

rzędzenie gazu, przyczem jednak poniżej pewnej granicy ciśnienia, jako nowe źródło błędów występuje t. zw. molekularny skok temperatury <sup>1)</sup>).

Wobec tego jest rzeczą interesującą, że względne wartości współczynnika  $\alpha$  dla różnych gazów można otrzymać mimo nieznanych prądów konwekcyjnych, korzystając albo z podobieństwa  $\left( h = 1; n = \alpha; b = \frac{\beta}{V\alpha} \right)$ , albo

z  $(n = 1; h = \frac{\beta}{\alpha}; b = \beta h^{\epsilon})$  t. j. używając dla różnych gazów naczyń o rozmiarach odpowiednich i ciśnien odpowiednich, albo też temperatur i ciśnien odpowiednich.

Także zależność współczynnika przewodnictwa od temperatury, będąca przedmiotem długoletniego sporu naukowego między Winkelmannem a Graetzem <sup>2)</sup> i dotychczas nie wyznaczona z dostateczną pewnością, może być zbadana w sposób całkiem ścisły, jeżeli się zważy, że powstanie

ruch analogiczny  $(\alpha = \beta = 1; n = h = m; b = h^{\epsilon - \frac{1}{2}})$  przy temperaturze wyższej, w naczyniu o wymiarach w tym samym stosunku większych, z ciśnieniem proporcjonalnym do potęgi  $\left( \epsilon - \frac{1}{2} \right)$ -ej, i że prąd ciepła (pro 1 cm<sup>2</sup> powierzchni) wtedy powiększony zostanie w stosunku  $h^{\epsilon}$ , z czego  $\epsilon$  wyznaczone być może.

Oczywiście wchodzi tu w grę także inne trudności doświadczalne, ale sądzę, że np. metoda galwanicznego ogrzewania drucików <sup>3)</sup> łatwo dałaby się do tych przepisów dostosować, i że wyniki w każdym razie byłyby dokładniejsze, niż przy pominięciu takich ostrożności.

Możnaby także, podobnie jak w rozdziałach poprzednich, dokonać uogólnienia empirycznie znalezionych rezultatów co do wpływu prądów konwekcyjnych, ale poprzestaniemy na tych kilku przykładach, ponieważ zakres zastosowań tu jest szerszy niż w owych przypadkach, zwłaszcza, że jeszcze nie posiadamy odpowiednich badań doświadczalnych, które by posłużyć mogły za punkt wyjścia.

<sup>1)</sup> Smoluchowski. Wied. Ann. 64, p. 101 (1898); Wien. Ber. 107, p. 304 (1898); 108, p. 5 (1899).

<sup>2)</sup> Patrz Winkelmann. Handb. d. Phys. II, 2, p. 316—319.

<sup>3)</sup> Schliermacher. Wied. Ann. 34, p. 623 (1888); patrz także Smoluchowski, Wien. Ber. 108, p. 17 (1899).

M. ERNST.

## WYZNACZENIE KSZTAŁTU POZORNEGO SKLEPIENIA NIEBIESKIEGO.

Znane zjawisko, że widzialne nad naszymi głowami sklepienie niebieskie, przedstawia się oczom naszym nie w postaci półkuli, lecz w kształcie powierzchni, której odległość od środka wzrasta w miarę, jak zbliżamy się do poziomu, było od najdawniejszych czasów przedmiotem licznych badań. Jednakowoż w przeważnej części tych badań dążono do wyjaśnienia zjawiska z punktu widzenia optyczno-fizyologicznego, a stosunkowo mało zajmowano się dokładnym wyznaczeniem kształtu geometrycznego. Tymczasem podstawą wszelkiej ścisłej teorii zjawiska musi być ów ściśle wyznaczony kształt geometryczny, i z tym kształtem zgadzać się muszą wyniki wielkościowe, wynikające z pomiarów, osiąganych w dziedzinie optyki fizyologicznej. Wprawdzie pomiary w dziedzinie wspomnianej nauki nie są tak dokładne i ścisłe, jak np. w astronomii lub fizyce, ale nie ulega wątpliwości, że postęp wiedzy przewyciężył zdoła trudności, które się tu przy wykonywaniu ścisłych pomiarów następują. Dopóki wszakże to będzie niemożliwe, dopóty żadna teoria fizyologiczna kształtu pozornego sklepienia niebieskiego nie będzie w stanie zadowolić całkowicie astronoma, choćby inne względy przemawiały za jej słusznością.

Zachodzi tu wszakże trudność wielka, że nie można wcale mówić o jakimś kształcie trwałym i ogólnym, zmienia się on prawdopodobnie w zależności od stanu atmosfery, a jest on też niewątpliwie różny dla każdego indywiduum. Jeżeli chodzi o kształt ogólny, wszystkie spostrzeżenia są zgodne, gdy wszakże chodzi o ściślejszą definicję kształtu za pomocą liczb, różnice subiektywne są bardzo znaczne.

Przy wyznaczaniu kształtu pozornego sklepienia niebieskiego postępowano zazwyczaj w ten sposób, iż wybierano gwiazdy, które w danej chwili na podstawie prostego szacowania znajdowały się na środku koła wierzchołkowego gwiazdy pomiędzy zenitem a horyzontem, a następnie obliczano lub też mierzono prawdziwą wysokość gwiazdy. Gdyby sklepienie niebieskie było półkulistym, z rachunku lub pomiaru powinnyby się otrzymać wysokości,

zbliżoną do  $45^\circ$ , a średnia z licznych takich pomiarów, w miarę wzrastania ich liczby, coraz bardziej do  $45^\circ$  zbliżać by się musiała. W rzeczywistości pomiar daje dla wysokości liczby znacznie mniejsze, zazwyczaj 22 do 30 stopni, a więc pozorne sklepienie niebieskie znacznie różni się od półkuli. Przyjmując w pierwszym przybliżeniu, że pozorne sklepienie niebieskie ma kształt odcinka kuli, wielkość tego odcinka z różnic pomiędzy szacowaniem i pomiarem łatwo obliczyć można. Z niezgodności wyników w różnych czasach otrzymany, wnioskowano też o zmiennej wielkości tego odcinka, co jednakże wobec znacznych każdorazowych różnic nie wydaje się uzasadnionem.

Nie wchodząc w bliższe wyjaśnienie przyczyn zjawiska, zdaje się nam że całą kwestję pozornego kształtu sklepienia niebieskiego sprowadzić można do kwestyi błędu osobistego szacowania wzajemnej odległości punktów na niebie, w zależności od ich wysokości. Co jest źródłem tego błędu, czy położenie głowy, czy patrzenie stereoskopowe i t. p., — wyjaśnienie tego będzie miało znaczenie teorii kształtu sklepienia niebieskiego. To zdaje się nie ulegać wątpliwości, iż wielkość tego błędu zależna jest od stopnia wywiczenia obserwacyjnego; świadczą o tem choćby własne moje wyniki, z których wpływa kształt sklepienia niebieskiego, daleko bardziej zbliżony do półkuli, aniżeli np. z badań *Smitha* lub *Reimanna*.

W tej pracy podaję wyniki przygodnych obserwacji z okresu dwuletniego, mających na celu wyznaczenie subiektywnego kształtu sklepienia niebieskiego. Obserwacje te są trzech rodzajów: 1) szacowanie środka koła wierzchołkowego pomiędzy horyzontem a zenitem, 2) szacowanie równych odległości pomiędzy gwiazdami w dowolnych częściach nieba, 3) porównywanie wysokości gwiazd z odległościami tych gwiazd od innych. W zakres drugiej, najliczniejszej grupy spostrzeżeń wchodzi też wyszukiwanie gwiazd, leżących na obwodzie jednego koła, zakreślonego z pewnej gwiazdy, jako środka.

Ze względu na znaczne błędy, popełniane przy szacowaniu, wystarcza w pierwszym przybliżeniu hipoteza, że pozorne sklepienie niebieskie jest odcinkiem kuli. Do przyjęcia innej powierzchni obrotowej a priori niema żadnej podstawy, ale z wyników spostrzeżeń może wypłynąć potrzeba przyjęcia innej powierzchni.

Niechaj przy wspomnianej hipotezie załączona figura 1 przedstawia nam sklepienie niebieskie, w którego środku  $O$  znajduje się obserwator,  $AOB$  jest koło poziomu,  $Z$  zenit,  $AZB$  półkula nieba nad poziomem obserwatora. Ponieważ sklepienie niebieskie wydaje się tem odleglejszem od obserwatora, im bliższe poziomu punkty jego bierze się pod uwagę, więc niechaj odcinek  $A_1ZB_1$  przedstawia pozorne sklepienie niebieskie. Odcinek ten należy do kuli mającej środek w punkcie  $O_1$ ;  $A_1OB_1$  jest rozszerzonym kołem poziomu.

Gwiazdę, znajdującą się w punkcie  $S$  w odległości zenitalnej  $z$ , widzimy w punkcie  $S_1$  sklepienia pozornego; odległość zenitalna punktu  $S_1$ , liczona ze środka  $O_1$ , niechaj będzie  $\zeta$ . Jeżeli znana jest wielkość odcinka  $A_1ZB_1$ , czyli kąt  $A_1O_1Z = \beta$ , to z trójkąta  $OO_1S_1$  mamy:

$$\sin(z - \zeta) = \frac{OO_1}{O_1S_1} \sin z = \cos \beta \sin z.$$

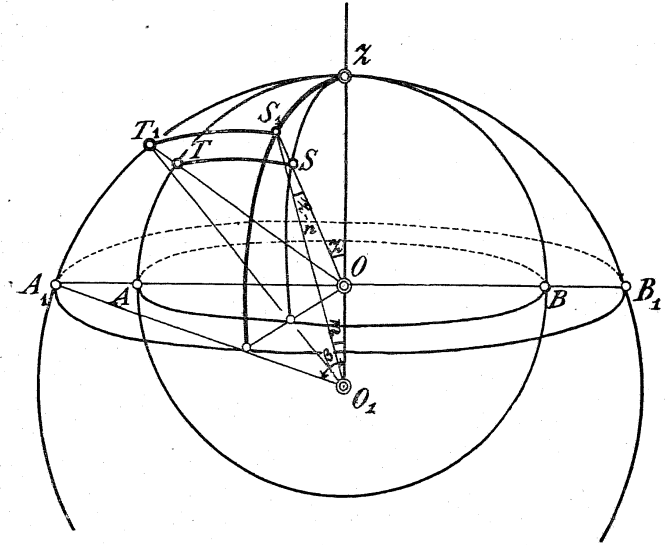


Fig. 1.

Oznaczając

$$(1) \quad \sin z \cos \beta = \sin \mu,$$

mamy:

$$(2) \quad \zeta = z - \mu,$$

skąd można  $\zeta$  obliczyć, gdy  $z$  jest znane.

