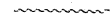


M. SMOLUCHOWSKI,

O METODZIE PODOBIENSTWA DYNAMICZNEGO I JEJ ZASTOSOWANIACH W MECHANICE CIECZY I GAZÓW.



§ 1. Chciałbym w pracy niniejszej zwrócić uwagę na pewną metodę rozumowania, bardzo prostą a nadzwyczaj płodną w zastosowaniu do mechaniki cieczy, zwłaszcza gazów, i pod tym względem jeszcze niedocenioną.

Jest to właściwie tylko pewien rodzaj znanej prostej metody wymiarów (metod of dimensions), używanej w najrozmaitszych rozważaniach fizycznych, ale szczególnie kształt, jaki jej nadać można w mechanice cieczy i gazów, usprawiedliwi używanie osobnej nazwy, wprowadzonej już przez Helmholtza i Rayleigha.

„Mechanicznie“ lub „dynamicznie“ podobnemi nazywamy rozwiązania szczególne równań hydrodynamicznych, odpowiadające sobie w ten sposób, że można jedno zamienić na drugie za pomocą powiększenia zmiennych i ewentualnie także współczynników substancji w stałych stosunkach. Takie dynamicznie podobne przykłady odznaczają się oczywiście ruchami geometrycznie podobnemi, ale nie jest to warunek wystarczający.

Znając pewne rozwiązanie, otrzymamy wszystkie inne dynamicznie do niego podobne, za pomocą podstawienia wielkości:

nx, ny, nz	zamiast	x, y, z
mu, mv, mw	"	u, v, w
$\frac{n}{m} t$	"	t
bp	"	p
$\beta\mu$	"	μ
αq	"	q

w zwykłych równaniach hydrodynamicznych:

$$(1) \quad \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + g \rho - \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

1 t. d.

Wypływają z tego następujące tożsamości jako warunki podobieństwa:

$$\frac{\alpha m^2}{n} = \frac{b}{n} = \alpha = \beta \frac{m}{n^2},$$

które się sprowadzają do trzech warunków, określających jednoznacznie zależność rozwiązania od spójczników substancji:

$$(2) \quad n = \sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha^2}}; \quad m = \sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha}}; \quad b = \sqrt[3]{\alpha \beta^2};$$

przyczem także warunki graniczne muszą być odpowiednio, dobrane.

Gdybyśmy np. drogą empiryczną byli poznali zależność prądu wody w korycie od kształtu przekroju koryta i od nachylenia jego, to powyższe związki dałyby także rozwiązanie dla jakiegobądź innej cieczy, o innych spójcznikach ρ i μ . Dotychczasowe wiadomości na tem polu jednak nie są jeszcze wystarczające do podjęcia tego zadania.

Szersze pole do zastosowania tej metody okazują przykłady, w których można pominąć jeden z czynników, uwzględnionych w równaniach ogólnych.

§ 2. Pomijając np. siły zewnętrzne, otrzymamy warunki:

$$(3) \quad m = \frac{\beta}{\alpha n}; \quad b = \frac{\beta^2}{\alpha n^2}.$$

Dla jednej i tej samej substancji (t. j. $\alpha = \beta = 1$) wynika z tego przykład podobieństwa, zauważony przez Helmholtza¹⁾. Mianowicie: przepływ cieczy przez wązkie rurki czyni zadość znanemu wzorowi Poiseuille'a:

$$Q = \frac{p_2 - p_1}{l} \frac{r^4 \pi}{8 \mu},$$

tylko dla małych r , p , dużych l ; po za pewnym obrębem tych wartości, ruch następuje według praw, zupełnie odmiennych. Wiedząc jednak, że wzór ten

jest ważny dla pewnej rurki, wnioskować możemy, że pozostanie on ważnym dla rurki o wymiarach n krotnych, jeżeli czynne ciśnienie zmniejszone zostanie równocześnie w stosunku $\frac{1}{n^2}$.

Prędkość wtedy zmniejszona jest w stosunku $m = \frac{1}{n}$.

