Widzimy, że błąd szacowania wzrasta w miarę, jak zwiększa się odległość pozorna w sposób dość prawidłowy, z początku od $\Delta = 10^0$ wolno, między $\Delta = 21$ a $\Delta = 27$ najszybciej, później znów nieco wolniej. Prawo zależności $d\Delta$ od Δ nie da się wszakże ująć w jakiś prosty wzór matematyczny. Niewątpliwie wielkość tego błędu zależna też jest od większej lub mniejszej wprawy i dla tego wartości powyższe mają znaczenie tylko subjektywne, jak w ogóle wszystkie wyniki szczegółowe tej rozprawki posiadają wartość tylko subjektywną. Ale jest rzeczą możliwą, że czynniki subjektywne mają tylko znaczenie stałych parametrów, wtedy wyniki otrzymane nie byłyby pozbawione treści ogólniejszej. Dla stwierdzenia tego przypuszczenia niezbędne są liczniejsze badania analogiczne.

K. WEIERSTRASS,

O PRZEDSTAWIALNOŚCI ANALITYCZNEJ TAK ZWANYCH DOWOLNYCH FUNKCYJ ARGUMENTÓW RZECZYWISTYCH.[1]

1.

Wynik główny poniższego badania, w ograniczeniu najprzód do funkcyj jednej zmiennej, daje się wyrazić w sposób następujący:

Niechaj x będzie zmienną rzeczywistą, mogącą przybierać wszelką wartość, należącą do przedziału $(-\infty \ldots +\infty)$, niechaj dalej $f(x)$ oznacza funkcyę rzeczywistą i ciągłą zmiennej x; można w rozmaity sposób utworzyć szereg funkcyj całkowitych $f_1(x), f_2(x) \ldots$, takich, że dla każdej z uważanych wartości zmiennej x jest:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots,$$

przyczem szereg $f_1(x) + f_2(x) \ldots$ w każdym skończonym przedziale jest jednostajnie zbieżny. Jeżeli $f(x)$ jest dla każdej wartości zmiennej x funkcyą jednoznacznie określoną, rzeczywistą i ciągłą i gdy jej wartość bezwzględna ma granicę wyższą skończoną; wtedy, jak wiadomo, zachodzi następujące równanie, w którem u oznacza inną zmienną rzeczywistą, przez k zaś rozumieć należy wielkość dodatnią niezależną od x i u:

$$(1) \qquad \lim_{k=0} \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du = f(x).$$

Twierdzenie, wyrażone przez to równanie, daje się łatwo uogólnić.

[1]) Przekład z wydania „Mathematische Werke" von Karl Weierstrass, t. 3. 1903 (Sitzungsber. d. Berl. Akademie z 9 i 30 lipca 1885).

Niechaj będzie $\psi(x)$ inną funkcyą tej samej natury co $f(x)$, nie zmieniającą znaku, czyniącą zadość równaniu $\psi(-x)=\psi(x)$ i odpowiadającą nadto warunkowi, by całka

$$\int_0^{+\infty} \psi(x)\,dx$$

posiadała wartość skończoną, którą oznaczmy przez ω. Jeżeli położymy:

$$F(x,k)=\frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du\,, \tag{2}$$

będzie:

$$\lim_{k=0} F(x,k)=f(x)\,. \tag{3}$$

O dowodzie równań (1) i (3) uczynimy następujące uwagi. Niechaj a_1, a_2, b_1, b_2 będą wielkości dodatnie, $b_1>a_1$, $b_2>a_2$, wtedy mamy:

$$\frac{1}{k}\int_{-b_1}^{b_2} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du-\frac{1}{k}\int_{-a_1}^{a_2} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du$$

$$=\frac{1}{k}\int_{-b_1}^{-a_1} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du+\frac{1}{k}\int_{a_2}^{b_2} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du$$

$$=f(-b_1\ldots-a_1)\int_{\frac{a_1+x}{k}}^{\frac{b_1+x}{k}}\psi(u)\,du+f(a_2\ldots b_2)\int_{\frac{a_2-x}{k}}^{\frac{b_2-x}{k}}\psi(u)\,du.\;^{1)}$$

W połączeniu z założeniami o funkcyach $f(x)$, $\psi(x)$ równanie to uczy, że całka

$$\frac{1}{k}\int_{-a_1}^{a_2} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du\,,$$

[1]) Przez $f(x_1\ldots x_2)$ rozumiemy wartość średnią, zawartą pomiędzy najmniejszą a największą z wartości, które przybiera funkcya $f(x)$ w przedziale od $x=x_1$ do $x=x_2$.

gdy wielkościom x, k nadajemy wartości oznaczone i gdy a_1, a_2 stają się nieskończenie wielkiemi niezależnie od siebie, dąży do granicy skończonej; że więc całka

$$\frac{1}{k}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du$$

jest wielkością dobrze określoną.

To ustaliwszy, dajmy, że δ jest wielkością dodatnią dowolnie małą, wtedy:

$$F(x,k)=\frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{x-\delta} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du+\frac{1}{2k\omega}\int_{x+\delta}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du$$

$$+\frac{1}{2k\omega}\int_{x-\delta}^{x} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du+\frac{1}{2k\omega}\int_{x}^{x+\delta} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du$$

$$=\frac{1}{2\omega}f(-\infty\ldots x-\delta)\int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty}\psi(u)\,du+\frac{1}{2\omega}f(x+\delta\ldots+\infty)\int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty}\psi(u)\,du$$

$$+\frac{1}{2\omega}\int_0^{\frac{\delta}{k}}\big(f(x-ku)+f(x+ku)\big)\,\psi(u)\,du\,.$$

Wynika stąd:

$$F(x,k)-f(x)=\frac{f(-\infty\ldots+\infty)}{\omega}\int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty}\psi(u)\,du$$

$$+\frac{1}{2\omega}\int_0^{\frac{\delta}{k}}\big(f(x-ku)+f(x+ku)-2f(x)\big)\,\psi(u)\,du$$

$$=\frac{f(-\infty\ldots+\infty)-f(x)}{\omega}\int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty}\psi(u)\,du$$

$$+\frac{1}{2}\,\varepsilon_1\big(f(x-\varepsilon\delta)+f(x+\varepsilon\delta)-2f(x)\big)\,,$$

gdzie ε i ε_1 są wielkości dodatnie, zawarte pomiędzy 0 i 1.

Niechaj teraz x_1, x_2 będą dwie oznaczone wartości zmiennej x, G niechaj będzie granicą wyższą dla wartości bezwzględnej wielkości $f(x)$; g_1, g_2 niech oznaczają dwie wielkości dodatnie, mogące przybierać wartości dowolnie małe. Wtedy można najprzód wielkości δ nadać wartość tak małą, aby wartość bezwzględna wielkości

$$\frac{1}{2}\left(f(x-u)+f(x+u)-2f(x)\right)$$

była stale mniejsza od g_1, gdy x znajduje się w przedziale $(x_1 \dots x_n)$ i równocześnie u w przedziale $(0 \dots \delta)$. Po ustaleniu takiej wartości na δ, można następnie wyznaczyć taką wielkość dodatnią k', aby dla każdej wartości k, mniejszej od k' było:

$$\frac{2\,G}{\omega}\int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty}\psi(u)\,du < g_2\,,$$

a zatem, aby, na mocy poprzedniego równania, różnica pomiędzy $F(x+k)$ a $f(x)$ była co do wartości bezwzględnej mniejsza od g_1+g_2 i mianowicie dla każdej z uważanych wartości zmiennej x.

W ten sposób udowodniliśmy nietylko, że $F(x, k)$ dla każdej pojedyńczej wartości x dąży do granicy $f(x)$, gdy k staje się nieskończenie małem, lecz także, że to dążenie jest jednostajne dla wszelkich wartości x, należących do przedziału skończonego.

Z równania (3) wyprowadzamy wniosek godny uwagi.

Pomiędzy funkcyami $\psi(x)$, czyniącemi zadość podanym warunkom, istnieje nieskończenie wiele takich, które są funkcyami przestępnemi całkowitemi i równocześnie są tej natury, że i odpowiednie funkcye $F(x, k)$ dla każdej oznaczonej wartości wielkości k dają się rozwinąć na szeregi potęgowe zmiennej x, stale zbieżne. Jeżeli za $\psi(x)$ weźmiemy jednę taką funkcyę np. $\psi(x)=e^{-xx}$, otrzymamy następujące twierdzenie:

A. „Jeżeli $f(x)$ jest funkcyą jednoznacznie określoną tylko dla rzeczywistych wartości zmiennej x i wciąż ciągłą, wtedy można w rozmaity sposób utworzyć funkcyę przestępną c a ł k o w i t ą $F(x, k)$, zawierającą, prócz x, jeszcze parametr zmienny (dodatni) k i taką, że dla każdej wartości rzeczywistej x zachodzi równanie $\lim\limits_{k=0} F(x, k)=f(x)$“.

Pod warunkiem, że zmienna x pozostaje w pewnym przedziale skończonym, można dalej, jak okazano, po przyjęciu pewnej wielkości g' dowolnie małej dodatniej, nadać parametrowi k taką małą wartość k', aby dla każdej

wartości x różnica pomiędzy $F(x, k')$ a $f(x)$ była co do wartości bezwzględnej mniejsza od g'. Jeżeli przedstawimy teraz $F(x, k')$ w postaci szeregu potęgowego

$$A_0+A_1x+A_2x^2+\dots$$

i oznaczymy sumę n pierwszych wyrazów tego szeregu przez $G(x)$, wtedy, po przyjęciu innej wielkości dodatniej g'', można liczbie n nadać wartość tak wielką, że dla każdej wartości x, należącej do uważanego przedziału, wartość bezwzględna różnicy $F(x, k')-G(x)$ będzie mniejsza od g'', a więc wartość bezwzględna różnicy $f(x)-G(x)$ będzie mniejsza od $g'+g''$.

Tym sposobem dowiedziono, że:

B. „Gdy $f(x)$ jest funkcyą o podanych własnościach i gdy zmienna x pozostaje w pewnym przedziale skończonym, wtedy, po przyjęciu pewnej wielkości dodatniej dowolnie małej g, można w rozmaity sposób wyznaczyć funkcyę c a ł k o w i t ą w y m i e r n ą $G(x)$, która w uważanym przedziale tak jest blizką funkcyi $f(x)$, że różnica $f(x)-G(x)$ pozostaje co do wartości bezwzględnej stale mniejsza od g“.