Przypuśćmy, że szacowano odległość gwiazd  $S$  i  $T$ , których odległości zenitalne są  $z$  i  $z_1$ , azymuty  $\alpha$  i  $\alpha_1$ , zboczenia  $\delta$  i  $\delta_1$ , wznoszenia proste  $a$  i  $a_1$ . Odległość rzeczywista tych gwiazd jest  $d$  według wzoru:

$$\cos d = \cos z \cos z_1 + \sin z \sin z_1 \cos(\alpha - \alpha_1),$$

albo:

$$(3) \quad \cos d = \sin \delta \sin \delta_1 + \cos \delta \cos \delta_1 \cos (a - a_1).$$

Skoro z tego ostatniego wzoru obliczone zostało  $d$ , to z pierwszego otrzymujemy:

$$(4) \quad \cos (a - a_1) = \frac{\cos d - \cos z \cos z_1}{\sin z \sin z_1}.$$

Szacowanie odnosi się do pozornej odległości  $\Delta = S_1 T_1$ . Jeżeli punktem  $S_1$  i  $T_1$  odpowiadają odległości zenitalne  $\zeta$  i  $\zeta_1$  (z punktu  $O_1$ ), to, ponieważ azymuty  $a$  i  $a_1$  są te same co i dla punktów  $S$  i  $T$ , odległość  $\Delta$  wyrazi się przez wzór:

$$(5) \quad \cos \Delta = \cos \zeta \cos \zeta_1 + \sin \zeta \sin \zeta_1 \cos (a - a_1).$$

Jeżeli  $\beta$  jest znane, to z tego wzoru można obliczyć  $\Delta$ . Jednakowoż zadanie polega na wyznaczeniu  $\beta$ . W tym celu szacuje się odległość dwóch innych gwiazd, dla której w sposób podobny otrzymujemy:

$$\cos \Delta_1 = \cos \zeta_2 \cos \zeta_3 + \sin \zeta_2 \sin \zeta_3 \cos (a_2 - a_3).$$

Jeżeli według szacowania te dwie odległości są równe, to mamy:

$$\Delta = \Delta_1,$$

a więc:

$$\cos \zeta \cos \zeta_1 + \sin \zeta \sin \zeta_1 \cos (a - a_1) = \cos \zeta_2 \cos \zeta_3 + \sin \zeta_2 \sin \zeta_3 \cos (a_2 - a_3).$$

W tem równaniu wszystkie  $\zeta$  są funkcjami znanych  $z, z_1, z_2, z_3$  oraz jedynej niewiadomej  $\beta$ , którą więc w zasadzie można z tego równania obliczyć. Jednakowoż rozwiązanie bezpośrednie prowadzi do bardzo zawiłego równania 8-go stopnia, a rozwiązanie przez próbowanie połączone jest z bardzo uciążliwym rachunkiem. Gdy wszakże przybliżona wartość dla  $\beta$  jest znana, to rozwiązania równania da się sprowadzić do obliczenia poprawki, czyniącej zadość równaniu.

Przybliżoną wartość na  $\beta$  otrzymać można na podstawie szacowania środka łuku między poziomem a zenitem, w tym razie bowiem w równaniu:

$$\sin (z - \zeta) = \sin z \cos \beta,$$

mamy  $\zeta = \frac{\beta}{2}$ , a więc:

$$\sin \left( z - \frac{\beta}{2} \right) = \sin z \cos \beta.$$

Równanie to dosyć szybko rozwiązuje się przez próbowanie. Obserwacje, na podstawie których owa przybliżona wartość na  $\beta$  obliczona została, są następujące. Gwiazdy, w tem zestawieniu zamieszczone, w momentach podanych znajdowały się według szacowania na środku łuku wysokości między zenitem i poziomem. Obok przytoczona jest prawdziwa odległość zenitalna, obliczona na podstawie znanych współrzędnych gwiazdy dla chwili obserwacji.

L.	Rok	Data	Gwiazda	$z$	L.	Rok	Data	Gwiazda	$z$
1	1902	Styczeń 24,	$\beta$ Ursae min.	50° 18'	25	1902	Listopad 9,	$\gamma$ Orionis	52° 52'
2	"	" 24,	$\alpha$ Cassiopejæ	50 20	26	"	" 19,	$\alpha$ Pegasi	49 19
3	"	" 24,	$z$ Ursae maj.	52 28	27	"	" 19,	$\gamma$ Orionis	49 54
4	"	Luty 21,	$\gamma$ Orionis	54 4	28	"	" 23,	$\alpha$ Ursae maj.	53 53
5	"	Maj 31,	$\beta$ Leonis	50 32	29	"	Grudz. 30,	$\alpha$ Andromedæ	50 42
6	"	Czerwiec 1,	$\alpha$ Ophiuchi	50 52	30	"	" 30,	Ursae maj.	52 2
7	"	" 1,	$\beta$ Leonis	50 18	31	1903	Styczeń 2,	$\alpha$ Canis min.	56 38
8	"	" 1,	$\delta$ Cygni	49 10	32	"	" 28,	$\epsilon$ Orionis	51 7
9	"	" 4,	$\alpha$ Cephei	56 5	33	"	Luty 27,	$\gamma$ Orionis	51 43
10	"	" 4,	$\beta$ Leonis	50 58	34	"	Marzec 26,	$\beta$ Aurigæ	53 19
11	"	" 4,	$\alpha$ Ursae maj.	52 57	35	"	" 30,	$\alpha$ Bootis	52 34
12	"	" 24,	$\delta$ Aquilæ	52 12	36	"	Kwiecień 7,	$\alpha$ Canis min.	57 2
13	"	" 24,	$\gamma$ Bootis	53 47	37	"	" 22,	Mars	54 19
14	"	" 25,	$\beta$ Cassiopejæ	51 22	38	"	" 25,	$\alpha$ Aurigæ	56 2
15	"	" 25,	$\alpha$ Ursae maj.	52 35	39	"	Maj 3,	$\alpha$ Aurigæ	56 59
16	"	" 25,	$\beta$ Ursae min.	53 22	40	"	" 3,	$\delta$ Cygni	51 37
17	"	" 25,	$\beta$ Aurigæ	53 36	41	"	Lipiec 3,	$\alpha$ Bootis	57 28
18	"	" 27,	$\alpha$ Lyrae	53 28	42	"	Paźdz. 26,	$\alpha$ Lyrae	58 50
19	"	Listopad 1,	$\beta$ Geminorum	54 26	43	"	Listopad 10,	Jowisz	58 24
20	"	" 1,	$\alpha$ Orionis	54 58	44	"	" 10,	$\beta$ Aurigæ	57 28
21	"	" 5,	$\alpha$ Tauri	54 21	45	"	" 10,	$\alpha$ Lyrae	56 38
22	"	" 6,	$\beta$ Ursae min.	54 14	46	"	" 21,	$\beta$ Ursae maj.	55 59
23	"	" 6,	$\alpha$ Pegasi	56 41	47	"	" 29,	$\beta$ Ursae min.	55 14
24	"	" 9,	$\alpha$ Geminorum	52 12	48	"	" 29,	$\alpha$ Ursae maj.	54 4

Ze wszystkich tych spostrzeżeń wynika jako średnia wartość odległości zenitalnej gwiazdy, która według szacowania znajduje się na środku łuku wierzchołkowego pomiędzy zenitem a kołem horyzontu,

$$z = 53^{\circ}31'.$$

Dla określenia  $\beta$  mamy więc równanie:

$$\sin\left(53^{\circ}31' - \frac{\beta}{2}\right) = \sin 53^{\circ}31' \cos \beta,$$

z którego otrzymuje się  $\beta = 60^{\circ}44'$ .

Dla otrzymania przybliżonej wartości odległości  $\Delta$ , oblicza się dla pary gwiazd, których odległość była szacowana

$$\begin{aligned} \sin \mu_0 &= \sin z \cos \beta_0, & \sin \mu_0 &= \sin z' \cos \beta_0, \\ \zeta_0 &= z - \mu_0, & \zeta_0 &= z' - \mu_0' \end{aligned}$$

oraz

$$\cos \Delta_0 = \cos \zeta_0 \cos \zeta_0' + \sin \zeta_0 \sin \zeta_0' \cos (a - a').$$

Obliczając analogicznie dla drugiej pary gwiazd, których odległość według szacowania równa się odległości gwiazd poprzedniej pary, przybliżoną odległość  $\Delta'_0$ , mamy:

$$\Delta_0 + d\Delta = \Delta'_0 + d\Delta'.$$

Poprawki  $d\Delta$  i  $d\Delta'$  można przedstawić w postaci  $c d\beta$ , gdzie  $c$  jest funkcją ilości znanych, w sposób następujący. Oznaczmy  $\cos (a - a') = K$ ,  $\cos \Delta = x$ , to mamy:

$$x = \cos \zeta \cos \zeta_1 + K \sin \zeta \sin \zeta_1$$

$$dx = -\cos \zeta \sin \zeta_1 d\zeta_1 - \sin \zeta \cos \zeta_1 d\zeta + K \sin \zeta \cos \zeta_1 d\zeta_1 + K \cos \zeta \sin \zeta_1 d\zeta$$

$$\zeta = z - \mu, \quad \zeta_1 = z_1 - \mu_1,$$

$$d\zeta = -d\mu, \quad d\zeta_1 = -d\mu_1,$$

$$\sin \mu = \sin z \cos \beta,$$

$$d\mu = -\frac{\sin z \sin \beta}{\cos \mu} d\beta = -\operatorname{tg} \mu \operatorname{tg} \beta d\beta.$$

$$(7) \quad d\zeta = \operatorname{tg} \mu \operatorname{tg} \beta d\beta = C d\beta,$$

$$(8) \quad d\zeta_1 = \operatorname{tg} \mu_1 \operatorname{tg} \beta d\beta = C_1 d\beta,$$

$$\begin{aligned} dx &= C_1 (K \sin \zeta \cos \zeta_1 - \cos \zeta \sin \zeta_1) d\beta + C (K \cos \zeta \sin \zeta_1 - \sin \zeta \cos \zeta_1) d\beta \\ &= [\sin \zeta \cos \zeta_1 (C_1 K - C) + \cos \zeta \sin \zeta_1 (CK - C_1)] d\beta. \end{aligned}$$

Oznaczmy:

$$(9) \quad (C_1 K - C) \cos \zeta_1 = m \cos M,$$

$$(10) \quad (CK - C_1) \sin \zeta_1 = m \sin M,$$

$$(11) \quad dx = m \sin (M + \zeta) d\beta = A d\beta.$$

Dla otrzymania  $d\Delta$  trzeba by jeszcze  $A$  podzielić przez  $-\sin \Delta$ , jednakowoż można też stosować wprost  $x$  i  $dx$ .

W tym wypadku z dwóch par gwiazd, których wzajemne odległości według szacowania są równe, otrzymuje się poprawkę  $d\beta$  z równania:

$$(12) \quad x_0 + A d\beta = x'_0 + A' d\beta, \quad d\beta = -\frac{x'_0 - x_0}{A' - A}.$$

Do obliczenia owych przybliżonych wartości  $x_0$  użyta została wartość  $\beta_0 = 61^{\circ}11'$ , wypływająca z mniejszej liczby spostrzeżeń, aniżeli wyżej podana wartość  $\beta_0 = 60^{\circ}44'$ , która otrzymana została, gdy znaczna część przybliżonych  $\Delta$  już była obliczoną. Powtórzenie wszystkich obliczeń z nową wartością  $\beta_0$ , aczkolwiek dokładniejszą, połączone by było z dosyć znacznym nakładem pracy, a nie przedstawiałoby istotnych korzyści, ponieważ różnica owych dwóch wartości  $\beta_0$  jest niewielką i ostateczny wynik nie może ulec zmianie.