Uważając zaś prędkość, zamiast ciśnienia, za pierwotnie daną, wnioskujemy z (2a), że warunkiem ważności prawa Poiseuille'a dla różnych cieczy w rurkach podobnych będzie pewna wartość stosunku $\frac{m n \alpha}{\beta}$ (według Reynolds'a = 1000 C. G. S.), ponieważ ruchy o równej wartości tego stosunku będą dynamicznie podobne. Reynolds²⁾ stosuje to „kryterium“ także do rur o różnych stosunkach długości do szerokości, określając liczbą n stosunek ich szerokości. Prawidło takie może znaleźć potwierdzenie empiryczne w obrębie pewnych granic, ale nie zdaje mi się uzasadnione w przypadku ogólnym.

Będzie ono zaś z pewnością zupełnie ściśle ważne dla innego przykładu³⁾, t. j. dla jednostajnego prostoliniowego ruchu kuli w cieczy, gdzie liczba n jest określona przez jeden tylko wymiar: promień kuli. O ile mianowicie stosunek $\frac{u a \rho}{\mu}$ (gdzie u oznacza prędkość, a promień kuli) będzie dostatecznie mały, o tyle bezwładność cieczy można pominąć w porównaniu z lepkością i o tyle można użyć dla oporu kuli w cieczy wzoru $P = 6 \pi a \mu u$.

§ 3. Ostateczność, przeciwną do założeń poprzedniego § 2, tworzy uwzględnienie siły zewnętrznej np. ciężkości, a pominięcie lepkości, z czego wynikają warunki:

$$(4) \quad m = \sqrt{n}; \quad b = n \alpha.$$

W ten sposób można obliczyć opór P statku, płynącego z prędkością V po cieczy idealnej, t. j. opór, pochodzący z wytwarzania fal na powierzchni cieczy, jeżeli zmierzony został opór P_0 , którego doznaje model statku o wymiarach n razy mniejszych, a poruszający się z prędkością \sqrt{n} ; mianowicie skoro P ma wymiary $b n^2$, przeto: $P = P_0 n^3$.

Ażeby skorzystać z tego wyniku dla rzeczywistych cieczy lepkich, Froude³⁾ w ten sposób postąpił, iż opór całkowity uważał za sumę oporu falowego, wyznaczonego w wymieniony sposób, i oporu lepkości, obliczonego

¹⁾ Phil. Trans. 174, p. 941 (1883); 186 (1895).

²⁾ L a m b. Hydrodynamics (1895), p. 533.

³⁾ Patrz np. Taschenbuch „Hütte“.

za pomocą wzorów i tabliczek empirycznych. Metoda ta w praktyce okazała się bardzo dogodna i jest w powszechnym używaniu przy konstrukcji okrętów, ale nie jest ściśle uzasadniona i nie może być dokładna, gdyż ów ruch falowy i lepkość nie stanowią zupełnie niezależnych, nakładających się na siebie czynników.

§ 4. Zewnętrzna siła ciężkości odgrywa także rolę pierwszorzędą przy powstawaniu prądów w cieczach wskutek nierówności temperatury, określonych dodatkowym równaniem Fourierowskim:

$$(5) \quad c\varrho \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = \kappa \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right),$$

a powodujących nierówności gęstości wskutek: $\varrho = \varrho_0 (1 - s\theta)$.

Wartości względne nowo wprowadzonych współczynników oznaczmy znakami ζ, σ, γ dla c, s, κ odpowiednio, a stosunek różnic temperatury oznaczmy przez h . Podobieństwo w tym razie ogólnie możliwe jest tylko przy pominięciu wpływu bezwładności cieczy, a więc jeżeli (przy użyciu skrótów $P = p - \varrho_0 g z$) równanie (1) napisać można w formie:

$$(6) \quad \frac{\partial P}{\partial z} + \varrho_0 s \theta g + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = 0.$$