Niechaj będą dwa szeregi nieskończone wielkości dodatnich

$$a_1, a_2, a_3, \dots;\ g_1, g_2, g_3 \dots,$$

takie, że $\lim\limits_{n=\infty} a_n=\infty$, $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} g_\nu$ posiada wartość skończoną; wtedy, na zasadzie poprzedzającego, można wyznaczyć szereg funkcyj wymiernych:

$$G_1(x),\quad G_2(x),\quad G_3(x)\dots,$$

takich, że (dla $\nu=1, 2 \dots \infty$):

$$|\,f(x)-G_\nu(x)\,|<g_\nu\,,$$

gdy x pozostaje w przedziale $(-a_\nu \dots a_\nu)$. Jeżeli położymy:

$$f_0(x)=G_1(x)\,,\quad f_\nu(x)=G_{\nu+1}(x)-G_\nu(x)\,,$$

będzie tedy:

$$\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x) = G_{n+1}(x)\,,$$

a dla każdej oznaczonej wartości na x:

$$\lim_{n=\infty} G_{n+1}(x)=f(x)\,;$$

stąd zaś otrzymujemy:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)\,.$$

Niechaj x_1, x_2 będą dwie oznaczone skończone wartości zmiennej x, wtedy z nierówności

$$| f(x) - G_\nu(x) | < g_\nu\,, \quad (-a_\nu \leqq x \leqq a_\nu)\,,$$

$$| f(x) - G_{\nu+1}(x) < g_{\nu+1}\,, \quad (-a_{\nu+1} \leqq x \leqq a_{\nu+1})\,,$$

otrzymujemy, że dla każdej wartości x, należącej do przedziału $(x_1 \ldots x_2)$, jest:

$$| f_\nu(x) | < g_\nu + g_{\nu+1}\,,$$

skoro ν jest większe od liczby oznaczonej ν', którą określamy w ten sposób, że każdy przedział $(-a_\nu \ldots a_\nu)$, dla którego $\nu > \nu'$, musi zawierać obie wartości x_1, x_2. Mamy tedy:

$$\sum_{\nu=\nu'+1}^{\infty} | f_\nu(x) | < \sum_{\nu=\nu'+1}^{\infty} (g_\nu + g_{\nu+1})\,, \quad \text{gdy } x_1 \leqq x \leqq x_2\,;$$

skąd wynika, że szereg $\sum_{\nu=\nu'+1}^{\infty} f_\nu(x)$, a więc i szereg $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$ jest b e z w a r u n k o w o i j e d n o s t a j n i e z b i e ż n y dla wartości x, należących do przedziału $(x_1 \ldots x_2)$. Ponieważ zaś wybór wielkości x_1, x_2 jest poddany jedynie ograniczeniu, aby miały one wartości skończone dodatnie, a funkcye $f_\nu(x)$ są od tego ograniczenia niezależne, poprzedni przeto szereg jest zbieżny bezwarunkowo dla k a ż d e j wartości x i jest jednostajnie zbieżny w każdym przedziale $x_1 \leqq x \leqq x_2$, którego granice mają wartości skończone. Otrzymujemy tedy twierdzenie:

C. „Każda funkcya $f(x)$ o podanych wyżej własnościach daje się w rozmaity sposób przedstawić w postaci szeregu nieskończonego, którego wyrazy są funkcyami c a ł k o w i t e m i w y m i e r n e m i zmiennej x; szereg ten jest zbieżny bezwarunkowo dla każdej skończonej wartości x i zbieżny jednostajnie w każdym przedziale $(x_1 \ldots x_2)$, którego granice są wielkościami skończonemi".

O twierdzeniu B. zauważymy, że do udowodnienia go dość przyjąć, iż $\psi(x)$ jest funkcyą przestępną całkowitą, która dla wartości rzeczywistych x

posiada wyżej wymienione własności, nie zaś, iż także $F(x, k)$ jest funkcyą całkowitą zmiennej x, co nie jest wynikiem koniecznym pierwszego założenia.

Jeżeli mianowicie, rozumiejąc przez a, b dwie dowolne wielkości rzeczywiste, położymy:

$$F_1(x, k) = \frac{1}{2k\omega} \int_a^b f(u)\, \psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du\,,$$

będzie dla wartości rzeczywistych zmiennej x:

$$F(x, k) = F_1(x, k) + \frac{1}{2\omega} \int_{\frac{x-a}{k}}^{+\infty} f(x - ku)\, \psi(u)\, du + \frac{1}{2\omega} \int_{\frac{b-x}{k}}^{+\infty} f(x + ku)\, \psi(u)\, du\,.$$

Gdy więc a, b, x_1, x_2 obierzemy zgodnie z warunkiem $a < x_1 < x_2 < b$ i damy sobie dowolnie małą wielkość g_1, można będzie tak ustalić wartość wielkości k, aby dla każdej wartości zmiennej x w przedziale $(x_1 \ldots x_2)$ wartość bezwzględna różnicy $f(x) - F_1(x, k)$ była mniejsza od g_1. Ponieważ dalej $F_1(x, k)$ jest bezwarunkowo funkcyą całkowitą (przestępną) zmiennej x, można w założeniu powyższem, po obraniu drugiej wielkości dodatniej g_2, tak wyznaczyć funkcyę c a ł k o w i t ą w y m i e r n ą $G(x)$, aby w przedziale $(x_1 \leqq x \leqq x_2)$ było:

$$| G(x) - F_1(x, k) | < g_2\,,$$

a więc:

$$| f(x) - G(x) | < g_1 + g_2\,,$$

co właśnie wyraża twierdzenie B.

Ten dowód twierdzenia B jest, jak mniemamy, zupełnie ścisły i wystarcza też, gdy idzie tylko o okazanie, że istnieją i mogą być istotnie wyznaczone funkcye całkowite wymierne $G(x)$, przystające tak dokładnie, jak chcemy, do funkcyi danej $f(x)$ we wszystkich punktach dowolnie przyjętego przedziału $(x_1 \ldots x_2)$. Ale za to wskazany tu sposób tworzenia tych funkcyj ma brak zasadniczy. Jeżeli położymy:

$$F_1(x, k) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (k)_\nu\, x^\nu\,,$$

gdzie (k_ν), jako funkcya wielkości k, wyraża się wzorem:

$$(k)_\nu = \frac{(-1)^\nu}{2\omega k^\nu \nu!} \int_{\frac{a}{k}}^{\frac{b}{k}} f(ku) \frac{d^\nu \psi(u)}{du^\nu} du ,$$

oraz

$$G^{(n)}(x, k) = \sum_{\nu=0}^{n-1} (k)_\nu x^\nu ,$$

wtedy istnieć będą wprawdzie takie wartości na k i n, dla których w przedziale $(x_1 \leqq x \leqq x_2)$ jest:

$$| f(x) - G^{(n)}(x, k) | < \delta ,$$

gdzie δ jest dowolną wielkością dodatnią, ale gdy δ jest nieskończenie małe, k będzie również nieskończenie małe. I zajdzie w tym przypadku ta niedogodność, że z poprzedniego wyrażenia na $(k)_\nu$ nie widać, czy dla k nieskończenie małego zbliża się ono do granicy skończonej lub przynajmniej zostaje skończone; to zaś jest bezwarunkowo wymagalne, by w sposób wyżej opisany można było dla wartości nieskończenie małej na δ otrzymać przydatne wyrażenie przybliżone funkcyi $f(x)$.

Niedogodności tej można atoli zaradzić w sposób następujący:

Niechaj, jak poprzednio, $f(x)$ oznacza funkcyę rzeczywistą i ciągłą dla każdej rzeczywistej wartości zmiennej x, jednoznacznie określoną i taką, że jej wartość bezwzględna posiada granicę wyższą skończoną (G). Niechaj $\psi(x)$ będzie funkcyą przestępną całkowitą, o której zakładamy tylko, że jest rzeczywistą dla wartości rzeczywistej zmiennej x i czyni zadość warunkowi $\psi(-x) = \psi(x)$. Niechaj dalej u, v będą zmienne rzeczywiste od siebie niezależne; połóżmy:

$$\sqrt{\psi(u+vi)\,\psi(u-vi)} = \psi(u, v) ,$$

gdzie pierwiastkowi kwadratowemu nadajemy wartość dodatnią. Ponieważ wartość bezwzględna wyrażenia $\dfrac{\psi(u+vi)}{\psi(u, v)}$ jest równa 1, przeto, — gdy a, b są wielkości rzeczywiste — będzie:

$$(4) \quad \int_a^b f(u)\,\psi(u+vi)\,du = \int_a^b f(u) \frac{\psi(u+vi)}{\psi(u, v)} \cdot \psi(u, v)\,du = \varepsilon G \int_a^b \psi(u, v)\,du ,$$

gdzie ε oznacza wielkość zespoloną, której wartość bezwzględna jest mniejsza od 1. Jeżeli więc przyjmiemy, że $\psi(x)$ jest tej natury, iż całka

$$\int_0^{+\infty} \psi(u, v)\,du ,$$

dla każdej wartości zmiennej v posiada wartość skończoną, wtedy, jeżeli a_1, a_2, b_1, b_2 są wielkości dodatnie, $b_1 > a_1$, $b_2 > a_2$, całki

$$\int_{a}^{b_2} \psi(u, v)\,du , \quad \int_{-b_1}^{-a_1} \psi(u, v)\,du ,$$

z których druga (z przyczyny, że $\psi(-u, v) = \psi(u, v)$) jest równa

$$\int_{a_1}^{b_1} \psi(u, v)\,du ,$$

mają obie wartości nieskończenie małe, gdy a_1, a_2 stają się nieskończenie wielkie. Toż samo, na mocy poprzedniego równania, ma miejsce dla całek

$$\int_{-b_1}^{-a_1} f(u)\,\psi(u+vi)\,du , \quad \int_{a_2}^{b_2} f(u)\,\psi(u+vi)\,du ,$$

stąd zaś wynika, że całka

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi(u+vi)\,du$$

ma wartość oznaczoną i skończoną dla każdej wartości v.

Przyjmijmy w dalszym ciągu, że całka

$$\int_{a_2}^{+\infty} \psi(u, v)\,du ,$$

gdy a_2 staje się nieskończenie wielkie, dla wszelkich wartości v, których wartość bezwzględna nie przekracza pewnej wartości granicznej, dąży jednostajnie do granicy zero, wtedy na mocy równania (4), tożsamo stosuje się do całki

$$\int_{a_2}^{+\infty} f(u)\,\psi(u+vi)\,du\,,$$

a także dla a_2 nieskończenie wielkiego do całki

$$\int_{-\infty}^{-a_1} f(u)\,\psi(u+vi)\,du\,.$$

Gdy więc V, g są dane wielkości dodatnie, z których pierwsza może być dowolnie wielka, druga dowolnie mała, wtedy można zawsze wyznaczyć dwie wielkości dodatnie a_1, a_2 tak, aby wartość bezwzględna różnicy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi(u+vi)\,du - \int_{-a_1}^{a_2} f(u)\,\psi(u+vi)\,du$$

była mniejsza od g dla każdej wartości na v, czyniącej zadość warunkowi: $-V \leqq v \leqq V$.

Niechaj będzie $x = \xi + \xi' i$ zmienną zespoloną i, jak poprzednio, k stałą dodatnią, $\omega = \int_0^{+\infty} \psi(u)\,du$; wtedy, na zasadzie powyższego, całka

$$(5)\qquad \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi+ku)\,\psi\left(u-\frac{\xi' i}{k}\right)du = \frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du$$

jest dla każdej skończonej wartości na x wielkością skończoną, jednoznacznie określoną, którą wyżej oznaczyliśmy przez $F(x, k)$.

Należy dowieść jeszcze, że $F(x, k)$ jest funkcyą całkowitą (przestępną) zmiennej x.