W tabelce niżej podanej zestawione są wszystkie spostrzeżenia odnoszące się do szacowania równych odległości. Obok par obserwowanych załączonych są wzajemne odległości rzeczywiste gwiazd ( $d$ ), odległość zenitalna gwiazd każdej pary ( $z$  i  $z'$ ), oraz odpowiadające im wartości  $\zeta_0$  i  $\zeta_0'$ , obliczone z wartością  $\beta_0 = 61^{\circ}11'$ ; dalej odległości na pozornym sklepieniu niebieskiem ( $\Delta_0$ ), logarytmy  $\cos (a - a') = \log K$ , a wreszcie logarytmy współczynników  $A$  według wzoru (11). Klamry oznaczają, że odległości  $\Delta_0$ , zawarte w nich, są według szacowania równe.

L. Rok	Data	G w i a z d y	$d$	$\epsilon$	$\epsilon'$	$\log K$	$\zeta_0$	$\zeta_n$	$\Delta_0$	$\log A$
1	1902	Styczeń 22, 7 <sup>h</sup> 40 <sup>m</sup>	26°31' 35"27'	62° 6'	0.0000	19°13'	80°53'	17°39'	8,9949 <sup>m</sup>	
		{ $\alpha$ Tauri— $\beta$ Orionis	23 40 62 6 78 23	9,9774	36 53	50 12	19 29	9,1496 <sup>m</sup>		
		$\beta$ Orionis— $\alpha$ Can. maj.	30 43 35 27 16 39	9,6781	19 13	5 53	16 49	9,1247 <sup>m</sup>		
		$\alpha$ Tauri— $\beta$ Persei	30 50 35 27 11 18	9,7212	19 13	5 53	16 52	8,8622 <sup>m</sup>		
		$\beta$ Persei— $\beta$ Cassiop.	32 55 11 18 31 50	8,8619	5 53	17 6	17 38	9,1750 <sup>m</sup>		
		$\beta$ Cassiop.— $\alpha$ Ursae min.	31 14 31 50 39 10	9,7702	17 6	21 27	17 39	9,1498 <sup>m</sup>		
		$\alpha$ Ursae min.— $\alpha$ Urs. maj.	28 43 39 10 54 43	9,9204	21 27	31 32	17 45	9,0891 <sup>m</sup>		
		$\alpha$ Aurigae— $\alpha$ Gemin.	29 49 35 27 45 17	9,9781	8 43	25 15	17 8	9,1012 <sup>m</sup>		
		{ $\alpha$ Ursae min.— $\beta$ Urs. min.	16 36 39 31 50 53	9,9787	22 44	30 37	11 8	8,6695 <sup>m</sup>		
		" — $\beta$ Urs. min.	18 44 39 31 32 37	9,9459	22 44	30 37	11 8	8,7151 <sup>m</sup>		
		" — $\gamma$ Urs. min.	18 55 39 31 56 24	9,9844	22 44	32 44	12 11	8,7190 <sup>m</sup>		
		" — $\delta$ Ursae min.	17 45 39 31 56 54	9,9915	22 44	33 5	11 11	8,6575 <sup>m</sup>		
		$\gamma$ Draconis	19 15 39 31 51 44	9,9657	22 44	29 29	11 49	8,7461 <sup>m</sup>		
		$\beta$ Cephei	19 15 39 31 51 44	9,9657	22 44	29 29	11 49	8,7461 <sup>m</sup>		
		{ $\alpha$ Ursae min.— $\alpha$ Urs. maj.	28 43 39 50 39 23	9,8436	21 51	21 34	16 31	9,0887 <sup>m</sup>		
		" — $\beta$ Draconis	29 5 39 50 66 23	9,9824	21 51	39 55	19 45	9,0708 <sup>m</sup>		
		" — $\gamma$ Cassiop.	31 14 39 50 52 12	9,8794	21 51	29 42	18 57	9,1746 <sup>m</sup>		
		" — $\delta$ Ursae min.	27 9 39 50 28 20	9,8473	21 51	15 7	15 21	9,0293 <sup>m</sup>		
		" — $\epsilon$ Ursae min.	28 8 39 50 64 56	9,9819	21 51	39 3	18 58	9,0444 <sup>m</sup>		
		$\beta$ Cephei	15 7 50 53 66 3	0.0000	28 53	39 55	11 32	8,5936 <sup>m</sup>		
		{ $\alpha$ Ursae min.— $\alpha$ Ursae min.	15 39 66 3 57 30	9,9851	39 55	33 31	10 57	8,5635 <sup>m</sup>		
		" — $\beta$ Ursae min.	14 3 57 30 43 33	9,9998	33 31	24 9	9 26	8,4433 <sup>m</sup>		
		$\gamma$ Draconis— $\gamma$ Ursae min.	21 25 43 33 38 45	9,9285	24 9	21 11	12 33	8,8369 <sup>m</sup>		
		$\delta$ Ursae min.— $\beta$ Cassiop.	15 17 38 45 52 2	9,9825	21 11	29 42	9 40	8,5304 <sup>m</sup>		
		$\beta$ Cassiop.— $\beta$ Cassiop.	15 30 52 2 63 16	9,9892	29 42	37 46	10 42	8,6772 <sup>m</sup>		
		" — $\zeta$ Cephei	18 5 81 2 63 4	9,9997	52 36	37 37	15 2	8,4974 <sup>m</sup>		
		{ $\alpha$ Cygni— $\alpha$ Cephei	18 37 63 4 44 34	9,9996	37 37	24 48	12 52	8,6779 <sup>m</sup>		
		$\alpha$ Cephei— $\gamma$ Cephei	18 37 63 4 44 34	9,9996	37 37	24 48	12 52	8,6779 <sup>m</sup>		

L. Rok	Data	G w i a z d y	$d$	$\epsilon$	$\epsilon'$	$\log K$	$\zeta_0$	$\zeta_n$	$\Delta_0$	$\log A$
6	1902	Styczeń 24, 10 <sup>h</sup> 16 <sup>m</sup>	28°43' 39"50'	37°28'	9,8365	21°05'	20°25'	16°29'	9,0855 <sup>m</sup>	
		{ $\alpha$ Ursae min.— $\alpha$ Urs. maj.	25 49 37 28 63 16	9,9999	20 25	37 46	17 22	9,0660 <sup>m</sup>		
		$\alpha$ maj.— $\gamma$	30 33 73 25 43 18	9,9975	45 54	24 0	21 40	9,0781 <sup>m</sup>		
		$\gamma$ Draconis— $\gamma$ Ursae maj.	35 39 43 18 67 52	9,9281	24 0	41 21	24 0	9,2589 <sup>m</sup>		
		$\alpha$ Aurigae— $\alpha$ Ursae min.	43 26 55 54 41 11	9,7466	22 22	22 41	26 40	9,4435 <sup>m</sup>		
		{ $\alpha$ Ursae min.— $\gamma$ Urs. maj.	41 25 41 11 25 30	9,3963	22 41	13 31	23 10	9,3848 <sup>m</sup>		
		$\alpha$ Ursae min.— $\alpha$ Urs. maj.	28 43 41 11 67 52	9,9881	22 41	41 21	19 52	9,0522 <sup>m</sup>		
		" — $\gamma$ Draconis	29 5 41 11 43 18	9,8587	22 41	24 0	17 3	9,1014 <sup>m</sup>		
		{ $\alpha$ Ursae min.— $\gamma$ Cassiop.	28 37 41 17 69 56	9,9997	22 47	43 1	20 17	9,0355 <sup>m</sup>		
		" — $\epsilon$ Urs. maj.	34 43 41 17 7 15	9,9665	22 47	3 46	19 20	9,2275 <sup>m</sup>		
		$\alpha$ Virginis— $\alpha$ Bootis	32 48 61 7 35 11	9,9462	37 9	19 3	21 57	9,2046 <sup>m</sup>		
		$\alpha$ Bootis— $\zeta$ Ursae maj.	37 0 35 11 8 4	9,1217 <sup>m</sup>	34 15	22 47	10 57	8,7129 <sup>m</sup>		
		$\alpha$ Geminorum— $\alpha$ Ur. min.	56 56 58 32 41 21	9,3924	34 15	22 47	35 19	9,6793 <sup>m</sup>		
		$\alpha$ Lyrae— $\alpha$ Ursae min.	51 34 60 44 41 21	9,6452	35 52	22 47	32 5	9,8554 <sup>m</sup>		
		$\gamma$ Cassiop.— $\alpha$ Ursae min.	28 37 69 56 41 21	9,9997	22 47	43 1	20 17	9,0352 <sup>m</sup>		
		$\alpha$ Ursae min.— $\beta$ Urs. maj.	34 5 41 21 16 46	9,7597	22 47	8 46	19 3	9,2145 <sup>m</sup>		
		$\alpha$ Aurigae— $\gamma$ Cassiop.	39 36 72 11 69 56	9,8717	44 52	43 1	28 47	9,3778 <sup>m</sup>		
		$\gamma$ Cassiopejae— $\alpha$ Cygni	39 32 69 56 67 5	9,8675	43 1	40 43	28 6	9,3780 <sup>m</sup>		
		$\gamma$ Cassiopejae— $\zeta$ Urs. maj.	20 54 24 22 41 21	9,7601	12 54	3 53	11 6	9,7844 <sup>m</sup>		
		" — $\alpha$ Urs. min.	18 55 24 22 41 21	9,9830	12 54	22 47	10 57	8,7129 <sup>m</sup>		
		$\beta$ Ursae min.— $\gamma$ Draconis	39 33 24 56 33 12	9,6828	15 13	17 54	16 11	9,0946 <sup>m</sup>		
		$\gamma$ Draconis— $\alpha$ Cygni	27 42 33 12 59 44	9,9913	17 54	35 8	17 53	9,0363 <sup>m</sup>		
		$\alpha$ Ursae maj.— $\alpha$ Urs. min.	28 43 30 26 41 21	9,8366	16 18	22 47	16 22	9,0795 <sup>m</sup>		
		$\alpha$ Ursae maj.— $\zeta$ Urs. maj.	25 35 41 21 66 43	9,9988	22 47	40 26	17 46	8,9516 <sup>m</sup>		
		$\alpha$ " — $\epsilon$ Cassiop.	51 34 44 44 41 21	9,2785	24 54	22 47	39 52	9,5799 <sup>m</sup>		
		{ $\alpha$ Lyrae— $\alpha$ Ursae min.	43 26 41 21 77 44	9,9424	22 47	49 38	31 10	9,3908 <sup>m</sup>		
		$\alpha$ Ursae min.— $\alpha$ Aurigae	32 48 53 2 71 5	9,9316	30 23	43 57	22 56	9,1787 <sup>m</sup>		
		$\alpha$ Bootis— $\alpha$ Virginis	33 25 71 5 48 8	9,9432	43 57	27 6	24 5	9,1811 <sup>m</sup>		
		$\alpha$ Virginis— $\beta$ Leonis	35 18 48 8 53 2	9,8434	47 6	30 23	21 47	9,3762 <sup>m</sup>		
		$\alpha$ Bootis— $\beta$ Leonis	27 12 41 21 51 14	9,9100	22 47	29 9	16 34	9,0499 <sup>m</sup>		
		{ $\alpha$ Ursae min.— $\alpha$ Cephei	23 50 51 14 57 53	9,9450	29 9	33 47	15 17	8,9437 <sup>m</sup>		
		$\alpha$ Cephei— $\gamma$ Cygni	42 7 22 23 49 47	9,6942	11 48	28 11	24 25	9,3724 <sup>m</sup>		
		$\epsilon$ Bootis— $\alpha$ Ophiuchi	33 37 49 47 65 42	9,9111	28 11	39 38	22 25	9,2272 <sup>m</sup>		
		{ $\alpha$ Ophiuchi— $\alpha$ Aquilae	33 37 49 47 65 42	9,9111	28 11	39 38	22 25	9,2272 <sup>m</sup>		