Z tego równania wypływa wtedy warunek podobieństwa:

$$\frac{b}{n} = \alpha \sigma h = \beta \frac{m}{n^2},$$

z równania (5) zaś:

$$\frac{\zeta \alpha m h}{n} = \gamma \frac{h}{n^2},$$

co sprowadzić można do:

$$(7) \quad n = \sqrt[3]{\frac{\gamma \beta}{\alpha^2 \sigma \zeta h}}; \quad m = \sqrt[3]{\frac{\sigma \gamma^2 h}{\alpha \beta \zeta^2}}; \quad b = \sqrt[3]{\frac{\gamma \beta \alpha \sigma^3}{\zeta h}}.$$

Zbadawszy np. doświadczalnie prawo, według którego drucik o danej grubości udziela ciepła cieczy otaczającej¹⁾, zależnie od różnicy temperatury jego a cieczy, otrzymałoby się za pomocą tych wzorów rozszerzenie tego

prawa na jakiegobądź cieczy i na druciki o dowolnej grubości, zważywszy, że ilość ciepła, uchodząca przez 1 cm.² powierzchni w przypadkach podobnych

byłaby proporcjonalna do wymiarów wyrazu: $\kappa \frac{\partial \theta}{\partial z}$ t. j. do:

$$\gamma \frac{h}{n} = \sqrt[3]{\frac{\alpha^2 \gamma^2 \sigma \zeta h^4}{\beta}}.$$

Oczywistym warunkiem ważności tej metody będzie małość owej różnicy temperatury, ze względu na zmienność współczynnika lepkości i na pominięcie wpływu bezwładności.

Ale w każdym razie zastosowanie jej więcej będzie usprawiedliwione, aniżeli metody Bousinesq'a¹⁾, polegającej na rozważaniach nieco podobnych, ale opartych na równaniach dla cieczy idealnych. Równania te są absolutnie nie wystarczające w przykładach tego rodzaju, gdyż przy pominięciu lepkości ruch musiałby się wzmaczać w nieskończoność i ustalenie ruchu statecznego byłoby niemożliwe.

§ 5. Zjawiska, omawiane w poprzednim paragrafie, stanowią dział odrębny (i mało jeszcze zbadany) hydrodynamiki, będący w pewnej łączności z termodynamiką, gdyż bezpośrednią przyczyną ruchów stanowią różnice temperatury, z zewnętrznych przyczyn pochodzące, określone równaniem (5).

Drobne zmiany temperatury, pochodzące z wewnętrznych ruchów cieczy (wskutek tarcia i rozprężenia), wcale przy tem nie wchodzi w rachubę, i dla tego też w normalnych warunkach (t. j. jeżeli ściany otaczające ciecz jednakową mają temperaturę) hydrodynamika może się obejść bez rozważań termodynamicznych.

Zupełnie inaczej rzecz się ma w aerodynamice.

Wystarczy przypomnieć sobie a) różnicę wzorów Laplace'a a Newtona dla prędkości głosu, b) Saint Venanta, Wantzela i wielu innych obserwatorów²⁾, którzy wykazali wpływ ochłodzenia adiabatycznego na prędkość wypływu gazów przez otwory i błędność odnośnych wzorów izotermicznych lub c) doświadczenia Joule-Kelwina, w których oziębienie adiabatyczne znów zneutralizowane zostaje przez ogrzanie wskutek tarcia, ażeby się przekonać, że pominięcie skutków termicznych rozprężenia i tarcia wewnętrznego w przeważnej ilości przykładów aerodynamicznych nawet do wyvodu przybliżenie prawdziwej teorii posłużyć nie może.

¹⁾ Journ. d. Phys. 1, p. 65 (1902).

²⁾ Saint Venant et Wantzel. J. Écol. Polyt. 16, p. 92 (1839); Comptes Rendus 17 (1893); Zeuner. Civilingen 20, p. 1 (1874); Fliegenger ibid., p. 44; 23 p. 443 (1877); 24 p. 2 (1878); H u n g o i o t. Comptes Rendus 102, p. 1545, 103 p. 241 (1886); Willd. Phil. Mag. 20, p. 531 (1885); 21 p. 494 (1886).

¹⁾ Patrz np. Oberbeck Wied. Ann. 56, p. 397 (1895).

Przyjęcie wzoru izotermicznego w pierwszych dwóch przypadkach dałoby równie fałszywe wyniki, jak pominięcie ciepła tarcia w ostatnim przykładzie.