Ustanówmy dla wartości bezwzględnej tej zmiennej granicę wyższą r; wtedy, obrawszy dwie dowolnie małe wielkości dodatnie g', g'', można wyznaczyć dwie inne wielkości a_1, a_2 takie, aby dla nich wartość bezwzględna sumy

$$\frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{-\frac{a_1+\xi}{k}} f(\xi+ku)\,\psi\left(u-\frac{\xi' i}{k}\right)du + \frac{1}{2\omega}\int_{\frac{a_2-\xi}{k}}^{+\infty} f(\xi+ku)\,\psi\left(u-\frac{\xi' i}{k}\right)du\,,$$

była mniejsza od g' dla wszelkich wartości na ξ, ξ', czyniących zadość warunkowi $\xi^2 + \xi'^2 \leqq r^2$. Mamy wtedy:

$$(6)\qquad F(x, k) = \frac{1}{2k\omega}\int_{-a_1}^{a_2} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du + \varepsilon' g'\,,$$

gdzie ε' oznacza wielkość, której wartość bezwzględna jest mniejsza od 1. Całkę po stronie prawej tego równania można rozwinąć na szereg stale zbieżny $\mathfrak{P}(x)$, a gdy sumę n pierwszych wyrazów szeregu $\frac{1}{2k\omega}\mathfrak{P}(x)$ oznaczymy przez $G^{(n)}(x)$, można będzie wziąć n tak wielkie, aby było:

$$|\,F(x, k) - G^{(n)}(x)\,| < g' + g''\,,$$

dla wszelkiej wartości na x, czyniącej zadość warunkowi $|\,x\,| \leqq r$.

To mając, można przy pomocy postępowania, stosowanego przy uzasadnieniu twierdzenia C, okazać, że funkcyę $F(x, k)$ daje się przedstawić w postaci szeregu nieskończonego, którego wyrazy są funkcyami całkowitemi wymiernemi zmiennej x, oraz że szereg ten jest jednostajnie zbieżny dla wszystkich wartości na x, znajdujących się w jakimkolwiek skończonym przedziale. W tym celu należy wziąć takie dwa szeregi wielkości dodatnich:

$$r_1, r_2, r_3, \ldots;\; g_1, g_2, g_3 \ldots,$$

że $\lim_{n=\infty} r_n = \infty$, zaś $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ ma wartość skończoną, następnie wyznaczyć szereg funkcyj całkowitych wymiernych $G_1(x), G_2(x), G_3(x) \ldots$ tak, aby było:

$$(7)\qquad |\,F(x, k) - G_\nu(x)\,| < g_\nu\,, \qquad (\nu = 1, 2 \ldots \infty)$$

dla każdej wartości na x, czyniącej zadość warunkowi $|\,x\,| \leqq r_\nu$, oraz położyć:

$$(8)\qquad f_0(x) = G_1(x)\,,\quad f_\nu(x) = G_{\nu+1}(x) - G_\nu(x)\,;$$

wtedy będzie:

$$(9)\qquad F(x, k) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)\,.$$

Według twierdzenia, dawniej udowodnionego przezemnie (Monatsber. d. Akad. 1880, str. 123) sposobem elementarnym, można szereg po prawej, ponieważ w każdym przedziale skończonym jest jednostajnie zbieżny, przekształcić na szereg potęgowy $\mathfrak{P}(x)$, zbieżny dla każdej wartości skończonej na x.

Jeżeli przyjmiemy, że $\psi(x) = e^{-x^2}$, wtedy $\psi(u, v) = e^{-u^2+v^2}$, i ta funkcya $\psi(u, v)$ ma własności, które założyliśmy wyżej. Toż samo zachodzi, gdy przyjmiemy:

$$\psi(x) = e^{-(c_1 x^2 + c_2 x^4 + \dots + c_\varrho x^{2\varrho})}$$

i stałej c_ϱ nadamy wartość dodatnią, stałym zaś $c_1, \dots, c_{\varrho-1}$ dowolne wartości rzeczywiste.

Istnieją tedy w rzeczy samej, jak to powiedziano przy dowodzeniu twierdzenia A, niezliczone funkcye $\psi(x)$ tej natury, że należące do nich funkcye $F(x, k)$ są funkcyami całkowitemi przestępnemi.

Niechaj teraz $F(x, k)$ oznacza jedną określoną z pomiędzy tych funkcyj, wtedy szereg potęgowy $\mathfrak{P}(x)$, przedstawiający tę funkcyę, może być przekształcony na szereg, postępujący według funkcyj kulistych, również zbieżny dla każdej skończonej wartości na x. Ze znanego bowiem twierdzenia C. Neumanna o rozwijaniu funkcyj jednoznacznych analitycznych zmiennej zespolonej z na szeregi według funkcyj kulistych pierwszego gatunku, wynika bezpośrednio, że każda funkcya całkowita (przestępna lub wymierna) $G(x)$ daje się przedstawić przez szereg zbieżny dla każdej skończonej wartości na x, mający postać:

$$G(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu P^{(\nu)}(x) \,.\ ^{1)}$$

[1] Daje się to zresztą dowieść w sposób następujący.

Z definicyi funkcyi kulistych wypływa:

$$|P^{(n)}(x)| \leqq |x + \sqrt{x^2 - 1}|^n ,$$

gdy określimy $\sqrt{x^2-1}$ tak, aby było $|x + \sqrt{x^2-1}| \geqq 1$. Dalej jest:

$$x^n = c_{n,0} P^{(n)}(x) + c_{n,1} P^{(n-2)}(x) + \dots ,$$

a zatem gdy $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ jest szeregiem potęgowym stale zbieżnym, będzie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = \sum_n \sum_\nu A_n c_{n,\nu} P^{(n-2\nu)}(x) \,.$$

Lecz wszystkie wielkości $c_{n,\nu}$ są dodatnie, $\sum_\nu c_{n,\nu} = 1$, a więc:

$$\sum_\nu |c_{n,\nu} P^{(n-2\nu)}(x)| \leqq |x + \sqrt{x^2-1}|^n \,.$$

Spółczynniki tego szeregu są takie, że $\sum_{\nu=0}^{\infty} |C_\nu| r^\nu$ ma wartość skończoną dla każdej wartości dodatniej na r. Dalej, szereg ten jest jednostajnie zbieżny dla wszystkich wartości x, znajdujących się w przedziale skończonym [1]. Z tej to własności szeregu wynika, że:

$$\int_{-1}^{+1} G(x') P^{(\mu)}(x')\, dx' = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu \int_{-1}^{+1} P^{(\mu)}(x') P^{(\nu)}(x')\, dx' ,$$

gdzie x' oznacza zmienną rzeczywistą, stąd zaś wypływa:

$$C_\mu = \frac{2\mu+1}{2} \int_{-1}^{+1} G(x') P^{(\mu)}(x')\, dx' . \qquad (\mu = 0, 1, \dots, \infty)$$

Mamy tedy dla funkcyi $F(x, k)$:

$$C_\nu = \frac{2\nu+1}{2} \cdot \frac{1}{2k\omega} \int_{-1}^{+1} P^{(\nu)}(x')\, dx' \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, \psi\left(\frac{u-x'}{k}\right) du$$

$$= \frac{2\nu+1}{4\omega} \int_{-1}^{+1} P^{(\nu)}(x')\, dx' \int_{-\infty}^{+\infty} f(x'+ku)\, \psi(u)\, du ;$$

jeżeli położymy tu:

$$\frac{2\nu+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x'+u) P^{(\nu)}(x')\, dx' = f_\nu(u) ,$$

Wynika stąd, że $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_\nu |A_n c_{n,\nu} P^{(n-2\nu)}(x)|$ jest wielkością skończoną, a więc gdy (dla $\mu = 0, 1, 2 \dots \infty$) położymy:

$$C_\mu = \sum_{n,\nu} c_{n,\nu} A_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\mu+2\nu,\nu} A_{\mu+2\nu} ,$$

$$(n - 2\nu = \mu)$$

zachodzić będzie równanie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = C_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} C_\mu P^{(\mu)}(x) \,.$$

[1] Porówn. rozprawę H. Thomégo: „Ueber die Reihen welche nach Kugelfunctionen fortschreiten“ Borchardt's Journal t. **66**, s. 337.

otrzymamy:

$$C_\nu = \frac{1}{2\,\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du\,.$$

Funkcya $f_\nu(u)$, podobnie jak $f(u)$, jest funkcyą wciąż ciągłą o wartości bezwzględnej, najwyżej równej $(2\nu+1)\,G$, gdyż wartość bezwzględna funkcyi $P^{(\nu)}(x')$ dla wartości zmiennej x w przedziale $(-1\ldots+1)$ nie jest większa od 1. Lecz gdy a oznacza dowolną wielkość dodatnią, jest:

$$C_\nu = \frac{1}{2\,\omega}\int_{-a}^{a} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du + \frac{1}{2\,\omega}\int_{a}^{+\infty} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du + \frac{1}{2\,\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du\,,$$

$$\left|\int_{a}^{+\infty} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du\right| \leqq (2\nu+1)\,G\int_{a}^{+\infty}|\,\psi(u)\,du\,|\,,$$

$$\left|\int_{-\infty}^{-a} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du\right| \leqq (2\nu+1)\,G\int_{-\infty}^{-a}|\,\psi(u)\,du\,|\,,$$

gdy zatem uczynimy k nieskończenie małem, otrzymamy:

$$\lim_{k=0} C_\nu = f_\nu(0)\,.\,\frac{1}{2\,\omega}\int_{-a}^{+a}\psi(u)\,du + \ldots,$$

gdzie wyrazy, pominięte po stronie prawej, stają się nieskończenie małemi, gdy a staje się nieskończenie wielkiem. Ponieważ możemy przyjąć a dowolnie wielkiem, przeto:

$$\lim_{k=0} C_\nu = f_\nu(0) = \frac{2\nu+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x)\,P^{(\nu)}(x)\,dx\,.$$

Połóżmy:

$$C_\nu = \frac{1}{2\,\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du = \varphi_\nu(k)$$

i niechaj δ będzie wielkością rzeczywistą, której wartość bezwzględna jest mniejsza od k; będzie:

$$\varphi_\nu(k+\delta)-\varphi_\nu(k) = \frac{1}{2\,\omega}\int_{-a}^{+a}(f_\nu(ku+\delta u)-f_\nu(ku))\,\psi(u)\,du + \ldots,$$

gdzie znów wyrazy, pominięte po stronie prawej, otrzymują wartości dowolnie małe, gdy a jest dostatecznie wielkie. Gdy więc δ_1 jest daną dowolnie małą wielkością dodatnią, można wielkości a nadać wartość oznaczoną taką, dla której wartość bezwzględna wyrażenia

$$\varphi_\nu(k+\delta)-\varphi_\nu(k)-\frac{1}{2\,\omega}\int_{-a}^{+\infty}(f_\nu(ku+\delta u)-f_\nu(ku))\,\psi(u)\,du$$

jest mniejsza od δ_1 i to przy dowolnych wartościach na k i δ. Dalej, gdy δ_2 oznacza inną dowolnie małą wielkość dodatnią, można wyznaczyć dla δ taką granicę wyższą δ', aby wartość bezwzględna wyrażenia

$$\frac{1}{2\,\omega}\int_{-a}^{+a}(f_\nu(ku+\delta u)-f_\nu(ku))\,\psi(u)\,du$$

była mniejsza od δ_2, aby zatem było:

$$|\,\varphi_\nu(k+\delta)-\varphi_\nu(k)\,| < \delta_1+\delta_2\,,$$

gdy $|\,\delta\,| < \delta'$. A więc $\varphi_\nu(k)$ jest funkcyą ciągłą wielkości k. Tym sposobem dowiedliśmy, że

„Gdy $\psi(x)$ jest funkcyą o podanych wyżej własnościach i gdy

$$F(x,k) = \frac{1}{2\,k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du\,,$$

wtedy dla każdej wartości skończonej zespolonej x jest:

$$F(x,k) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi_\nu(k)\,P^{(\nu)}(x)\,, \tag{10}$$

gdzie położono:

$$\left\{\begin{aligned} f_\nu(u) &= \frac{2\nu+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x'+u)\,P^{(\nu)}(x')\,dx'\,,\\ \varphi_\nu(k) &= \frac{1}{2\,\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du\,, \end{aligned}\right. \tag{11}$$

i wtedy funkcye $\varphi_\nu(k)$ są funkcyami ciągłemi wielkości k".