L. Rok	Data	Gwiazdy	d	$\rho$	$\rho'$	lg K	$\zeta_0$	$\zeta_0$	$\Delta_0$	lg A
22	1902	Czerwiec 1, 9 <sup>h</sup> 40 <sup>m</sup>	$\gamma$ Cassiop.— $\alpha$ Ursaes min. $\alpha$ Ursaes min.— $\epsilon$ Ursaes maj. $\alpha$ Persei— $\gamma$ Cassiop.	28 <sup>37</sup> 66 <sup>3</sup> 41 <sup>02</sup> 1' 34 43 41 21 14 35 23 40 30 64 41	9,9775 9,7581 9,9786	39 <sup>57</sup> 22 <sup>47</sup> 19 <sup>37</sup>	22 <sup>47</sup> 7 37 19 23	35 <sup>05</sup> 22 47 7 37 19 23	9,0598 <sup>m</sup> 9,2303 <sup>m</sup> 8,8301 <sup>m</sup>	
23	"	Lipiec 25, 9 <sup>h</sup> 30 <sup>m</sup>	$\gamma$ Cassiop.— $\alpha$ Cephei $\alpha$ Aurigae— $\alpha$ Persei $\alpha$ Persei— $\delta$ Cassiop.	25 15 64 41 44 27 17 31 82 23 80 30 19 38 80 30 66 39	9,9761 9,9791 9,9859	38 51 53 50 52 7	24 43 17 14 10	38 51 24 43 17 14 10	8,9587 <sup>m</sup> 8,6510 <sup>m</sup> 8,6729 <sup>m</sup>	
24	"	" 25, 9 <sup>h</sup> 30 <sup>m</sup>	$\alpha$ Ursaes min.— $\zeta$ Ursaes maj. $\zeta$ Ursaes maj.— $\alpha$ Bootis	35 42 41 8 22 41 37 0 22 41 35 41	9,6643 9,9389	22 39 11 58 20	40 23 15 42	22 39 11 58 20	9,2583 <sup>m</sup> 9,2850 <sup>m</sup>	
26	"	" 25, 9 <sup>h</sup> 35 <sup>m</sup>	$\epsilon$ Cygni— $\alpha$ Cephei $\alpha$ Cephei— $\epsilon$ Cassiop.	29 4 53 6 44 27 29 39 44 27 64 30	9,9906 9,9488	30 26 24 43 17 52	19 44 9 1077 <sup>m</sup>	30 26 24 43 17 52	9,1077 <sup>m</sup> 9,4633 <sup>m</sup>	
27	"	" 25, 9 <sup>h</sup> 50 <sup>m</sup>	$\alpha$ Cygni— $\alpha$ Ursaes min. $\alpha$ Ursaes min.— $\gamma$ Ursaes maj. $\alpha$ Persei— $\alpha$ Ursaes min.	44 41 45 9 41 8 41 25 41 8 22 3 39 25 28 40 39 0	9,5859 9,3226 9,4777	25 10 22 39 26 4 22 39 11 37 23 3 15 18 21 20 21 54	19 44 9 1077 <sup>m</sup> 9,3823 <sup>m</sup> 9,3445 <sup>m</sup>	25 10 22 39 26 4 22 39 11 37 23 3 15 18 21 20 21 54	9,4633 <sup>m</sup> 9,3823 <sup>m</sup> 9,3445 <sup>m</sup>	
28	"	Paździ. 25, 10 <sup>h</sup> 0 <sup>m</sup>	$\alpha$ Ursaes min.— $\alpha$ Ursaes min. $\alpha$ Cassiop.— $\alpha$ Ursaes min. $\alpha$ Aurigae— $\alpha$ Geminorum	34 43 39 0 73 24 32 48 6 59 39 0 28 43 39 0 66 51	9,9977 9,9557 9,9945	15 18 21 20 21 54 3 37 21 20 19 17	9,3445 <sup>m</sup> 9,1938 <sup>m</sup> 9,1781 <sup>m</sup>	15 18 21 20 21 54 3 37 21 20 19 17	9,3445 <sup>m</sup> 9,1938 <sup>m</sup> 9,1781 <sup>m</sup>	
29	"	" 25, 10 <sup>h</sup> 0 <sup>m</sup>	$\alpha$ Ursaes min.— $\alpha$ Ursaes maj. $\alpha$ Aurigae— $\alpha$ Geminorum — $\delta$ Cassiop.	29 49 47 53 76 9 26 31 58 33 83 58 22 36 53 36 76 9	9,9920 9,9957 9,9998	21 20 40 32 19 42 26 56 48 14 22 16 30 46 48 14 17 30	9,0520 <sup>m</sup> 9,2650 <sup>m</sup> 8,7770 <sup>m</sup>	21 20 40 32 19 42 26 56 48 14 22 16 30 46 48 14 17 30	9,0520 <sup>m</sup> 9,2650 <sup>m</sup> 8,7770 <sup>m</sup>	
30	"	" 25, 10 <sup>h</sup> 0 <sup>m</sup>	$\beta$ Aurigae— $\alpha$ Geminorum — $\alpha$ Persei $\alpha$ Aurigae— $\alpha$ Tauri $\beta$ Orionis— $\alpha$ Canis maj.	26 24 53 36 28 40 30 43 47 53 58 33 26 31 58 33 83 58 38 9 65 42 33 5	9,9873 9,9961 9,9957 9,9496	30 46 48 14 16 18 26 56 34 16 19 35 34 16 55 19 21 47 17 50 24 54 9 3055 <sup>m</sup>	8,0002 <sup>m</sup> 9,1595 <sup>m</sup> 8,8379 <sup>m</sup> 9,3055 <sup>m</sup>	30 46 48 14 16 18 26 56 34 16 19 35 34 16 55 19 21 47 17 50 24 54 9 3055 <sup>m</sup>	8,0002 <sup>m</sup> 9,1595 <sup>m</sup> 8,8379 <sup>m</sup> 9,3055 <sup>m</sup>	
33	"	" 27, 9 <sup>h</sup> 35 <sup>m</sup>	$\alpha$ Cygni— $\alpha$ Ursaes min. $\gamma$ Tauri— $\beta$ Aurigae $\beta$ Aurigae— $\beta$ Geminorum	46 15 33 5 52 12 33 56 40 56 48 16 26 28 48 16 75 10	9,6154 9,9966 9,9958	17 50 29 49 27 17 97 9 47 23 20 16 38 58 47 51 25 2	9,4875 <sup>m</sup> 8,9521 <sup>m</sup> 9,2338 <sup>m</sup>	17 50 29 49 27 17 97 9 47 23 20 16 38 58 47 51 25 2	9,4875 <sup>m</sup> 8,9521 <sup>m</sup> 9,2338 <sup>m</sup>	
34	"	Listopad 5, 10 <sup>h</sup> 0 <sup>m</sup>	$\alpha$ Lyrae— $\alpha$ Aquilae $\alpha$ Aquilae—Jowisz	34 9 64 50 75 42 31 16 75 42 87 50	9,9158 9,9411	47 51 59 2 25 47	9,1004 <sup>m</sup>	47 51 59 2 25 47	9,1004 <sup>m</sup>	

