iloczynu $P = \prod_{\lambda=0}^{\infty}(1 + a_\lambda + b_\lambda i) = \prod_{\lambda=0}^{\infty} \varrho_\lambda e^{i\varphi_\lambda}$, na str. 85—89, polegająca na tem, że wzięto pod uwagę osobno iloczyn czynników ϱ_λ, a osobno iloczyn czynników $e^{i\varphi_\lambda}$, wydaje mi się dobrą i praktyczną. Twierdzenie na str. 86 wiersz 6—3 od dołu, że w iloczynie, w którym spełnia się warunek $\lim_{\lambda=\infty}(a_\lambda + b_\lambda i) = 0$, szereg $\Sigma \varphi_\lambda$ jest w ten sam sposób zbieżny lub rozbieżny, co szereg Σb_λ, i wynikające stąd twierdzenie na str. 91 wiersz 8—13 od góry, że w takim iloczynie zbieżność lub rozbieżność szeregu Σa_λ nie ma żadnego wpływu na oznaczoność lub nieoznaczoność charakterystyki, uważam za nowe.

Co się tyczy przykładów specyalnych szeregów i iloczynów warunkowo-zbieżnych str. 91—104, to z wyjątkiem przykładów 1-go i 5-go, dla których wartości znalazłem wyznaczone, we wszystkich innych przykładach wartości sam wyznaczyłem, oprócz tego przykłady 4-ty str. 96—99 i 7-my str. 102—104 są obmyślone przezemnie.

We Lwowie dnia 27 stycznia 1904 r.

F. GOMES TEIXEIRA,

SUR LES FONCTIONS ALEPHS DE WRONSKI.

Extrait d'une lettre adressée à M. S. Dickstein.

(O FUNKCYACH ALEF WROŃSKIEGO.

Wyjątek z listu p. F. Gomes Teixeiry do S. Dicksteina).

Considérons la fonction

$$y = [(1-ax)(1-bx)(1-cx)\ldots]^{-1} = [1 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_m x^m]^{-1},$$

et appliquons à cette fonction la formule bien connue:

$$y^{(n)} = \sum_i \frac{n! \dfrac{d^i y}{dx^i} (u')^\alpha (u'')^\beta \ldots (u_n)^\lambda}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!(2!)^\beta (3!)^\gamma \ldots (n!)^\lambda},$$

qui donne la dérivée d'ordre n de y par rapport à x, quand y est une fonction de u et u une fonction de x; où $\alpha, \beta \ldots, \lambda$ représentent les solutions entières et positives de l'équation:

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + n\lambda = n$$

et où:

$$i = \alpha + \beta + \ldots + \lambda.$$

On trouve en posant $x = 0$:

$$y_0^{(n)} = \sum (-1)^i \frac{n!\, i!\, p_1^\alpha p_2^\beta \ldots p_m^\lambda}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!}.$$

Mais, d'un autre côté, en développant les binomes:

$$(1-ax)^{-1}\,,\ (1-bx)^{-1}\,,\ (1-cx)^{-1}\,,\ \ldots$$

ce qui donne:

$$(1-ax)^{-1}=1+ax+a^2x^2+a^3x^3+\ldots,$$
$$(1-bx)^{-1}=1+bx+b^2x^2+b^3x^3+\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

en multipliant les résultats, membre à membre, et en ordonnant ensuite suivant les puissances de x, on trouve pour la valeur du coefficient de x^n l'expression:

$$S_n=\sum a^q\, b^r\, c^s\ldots,$$

où $q, r, s\ldots$ représentent les solutions entières et positives de l'équation:

$$q+r+s+\ldots=n.$$

S_n est donc une fonction aleph ou fonction symétrique de Wronski, et on a:

$$S_n=\sum_i(-1)^i\frac{i!\,p_1^{\alpha}\,p_2^{\beta}\ldots p_m^{\lambda}}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}\,, \tag{1}$$

où $\alpha, \beta\ldots\lambda$ représentent les solutions entières et positives de l'équation:

$$\alpha+\beta+\ldots+m\lambda=n,$$

et où:

$$i=\alpha+\beta+\ldots+\lambda.$$

Nous avons ainsi une expression des fonctions alephs ou moyen d'une formule analogue à celle donnée par Waring pour le calcul des sommes des puissances semblables des racines des équations algébriques. Cette dernière formule est, en effet:

$$s_n=\sum(-1)^i\frac{(i-1)!\,p_1^{\alpha}\,p_2^{\beta}\ldots p_m^{\lambda}}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!} \tag{2}$$

où

$$s_n=a^n+b^n+c^n+\ldots,$$

et je remarquerai, en passant, qu'elle pent être obtenue au moyen d'une analyse semblable à celle qu'on vient d'employer pour obtenir (1), en partant, pour cela, de la fonction:

$$y=\log\left[(1-ax)\,(1-bx)\,(1-cx)\ldots\right].$$

En comparant les formules (1) et (2) on voit qu' à chaque terme:

$$A\,p_1^{\alpha}\,p_2^{\beta}\ldots p_m^{\lambda}\,,$$

de (2) correspond un terme:

$$\frac{1}{n}\,(\alpha+\beta+\ldots+\lambda)\,A\,p_1^{\alpha}\,p_2^{\beta}\ldots p_m^{\lambda}\,,$$

de (1). On peut donc déduire l'expression de la fonction S_n de celle de s_n en multipliant chaque terme de la deuxième par la somme des exposants de $p_1, p_2, p_3\ldots$ dans ce terme et en divisant par n. On peut, inversement, déduire l'expression de s_n de celle de S_n en divisant chaque terme par la somme des exposants de $p_1, p_2,\ldots$ dans ce terme et en multipliant par n.

De la même manière de la formule connue:

$$s_n=\sum_{t=1}^{t=n}(-1)^t\,\frac{n}{t}\sum p_{\omega_1}\,p_{\omega_2}\ldots p_{\omega_t}\,,$$

où $\omega_1, \omega_2\ldots\omega_t$ sont les solutions entières positives de l'équation:

$$\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_t=n,$$

en multipliant chaque terme par son degré t et en divisant par n on tire la formule suivante:

$$S_n=\sum_{t=1}^{t=n}(-1)^t\sum p_{\omega_1}\,p_{\omega_2}\ldots p_{\omega_t}$$

démontrée par M. Cesàro dans les „Nouvelles Annales de Mathématiques" ((3), 4, p. 67).

Porto 31. I. 1904.

Note de l'éditeur. On trouve la déduction de la formule (1) pour les fonctions alephs de Wronski dans la Note: „Dowód dwóch wzorów Wrońskiego" (Démonstration de deux formules de Wronski), inserée dans les Mémoires de l'Académie de Cracovie, XVI. 1888. *S. D.*