Dotychczasowe badania teoretyczne opierały się na przyjęciu jednej z dwóch ostateczności: izotermizmu lub wzoru adiabatycznego $\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k$ bez głębszego uzasadnienia; teoria racjonalna jednak połączyć musi rozwiązanie mechanicznej strony zjawiska z równoczesnym zbadaniem jego strony termodynamicznej.

Równanie, które służy do określenia rozkładu termicznego, pojawia się w literaturze naukowej dopiero w roku 1894¹⁾; można je napisać w formie:

$$\frac{c\rho}{A} \left(\frac{\partial\theta}{\partial t} + u \frac{\partial\theta}{\partial x} + v \frac{\partial\theta}{\partial y} + w \frac{\partial\theta}{\partial z} \right) = -p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \Phi + \kappa \Delta^2\theta$$

lub dogodniej:

$$(8) \quad \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} = -p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + (k-1) [\Phi + \kappa \Delta^2\theta],$$

gdzie pierwszy wyraz strony prawej określa wpływ termiczny rozprężenia, drugi $[\Phi = -\frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \dots$ i t. d.] wpływ ciepła tarcia, trzeci przewodnictwa cieplnego. Równania hydrodynamiczne zaś, jeżeli chodzi o gazy o niejednakowej temperaturze, przyjmują kształt uogólniony:

$$(9) \quad \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho X + \mu \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial \mu}{\partial x} \left[\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \frac{\partial \mu}{\partial y} \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] \text{ i t. p.}$$

Rozwiązania tych ogólnych równań w przypadkach specjalnych przedstawia jednak nadzwyczajne trudności. Oprócz kilku twierdzeń o zjawis-

kach termicznych, występujących przy wypływie gazów, nie poznaliśmy jeszcze żadnych ogólnych wyników, a znamy dotychczas tylko jedną ogólniejszą metodę: przybliżen stopniowych¹⁾, która czasami może być z korzyścią stosowana do rozwiązań specjalnych.

Nie widzimy jednak jeszcze możliwości rozwiązania takich przykładów jak: opór ciała szybko poruszanego w powietrzu, tony powstające przy gwałtownym wypływie gazów przez wązki otwór i t. p., i do nich to stosować musimy obecnie przedewszystkiem metodę doświadczalną.

Tem więcej zasługuje na uwagę fakt, że z podobieństwa dynamicznego, znajdującego tu znacznie szersze zastosowanie niż w hydrodynamicie, można skorzystać w licznych przypadkach do wnioskowania apriorycznego zupełnie ścisłego i często też do skontrolowania, rozszerzenia i uogólnienia praw empirycznie znalezionych.

§ 6. Pierwszą próbę na tem polu, podjętą przez Helmholtza²⁾, należy co prawda, uważać za zupełnie chybioną.

Już same równania zasadnicze Helmholtza podlegają zarzutom, właśnie co podniesionym: ponieważ Helmholtz nie zna jeszcze równania, określającego zmiany temperatury, wprowadza założenie izotermizmu zjawiska, czem już a priori wyklucza akustykę i w ogóle niemal wszystkie ruchy z wyjątkiem rurek Poiseuille'a.

W dalszym ciągu Helmholtz usiłuje wykazać analogię dynamiczną między ruchem balonu w powietrzu a ruchem statku na powierzchni wody, w sposób, który jeszcze mniej da się usprawiedliwić. Znaczna część oporu statku pochodzi z wytworzenia fal, na co nie ma analogii w przykładzie balonu. Do fal ściśnienia i rozprężenia, pochodzących z szybkiego ruchu ciała w powietrzu nie ma znów analogii w hydrodynamicie. A Helmholtz pomija ostatecznie jeszcze zupełnie zjawisko lepkości, nie zważając na to, że, jak wiadomo, w cieczy idealnej ciało, poruszające się z stałą prędkością, w ogóle żadnego nie doznaje oporu. Przeto też wynikiom liczbowym owej pracy, odnoszącym się do tego przedmiotu, żadnego nie można przypisać znaczenia, tem więcej, że zostały zepsute przez błąd liczbowy w założeniach rachunku³⁾.