Teraz rozumiejmy przez x znowu zmienną rzeczywistą, tak że $f(x) = \lim\limits_{k=0} F(x, k)$. Jeżeli x zmienia się w przedziale $-a \leqq x \leqq a$, gdzie a jest dowolną wielkością dodatnią, to obrawszy wielkość dodatnią dowolnie małą g', można parametrowi k nadać wartość oznaczoną k', dla której $|f(x) - F(x, k')| < g'$. Jeżeli przez R oznaczymy wartość największą, jaką może przyjąć wartość bezwzględna wielkości $x + \sqrt{x^2 - 1}$ dla rozważanych teraz wartości zmiennej x, będzie:

$$R = 1\,, \quad \text{gdy } a \leqq 1\,, \quad R = a + \sqrt{a^2 - 1}\,, \quad \text{gdy } a > 1\,,$$

a zatem, na zasadzie powyższego, będzie $|P^{(\nu)}(x)| \leqq R^\nu$.

Ponieważ zaś szereg $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |\varphi_\nu(k')|\, R^\nu$ ma wartość skończoną, to obrawszy inną wielkość dodatnią g'', będzie można zawsze wyznaczyć taką liczbę całkowitą dodatnią n, dla której wartość bezwzględna wyrażenia $\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty} \varphi_\nu(k')\, P^{(\nu)}(x)$ jest mniejsza od g. Jeżeli położymy tedy:

$$G^{(n)}(x, k) = \sum_{\nu=0}^{n} \varphi_\nu(k)\, P^{(\nu)}(x)\,, \tag{12}$$

będzie:

$$|f(x) - G^{(n)}(x, k')| < g' + g''\,.$$

Na mocy tego twierdzenie B. daje się wypowiedzieć w ten sposób:

„Niechaj a, g będą dwie wielkości dodatnie, z których pierwsza może być dowolnie wielka, druga dowolnie mała; można zawsze w określonem przez równanie (12) wyrażeniu $G^{(n)}(x, k)$, które jest funkcyą całkowitą wymierną n-tego stopnia zmiennej x, nadać parametrowi k i liczbie n takie wartości, aby dla wartości x w przedziale $(-a \ldots +a)$ wartość bezwzględna różnicy pomiędzy $f(x)$ a $G^{(n)}(x, k)$ była mniejsza od k".

Wyprowadzone poprzednio wyrażenie funkcyi $F(x, k)$ ma tę wyższość nad przedstawieniem jej w postaci szeregu potęgowego, że spółczynniki $\varphi_\nu(k)$ w pierwszem z nich mają postać, która pozwala widzieć, że są one funkcyami ciągłemi wielkości k i że dla każdego pojedyńczego spółczynnika istnieje granica, której jego wartość bezwzględna nie przekracza dla żadnej wartości na k, oraz że równocześnie dla każdej oznaczonej wartości na k jest $\lim\limits_{\nu=\infty} \varphi_\nu(k) = 0$.

Tym sposobem usunęliśmy zaznaczoną wyżej niedogodność, która ujawniła się przy definicyi funkcyi $G(x)$, zachodzącej w poprzedniem dowodzeniu twierdzenia B.

Przyjmowaliśmy dotąd o funkcyi $f(x)$, że jej wartość bezwzględna posiada granicę wyższą skończoną. Można nie czynić tego założenia, jeżeli idzie tylko o to, aby wyznaczyć taką funkcyę wymierną całkowitą $G(x)$, która w danym przedziale skończonym $(x_1 \ldots x_2)$ tak dokładnie przystaje do funkcyi $f(x)$, że wartość bezwzględna różnicy $f(x) - G(x)$ pozostaje dla każdej wartości na x mniejsza od granicy g, dowolnie wziętej. W rzeczy samej, jeżeli określimy pewną funkcyę $f_1(x)$, zakładając, że $f_1(x) = f(x_1)$ dla $x < x_1$; $f_1(x) = f(x)$ dla $x_1 \leqq x \leqq x_2$, $f_1(x) = f(x_2)$ dla $x > x_2$, to funkcya $f_1(x)$ będzie tej natury, co dotąd uważana funkcya $f(x)$, można więc będzie wyznaczyć funkcyę $G(x)$ tak, aby dla wszelkiej wartości x, zawartej w przedziale $(x_1 \ldots x_2)$, było:

$$|f_1(x) - G(x)| < g\,,$$

a więc także:

$$|f(x) - G(x)| < g\,.$$

Otóż w dowodzie twierdzenia C. uczyniliśmy o funkcyi $f(x)$ tylko to założenie, że, obrawszy dowolnie dwie wielkości dodatnie a_ν, g_ν można wyznaczyć funkcyę wymierną całkowitą $G_\nu(x)$, aby było:

$$|f(x) - G_\nu(x)| < g_\nu\,, \quad \text{gdy } -a_\nu \leqq x \leqq a_\nu\,;$$

a zatem twierdzenie C. utrzymuje się bez zmiany i wtedy, gdy o funkcyi $f(x)$ założymy tylko, że dla każdej skończonej rzeczywistej wartości na x przyjmuje wartość skończoną, zmieniającą się wraz z x sposobem ciągłym.

Należałoby jeszcze zbadać, jakim zmianom podlegają rozwinięte tu twierdzenia, gdy nie uczynimy założenia, że funkcya $f(x)$ jest wciąż ciągłą. Ale nie będę tu zajmował się tem pytaniem.

Przyjmijmy teraz, że $f(x)$ jest funkcyą periodyczną, t. j. że nie zmienia swej wartości, gdy argument jej powiększymy o wielkość dodatnią oznaczoną $2c$. Wtedy to przynależną funkcyę $F(x, k)$ można przedstawić w postaci szeregu Fourierowskiego, zbieżnego dla każdej zespolonej wartości zmiennej x i mającego spółczynniki, które są funkcyami ciągłemi wielkości k.

Z równania (5) wynika, że $F(x+2c, k) = F(x, k)$; jeżeli wprowadzimy więc nową zmienną zespoloną z, będzie:

$$\bar{F}(z) = F\left(\frac{c}{\pi i}\log z, k\right);$$

$\bar{F}(z)$ będzie funkcyą analityczną jednoznaczną zmiennej z, która w całkowitym obszarze tej zmiennej posiada tylko dwa miejsca osobliwe, mianowicie 0 i ∞, a więc daje się rozwinąć na szereg stale zbieżny postaci:

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} C_\nu z^\nu.$$

Jeżeli położymy $z = e^{\frac{\pi x}{c} i}$, będzie $\bar{F}(z) = F(x, k)$, a zatem:

$$F(x, k) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} C_\nu e^{\frac{\nu \pi x}{c} i},$$

dla każdej skończonej wartości x.

Ponieważ rozwinięcie to funkcyi $F(x, k)$ jest jednostajnie zbieżne w każdym obszarze skończonym zmiennej x, przeto, gdy przez x' oznaczymy znów zmienną rzeczywistą, przez n zaś liczbę całkowitą, będzie:

$$\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} F(x', k)\, e^{-\frac{n x' \pi}{c} i}\, dx' = \frac{1}{2c}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} C_\nu \int_{-c}^{c} e^{\frac{(\nu-n)\pi x'}{c} i}\, dx' = C_n.$$

Mamy zatem:

$$2c\, C_n = \frac{1}{2k\omega}\int_{-c}^{c} e^{-\frac{n\pi x'}{c} i}\, dx' \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, \psi\left(\frac{u-x'}{k}\right) du$$

$$= \frac{1}{2\omega}\int_{-c}^{c} e^{-\frac{n\pi x'}{c} i}\, dx' \int_{-\infty}^{+\infty} f(x'+ku)\, \psi(u)\, du$$

$$= \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u)\, e^{\frac{n k u \pi}{c} i}\, du \int_{-c}^{c} f(x'+ku)\, e^{-\frac{n\pi}{c}(x'+ku) i}\, dx'.$$

Lecz kładąc $f_1(x') = f(x')\, e^{-\frac{n\pi x'}{c} i}$ i rozumiejąc przez x_0 wielkość niezależną od x', mamy:

$$\int_{-c}^{c} f_1(x')\, dx' = \int_{-c}^{x_0-c} f_1(x')\, dx' + \int_{x_0-c}^{c} f_1(x')\, dx' = \int_{x_0-c}^{c} f_1(x')\, dx' + \int_{-c}^{x_0-c} f_1(x'+2c)\, dx'$$

$$= \int_{x_0-c}^{c} f_1(x')\, dx' + \int_{c}^{x_0+c} f_1(x')\, dx' = \int_{x_0-c}^{x_0+c} f_1(x')\, dx' = \int_{-c}^{c} f_1(x'+x_0)\, dx';$$

a zatem:

$$\int_{-c}^{c} f(x'+ku)\, e^{-\frac{n\pi}{c}(x'+ku) i}\, dx' = \int_{-c}^{c} f(x')\, e^{-\frac{n\pi x'}{c} i}\, dx';$$

jeżeli więc przez v rozumieć będziemy dowolną wielkość rzeczywistą i położymy:

$$\varphi(v) = \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u)\, e^{uvi}\, du = \frac{1}{\omega}\int_{0}^{\infty} \psi(v)\cos(vu)\, du, \tag{13}$$

będzie:

$$C_n = \varphi\left(\frac{nk\pi}{c}\right)\int_{-c}^{c} \frac{1}{2c} f(x')\, e^{-\frac{n\pi x'}{c} i}\, dx'. \tag{14}$$

Kładąc:

$$A_n = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x')\cos\left(\frac{n\pi}{c}x'\right) dx', \quad A'_n = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x')\sin\left(\frac{n\pi}{c}x'\right) dx', \tag{15}$$

otrzymamy:

$$C_n = (A_n - iA'_n)\,\varphi\left(\frac{nk\pi}{c}\right), \tag{16}$$

a więc:

$$F(x, k) = A_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{nk\pi}{c}\right).\left(A_n\cos\left(\frac{n\pi}{c}x\right) + A'_n\sin\left(\frac{n\pi}{c}x\right)\right). \tag{17}$$

Według wzoru (13) $\varphi(v)$ jest funkcyą ciągłą zmiennej v, mającą wartość 1 dla $v=0$.