36	1902	Listopad 6, 10 <sup>h</sup> 0 <sup>m</sup>	$\alpha$ Aquilae— $\alpha$ Lyrae $\alpha$ Lyrae— $\beta$ Ursaes min. $\alpha$ Cygni— $\alpha$ Pegasi	34 <sup>0</sup> 75 <sup>42</sup> 64 <sup>50</sup> 10' 43 58 64 50 54 14 42 33 43 29 42 47	9,9158 9,8072 9,6399	47 <sup>05</sup> 38 <sup>05</sup> 35 <sup>0</sup> 29' 38 58 31 13 29 4 24 7 23 41 24 51	35 <sup>0</sup> 29' 9,2388 <sup>m</sup> 9,4633 <sup>m</sup>	47 <sup>05</sup> 38 <sup>05</sup> 35 <sup>0</sup> 29' 38 58 31 13 29 4 24 7 23 41 24 51	9,2388 <sup>m</sup> 9,4633 <sup>m</sup> 9,4232 <sup>m</sup>
37	"	" 6, 10 <sup>h</sup> 0 <sup>m</sup>	$\alpha$ Pegasi— $\beta$ Ceti $\beta$ Orionis— $\alpha$ Canis maj. $\alpha$ Canis maj.— $\alpha$ Can. min.	41 11 42 47 68 31 23 40 66 41 84 55 25 38 84 55 75 13	9,8840 9,9836 9,9603	23 41 41 53 27 38 40 21 56 13 56 13 47 26 20 48	9,3843 <sup>m</sup> 8,7846 <sup>m</sup> 8,9463 <sup>m</sup>	23 41 41 53 27 38 40 21 56 13 56 13 47 26 20 48	9,3843 <sup>m</sup> 8,7846 <sup>m</sup> 8,9463 <sup>m</sup>
38	"	" 6, 11 <sup>h</sup> 40 <sup>m</sup>	$\alpha$ Canis min.— $\alpha$ Geminorum. $\alpha$ Cassiop.— $\alpha$ Ursaes min. $\alpha$ Ursaes min.— $\alpha$ Ursaes maj.	26 39 75 13 54 54 22 48 8 16 38 57 28 43 38 57 64 44	9,9751 9,8927 9,9823	47 26 31 40 19 49 48 21 19 18 8 21 19 38 53	9,9747 <sup>m</sup> 8,7190 <sup>m</sup> 9,0601 <sup>m</sup>	47 26 31 40 19 49 48 21 19 18 8 21 19 38 53	9,9747 <sup>m</sup> 8,7190 <sup>m</sup> 9,0601 <sup>m</sup>
39	"	" 9, 10 <sup>h</sup> 0 <sup>m</sup>	$\alpha$ Ursaes min.— $\alpha$ Ursaes min. $\alpha$ Ursaes min.— $\alpha$ Ursaes min. $\alpha$ Ursaes maj.— $\alpha$ Ursa. min.	44 41 45 9 38 57 43 26 38 57 39 3 28 43 63 38 41 23	9,5619 9,4897 9,9628	25 10 21 19 22 24 25 10 21 19 22 24 38 5 23 49 19 5	9,4611 <sup>m</sup> 9,0741 <sup>m</sup> 8,9358 <sup>m</sup>	25 10 21 19 22 24 25 10 21 19 22 24 38 5 23 49 19 5	9,4611 <sup>m</sup> 9,0741 <sup>m</sup> 8,9358 <sup>m</sup>
40	"	" 9, 10 <sup>h</sup> 0 <sup>m</sup>	$\alpha$ Ursaes min.— $\alpha$ Ursaes min. $\alpha$ Ursaes min.— $\alpha$ Ursaes min. $\alpha$ Ursaes maj.— $\alpha$ Tauri	24 49 80 21 63 33 30 33 63 33 70 26 29 5 41 23 63 33	9,9749 9,9263 9,7893	51 59 38 0 19 2 38 0 43 25 21 39	8,9358 <sup>m</sup> 8,8006 <sup>m</sup> 9,0953 <sup>m</sup>	51 59 38 0 19 2 38 0 43 25 21 39	8,9358 <sup>m</sup> 8,8006 <sup>m</sup> 9,0953 <sup>m</sup>
41	"	" 19, 9 <sup>h</sup> 43 <sup>m</sup>	$\zeta$ Draconis— $\alpha$ Lyrae $\alpha$ Lyrae— $\epsilon$ Ursaes maj. — $\alpha$ Geminorum.	29 44 57 58 70 26 31 0 57 58 73 3 26 31 47 43 72 26	9,93 8 9,9377 9,9886	33 51 43 25 20 52 33 51 45 35 22 12 26 49 44 56 18	9,1222 <sup>m</sup> 9,1474 <sup>m</sup> 8,9074 <sup>m</sup>	33 51 43 25 20 52 33 51 45 35 22 12 26 49 44 56 18	9,1222 <sup>m</sup> 9,1474 <sup>m</sup> 8,9074 <sup>m</sup>
42	"	" 19, 9 <sup>h</sup> 43 <sup>m</sup>	$\alpha$ Tauri— $\beta$ Orionis — $\alpha$ Aurigae $\alpha$ Aurigae— $\alpha$ Tauri — $\alpha$ Geminorum.	30 43 47 43 34 33 46 5 79 5 35 56 49 57 79 5 47 32	9,8624 9,9720 9,8523	26 49 18 41 18 1 50 50 19 30 33 4 50 50 26 42 35 41	9,1429 <sup>m</sup> 9,4285 <sup>m</sup> 9,5180 <sup>m</sup>	26 49 18 41 18 1 50 50 19 30 33 4 50 50 26 42 35 41	9,1429 <sup>m</sup> 9,4285 <sup>m</sup> 9,5180 <sup>m</sup>
43	"	" 19, 10 <sup>h</sup> 0 <sup>m</sup>	$\alpha$ Ursaes maj.— $\alpha$ Ursa. min. $\alpha$ Ursaes min.— $\beta$ Cassiop. $\beta$ Cassiopeiae— $\alpha$ Persei	28 43 61 44 38 58 31 14 38 58 19 35 29 5 19 35 11 18	9,9631 9,7642 9,8816	36 36 21 19 18 45 21 19 17 19 12 14 10 17 5 53 15	9,0749 <sup>m</sup> 9,1431 <sup>m</sup> 9,0681 <sup>m</sup>	36 36 21 19 18 45 21 19 17 19 12 14 10 17 5 53 15	9,0749 <sup>m</sup> 9,1431 <sup>m</sup> 9,0681 <sup>m</sup>
44	"	" 23, 10 <sup>h</sup> 0 <sup>m</sup>	$\alpha$ Persei— $\beta$ Aurigae $\beta$ Cassiop.— $\alpha$ Ursaes min. $\alpha$ Ursaes min.— $\alpha$ Ursaes maj.	30 29 11 18 41 47 31 14 35 14 39 15 28 43 39 15 52 2	9,9998 9,87 48 9,9048	5 53 23 3 17 9 19 5 30 17 45 21 30 29 42 17	9,1179 <sup>m</sup> 9,1544 <sup>m</sup> 9,0901 <sup>m</sup>	5 53 23 3 17 9 19 5 30 17 45 21 30 29 42 17	9,1179 <sup>m</sup> 9,1544 <sup>m</sup> 9,0901 <sup>m</sup>
47	"	Grudzień 30, 9 <sup>h</sup> 32 <sup>m</sup>	$\beta$ Persei— $\beta$ Cassiopeiae $\alpha$ Andromedae— $\beta$ Cassiop. $\alpha$ Ursaes maj.— $\gamma$ Ursa. min.	32 55 14 21 35 14 50 12 35 14 25 45 52 2 57 23	9,5287 9,8988 9,9835	7 29 19 5 18 28 28 28 19 5 18 28 29 42 33 36 10 33	9,1983 <sup>m</sup> 9,0866 <sup>m</sup> 9,0122 <sup>m</sup>	7 29 19 5 18 28 28 28 19 5 18 28 29 42 33 36 10 33	9,1983 <sup>m</sup> 9,0866 <sup>m</sup> 9,0122 <sup>m</sup>
48	"	" 30, 9 <sup>h</sup> 40 <sup>m</sup>	— $\gamma$ Ursaes maj.	25 49 52 2 57 23	9,9898	29 42 47 35 19 24	8,9215 <sup>m</sup>	29 42 47 35 19 24	8,9215 <sup>m</sup>

L. Rok	Data	G w i a z d y	$\delta$	$\varepsilon$	$\varepsilon'$	$\log X$	$\zeta_0$	$\zeta^0$	$\Delta_0$	$\log A$
49 1903	Luty 27, 8 <sup>h</sup> 42 <sup>m</sup>	{ $\alpha$ Bootis—punkt A * } { Punkt A— $\beta$ Ursae min.	24 <sup>o</sup> 20'	84 <sup>o</sup> 50'	61 <sup>o</sup> 23'	9,9970	56 <sup>o</sup> 9'	30 <sup>o</sup> 21'	20 <sup>o</sup> 40'	8,7532 <sup>m</sup>
50 "	" 27, 8 <sup>h</sup> 42 <sup>m</sup>	{ $\alpha$ Bootis—punkt B ** } { Punkt B— $\alpha$ Ursae min.	28 24 9	61 23 48	36 36	9,8866	36 21	27 24	22 10	9,2550 <sup>m</sup>
51 "	Marzec 2, 9 <sup>h</sup> 0 <sup>m</sup>	{ $\alpha$ Bootis— $\eta$ Ursae maj. } { $\eta$ Ursae maj.— $\alpha$ Urs. min.	43 11 64	35 40 24	9,8371	38 47	22 12	27 49	9,4306 <sup>m</sup>	8,9729 <sup>m</sup>
52 "	" 26, 11 <sup>h</sup> 16 <sup>m</sup>	{ $\alpha$ Lyrae— $\alpha$ Coronae } { $\alpha$ Coronae— $\zeta$ Ursae maj.	30 34 80	21 55 11	9,9757	51 59	31 52	23 36	9,4071 <sup>m</sup>	9,0521 <sup>m</sup>
53 "	" 26, 11 <sup>h</sup> 16 <sup>m</sup>	{ $\alpha$ Virgins— $\alpha$ Bootis } { $\alpha$ Bootis— $\zeta$ Ursae maj.	41 25 55	11 40 15	9,7726	31 52	23 6	25 12	9,3618 <sup>m</sup>	9,3618 <sup>m</sup>
54 "	" 26, 11 <sup>h</sup> 28 <sup>m</sup>	{ $\beta$ Aurigae— $\beta$ Geminorum } { $\beta$ Geminorum— $\alpha$ Leonis	39 43 70	26 50 56	17 36	9,9049	28 57	9 13	22 10	9,3068 <sup>m</sup>
55 "	" 27, 10 <sup>h</sup> 8 <sup>m</sup>	{ $\alpha$ Canis min.— $\alpha$ Orionis } { $\alpha$ Canis maj.— $\alpha$ Leonis	32 48 65	1 44 1	9,9307	39 7	24 27	21 44	9,1943 <sup>m</sup>	9,2864 <sup>m</sup>
56 "	" 30, 9 <sup>h</sup> 25 <sup>m</sup>	{ $\alpha$ Geminorum— $\alpha$ Leonis } { $\alpha$ Leonis—Mars	37 0 44	1 17 36	9,7311	24 27	29 50	18 45	9,1544 <sup>m</sup>	9,8211 <sup>m</sup>
57 "	" 30, 10 <sup>h</sup> 0 <sup>m</sup>	{ $\alpha$ Aurigae— $\beta$ Geminorum } { $\beta$ Geminorum— $\alpha$ Leonis	30 42 44	1 52 14	9,8827	24 27	29 50	18 45	9,1544 <sup>m</sup>	9,8211 <sup>m</sup>
58 "	" 30, 10 <sup>h</sup> 0 <sup>m</sup>	{ $\alpha$ Canis min.— $\alpha$ Leonis } { $\alpha$ Leonis—Mars	26 28 56	31 50 34	9,9272	32 49	28 43	16 42	9,0338 <sup>m</sup>	9,3705 <sup>m</sup>
59 "	Kwiecień 7, 9 <sup>h</sup> 25 <sup>m</sup>	{ $\alpha$ Canis maj.— $\alpha$ Lyrae } { $\alpha$ Lyrae— $\alpha$ Coronae	37 4 50	34 42 28	9,8005	28 43	23 28	23 17	9,3199 <sup>m</sup>	9,3705 <sup>m</sup>
60 "	Maj 3, 11 <sup>h</sup> 40 <sup>m</sup>	{ $\alpha$ Virgins— $\alpha$ Bootis } { $\alpha$ Bootis— $\varepsilon$ Ursae maj.	25 54 57	2 70 44	9,9583	33 10	43 40	1 24	8,3940 <sup>m</sup>	8,8341 <sup>m</sup>

61 1903	" 6, 9 <sup>h</sup> 0 <sup>m</sup>	{ $\alpha$ Virgins— $\alpha$ Bootis } { $\alpha$ Bootis— $\varepsilon$ Ursae maj.	32 <sup>o</sup> 48'	63 <sup>o</sup> 25'	40 <sup>o</sup> 43'	9,9342	37 <sup>o</sup> 53'	22 <sup>o</sup> 23'	21 <sup>o</sup> 26'	9,2480 <sup>m</sup>
62 "	" 6, 9 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup>	{ $\beta$ Aurigae— $\beta$ Geminorum } { $\beta$ Aurigae— $\beta$ Geminorum	39 46 40	43 10 51	9,2964	22 23	5 39	21 56	9,3424 <sup>m</sup>	9,0081 <sup>m</sup>
63 "	" 6, 9 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup>	{ $\alpha$ Persoi— $\alpha$ Aurigae } { $\alpha$ Aurigae—Wenus	26 24 75	2 63 28	9,9556	47 17	37 55	19 28	9,0081 <sup>m</sup>	9,0421 <sup>m</sup>
64 "	Paździ. 26, 10 <sup>h</sup> 0 <sup>m</sup>	{ $\alpha$ Piscis austr.—Jowisz } { Jowisz $\alpha$ Pegasi	36 28 63	28 59 25	9,9381	37 55	34 54	17 51	9,0421 <sup>m</sup>	8,5494 <sup>m</sup>
65 "	Listopad 10, 8 <sup>h</sup> 40 <sup>m</sup>	{ $\alpha$ Persoi— $\alpha$ Ursae min. } { $\alpha$ Ursae min.— $\varepsilon$ Urs. maj.	17 31 75	2 67 44	9,9810	47 17	41 14	13 9	8,6447 <sup>m</sup>	8,6997 <sup>m</sup>

\*) Spółrzedne punktu A:  $\alpha = 13^{\circ} 20'$ ,  $\delta = 41^{\circ} 0'$ .\*\*) Spółrzedne punktu B:  $\alpha = 14^{\circ} 22'$ ,  $\delta = 48^{\circ} 0'$ .