Uwagi godnym jest jednak inny przypadek analogii ruchów atmosfery i wody, którego zbadanie zawdzięczamy Helmholtzowi⁴⁾: analogii

¹⁾ Smoluchowski. Rozpr. loc. cit., p. 74. Pierwsze przybliżenie zwykle wystarzającym jest w akustyce, która dzięki temu systematycznie się rozwinęła.

²⁾ Berl. Akad. Ber. 1873, p. 501; Ges. Abh. I, p. 158.

³⁾ Smoluchowski loc. cit., p. 79; zauważono to też w Encyclop. d. math. Wiss. IV, p. 154, 181 (Finsterwalder).

⁴⁾ Berl. Akad. Ber. 1889, p. 761; Ges. Abh. III, p. 309.

¹⁾ Neumann. Gött. Ber. 1894, p. 19; Kirchhoff. Vorl. ü. Wärme p. 194 (1894); Natanson. Rozpr. Ak. Krak. 27, p. 286; patrz także Smoluchowski „O atmosferze ziemi“ (Księga pamiątk. Uniw. Lwów 1900) p. 15; Rozpr. Ak. Krak. 43, p. 74 (1902); Natanson. Rozpr. Ak. Krak. 42, p. 76 (1902).

fal wodnych, wytwarzających się pod wpływem wiatru, z szeregiem chmur, powstających na powierzchni między dwiema warstwami powietrza o różnej gęstości (np. wskutek różnicy temperatury) i różnej prędkości.

W ogólnym przypadku fale na granicy dwóch ośrodków ($\frac{s_1 \dots \text{woda}}{s_2 \dots \text{powietrze}}$) mogłyby być podobne do fal na granicy ($\frac{S_1 \dots \text{powietrze 1}}{S_2 \dots \text{powietrze 2}}$) tylko w tym razie, jeżeli stosunki gęstości są takie same ($\frac{s_1}{s_2} = \frac{S_1}{S_2}$); ale przy założeniu ruchu potencjalnego statecznego można otrzymać podobieństwo także w razie różnicy w tym stosunku, a warunki do tego potrzebne określają stosunek długości fal w obu przypadkach.

Tak Helmholtz oblicza pod przyjęciem pewnych danych, że falom wodnym odpowiadałyby przy tej samej prędkości wiatru fale powietrzne o przeszło 2000 razy większej długości, i tłumaczy tem powstawanie szeregów chmur o odstępach kilkuset metrów do kilkudziesięciu kilometrów.

Nie chcąc bynajmniej zaprzeczyć doniosłości pojęcia takich fal w meteorologii, przecież zaznaczyć należy, że ścisłość porównania z rzeczywistymi falami wodnymi znacznie cierpi wskutek pominięcia włokowatości i lepkości, czynników, które, jak się zdaje, niemały!) wpływ wywierają na długość fal wodnych, powstających wskutek działania wiatru.

Zresztą podstawę całego rozumowania Helmholtza tworzą równania dla cieczy nieściśliwych, więc wchodzi ono właściwie w zakres hydrodynamiki, a nie aerodynamiki.

Chcąc używać pojęcia podobieństwa dynamicznego w sposób ścisły i chcąc objąć nim ruchy gazom właściwe, musimy uwzględnić ogólne równania (8) i (9), wyrażając w nich gęstość za pomocą prawa Boyle-Charles'a, bez wprowadzenia od początku specjalnych uproszczeń.

Siły zewnętrzne pomijamy w oddziałach 7—16; uwzględniamy je w § 17 i 18.

§ 7. Dla ogólności zmieniamy odrazu wszystkie zmienne i współczynniki z wyjątkiem k , które musi mieć tę samą wartość w gazach, między którymi istnieć ma podobieństwo. Podstawiamy więc:

nx, ny, nz	zamiast	x, y, z
mu, mv, mw	"	u, v, w
$\theta p, h \theta$	"	p, θ
$\beta \mu h^e, \gamma \mu h^e$	"	μ, κ
$\frac{R}{\alpha}$	"	R

¹⁾ Może nawet pierwszorzędny; patrz Lambe: Hydrodynamics, p. 549.

i uwzględniamy tak równocześnie już zmienność współczynników μ, κ ; przyjmując je proporcjonalne do potęgi ε -tej temperatury ¹⁾.