Jeżeli w wyrażeniu po prawej poprzedzającego równania położymy $k=0$, sprowadzi się ono do

$$A_n + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\left(\frac{n\pi}{c}x\right) + A'_n \sin\left(\frac{n\pi}{c}x\right)\right),$$

t. j. stanie się szeregiem, na który funkcya $f(x)$ daje się rozwinąć, według twierdzenia Fouriera, w ogólności, t. j. gdy odwrócimy uwagę od funkcyj specyalnych, dotąd nie scharakteryzowanych. Lecz ponieważ, jak to najprzód wykazał na przykładzie du Bois-Reymond, istnieją w rzeczy samej funkcye $f(x)$, nie dające się przedstawić za pomocą poprzedzającego szeregu dla pewnych wartości zmiennej x, których może być nawet nieskończenie wiele w dowolnie małym przedziale $(x_1 \ldots x_2)$, jest zatem stwierdzone, że dla wyznaczenia granicy, do której dąży szereg po prawej stronie równania (17), gdy k staje się nieskończenie małem, nie można bez zastrzeżeń w każdym pojedyńczym wyrazie położyć $k=0$.

Szereg $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n z^n$ jest, jak to okazano, zbieżny dla wszelkiej wartości na z, z wyjątkiem wartości 0 i ∞. Szereg zatem $\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$ jest zbieżny dla każdej skończonej wartości na z.

Jeżeli weźmiemy np.:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{2}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi}{c}x\right),$$

będzie $A_n = \frac{1}{n^2}$, $A'_n = 0$, a zatem $C_n = \frac{1}{n^2}\varphi\left(\frac{nk\pi}{c}\right)$, skąd wynika, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi\left(\frac{nk\pi}{c}\right)z^n$ jest zbieżny dla każdej skończonej wartości na z. Jeżeli położymy więc:

$$\chi(x;v) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\varphi(nv)\,e^{nxi}, \tag{18}$$

to $\chi(x;v)$ będzie funkcyą jednoznaczną analityczną, określoną dla każdej wartości skończonej zespolonej na x i dla każdej różnej od zera wartości rzeczywistej na v; funkcyi tej, z powodu że $\varphi(-v)=\varphi(v)$, można dać jeszcze wyrażenie:

$$\chi(x;v) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\varphi(nv)\cos nx = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(nv)\cos nx, \tag{19}$$

a stąd funkcya $F(x,k)$ daje się przedstawić w postaci następującej:

$$F(x,k) = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x')\,\chi\left(\frac{x-x'}{c}\pi;\ \frac{k\pi}{c}\right)dx'. \tag{20}$$

Niechaj znów g i g' będą dwie dane wielkości dodatnie, dowolnie małe, k' niechaj będzie pewną oznaczoną wartością na k, taką, że $|f(x)-F(x,k')|$ jest dla każdej rzeczywistej wartości na x mniejsze od g'. Jeżeli wyznaczymy liczbę całkowitą dodatnią n tak, aby wartość bezwzględna wyrażenia

$$2\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\varphi\left(\frac{\nu k'\pi}{c}\right)\left(A_\nu\cos\left(\frac{\nu\pi}{c}x\right) + A'\sin\left(\frac{\nu\pi}{c}x\right)\right),$$

było dla każdej wartości rzeczywistej x mniejsze od g'', i położymy:

$$f(x) = A_0 + 2\sum_{\nu=1}^{n}\varphi\left(\frac{\nu k'\pi}{c}\right)\left(A_\nu\left(\cos\frac{\nu\pi}{c}x\right) + A'_\nu\sin\left(\frac{\nu\pi}{c}x\right)\right) + R_n, \tag{21}$$

to wartość bezwzględna wielkości R_n będzie zawsze mniejsza od $g'+g''$.

Tym sposobem dochodzimy do twierdzenia.

D. „Jeżeli $f(x)$ jest dla każdej rzeczywistej wartości na x funkcyą jednoznacznie określoną, wciąż ciągłą, rzeczywistą i peryodyczną, to obrawszy wielkość dowolnie małą dodatnią g, możemy rozmaitemi sposobami utworzyć skończony szereg Fouriera, który przystaje do funkcyi $f(x)$ tak dokładnie, iż różnica pomiędzy obiema funkcyami nie wynosi dla żadnej wartości na x więcej niż g".

Z tego twierdzenia, przy pomocy postępowania, stosowanego w dowodzeniu twierdzenia C, można, rozumiejąc przez użyte tam funkcye $G_1(x)$, $G_2(x)$, $G_3(x)\ldots$ teraz skończone szeregi Fouriera, mające ten sam peryod pierwotny, jaki ma funkcya $f(x)$, wyprowadzić twierdzenie następujące:

E. „Każda funkcya $f(x)$ natury określonej w twierdzeniu D, jeżeli $2c$ jest jej peryodem pierwotnym, daje się przedstawić, jako suma, której wszystkie wyrazy są szeregami skończonemi Fouriera o peryodzie $2c$. Szereg ten jest zbieżny bezwarunkowo i jednostajnie dla wszystkich wartości zmiennej x".

Dla wyjaśnienia tego wyniku na prostym przykładzie, weźmy $\varphi(x)=e^{-x^2}$, wtedy $2\omega=\sqrt{\pi}$,

$$\varphi(v)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2+uvi}\,du=\frac{e^{-\frac{v^2}{4}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(u-\frac{vi}{2}\right)^2}du=e^{-\frac{v^2}{4}}.$$

Wynika stąd:

$$\chi(x;v)=\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}}\cos\nu x\,; \tag{22}$$

kładąc zatem:

$$q=e^{-\frac{v^2}{4}}, \tag{23}$$

znajdziemy:

$$\chi(x;v)=\vartheta_3\left(\frac{x}{2},\,q\right), \tag{24}$$

gdzie $\vartheta_3(x,q)$ jest funkcyą Jacobi'ego:

$$1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\ldots$$

Stąd dla $q=e^{-\frac{k^2\pi^2}{4c^2}}$ mamy:

$$F(x,k)=\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x')\,\vartheta_3\left(\frac{x-x'}{2c}\pi,\,q\right)dx'. \tag{25}$$

Wzór po prawej stronie tego równania znajduje się już u Fouriera (Théorie analytique de la chaleur, Rozdział X). Aby wyznaczyć dla danej chwili czasu stan temperatury nieskończenie cienkiego jednorodnego pierścienia o długości $2c$, który nie promieniuje ciepła, gdy dany jest stan ten

w momencie dowolnym, należy wyznaczyć funkcyę φ dwóch zmiennych rzeczywistych x, t, czyniącą zadość równaniu różniczkowemu:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},$$

w którem μ jest stałą dodatnią, posiadającą jako funkcya zmiennej x peryod $2c$, i dla $t=0$ w przedziale $-c\leqq x\leqq c$ równą danej funkcyi dowolnej $F(x)$, przyczem założyć tylko należy, że funkcya $F(x)$ jest ciągła i że $F(-c)=F(c)$.

Fourier znajduje dla tak określonej funkcyi φ wyrażenie:

$$\left\{\begin{aligned}\varphi&=\frac{1}{2c}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\int_{-c}^{c}F(x')\,e^{-\frac{\nu^2\mu\pi^2}{c^2}t}\cos\left(\nu\frac{x-x'}{c}\pi\right)dx'\\&=\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c}F(x')\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}e^{-\frac{\nu^2\mu\pi^2}{c^2}t}\cos\left(\nu\frac{x-x'}{c}\pi\right)dx',\end{aligned}\right. \tag{26}$$

a więc:

$$\varphi=F(x,k), \tag{27}$$

jeżeli funkcyę $f(x)$ wyznaczymy tak, aby w przedziale $-c\leqq x\leqq c$ zlewała się z funkcyą $F(x)$ i przyjmiemy:

$$k=2\sqrt{\mu t}. \tag{28}$$

Aby dowieść, że funkcya φ dla $t=0$ w przedziale $-c\leqq x\leqq c$ jest równa $F(x)$, Fourier kładzie w pojedyńczych wyrazach swego wyrażenia $t=0$, przez co wyrażenie to przechodzi na szereg:

$$\frac{1}{2c}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\int_{-c}^{c}F(x')\cos\left(\nu\frac{x-x'}{c}\pi\right)dx'.$$

Fourier przyjmował, że w podanym przedziale szereg ten przedstawia stale funkcyę $F(x)$. Należy zaznaczyć, że mimo zarzutów, jakie uczynić można postępowaniu Fouriera, utworzone przezeń wyrażenie funkcyi φ jest bez wyjątku prawdziwe. Albowiem, ponieważ daje się ono, jak okazano, przekształcić na $F(x,2\sqrt{\mu t})$, to wynika stąd najprzód i bez pomocy twierdzenia Fouriera, że $\lim\limits_{t=0}\varphi=F(x)$. Dalej pojedyńcze wyrazy czynią zadość równaniu różniczkowemu $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \mu\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$, skąd wynika, że i φ czyni zadość temu równaniu, gdyż szereg, o którym mowa, jest funkcyą jednoznaczną analityczną wielkości x i t, gdy wielkość t poddamy warunkowi, aby jej część rzeczywista była dodatnia, i dlatego. że szereg w każdym skończonym obszarze wielkości x, t jest jednostajnie zbieżny. Nakoniec, szereg nie zmienia wartości, gdy zamiast x weźmiemy $x + 2c$, a więc funkcya, przez ten szereg przedstawiona, odpowiada zupełnie postawionym warunkom.

Jest godnem uwagi w najwyższym stopniu, że rozwiązując zagadnienie Fizyki matematycznej, w którem szukamy funkcyi, zależnej od dwóch zmiennych, mogącej ze względu na swoje znaczenie fizykalne przybierać tylko wartości rzeczywiste, a stawającej się dla oznaczonej wartości jednego z jej argumentów równą danej funkcyi d o w o l n e j drugiego argumentu, otrzymujemy na tę funkcyę wyrażenie, które jest funkcyą analityczną zmiennych i posiada znaczenie także przy zespolonych wartościach tych zmiennych.

Niechaj teraz n oznacza liczbę całkowitą dodatnią; połóżmy:

$$\chi(x;\,v)_n = \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} \cos \nu x\,,$$

wtedy według równania (22):

$$\chi(x;\,v) = \chi(x;\,v)_n + 2\sum_{\nu=n+1}^{\nu=\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} \cos \nu x\,.$$

Dla wartości rzeczywistych zmiennej x wartość bezwzględna drugiego wyrazu po stronie drugiej tego równania, który oznaczmy przez R_n, nie jest nigdy większa od

$$2\sum_{\nu=n+1}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} = 2\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2+2n\nu+\nu^2}{4} v^2}\,,$$

a więc:

$$R_n < e^{-\frac{n^2+2n}{4} v^2} \cdot 2\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}}.$$

Jeżeli w znanem równaniu:

$$1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\nu^2 \tau\pi} = \frac{1}{\sqrt{\tau}}\left(1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2\pi}{\tau}}\right),$$

gdzie τ oznacza wielkość dodatnią, położymy $\tau = \frac{v^2}{4\pi}$, otrzymamy, gdy v jest dodatnie:

$$2\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{v} - 1 + \frac{4\sqrt{\pi}}{v}\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{4\nu^2\pi^2}{v^2}};$$

a więc:

$$R_n < \frac{2\sqrt{\pi}}{v}\, e^{-\frac{(n+1)^2}{4} v^2} \cdot \left\{1 - \frac{v}{2\sqrt{\pi}} + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{4\nu^2\pi^2}{v^2}}\right\} e^{\frac{v^2}{4}}.$$

Niechaj m oznacza wielkość dodatnią; połóżmy:

(29) $$v = \frac{2\sqrt{m \log(n+1)}}{n+1};$$

będzie:

$$R_n < \frac{\sqrt{\pi}\,(n+1)^{-m+1}}{\sqrt{m \log(n+1)}} \cdot (1 + [n])\,,$$

gdzie $[n]$ oznacza wielkość, która staje się nieskończenie małą dla nieskończenie wielkiej wartości n. Gdy więc przyjmiemy, że $m \geqq 1$, to $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$.