Z zestawienia powyższego widać przedewszystkiem, że prawdziwe odległości ( $d$ ) gwiazd, których odległości pozorne wydawały się równymi, w ogólności bardziej się różnią od siebie, aniżeli odległości  $\Delta_0$ , obliczone na podstawie przyjętego  $\beta_0$ . Średnia wartość różnic pomiędzy odpowiednimi  $d$  wynosi  $3^{\circ}30'$ , średnia zaś wartość różnic odpowiednich  $\Delta_0$  wynosi tylko  $1^{\circ}41'$ , a więc zaledwie 0.48 poprzedniej. Wynika stąd, że przyjęty kształt pozornego sklepienia niebieskiego znacznie lepiej zgadza się z obserwacją wrażeniową bez przyrządów pomiarowych, aniżeli kształt półkulisty. Różnice między odpowiednimi  $\Delta_0$  są jednakowoż dosyć znaczne, a pochodzą one z dwóch źródeł. Po pierwsze, przyjęta wartość  $\beta_0$  nie jest dokładną wartością kąta, określającego wielkość odcinka, w postaci którego widziane jest sklepienie niebieskie; po drugie, tkwią w tych różnicach błędy szacowania. O stosunkowej wielkości błędów, pochodzących z tych dwóch różnych źródeł, nie mamy żadnego pojęcia. Przyjmując, że szacowania są bezbłędne, a całe różnice są skutkiem niedokładnego  $\beta_0$ , mielibyśmy, jak wyżej, do określenia  $\beta$  dla każdej pary równanie

$$x_0 + A d\beta = x'_0 + A' d\beta.$$

Przy większej liczbie par gwiazd mielibyśmy odpowiednią liczbę takich równań, które trzeba by rozwiązać metodą najmniejszych kwadratów. Z każdej pary lub grupy szacowań wypadła by inna wartość na  $d\beta$ , a średnia wartość, otrzymana ze wszystkich spostrzeżeń  $d\beta$  z uwzględnieniem wagi, byłaby najprawdopodobniejszą wartością poszukiwanej poprawki. Odpowiadałoby to oczywiście hipotezie, że pewna wielkość błędu szacowania dla wszystkich spostrzeżeń jest jednakowo prawdopodobna, co znaczy, że naprzykład wielkość błędu jest niezależna od odległości gwiazd.

Taka hipoteza jednakowoż już z góry nie wydaje się prawdopodobną, a z drugiej strony, postępowanie rachunkowe według równania powyższego nie może dać wyników dokładnych. Widzimy mianowicie, że spółczynniki  $A$  posiadają wszędzie małą wartość i wszędzie jednakowy znak. Różnica  $A' - A$ , która przy wyznaczeniu  $d\beta$  występuje w mianowniku, jest więc bardzo mała, co pociąga za sobą wielkie wartości dla  $d\beta$ , wielkości, które, gdyby były tego samego rzędu co rzeczywista poprawka  $d\beta$ , niezależna od błędów szacowania, nie pozwoliłyby na stosowanie wzorów różniczkowych. Jednakowoż owe  $d\beta$ , chociaż posiadają zawsze znaczną wartość bezwzględną, różnią się znakami, co świadczy, że przeważną część różnic pomiędzy odpowiednimi  $\Delta_0$  przypisać należy błędowi szacowania; różnice skutkiem niedokładnego  $\beta$  są niewielkie, gdyż nawet gdyby rzeczywiste  $\beta$  od przyjętego  $\beta_0$  różniło się znacznie, wpływ tej różnicy na  $\Delta$  wskutek małych spółczynników  $A$ , byłby stosunkowo niewielki.

Stosowanie więc równania (12) wtedy tylko byłoby uprawnione i prowadziło do celu, gdyby można było z wartości  $x$  usunąć błąd szacowania. Jednakże o wielkości tego błędu nic nie wiadomo, wyznaczenie jego wymaga przedewszystkiem dokładnej znajomości wielkości  $\beta$ .

Chcąc więc w tych warunkach znaleźć najprawdopodobniejszą wartość  $d\beta$ , wypływającą ze wszystkich spostrzeżeń, należy rozwiązać zagadnienie następujące. Mamy funkcje:

$$(y) = \varphi(a, a_1, a_2, \dots, x_0),$$

$$(y_1) = \varphi(b, b_1, b_2, \dots, x_0),$$

gdzie  $a_k, b_k$  są parametrami stałymi,  $x_0$  zaś szczególną wartością zmiennej  $x$ . Niech będzie dalej  $x_1 = x_0 + \Delta x$  oraz

$$y = \varphi(a, a_1, a_2, \dots, x_1),$$

$$y_1 = \varphi(b, b_1, b_2, \dots, x_1).$$

Wartości funkcji  $(y)$  i  $(y_1)$  są obliczone i znane, wartości zaś  $y$  i  $y_1$  są nieznanne, tylko według obserwacji jest  $y = y_1$ . W rzeczywistości wszakże  $y - y_1 = c$ , a więc  $c$  jest błędem szacowania. Wartość szczególna zmiennej  $x_1$ , jest nieznaną i ma być wyznaczoną, wiadomo tylko, że  $x_1$  różni się od znanej ilości  $x_0$  o niewielką wartość  $\Delta x$ . Mamy więc:

$$y = (y) + \varphi'(a, a_1, a_2, \dots, x_0) \cdot \Delta x = (y) + \varphi'_a \cdot \Delta x,$$

$$y_1 = (y_1) + \varphi'(b, b_1, b_2, \dots, x_0) \cdot \Delta x = (y_1) + \varphi'_b \cdot \Delta x$$

i otrzymujemy:

$$y - y_1 = (y) - (y_1) + (\varphi'_a - \varphi'_b) \cdot \Delta x,$$

albo:

$$c = A + B \cdot \Delta x.$$

W tem równaniu  $A$  i  $B$  są ilościami znanymi, niewiadomymi zaś są  $c$  i  $\Delta x$ .

Jeżeli istnieje większa liczba spostrzeżeń, to mamy szereg równań:

$$c_1 = A_1 + B_1 \Delta x,$$

$$c_2 = A_2 + B_2 \Delta x,$$

$$c_3 = A_3 + B_3 \Delta x,$$

$$\dots \dots \dots$$



Przy dowolnej liczbie równań  $n$  będzie zawsze  $n$  niewiadomych wartości  $c$ , oraz jeszcze  $\Delta x$ , t. j. więcej niewiadomych aniżeli równań. Gdyby obserwacje dotyczyły tej samej wielkości, to zgodnie z zasadą teorii błędów, możnaby dodać warunek:

$$c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n = 0$$

i byłyby wówczas:

$$\Delta x = - \frac{A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n}{B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_n}.$$

Jednakowoż obserwacjom podlegały łuki, najrozmaiciej położone i posiadające długość różną, a błąd średni szacowania niewątpliwie zależny jest od długości szacowanych łuków, zasady więc powyższej zastosować nie można.

Według obserwacji jest  $y = y_1$ , ale w rzeczywistości  $y$  różni się od  $y_1$ . Najprawdopodobniejsza wartość na  $y$  i  $y_1$ , wypływająca ze spostrzeżeń, jest:

$$y_m = \frac{y + y_1}{2},$$

najprawdopodobniejsza wartość niewiadomej  $x_m$  wyznaczy się z równania:

$$\varphi(a, a_1, \dots, x_m) = \varphi(b, b_1, \dots, x_m),$$

a  $\Delta x_m = x_m - x_0$  jest najprawdopodobniejszą wartością niewiadomej  $\Delta x$ .

Ale wartość  $y_m$  jest nieznaną, możemy tylko zastosować wartość

$$(y_m) = \frac{(y) + (y_1)}{2}.$$

Jeżeli obliczymy  $(\Delta x_m)$  z równań

$$(1) \quad (y_m) = (y) + \varphi'_a \cdot (\Delta x_m); \quad (\Delta x_m)_1 = \frac{(y_m) - (y)}{\varphi'_a},$$

$$(2) \quad (y_m) = (y_1) + \varphi'_b \cdot (\Delta x_m); \quad (\Delta x_m)_2 = \frac{(y_m) - (y_1)}{\varphi'_b},$$

to wypływające stąd najprawdopodobniejsze

$$(\Delta x_m) = \frac{1}{2} \left( \frac{(y_m) - (y)}{\varphi'_a} + \frac{(y_m) - (y_1)}{\varphi'_b} \right)$$

(150)

różni się od wartości  $\Delta x_m$  o wielkość tego samego rzędu co  $y_m - (y_m)$ . A że:

$$y_m - (y_m) = \frac{\varphi'_a + \varphi'_b}{2} \cdot \Delta x,$$

więc jeżeli współczynnik przy  $\Delta x$  jest małym ułamkiem, to i różnica między  $\Delta x_m$  a  $(\Delta x_m)$  jest tylko małym ułamkiem  $\Delta x$ . W rzeczywistości, w naszym zagadnieniu współczynniki  $A$ , przedstawiające wartości pochodnych  $\varphi'$ , są małe, możemy więc obliczone wartości odległości  $\Delta_0$  łączyć w średnie arytmetyczne i obliczać poprawki przyjętej wartości  $\beta$  w sposób następujący: Niechaj będą

$$x_1, x_2, \dots, x_n,$$

wartości dostaw odległości  $\Delta_0$ , należących do siebie, oraz

$$x_m = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n};$$

$$x_k - x_m = \Delta x_k = A_k \Delta \beta_k.$$

Biorąc średnią arytmetyczną ze wszystkich wartości  $\Delta \beta_k = \frac{\Delta x_k}{A_k}$ , otrzymujemy jako wynik z każdej grupy szacowań:

$$\Delta \beta = \frac{1}{n} \sum \left( \frac{\Delta x_k}{A_k} \right),$$

przyczem waga takiego wyniku odpowiada liczbie  $n$  szacowań. Ze wszystkich szacowań odległości wypływa 65 takich wartości  $\Delta \beta$ , a jako ogólny wynik ze wszystkich otrzymuje się  $\Delta \beta = +8'$ , czyli  $\beta = 61^\circ 19'$ . Mamy więc:

1) z szacowań połowy łuku między zenitem a poziomem:

$$\beta = 60^\circ 44', \quad \text{waga 48 (liczba szacowań)},$$

2) z szacowania równych łuków między gwiazdami:

$$\beta = 61^\circ 19', \quad \text{waga 156 (liczba wszystkich } \Delta \text{)}.$$

Przez połączenie tych wyników otrzymujemy:

$$\beta = 61^\circ 11', \quad \text{waga 204},$$

t. j. wynik ten sam, który przypadkowo był wzięty za podstawę obliczenia przybliżonych pozornych odległości.

