^{(u')}\, \gamma_{ihk} - \sum_1^{n+m} {}_{uvw}\, c^{(uu')}\, \xi_h^{(v)}\, \xi_k^{(v)}\, c_{vw,u}$$

lub na równoważne:

(B') $$\frac{d\,\xi_{h/u}}{ds_k} = \sum_1^m {}_\alpha\, \omega_{\alpha hk}\, z_{\alpha/u} - \sum_1^n {}_i\, \gamma_{ihk}\, \xi_{i/u} + \sum_1^{n+m} {}_{vw}\, c_{uv,w}\, \xi_h^{(w)}\, \xi_k^{(v)} \,.$$

Nakoniec wzory (III) i (IV) przybierają odpowiednio postać:

(C) $$\left\{\begin{aligned} &\sum_1^m {}_\alpha (\omega_{\alpha ik}\, \omega_{\alpha jh} - \omega_{\alpha ij}\, \omega_{\alpha hk}) + \sum_1^{n+m} {}_{uu'vv'}\, c_{uu'vv'}\, \xi_h^{(u)}\, \xi_i^{(u')}\, \xi_j^{(v)}\, \xi_k^{(v')} \\ &\qquad = \sum_1^n {}_{prst}\, a_{pr,st}\, \lambda_h^{(p)}\, \lambda_i^{(r)}\, \lambda_j^{(s)}\, \lambda_k^{(t)} \,. \end{aligned}\right.$$

(D) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\omega_{\alpha ij}}{ds_i} - \frac{d\omega_{\alpha il}}{ds_j} + \sum_1^n {}_k \{\omega_{\alpha ik}(\gamma_{kjl} - \gamma_{klj}) + \omega_{\alpha jk}\, \gamma_{kil} - \omega_{\alpha lk}\, \gamma_{kij}\} \\ &+ \sum_1^m {}_\beta \left(\omega_{\beta il} \frac{d\mu_{\alpha\beta}}{ds_j} - \omega_{\beta ij} \frac{d\mu_{\alpha\beta}}{ds_l}\right) + \sum_1^{n+m} {}_{uu'vv'}\, c_{uu',vv'}\, z_\alpha^{(u)}\, \xi_i^{(u')}\, \xi_j^{(v)}\, \xi_l^{(v')} = 0 \,. \end{aligned}\right.$$

4. Ponieważ:

$$\xi_{h/u} = \sum_1^{n+m} {}_v\, c_{uv}\, \xi_h^{(v)} \,,$$

przeto, jeżeli przez $\vartheta_{h/u}$ oznaczymy kąt, który linia kongruencyi [h] czyni z linią spółrzędną y_u, nakreśloną w rozmaitości V_{n+m}, będzie:

$$\sqrt{c_{uu}}\cos\vartheta_{h/u} = \xi_{h/u}\,, \tag{8}$$

przez co wzory (B′) przekształcają się na następujące:

$$-\sqrt{c_{uu}}\sin\vartheta_{h/u}\frac{d\vartheta_{h/u}}{ds_k} = -\cos\vartheta_{h/u}\frac{d\sqrt{c_{uu}}}{ds_k} + \sum_1^m{}_\alpha\, \omega_{hk}\, z_{\alpha/u}$$

$$-\sum_1^n{}_i\, \gamma_{ihk}\, \xi_{iu} + \sum_1^{n+m}{}_{rw}\, c_{ur,w}\, \xi_k^{(r)}\, \xi_h^{(w)}\,.$$

Przyjmijmy, że rozmaitość V_{n+m} jest euklidesową i że $y_1, y_2 \ldots y_{n+m}$ są spółrzędnemi kartezyańskiemi ortogonalnemi. Wzory poprzedzające przybierają wtedy postać:

$$-\sin\vartheta_{h/u}\frac{d\vartheta_{h,u}}{ds_k} = \sum_1^m{}_\alpha\, \omega_{\alpha hk}\, z_{\alpha/u} - \sum_1^n{}_i\, \gamma_{ihk}\, \xi_{i/u}\,. \tag{9}$$