Lecz wtedy:

$$e^{-\frac{v^2}{4}} = e^{-\frac{m \log(n+1)}{(n+1)^2}} = (n+1)^{-\frac{m}{(n+1)^2}}\,,$$

gdy więc położymy:

(30) $$(n+1)^{-\frac{m}{(n+1)^2}} = \{n\}$$

i

(31) $$\chi(x,\,n) = \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n} \{n\}^{\nu\nu} \cos \nu x = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{n} \{n\}^{\nu\nu} \cos \nu x\,,$$

będzie:

$$\chi(x;\,v)_n = \chi(x,\,n)\,.$$

Z równania:

$$F(x, k) = \frac{1}{2c} \int_{-c}^{c} f(x') \, \chi\left(\frac{x-x'}{c}\pi; \frac{k\pi}{c}\right) dx'$$

otrzymujemy wtedy:

$$F\left(x, \frac{cv}{\pi}\right) = \frac{1}{2c} \int_{-c}^{c} f(x') \, \chi\left(\frac{x-x'}{c}\pi; v\right) dx' = \frac{1}{2c} \int_{-c}^{c} f(x') \, \chi\left(\frac{x-x'}{c}\pi, n\right) dx' + R'_n,$$

gdzie R'_n oznacza wielkość, która staje się nieskończenie małą dla nieskończenie wielkiej wartości na n. Ponieważ zaś $\lim\limits_{n=\infty} v = 0$ i $\lim\limits_{v=0} F\left(x, \frac{cv}{\pi}\right) = f(x)$, wynika stąd:

$$(32) \qquad f(x) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{2c} \int_{-c}^{c} f(x') \, \chi\left(\frac{x-x'}{c}\pi, n\right) dx'.$$

Twierdzenie F o u r i e r a, wyrażone dokładnie, orzeka, że:

$$(33) \qquad f(x) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} f(x') \, \overline{\chi}\left(\frac{x-x'}{c}\pi, n\right) dx',$$

gdzie:

$$(34) \qquad \overline{\chi}(x, n) = \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n} \cos \nu x.$$

Zamiast tego równania, które nie jest prawdziwem przy wszelkich okolicznościach, występuje poprzedzające, prawdziwe bez wyjątku, w którem zamiast funkcyi $\overline{\chi}(x, n)$ napisać należy inną $\chi(x, n)$, mającą podobnie jak funkcya $\overline{\chi}(x, n)$, wyrażenie:

$$1 + 2(n, 1) \cos x + 2(n, 2) \cos 2x + \ldots + 2(n, n) \cos nx,$$

gdzie (n, ν) jest wielkością dodatnią, zależną od n i ν, a równą 1 w wyrażeniu funkcyi $\overline{\chi}(x)$. Dla każdej oznaczonej liczby ν jest $\lim\limits_{n=\infty} (n, \nu) = 1$; można więc wziąć n tak wielkie, aby pierwsze $(\nu + 1)$ wyrazów funkcyi

$\chi(x, n)$ różniły się od odpowiednich wyrazów funkcyi $\overline{\chi}(x, n)$ tak mało, jak chcemy.

Funkcye $\chi(x, n)$ tej postaci i natury, co tu uważana, dla których równanie (32) zachowuje również bezwarunkowo moc swoją, dają się wyprowadzić i z powyższej funkcyi $\chi(x; v)$, wypływającej z dowolnej funkcyi $\psi(u)$. Można zawsze tak wyznaczyć wielkość dodatnią v_n, zależną od n i stawającą się nieskończenie małą, gdy n rośnie nieograniczenie, aby różnica

$$\chi(x; v_n) - \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n} \varphi(\nu v_n) \cos \nu x,$$

dążyła do zera, gdy n rośnie bez granic; będzie wtedy

$$(35) \qquad \chi(x, n) = \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n} \varphi(\nu v_n) \cos \nu x = 1 + 2 \sum_{\nu=1}^{n} \varphi(\nu v_n) \cos \nu x$$

funkcyą, mającą podane własności.

Rozumie się, że nie znaczy to bynajmniej, iż w ten sposób otrzymać można wszystkie funkcye tej natury.

Zauważmy wreszcie, że równanie (32), jak łatwo dowieść, utrzymuje się dla wszystkich wartości na x pomiędzy $-c$ i c, jeżeli przez $f(x)$ rozumiemy funkcyę, która w przedziale od $x = -c$ do $x = c$ jest jednoznacznie określona i ciągła, bez potrzeby zakładania, że $f(c) = f(-c)$. Dla $x = \pm c$ należy wtedy po lewej stronie równania zamiast $f(\pm c)$ położyć $\frac{1}{2}(f(-c) + f(c))$.

2.

Twierdzenia poprzedzające można częściowo rozciągnąć i na funkcye większej liczby zmiennych niezależnych.

W obszarze n nieograniczenie zmieniających się wielkości rzeczywistych $x_1, \ldots, x_n$ dajmy sobie jakiekolwiek kontynuum S, n-krotnie rozciągłe i niezamknięte. Niechaj $f(x_1, \ldots, x_n)$ będzie funkcyą dowolną, wszędzie jednoznacznie określoną, rzeczywistą i ciągłą w obszarze S; przyjmijmy nadto, że wartość bezwzględna tej funkcyi posiada granicę wyższą G. Wreszcie niechaj $\psi(x)$ oznacza funkcyę, dla każdej rzeczywistej wartości na x jednoznacznie określoną, rzeczywistą i ciągłą, czyniącą zadość równaniu $\psi(-x) = \psi(x)$, dodatnią dla każdej różnej od zera wartości na x

i odpowiadającą warunkowi, że całka $\int_0^{+\infty} \psi(x)\,dx$ posiada wartość skończoną, którą oznaczmy przez ω.

Jeżeli przez $(x'_1,\dots,x'_n)$ rozumieć będziemy pewne miejsce nieoznaczone, należące do obszaru S, przez k zaś zmienną d o d a t n i ą, niezależną od $x_1,\dots,x_n$ i $x'_1,\dots,x'_n$ i położymy:

$$(1)\quad F(x_1\dots x_n;k)=\frac{1}{2^n k^n \omega^n}\int_{(S)}\dots\int f(x'_1\dots x'_n)\,\psi\left(\frac{x'_1-x_1}{k}\right)\dots\psi\left(\frac{x'_n-x_n}{k}\right)dx'_1\dots dx'_n .$$

gdzie całkowanie rozpościera się na cały obszar S, wtedy zachodzą następujące twierdzenia:

A. Dla każdego układu wartości $(x_1,\dots,x_n)$, należącego do obszaru S jest:

$$\lim_{k=0} F(x_1,\dots,x_n;k)=f(x_1,\dots,x_n).$$

B. Jest zaś:

$$\lim_{k=0} F(x_1\dots x_n;k)=0,$$

gdy miejsce $(x_1,\dots,x_n)$ nie należy ani do obszaru S, ani do jego ograniczenia.

Całka po prawej stronie równania (1) ma zawsze, przy uczynionych założeniach, wartość oznaczoną skończoną. Jest to bezpośrednio jasne, gdy obszar S leży cały w skończoności. Gdy to nie zachodzi, to niechaj S' będzie jakąś częścią obszaru S, leżącą całkowicie w skończoności; ponieważ wielkości

$$\psi\left(\frac{x'_1-x_1}{k}\right),\ \dots,\ \psi\left(\frac{x'_n-x_n}{k}\right),$$

nie zmieniają swego znaku, przeto wartość bezwzględna całki

$$F'=\frac{1}{2^n k^n \omega^n}\int_{(S')}\dots\int f(x'_1\dots x'_n)\,\psi\left(\frac{x'_1-x_1}{k}\right)\dots\psi\left(\frac{x'_n-x_n}{k}\right)dx'_1\dots dx'_n$$

jest nie większa od iloczynu wielkości G przez całkę

$$\frac{1}{2^n k^n \omega^n}\int_{(S')}\dots\int \psi\left(\frac{x'_1-x_1}{k}\right)\dots\psi\left(\frac{x'_n-x_n}{k}\right)dx'_1\dots dx'_n,$$

ta zaś jest mniejsza od

$$\frac{1}{2^n k^n \omega^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\left(\frac{x'_1-x_1}{k}\right)\dots\psi\left(\frac{x'_n-x_n}{k}\right)dx'_1\dots dx'_n$$

$$=\frac{1}{2^n\omega^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(u_1)\dots\psi(u_n)\,du_1\dots du_n=1.$$

A zatem jest:

$$|F'|<G,$$

jakimkolwiek będzie obszar S'. Wystarcza do okazania, że i w przypadku, gdy obszar S ma rozciągłość nieskończoną, wyrażenie $F(x_1,\dots,x_n;k)$ posiada wartość oznaczoną skończoną dla każdego układu skończonych wartości na $x_1,\dots,x_n$.

Pomyślmy sobie w obszarze S pewne miejsce $(x_1,\dots,x_n)$ i rozumiejmy przez δ wielkość dodatnią tak małą, aby wszystkie miejsca $(x'_1,\dots,x'_n)$, określone przez wzory

$$x'_1=x_1+u_1\delta,\dots,x'_n=x_n+u_n\delta \quad (-1\leqq u_1\leqq 1,\dots,-1\leqq u_n\leqq 1),$$

leżały w obszarze S. Ogół tych miejsc oznaczmy przez S_1, a ogół wszystkich pozostałych miejsc obszaru S przez S_2. Połóżmy:

$$F_1=\frac{1}{2^n k^n \omega^n}\int_{(S_1)}\dots\int f(x'_1,\dots,x'_n)\,\psi\left(\frac{x'_1-x_1}{k}\right)\dots\psi\left(\frac{x'_n-x_n}{k}\right)dx'_1\dots dx'_n,$$

$$F_2=\frac{1}{2^n k^n \omega^n}\int_{(S_2)}\dots\int f(x'_1,\dots,x'_n)\,\psi\left(\frac{x'_1-x_1}{k}\right)\dots\psi\left(\frac{x'_n-x_n}{k}\right)dx'_1\dots dx'_n;$$

będzie wtedy:

$$F(x_1,\dots,x_n;k)=F_1+F_2.$$

Lecz wartość bezwzględna wyrażenia F_2 nie jest większa od iloczynu wielkości G przez

$$\frac{1}{2^n k^n \omega^n}\int_{(S_2)}\dots\int \psi\left(\frac{x'_1-x_1}{k}\right)\dots\psi\left(\frac{x'_n-x_n}{k}\right)dx'_1\dots dx'_n,$$

a więc:

$$F_2=\frac{\varepsilon G}{2^n k^n \omega^n}\int_{(S_2)}\!\!\cdots\!\int\psi\left(\frac{x'_1-x_1}{k}\right)\cdots\psi\left(\frac{x'_n-x_n}{k}\right)dx'_1\dots dx'_n$$

$$=\frac{\varepsilon G}{2^n k^n \omega^n}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\cdots\!\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\left(\frac{x'_1-x_1}{k}\right)\cdots\psi\left(\frac{x'_n-x_n}{k}\right)dx'_1\dots dx'_n\right.$$

$$\left.-\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\!\!\cdots\!\int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta}\psi\left(\frac{x'_1-x_1}{k}\right)\cdots\psi\left(\frac{x'_n-x_n}{k}\right)dx'_1\dots dx'_n\right\}.$$

$$=\varepsilon G\left\{1-\frac{1}{2^n\omega^n}\int_{-\frac{\delta}{k}}^{\frac{\delta}{k}}\psi(u_1)\,du_1\dots\int_{-\frac{\delta}{k}}^{\frac{\delta}{k}}\psi(u_n)\,du_n\right\},$$

gdzie ε oznacza wielkość, której wartość bezwzględna jest mniejsza od 1.