(151)

Pozostaje jeszcze użytkować porównania wysokości gwiazd z odległościami tychże gwiazd od innych. W tych spostrzeżeniach według szacowania jest:

$$\beta - \zeta = \Delta,$$

gdzie:

$$\cos \Delta = \cos \zeta \cos \zeta_1 + \sin \zeta \sin \zeta_1 \cos (a - a_1) = x.$$

Ponieważ:

$$\frac{dx}{d\beta} = A, \text{ więc } \frac{d\Delta}{d\beta} = - \frac{A}{\sin \Delta}.$$

Dla wysokości jest:

$$d(\beta - \zeta) = d\beta - C d\beta = (1 - C) d\beta.$$

Przyjmując  $\beta_0$  jako odległość zenitu od horyzontu, otrzymamy, zamiast wysokości, pozorną odległość od horyzontu  $\zeta_0 = \beta_0 - \zeta_0$ . W zestawieniu niżej załączonym w rubryce  $D$  podane są albo owe wartości  $\zeta_0$ , albo  $\Delta_0$ , zależnie od tego, czy szacowana była wysokość czy odległość. W sposób podobny w rubryce  $d$  podane są prawdziwe odległości lub też wysokości gwiazd, a w rubryce  $k$  — logarytmy współczynników —  $\frac{A}{\sin \Delta}$  lub  $(1 - C)$ . Wartości  $\log K$  w przypadku szacowanych wysokości oczywiście równają się zeru. Zresztą znaczenie poszczególnych rubryk jest takie same, jak w poprzednim zestawieniu. Wszystkie daty obserwacji odnoszą się do roku 1903.

L.	Data	Gwiazdy	log K	d	$\zeta_0$	$\zeta'_0$	D	k
1	Marzec 26, 11 <sup>h</sup> 15 <sup>m</sup>	$\alpha$ Virginis		24 <sup>o</sup> 59'	39 <sup>o</sup> 7'		22 4	9.0693
		$\alpha$ Virginis— $\alpha$ Bootis	9.9307	32 48	"	24 <sup>o</sup> 27'	21 44	9.5683
2	" 26, 11 <sup>h</sup> 21 <sup>m</sup>	$\alpha$ Aurigae		30 4	34 17		26 54	9.2164
		$\alpha$ Aur.— $\alpha$ Ursae min.	9.7873	43 26	"	22 43	26 26	9.7841
3	" 26, 11 <sup>h</sup> 24 <sup>m</sup>	$\alpha$ Canis min.		22 44	40 52		20 19	8.9903
		$\alpha$ Can. min.— $\alpha$ Gemin.	9.9647	26 39	"	27 27	18 20	9.5373
4	" 27, 10 <sup>h</sup> 50 <sup>m</sup>	$\alpha$ Canis min.		26 54	37 38		23 33	9.1278
		$\alpha$ Can. min.— $\alpha$ Leonis	9.8935	37 25	"	21 49	24 6	9.6973
5	" 31, 8 <sup>h</sup> 25 <sup>m</sup>	$\alpha$ Orionis		32 35	33 27		27 44	9.2823
		$\alpha$ Orionis— $\alpha$ Aurigae	9.8285	39 27	"	20 15	24 18	9.7427
6	Kwiec. 22, 12 <sup>h</sup> 6 <sup>m</sup>	$\alpha$ Virginis		29 16	35 52		25 19	9.1976
		$\alpha$ Virginis— $\alpha$ Bootis	9.9791	32 48	"	16 9	20 59	9.6280

L.	Data	Gwiazdy	log K	d	$\zeta_0$	$\zeta'_0$	D	k
7	Kwiec. 25, 9 <sup>h</sup> 0 <sup>m</sup>	$\alpha$ Canis min.		27 <sup>o</sup> 0'	37 <sup>o</sup> 34'		23 37'	9.1323
		$\alpha$ Can. min.— $\alpha$ Leonis	9.8928	37 25	"	21 <sup>o</sup> 49'	24 5	9.6975
8	Maj 3, 8 <sup>h</sup> 30 <sup>m</sup>	Venus		18 9	44 35		16 36	8.8000
		Venus— $\alpha$ Aurigae	9.9801	21 16	"	32 58	15 46	9.3665
9	" 3, 9 <sup>h</sup> 0 <sup>m</sup>	$\alpha$ Persei		19 30	43 28		17 43	8.8603
		$\alpha$ Persei— $\delta$ Cassiop.	9.9705	19 38	"	42 0	14 11	9.3923
10	" 3, 9 <sup>h</sup> 5 <sup>m</sup>	$\alpha$ Canis min.		20 45	42 27		18 44	8.9134
		$\alpha$ Can. min.— $\beta$ Gemin.	9.9686	26 14	"	28 43	18 25	9.4902
11	" 3, 9 <sup>h</sup> 35 <sup>m</sup>	$\alpha$ Virginis		28 1	36 48		24 23	9.1623
		$\alpha$ Virginis— $\alpha$ Bootis	9.9393	32 48	"	20 29	21 11	9.6330
12	" 3, 9 <sup>h</sup> 35 <sup>m</sup>	$\alpha$ Persei		16 30	45 58		15 13	8.7202
		$\alpha$ Persei— $\alpha$ Aurigae	9.9816	17 31	"	39 20	13 1	9.2622
13	" 3, 11 <sup>h</sup> 35 <sup>m</sup>	$\alpha$ Virginis		28 11	36 40		24 31	9.1664
		$\alpha$ Virginis— $\alpha$ Bootis	9.9893	32 48	"	16 9	21 10	9.6212
14	" 3, 13 <sup>h</sup> 30 <sup>m</sup>	$\alpha$ Aquilae		29 44	35 31		25 40	9.2098
		$\alpha$ Aquilae— $\alpha$ Cygni	9.8535	3 1	"	24 7	24 10	9.7227
15	" 6, 9 <sup>h</sup> 0 <sup>m</sup>	$\alpha$ Virginis		26 35	37 53		23 18	9.1193
		$\alpha$ Virginis— $\alpha$ Bootis	9.9342	32 48	"	22 23	21 26	9.6852
16	" 6, 9 <sup>h</sup> 0 <sup>m</sup>	$\alpha$ Canis min.		20 45	42 27		18 44	8.9133
		$\alpha$ Can. min.— $\beta$ Gemin.	9.9706	26 14	"	29 41	17 32	9.7512
17	" 6, 9 <sup>h</sup> 0 <sup>m</sup>	$\epsilon$ Cassiopejae		25 15	38 54		22 17	9.0770
		$\epsilon$ Cassiop.— $\alpha$ Ur. min.	9.9887	25 35	"	22 44	17 24	9.9150
18	" 6, 9 <sup>h</sup> 0 <sup>m</sup>	$\alpha$ Aurigae		27 21	37 18		23 53	9.1424
		$\alpha$ Aurigae— $\alpha$ Gemin.	9.9230	29 49	"	29 9	19 38	9.6046
19	" 6, 9 <sup>h</sup> 5 <sup>m</sup>	$\alpha$ Persei		18 6	44 37		16 34	8.7952
		$\alpha$ Persei— $\alpha$ Aurigae	9.9825	17 31	"	37 18	12 49	9.1890
20	" 6, 9 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup>	$\alpha$ Virginis		28 53	36 9		25 2	9.1867
		$\alpha$ Virginis— $\alpha$ Bootis	9.9462	32 48	"	19 3	21 4	9.6320
21	Paźdz. 26, 10 <sup>h</sup> 0 <sup>m</sup>	$\alpha$ Ursae maj.		23 9	40 32		20 39	9.0043
		$\alpha$ Ur. maj.— $\alpha$ Ur. min.	9.9945	28 43	"	21 20	19 42	9.5018
22	" 26, 10 <sup>h</sup> 0 <sup>m</sup>	Jowisz		30 13	35 10		26 1	9.2235
		Jowisz— $\alpha$ Andromed.	9.8665	39 10	"	41 55	26 59	9.7128
23	Listop. 10, 8 <sup>h</sup> 25 <sup>m</sup>	$\alpha$ Aquilae		26 27	37 59		23 12	9.1153
		$\alpha$ Aquilae— $\alpha$ Lyrae	9.8929	34 9	"	30 47	22 34	9.6668
24	" 10, 8 <sup>h</sup> 25 <sup>m</sup>	$\alpha$ Tauri		23 47	40 2		21 9	9.0265
		$\alpha$ Tauri— $\alpha$ Aurigae	9.9274	30 43	"	39 59	20 33	9.5512
25	" 10, 8 <sup>h</sup> 55 <sup>m</sup>	$\alpha$ Tauri		28 36	36 22		24 49	9.1813
		$\alpha$ Tauri— $\alpha$ Persei	9.9443	36 20	"	15 49	23 32	9.6870
26	" 21, 11 <sup>h</sup> 35 <sup>m</sup>	$\alpha$ Canis min.		23 28	40 9		21 2	9.0212
		$\alpha$ Can. min.— $\alpha$ Gem.	9.9710	26 39	"	25 34	18 13	9.5103

Tu średnia wartość różnicy odpowiednich  $d$  wynosi  $5^{\circ}43'$ , zaś różnica odpowiednich  $D$  — tylko  $2^{\circ}1'$ , czyli zaledwie 0.35 poprzedniej. Gdy wszakże odległości  $d$  od odpowiednich  $h$  są w ogólności większe, to odległości  $\Delta_0$  są w ogólności mniejsze od  $\chi_0$ ; przeciętna różnica  $d-h$  wynosi  $+5^{\circ}40'$ , przeciętna zaś różnica  $\Delta_0 - \chi_0$  jest  $-1^{\circ}40'$ . Różnica ta znikła by, gdyby przypuścić, że wysokości liczone były nie od samego poziomu astronomicznego, lecz od almukantaratu o  $1^{\circ}40'$  wzniesionego ponad horyzont. Pewne wzniesienie pozornego horyzontu jest możliwe, ponieważ z miejsca spostrzeżeń nie widzi się nigdzie horyzontu czystego, ze wszystkich stron zasłaniają go czy to wzgórza, czy też lasy lub budynki, a przede wszystkim opary lub kurz. Gwiazdy nawet pierwszej wielkości już znikają dla oka, gdy wysokość ich wynosi przynajmniej  $1^{\circ}$ , jak ze spostrzeżeń w tym przedmiocie dokonanych wypływa. O ile ta ostatnia okoliczność wpływa na szacowanie wysokości, trudno orzec, albowiem gdy gwiazda znika we mgłach przy poziomie, widać przecie wyraźnie, że ona jeszcze nie zachodzi. W jakim związku powyższa różnica  $1^{\circ}40'$  stoi w związku z wspomnianą okolicznością, też nie powiedzieć nie można, natomiast przedmioty zasłaniające horyzont nie mogą wzniesić linii horyzontu na wysokość tak znaczną. Gdyby chodziło o kilkanaście minut, objaśnienie tej różnicy zasłoniętym horyzontem możnaby uważać za uzasadnione.