Weźmy jakikolwiek punkt O rozmaitości V_n i dajmy, że oś y_1 jest normalna do V_n w punkcie O; będzie w tym punkcie:

$$\vartheta_{h/1} = \frac{\pi}{2}\,, \quad \xi_{i/1} = 0\,,$$

a stąd równania (9) dadzą dla $u = 1$:

$$-\frac{d\vartheta_{h/1}}{ds_k} = \sum_1^m{}_\alpha\, \omega_{\alpha hk}\, z_{\alpha/1}\,. \tag{10}$$

Ponieważ $z_{1/1}, z_{2/1}, \ldots, z_{m/1}$ są dostawy kątów, które oś y_1 czyni z m kierunkami, wychodzącemi z punktu O i w tym punkcie normalnemi wzajemnie i do rozmaitości V_n, przeto stronę drugą równania (10) uważać można jako wyrażenie rzutu na kierunek y_1 wektora normalnego do rozmaitości V_n, a który wzdłuż kierunków wymienionych ma składowe $\omega_{\alpha hk}$.

Dla $k = h$ równanie (10) orzeka, że wektor ten, wzięty w kierunku przeciwległym i rzucony na jakikolwiek kierunek $[\beta]$ normalny do rozmaitości V_n, przedstawia krzywiznę rzutu linii $[h]$ na układ płaski $[h\beta]$, określony przez kierunki $[h]$ i $[\beta]$. Z tego powodu wektor o składowych $-\omega_{\alpha hk}$ nazwany być może k r z y w i z n ą n o r m a l n ą w z g l ę d e m r o z m a i t o ś c i V_{n+m} kongruencyj $[h]$ linij nakreślonych w rozmaitości V_n.

Dla $k \neq h$ wektor o składowych $-\omega_{\alpha hk}$, rzucony na kierunek $[\beta]$, przedstawia kąt, utworzony przez kierunki dwóch linij $[h]$, z których jedna przechodzi przez punkt O, drugi przez punkt P najbliższy punktu O na kierunku $[k]$, rzucony na układ płaski $[h\beta]$ i podzielony przez OP. Z uwagi na związki

$$\omega_{\alpha hk} = \omega_{\alpha kh}\,,$$

wynikające z równań (6), można będzie powiedzieć, że wektor ten przedstawia k r z y w i z n ę p o ś r e d n i ą a l b o m i e s z a n ą w z g l ę d e m V_{n+m} dwóch kongruencyj $[h]$ i $[k]$ linij, nakreślonych w rozmaitości V_n. Otrzymaliśmy tym sposobem niezauważoną dotąd, o ile wiem interpretacyę skręcenia geodetycznego linij nakreślonych na zwykłych powierzchniach.

Interpretacye te można łatwo rozciągnąć na przypadek, w którym rozmaitość V_{n+m} jest jakakolwiek, jeżeli zważymy, że przy pomocy rozważań, odnoszących się do otoczenia oznaczonego punktu O, możemy zamiast niej podstawić zawsze rozmaitość euklidesową o $n+m$ wymiarach, styczną do rozmaitości V_n w punkcie O.

Jeżeli w równaniach (C) położymy $k=i, h=j$, znajdziemy w szczególności:

$$(C')\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_1^m{}_\alpha\,(\omega_{\alpha ii}\,\omega_{\alpha jj} - \omega^2{}_{\alpha ij}) + \frac{1}{4}\sum_1^{n+m}{}_{uu',vv'}\, c_{uu',vv'}\,(\xi_i^{(u)}\,\xi_j^{(u')} - \xi_i^{(u')}\,\xi_j^{(u)}) \\ &(\xi_i^{(v)}\,\xi_j^{(v')} - \xi_i^{(v')}\,\xi_j^{(v)}) = \frac{1}{4}\sum_1^n{}_{pr,st}\, a_{pr,st}\,(\lambda_i^{(p)}\,\lambda_j^{(r)} - \lambda_i^{(r)}\,\lambda_j^{(p)})\,(\lambda_i^{(s)}\,\lambda_j^{(t)} - \lambda_i^{(t)}\,\lambda_j^{(s)})\,. \end{aligned}\right.$$