Dalej mamy:

$$F_1=\frac{1}{2^n\omega^n}\int_{-\frac{\delta}{k}}^{\frac{\delta}{k}}\!\!\cdots\!\int_{-\frac{\delta}{k}}^{\frac{\delta}{k}}f(x_1+ku_1,\dots,x_n+ku_n)\,\psi(u_1)\dots\psi(u_n)\,du_1\dots du_n$$

$$=\frac{1}{2^n\omega^n}f(x_1+\varepsilon_1\delta,\dots,x_n+\varepsilon_n\delta)\int_{-\frac{\delta}{k}}^{\frac{\delta}{k}}\psi(u_1)\,du_1\dots\int_{-\frac{\delta}{k}}^{\frac{\delta}{k}}\psi(u_n)\,du_n$$

$$=f(x_1+\varepsilon_1\delta,\dots,x_n+\varepsilon_n\delta)\,.\,\frac{1}{\omega}\int_0^{\frac{\delta}{k}}\psi(u_1)\,du_1\dots\frac{1}{\omega}\int_0^{\frac{\delta}{k}}\psi(u_n)\,du_n,$$

gdzie $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ są wielkości, z których każda jest zawarta pomiędzy -1 i $+1$.

Jeżeli położymy:

$$\frac{1}{\omega}\int_u^{+\infty}\psi(u)\,du=\chi(u),$$

będzie według poprzedzającego:

$$F_2=\varepsilon G\left\{1-\left(1-\chi\left(\frac{\delta}{k}\right)\right)\right\},$$

$$F_1=f(x_1+\varepsilon_1\delta,\dots,x_n+\varepsilon_n\delta)\left(1-\chi\left(\frac{\delta}{k}\right)\right)^n$$

$$=f(x_1,\dots,x_n)\left(1-\chi\left(\frac{\delta}{k}\right)\right)^n+\big(f(x_1+\varepsilon_1\delta,\dots,x_n+\varepsilon_n\delta)-f(x_1,\dots,x_n)\big)\left(1-\chi\left(\frac{\delta}{k}\right)\right)^n$$

$$=f(x_1,\dots,x_n)+\left[\left(1-\chi\left(\frac{\delta}{k}\right)\right)^n-1\right]f(x_1,\dots,x_n)$$

$$+\big(f(x_1+\varepsilon_1\delta,\dots,x_n+\varepsilon_n\delta)-f(x_1,\dots,x_n)\big)\left(1-\chi\left(\frac{\delta}{k}\right)\right)^n.$$

Przyjmijmy teraz, że δ jest funkcyą ciągłą wielkości k, stawającą się nieskończenie małą wraz z k lecz tak, że i $\frac{\delta}{k}$ jest nieskończenie małą, połóżmy np. $\delta=\sqrt{k}$; wtedy:

$$\lim_{k=0}F_2=0,\quad \lim_{k=0}F_1=f(x_1,\dots,x_n).$$

Albowiem jest $\frac{d\chi(u)}{du}=-\frac{1}{\omega}\psi(u)$, a więc $\chi(u)$ maleje stale, gdy u rośnie i jest:

$$\lim_{u=+\infty}\chi(u)=0.$$

Dalej $f(x_1+\varepsilon_1\delta,\dots,x_n+\varepsilon_n\delta)-f(x_1,\dots,x_n)$ staje się nieskończenie małem wraz z δ. Otrzymujemy tedy

$$\lim_{k=0}F(x_1\dots x_n;k)=f(x_1,\dots,x_n),$$

dla każdego układu wartości $(x_1,\dots,x_n)$, należącego do obszaru S.

W ten sposób twierdzenie A jest dowiedzione i otrzymujemy równocześnie, że funkcya $F(x_1,\dots,x_n;k)$ dla wszystkich układów wartości $x_1,\dots,x_n$, należących do części zamkniętej obszaru S, leżącej całkowicie w skończoności, zbliża się do funkcyi $f(x_1,\dots,x_n)$, gdy k dąży do zera.

Aby uzasadnić twierdzenie B, przyjmijmy miejsce $(x_1,\dots,x_n)$ zewnątrz obszaru całkowania S i obierzmy około tego miejsca $(x_1,\dots,x_n)$ taki obszar S_1, aby miejsca w nim leżące $(x'_1, \dots, x'_n)$ były określone przez nierówności

$$x_\lambda - \delta \leqq x'_\lambda \leqq x_\lambda + \delta \qquad (\lambda = 1, 2 \dots n)$$

i tak mianowicie, aby wszystkie te miejsca leżały jeszcze zewnątrz dziedziny S, co można osiągnąć przez odpowiedni wybór wielkości δ.

Jest:

$$F(x_1, \dots, x_n; k) = \frac{\varepsilon G}{2^n k^n \omega^n} \int_{(S)} \dots \int \psi\left(\frac{x'_1 - x_1}{k}\right) \dots \psi\left(\frac{x'_n - x_n}{k}\right) dx'_1 \dots dx'_n .$$

Oznaczmy przez S_3 obszar, pozostający z całej dziedziny Σ zmiennych $(x'_1, \dots, x'_n)$ po wyłączeniu z niej obszaru S, wtedy S będzie częścią obszaru S_3; jeżeli ε' oznacza wielkość, której wartość bezwzględna jest mniejsza od 1 i ε, będzie:

$$F(x_1, \dots, x_n; k) = \frac{\varepsilon' G}{2^n k^n \omega^n} \int_{(S_3)} \dots \int \psi\left(\frac{x'_1 - x_1}{k}\right) \dots \psi\left(\frac{x'_n - x_n}{k}\right) dx'_1 \dots dx'_n$$

$$= \varepsilon' G \left\{ 1 - \left(1 - \chi\left(\frac{\delta}{k}\right)\right)^n \right\} .$$

Stąd, gdy przyjmiemy $\delta = \sqrt{k}$, będzie:

$$\lim_{k=0} F(x_1, \dots, x_n; k) = 0 ,$$

jeżeli $(x_1 \dots x_n)$ znajduje się poza obszarem S; równocześnie widzimy, że dążenie do wartości zero jest jednostajne.

Dla punktów $(x_1, \dots, x_n)$, znajdujących się na granicy dziedziny całkowania S, nie można z całą ogólnością przeprowadzić wyznaczenia wartości granicy wyrażenia $F(x_1, \dots, x_n; k)$ dla $k = 0$.

Jeżeli wewnątrz obszaru S, który może rozciągać się i do nieskończoności, weźmiemy kontynuum zamknięte S', leżące całkowicie w skończoności, to można okazać, że gdy układ $(x_1, \dots, x_n)$ ograniczymy do obszaru S', wtedy, po obraniu dostatecznie małej wielkości δ, można zawsze wyznaczyć funkcyę całkowitą wymierną $G(x_1, \dots, x_n)$, która wewnątrz S' różni się od funkcyi $f(x_1, \dots, x_n)$ mniej niż o δ, tak, że

$$| f(x_1, \dots, x_n) - G(x_1, \dots, x_n) | < \delta$$

dla wszystkich miejsc $(x_1, \dots, x_n)$, leżących w obszarze S'.

Podzielmy najprzód S na dwie części S_1 i S_2, z których pierwsza zawiera ogół wszystkich miejsc obszaru S, odległych np. od początku spółrzędnych (t. j. od miejsca $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$) mniej niż na R, gdy S_2 ma zawierać pozostałą część obszaru S. Przez odpowiedni wybór wielkości R, można zawsze sprawić, aby obszar S_1 zawierał w sobie całkowicie obszar S'. Odpowiednio do tego podziału, rozłóżmy funkcyę $F(k)$ na dwie części $F_1(k)$ i $F_2(k)$, z których druga dąży jednostajnie do zera, gdy k zbliża się do zera, gdyż wszystkie punkty obszaru S_2 leżą zewnątrz obszaru S'; funkcya zaś $F_1(k)$ dąży jednostajnie do $f(x_1, \dots, x_n)$ dla wszystkich punktów w S_1 a więc i w S'. Po obraniu tedy dowolnie małej wielkości δ_1, będzie można ustalić dla wielkości k granicę wyższą k' taką, aby dla wszystkich wartości na k mniejszych od k' było:

$$| F_1(k) - f(x_1, \dots, x_n) | < \delta_1 ,$$

gdy $(x_1, \dots, x_n)$ znajduje się wewnątrz obszaru S.

Jeżeli przyjmiemy, że $\psi(x)$ jest funkcyą całkowitą przestępną, np. że $\psi(x) = e^{-x^2}$, to wielkości $\psi\left(\frac{x'_\lambda - x_\lambda}{k}\right)$ dadzą się rozwinąć według całkowitych dodatnich potęg zmiennych $x_1, \dots, x_n$, gdyż tak wielkości x'_λ jak i wielkości x_λ znajdują się w obszarze skończonym, mianowicie pierwsze w S_1, drugie w S'. Iloczyn n funkcyj ψ daje się również rozwinąć na szereg potęgowy według zmiennych $x_1, \dots, x_n$; szereg ten, jako jednostajnie zbieżny, można wyraz po wyrazie całkować, otrzymujemy więc i na funkcyę $F_1(k)$ szereg potęgowy zmiennych $x_1 \dots x_n$, stale zbieżny. Obrawszy tedy wielkość dowolnie małą δ_2, można wyznaczyć taką funkcyę całkowitą wymierną $G(x_1, \dots, x_n)$, aby było:

$$| F_1(k) - G(x_1, \dots, x_n) | < \delta_2 .$$

Kombinując tę nierówność z poprzedzającą i obierając δ_1, δ_2 tak, aby ich suma równała się z danej góry wielkości δ, otrzymamy zgodnie z żądaniem:

$$| f(x_1, \dots, x_n) - G(x_1, \dots, x_n) | < \delta .$$

Zakładaliśmy dotąd o funkcyi $f(x_1, \dots, x_n)$, że jej wartość bezwzględna posiada granicę wyższą skończoną. Ale można nie czynić tego założenia, jeżeli chodzi tylko o wyznaczenie takiej funkcyi całkowitej wymiernej $G(x_1, \dots, x_n)$, która w danym obszarze skończonym S', leżącym wraz ze swem ograniczeniem wewnątrz obszaru S, przystaje do funkcyi $f(x_1, \dots, x_n)$ tak dokładnie, że wartość bezwzględna różnicy $f(x_1, \dots, x_n) - G(x_1, \dots, x_n)$ pozostaje mniejsza od dowolnej granicy δ dla każdego miejsca $(x_1, \dots, x_n)$, należącego do obszaru S'.