Bądźco bądź, gdyby wzniesienie linii horyzontu z jakiegokolwiek powodu w istocie istniało, musiałoby ono wystąpić również w szacowaniach połowy łuku między horyzontem a zenitem. Gdybyśmy wszakże średnią ze wszystkich odległości zenitalnych w pierwszej grupie obserwacji zmniejszyli o  $1^{\circ}40'$ , otrzymalibyśmy  $\beta = 65^{\circ}14'$ , a więc liczbę, która stałaby w zbyt wielkim rozdźwięku ze spostrzeżeniami drugiej grupy. Należy więc hipotezę wzniesienia horyzontu odrzucić. Wniosek, który pozostaje, jest ten, iż całe pozorne sklepienie niebieskie nie jest powierzchnią jednego odcinka kuli, lecz spada w bliskości poziomu łagodniej. Gdyby obserwacje w bliskości poziomu przyjąć za podstawę do określenia odcinka, otrzymałoby się odcinek mniejszy, aniżeli na podstawie obserwacji w większych wysokościach, — i to tem mniejszy, im mniejszą jest wysokość obserwowanej gwiazdy.

Prowadząc krzywą wielkości znalezionych poprawek, otrzymuje się dla różnych wysokości następujące  $\beta$ :

$h = 15^{\circ}$ ,	$\beta = 54^{\circ}50'$
20	56 50
25	58 20
30	59 30
35	60 20

W średniej wysokości gwiazd, zdających się znajdować na środku między poziomem a zenitem, ekstrapolacja prowadzi znowu do  $\beta = 60 40$  — jak to też wypadło z szacowań środka łuku. Rzeczywisty kształt pozornego sklepienia niebieskiego nie da się więc przedstawić, jako jeden odcinek powierzchni kulistej, lecz w przybliżeniu niewielkie części sklepienia mogą być uważane za pasy kuliste, należące do kul w coraz większym promieniu — w miarę zbliżania się ku poziomowi. Z rysunku (fig. 1) mamy, biorąc  $OZ=1$ :

$$\begin{aligned} OO_1 &= A_1 O_1 - 1 = R - 1, \\ OO_1 &= R \cos \beta, \\ R \cos \beta - R &= -1, \\ R &= \frac{1}{1 - \cos \beta} = \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\beta}{2}}. \end{aligned}$$

Obliczając  $R$  dla wszystkich powyższych wartości  $\beta$ , otrzymamy następujące wartości promieni kul, odpowiadających podanym wysokościom:

$h = 15^{\circ}$ ,	$R = 2.36$ ,	$OO_1 = 1.36$
20	2.21	1.21
25	2.11	1.11
30	2.03	1.04
35	1.98	0.99

Na prostej  $ZO$  (fig. 2), przedłużonej pod poziom, obieramy punkty  $O_1, O_2, O_3$  i t. d. w odległości 1.36, 1.21, 1.11 i t. d. od  $O$  i promieniami  $R_1 = 2.36, R_2 = 2.21$  i t. d. z tych środków zakreślamy koła. Na pierwszym z tych kół obieramy punkt, odpowiadający wysokości  $h = 15^{\circ}$ , na drugim punkt, odpowiadający  $h = 20^{\circ}$  i t. d.

Krzywa, przechodząca przez te punkty, określi przekrój pozornego sklepienia niebieskiego, który powyżej  $h = 35^{\circ}$ , zlewa się z odcinkiem, odpowiadającym  $\beta = 61^{\circ}10'$ . Po wykreśleniu tej krzywej wymierzone zostały odległości jej od środka  $O$  w różnych wysokościach, a mianowicie, przyjmując  $OZ = 1$ , mamy przy

$h = 0$ ,	$q = 2.14$
10	1.71
20	1.46
30	1.28
40	1.19
50	1.12
60	1.06
70	1.04
80	1.01
90	1.00

Jeżeli obierzemy prostokątny układ współrzędnych, którego początek znajduje się na przedłużeniu prostej  $OZ$  w odległości 2.74 od punktu  $O$ , to krzywa przecięcia pozornego sklepienia niebieskiego z płaszczyzną wierzchołkową dosyć dokładnie przedstawia się za pomocą równania

$$xy = 1.50.$$

W układzie biegunowym, którego biegunem jest  $O$ , równanie owej krzywej jest

$$\rho^2 \cos 2h + 5.48 \rho \sin h = 4.51.$$

Kształt ten wpływa wszakże tylko z porównywania wysokości z odległościami oraz z szacowań środka łuku między poziomem i zenitem. Ażeby się przekonać, o ile się on zgadza też z szacowaniami równych odległości między gwiazdami, trzeba by te odległości obliczyć na tej powierzchni hiperboloidalnej, stosując specjalną dla tej powierzchni trygonometrię.

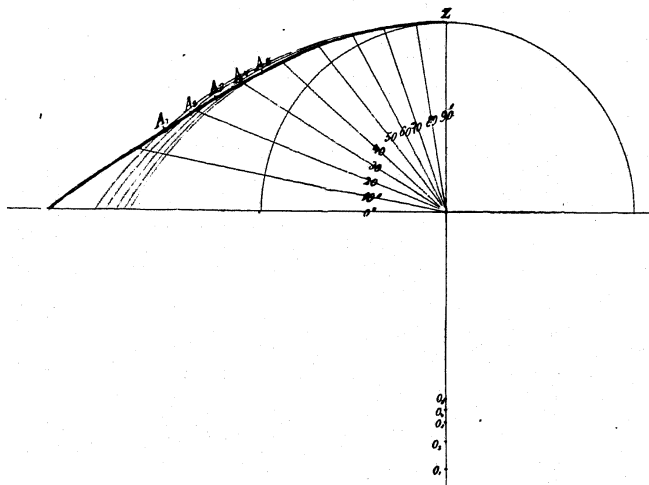


Fig. 2.

Przedstawiało by to pracę zbyt uciążliwą. W ogóle zauważyć należy, że o ile ze spostrzeżeń wynika, że kształt pozornego sklepienia niebieskiego nie jest sferyczny, szacowanie odległości nie jest drogą odpowiednią do ścisłego wyznaczenia kształtu. Ze względu, że jest to powierzchnia obro-

towa, najwłaściwsze są porównywania wysokości gwiazd, o ile możliwości leżących na tem samym kole wierzchołkowym.

Ważną jest nader kwestyą zbadanie błędów, popełnionych przy szacowaniu. Błędy te przedewszystkiem zależne są niewątpliwie od wielkości obserwowanych łuków, a następnie od całego szeregu innych okoliczności, jak kierunek, w którym łuk przebiega na niebie, wysokość gwiazd obserwowanych, która warunkuje pewne nachylenie głowy i t. d.

Trzecie z przytoczonych źródeł błędów jest prawdopodobnie właściwą przyczyną kształtu, w jakim sklepienie niebieskie widzimy; określenie błędów, pochodzących z drugiego źródła, wymagałoby obliczenia dokładnej długości pozornych łuków, gdyż błędy te, w porównaniu z błędami, zależnymi od długości, są niewątpliwie małe. Błędy, zależne od długości, możemy jako tako określić, przyjmując przeciętny kształt sferyczny, jaki wpływa ze wszystkich spostrzeżeń i poprawiając przybliżone odległości  $\Delta_0$  za pomocą współczynników  $A$ .

Ze wszystkich spostrzeżeń wpływa przeciętny kształt sferyczny, określony przez  $\beta_0 = 60^\circ 33'$ . Ponieważ do rachunku przyjęte było  $\beta_0 = 61^\circ 11'$ , to poprawione odległości są:

$$\Delta = \Delta_0 + \frac{38'}{\sin \Delta_0} A.$$

Uważając połowę różnicy między odpowiedniami  $\Delta$  za błąd, zależny li tylko od odległości, czynimy hipotezę, że inne błędy w średnim wypadku się zniosą. Jeżeli to nie nastąpi nawet całkowicie, to przecież otrzymane średnie dadzą nam pewien przybliżony obraz funkcji, wyrażającej zależność błędów od odległości. Biorąc na osi odciętych odcinki, wyobrażające odległości, a odpowiednie błędy jako rzędne, można było wykreslić krzywą błędów, z której otrzymano:

dla odległości $\Delta = 10^\circ$ przeciętny błąd szacowania $d\Delta = 39'$	
12	42
14	44
16	46
18	49
20	52
22	56
24	61
26	67
28	72
30	77
32	81
34	85

Widzimy, że błąd szacowania wzrasta w miarę, jak zwiększa się odległość pozorna w sposób dość prawidłowy, z początku od  $\Delta = 10^\circ$  wolno, między  $\Delta = 21$  a  $\Delta = 27$  najszybciej, później znów nieco wolniej. Prawo zależności  $d\Delta$  od  $\Delta$  nie da się wszakże ująć w jakiś prosty wzór matematyczny. Niewątpliwie wielkość tego błędu zależna też jest od większej lub mniejszej wprawy i dla tego wartości powyższe mają znaczenie tylko subiektywne, jak w ogóle wszystkie wyniki szczegółowe tej rozprawki posiadają wartość tylko subiektywną. Ale jest rzeczą możliwą, że czynniki subiektywne mają tylko znaczenie stałych parametrów, wtedy wyniki otrzymane nie byłyby pozbawione treści ogólniejszej. Dla stwierdzenia tego przypuszczenia niezbędne są liczniejsze badania analogiczne.

K. WEIERSTRASS,

## O PRZEDSTAWIALNOŚCI ANALITYCZNEJ

TAK ZWANYCH DOWOLNYCH FUNKCJI ARGUMENTÓW RZECZYWISTYCH. <sup>1)</sup>

## 1.

Wynik główny poniższego badania, w ograniczeniu najprzód do funkcji jednej zmiennej, daje się wyrazić w sposób następujący:

Niechaj  $x$  będzie zmienną rzeczywistą, mogącą przybierać wszelką wartość, należącą do przedziału  $(-\infty \dots +\infty)$ , niechaj dalej  $f(x)$  oznacza funkcję rzeczywistą i ciągłą zmiennej  $x$ ; można w rozmaity sposób utworzyć szereg funkcji całkowitych  $f_1(x), f_2(x) \dots$ , takich, że dla każdej z uważanych wartości zmiennej  $x$  jest:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots,$$

przyczem szereg  $f_1(x) + f_2(x) \dots$  w każdym skończonym przedziale jest jednostajnie zbieżny. Jeżeli  $f(x)$  jest dla każdej wartości zmiennej  $x$  funkcją jednoznacznie określoną, rzeczywistą i ciągłą i gdy jej wartość bezwzględna ma granicę wyższą skończoną; wtedy, jak wiadomo, zachodzi następujące równanie, w którym  $u$  oznacza inną zmienną rzeczywistą, przez  $k$  zaś rozumieć należy wielkość dodatnią niezależną od  $x$  i  $u$ :

$$(1) \quad \lim_{k=0} \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du = f(x).$$

Twierdzenie, wyrażone przez to równanie, daje się łatwo uogólnić.

<sup>1)</sup> Przekład z wydania „Mathematische Werke“ von Karl Weierstrass, t. 3. 1903 (Sitzungsber. d. Berl. Akademie z 9 i 30 lipca 1885).