A ponieważ (P. IV. 4. (G)) $\omega_{\alpha ii}\,\omega_{\alpha jj} - \omega^2{}_{\alpha ij}$ jest wyrażeniem krzywizny całkowitej powierzchni geodezyjnej rozmaitości V_n, przechodzącej przez jakikolwiek punkt oznaczony O i określonej przez dwa kierunki $[i]$ i $[j]$, a uważanej za należną do rozmaitości euklidesowej V_3, określonej przez te kierunki i kierunek $[\alpha]$, można więc ją nazwać k r z y w i z n ą c a ł k o w i t ą u k ł a d u p ł a s k i e g o $[ij]$ r o z m a i t o ś c i V_n względem kierunku $[\alpha]$ normalnego do V_n. A zatem wzory (C′) wyrażają twierdzenie następujące: „Niechaj O będzie jakimkolwiek punktem rozmaitości V_n, zawartej w rozmaitości V_{n+m}; niechaj $[1], [2], \ldots, [m]$ będą kierunki, przez punkt O przechodzące, z których każde dwa są względem siebie ortogonalne i wszystkie normalne do rozmaitości V_n. Suma krzywizn całkowitych powierzchni geodezyjnej σ rozmaitości V_n, przechodzącej przez punkt O, jakkolwiek danej, względem kierunków $[1], [2], \ldots, [m]$, jest niezależna od wyboru tych kierunków".

Jeżeli krzywiznę tę nazwiemy krzywizną p o w i e r z c h n i σ w z g l ę d e m V_{n+m}, można będzie według wzorów (1) powiedzieć, że: „Krzywizna G a u s s a lub krzywizna bezwzględna powierzchni σ w każdym punkcie O jest równa krzywiznie powierzchni σ względem V_{n+m}, powiększonej o krzywiznę bezwzględną powierzchni geodezyjnej rozmaitości V_{n+m} stycznej do powierzchni σ".

Zauważmy nakoniec, że w przypadku $n = 3$, $m = 1$ wzory (C) i (D) przybierają odpowiednio postać:

$$\omega_{11}\,\omega_{22} - \omega^2_{12} + \sum_1^3{}_{uv}\,\gamma^{(uv)}\,z_u\,z_v = G\,,$$

$$\frac{d\omega_{11}}{dx_2} - \frac{d\omega_{12}}{dx_1} + \sum_1^2{}_k \left\{ \omega_{ik}\,(\gamma_{k12} - \gamma_{k21}) + \omega_{ik}\,\gamma_{ki2} - \omega_{2h}\,\gamma_{ki1} \right\}$$

$$= (-1)^i \sum_1^3{}_{uv}\,\gamma^{(uv)}\,z_u\,z_{i+1/v}\,, \qquad (i=1,2)$$

gdzie G oznacza niezmiennik Gaussa dla formy φ, i gdzie przy założeniu:

$$c\,\gamma^{(uv)} = c_{u+1\;u+2,\;v+1\;v+2}$$

umawiamy się, by skaźniki przystające do siebie według mod. 3 uważać za równoważne.

ALF GULDBERG,

UEBER SIMULTANE LINEARE DIFFERENZENGLEICHUNGEN.

(O RÓWNANIACH RÓŻNICOWYCH LINIOWYCH JEDNOCZESNYCH).

Die Theorie der linearen Differentialgleichungen und die Theorie der linearen Differenzengleichungen haben bekanntlich mehrere Berührungspunkte. Diese Thatsache hat man auch ziemlich eingehend benutzt, wenn es sich um das Studium einer linearen Differenzengleichung [1]) handelte, degegen hat man, meines Wissens, beim Studium der simultanen linearen Differenzengleichungen diese Thatsache sich weniger zum Nutze gezogen.

In den folgenden Zeilen erlaube ich mir einige hierher gehörende Sätze kurz zu besprechen.

Man nennt ein Differenzengleichungssystem ein lineares, wenn dasselbe die Form hat:

$$(1)\qquad y^{(i)}_{x+1} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\,y^{(k)}_x + A_{i\,n+1}\,, \qquad (i=1,2\ldots n)$$

wo die A Functionen der x bedeuten, und zwar nennt man dieses System ein homogenes lineares, wenn die $A_{i\,n+1}$ gleich Null sind.

[1]) Siehe z. Beispiel Markoff: Differenzenrechnung p. 146 fg. siehe auch: Encyklopädie d. mathematischen Wissenschaften. Bd. I, p. 982.