W samej rzeczy, można oczywiście wewnątrz S wziąć całkowicie leżący w skończoności obszar S_1, taki, że dla wszystkich jego miejsc spełnia się warunek, iż $|f(x_1,\dots,x_n)|$ jest mniejsze od granicy oznaczonej, i można obszar ten S_1 tak obrać, aby zamykał w sobie całkowicie obszar dany S'. W tym celu około każdego leżącego w skończoności punktu ograniczenia obszaru S weźmy takie otoczenie tego punktu, aby żaden z punktów otoczenia nie leżał w S', i wyłączmy wszystkie punkty tych otoczeń oraz punkty, które np. odległe są dalej niż na R od początku spółrzędnych. Przez odpowiedni wybór wielkości R i promieni rzeczonych otoczeń można zawsze sprawić, że powstające kontynuum S_1 odpowiadać będzie wszystkim podanym warunkom. Dość teraz zastosować poprzednie twierdzenie, zastępując w niem S przez S_1, aby przekonać się o prawdziwości powyższego.

Po tych przygotowaniach jesteśmy już w stanie dowieść twierdzenia głównego, t. j. że funkcya $f(x_1,\dots,x_n)$ daje się przedstawić w postaci szeregu stale zbieżnego, którego pojedyńcze wyrazy są funkcyami całkowitemi wymiernemi zmiennych $x_1,\dots,x_n$.

W tym celu pomyślmy sobie około każdego leżącego w skończoności punktu na ograniczeniu S zatoczoną kulę o promieniu ϱ_1, około zaś punktu początkowego kulę o promieniu R_1. Jeżeli wyłączymy wszystkie punkty, leżące wewnątrz pierwszych kul i zewnątrz ostatniej, to przy odpowiednim wyborze promieni ϱ_1 i R_1 pozostanie jeszcze z obszaru S kontynuum, które oznaczmy przez S_1. Niechaj dalej $\varrho_2, \varrho_3 \dots$ i $R_2, R_3 \dots$ będą wielkości, czyniące zadość warunkom:

$$\varrho_1 > \varrho_2 > \varrho_3 > ,\dots, \lim_{m=\infty} \varrho_m = 0\,,$$

$$R_1 < R_2 < R_3 < ,\dots, \lim_{m=\infty} R_m = \infty\,;$$

$S_2, S_3,\dots$ niechaj będą obszary, powstające z obszaru S zupełnie tak samo jak S_1, gdy $\varrho_1, R_1,\dots$ zastąpimy przez $\varrho_2, R_2;\ \varrho_3, R_3;\dots$ Jeżeli wtedy damy sobie punkt oznaczony $P=(x_1,\dots,x_n)$, to istnieje oczywiście, liczba r taka, że wszystkie obszary $S_{r+1}, S_{r+2}\dots$ ten punkt P zawierają.

Weźmy dalej szereg nieskończony dowolnie małych wielkości $\delta_1, \delta_2,\dots$ takich, że $\lim\limits_{m=\infty} \delta_m = 0$ i nadto $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \delta_m$ ma wartość oznaczoną skończoną.

Dla różnych obszarów S_ν można obrać odpowiednio szereg funkcyj całkowitych wymiernych $G_1(x_1,\dots,x_n)$, $G_2(x_1,\dots,x_n)$, $G_3(x_1,\dots,x_n),\dots$, aby było:

$$|f(x_1,\dots,x_n) - G_\nu(x_1,\dots,x_n)| < \delta_\nu\,, \qquad (\nu = 1, 2\dots\infty)$$

gdy miejsce $(x_1,\dots,x_n)$ należy do obszaru S_ν. Jeżeli utworzymy wtedy wielkości:

$$f_0(x_1,\dots,x_n) = G_1(x_1,\dots,x_n)\,,$$

$$f_1(x_1,\dots,x_n) = G_2(x_1,\dots,x_n) - G_1(x_1,\dots,x_n)\,,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f_m(x_1,\dots,x_n) = G_{m+1}(x_1,\dots,x_n) - G_m(x_1,\dots,x_n)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

to i funkcye $f_0, f_1,\dots$ będą całkowitemi wymiernemi i będzie:

$$\sum_{\mu=0}^{m} f_\mu(x_1,\dots,x_n) = G_{m+1}(x_1,\dots,x_n)\,.$$

Jeżeli obierzemy m dostatecznie wielkie, to obszar S_m i wszystkie następujące obszary zawierać będą punkt $(x_1,\dots,x_n)$ i dla tego:

$$|f(x_1,\dots,x_n) - G_m(x_1,\dots,x_n)| < \delta_m\,,$$

$$|f(x_1,\dots,x_n) - G_{m+1}(x_1,\dots,x_n)| < \delta_{m+1}\,,$$

a więc:

$$|G_{m+1}(x_1,\dots,x_n) - G_m(x_1,\dots,x_n)| < \delta_m + \delta_{m+1}\,,$$

lub

$$|f_m(x_1,\dots,x_n)| < \delta_m + \delta_{m+1}\,,$$

gdy m jest większe od oznaczonej liczby r. Wynika stąd:

$$\sum_{\mu=r+1}^{\infty} |f_\mu| < \sum_{\mu=r+1}^{\infty} \delta_\mu + \sum_{\mu=r+1}^{\infty} \delta_{\mu+1}\,.$$

Lecz z powodu zbieżności szeregu $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \delta_m$ wartość strony drugiej jest skończona, a więc szereg $\sum\limits_{\mu=0}^{\infty} f_\mu(x_1,\dots,x_n)$ jest bezwarunkowo zbieżny dla każdego oznaczonego punktu $(x_1,\dots,x_n)$.

Wartość tego szeregu można wyznaczyć; jest mianowicie:

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} f_\mu = \lim_{m=\infty} \sum_{\mu=0}^{m} f_\mu = \lim_{m=\infty} G_{m+1} = f(x_1, \dots, x_n),$$

ponieważ według założenia $\lim_{m=\infty} \delta_m = 0$. A zatem funkcya $f(x_1, \dots, x_n)$ jest dla każdego oznaczonego punktu $(x_1, \dots, x_n)$ przedstawiona przez szereg bezwarunkowo zbieżny funkcyj całkowitych wymiernych $f_\mu(x_1, \dots, x_n)$.

Jeżeli więc damy sobie obszar S', leżący całkowicie w skończoności i zawarty wraz z swem ograniczeniem wewnątrz obszaru S, to można obrać liczbę r tak, aby wszystkie obszary $S_{r+1}, S_{r+2}, \dots$ zamykały w sobie całkowicie obszar S': wtedy zaś powyższe nierówności stosować się będą do wszystkich układów wartości $(x_1, \dots, x_n)$, należących do układu S', a zatem szereg $\sum_{\mu=0}^{\infty} f_\mu(x_1, \dots, x_n)$ będzie jednostajnie zbieżny wewnątrz obszaru S'.

Otrzymujemy tedy twierdzenie:

K a ż d a f u n k c y a $f(x_1, \dots, x_n)$ o p o d a n y c h w y ż e j w ł a s n o ś c i a c h d a j e s i ę r o z m a i t e m i s p o s o b a m i p r z e d s t a w i ć w p o s t a c i s z e r e g u n i e s k o ń c z o n e g o, k t ó r e g o w y r a z y s ą f u n k c y a m i c a ł k o w i t e m i w y m i e r n e m i z m i e n n y c h $x_1, \dots, x_n$; s z e r e g t e n j e s t b e z w a r u n k o w o z b i e ż n y d l a k a ż d e g o s k o ń c z o n e g o u k ł a d u w a r t o ś c i $(x_1, \dots, x_n)$, l e ż ą c e g o w e w n ą t r z o b s z a r u S i j e s t j e d n o s t a j n i e z b i e ż n y d l a k a ż d e j z a m k n i ę t e j i l e ż ą c e j w s k o ń c z o n o ś c i c z ę ś c i o b s z a r u S.

Dodamy jeszcze tu kilka uwag analogicznych z uwagami, poczynionemi wyżej dla funkcyj jednej zmiennej.

Można tak urządzić, aby spółczynniki funkcyj $f(x_1, \dots, x_n)$ były funkcyami wymiernemi. Dalej, z powodu jednostajnej zbieżności szeregów, nie potrzeba, by każdy układ wartości $(x_1, \dots, x_n)$, dla którego mamy wyznaczyć odpowiednią wartość funkcyi, był dany bezwzględnie dokładnie; wystarczy, gdy będzie dany z pewnem przybliżeniem, dającem się w każdym przypadku szczególnym wyznaczyć, gdy idzie o znalezienie szukanej wartości funkcyj z żądaną dokładnością. Ponieważ przy wyznaczaniu tej wartości sumujemy tylko skończoną liczbę wyrazów, więc wartość tę otrzymamy jako liczbę wymierną.

Z teoretycznego punktu widzenia nie ma to wielkiej wagi; rzecz główna polega na zdobytym wyniku, że dla każdej funkcyi o podanych wyżej własnościach istnieje zawsze przedstawienie arytmetyczne, i to

w postaci szeregu nieskończonego, którego wyrazy są funkcyami wymiernemi argumentów. Nadmienić wszakże należy, że powyższe wywody nie wskazują jeszcze sposobów, jakiemi taki szereg nieskończony istotnie otrzymać można.

Jeżeli przyjmiemy dalej, że obszar S, dla którego funkcya $f(x_1, \dots, x_n)$ jest określona, posiada tylko jedno miejsce osobliwe, które może leżeć także w nieskończoności, wtedy zamiast zmiennych $x_1, \dots, x_n$ można wprowadzić n innych $x'_1, \dots, x'_n$, będących funkcyami wymiernemi pierwotnych, które znowu nawzajem są funkcyami wymiernemi zmiennych $x'_1, \dots, x'_n$, i tak, aby funkcya, na którą przechodzi funkcya $f(x_1, \dots, x_n)$ przez to podstawienie, zawierała j e d n o tylko miejsce osobliwe, leżące w nieskończoności.

Według poprzedzającego twierdzenia funkcya $f(x_1, \dots, x_n)$ da się tedy przekształcić na szereg, którego każdy pojedyńczy wyraz jest funkcyą c a ł k o w i t ą wymierną zmiennych $x'_1, \dots, x'_n$, a więc funkcyą wymierną zmiennych $x_1, \dots, x_n$.

Na podstawie tego twierdzenia można tworzyć łatwo szeregi bardziej złożone, nadające się do przedstawiania funkcyi rozważanej natury; ale w szczegóły tu wchodzić już nie będziemy.