Wypływają z tego warunki:

$$\frac{abm^2}{hn} = \frac{b}{n} = \frac{\beta m h^e}{n^2}, \quad \frac{mb}{n} = \frac{\beta m^2 l^e}{n^2} = \frac{\gamma h^{1+e}}{n^2},$$

sprowadzające się do trzech tożsamości:

$$(10) \quad \frac{\beta}{\alpha \gamma} = 1; \quad m = \sqrt{\frac{h}{a}}; \quad b = \frac{m \beta h^e}{n} = \frac{\beta h^e \sqrt{h}}{m \sqrt{a}}.$$

Ponieważ stała R jest odwrotnie proporcjonalna do ciężaru cząsteczkowego M , wynika z pierwszego z owych warunków, że podobieństwo tylko o tyle istnieć może, o ile stosunek $\frac{\mu}{\kappa M}$ dla różnych gazów jest jednakowy. Tabliczka następująca współczynników $\frac{\mu}{\kappa M}$ (względem powietrza), pomnożonych przez M , pokazuje, że warunek ten istotnie dla różnych gazów dość dokładnie się spełnia:

$k=1.4$	H ₂	O ₂	N ₂	CO	NO
$\frac{\mu}{\kappa M}$	$\frac{6.72}{0.50} = 27$	$\frac{1.032}{1.1} = 29$	$\frac{1.028}{0.97} = 29$	$\frac{0.9828}{0.97} = 28$	$\frac{0.9530}{0.98} = 29$

$k=1.3$	CO ₂	N ₂ O	CH ₄	NH ₃
$\frac{\mu}{\kappa M}$	$\frac{0.6444}{0.82} = 34$	$\frac{0.6744}{0.82} = 36$	$\frac{1.3716}{0.62} = 35$	$\frac{0.9217}{0.57} = 27$

¹⁾ Dla lepkości powietrza i wodoru otrzymano wartość $\varepsilon = \frac{2}{3}$. Barus, Wied. Ann. 36, p. 358 (1889); Am. J. Sc. 35, p. 407 (1888); Puluj, Wien. Ber. 73, p. 589 (1876); dla CO₂ i kilku innych gazów otrzymano wartości bliskie jedności, Puluj, l. c.; Obermayer, Carl's Rep. 12, p. 465 (1876). Liczby dla odpowiedniego współczynnika przewodnictwa cieplnego ε są bardzo niepewne, wahają się np. dla powietrza między $\varepsilon = 0.42$ (Christiansen) i 0.77 (Schleiermacher), w ostatnich czasach Müller otrzymał 0.57 [Phys. Zeitsch. 2, p. 161 (1900)]; dawniejsza literatura: Winkelmann, Handb. d. Phys. II 2, p. 316—319. Dla CO₂ i kilka innych gazów ε jest większe. Przyjmując ε równe dla tarcia i przewodnictwa, zgodnie z teorią kinetyczną, możemy popełnić chyba bardzo mały błąd, który tylko w wyjątkowych przypadkach mógłby się wydatnić.

Cztery z owych sześciu współczynników $n, m, h, b, \alpha, \beta$ można zatem dobrać dowolnie, to znaczy, że do danego przykładu będzie istniał czterokrotnie — a po dobraniu stałych α, β , jeszcze dwukrotnie — nieskończony szereg podobnych przykładów, podczas gdy w hydrodynamice mieliśmy tylko pojedynczy szereg podobieństwa. Z tego właśnie pochodzi wielka rozmaitość zastosowań tej prostej metody w aerodynamice, którą uwydatnić chcemy następującymi przykładami.

§ 8. Zwykły wzór dla prędkości głosu $v = \sqrt{kRT\theta}$ spełnia oczywiście warunek $\left(m = \sqrt{\frac{h}{a}}\right)$ proporcjonalności prędkości do pierwiastku z temperatury. Przy tym stopniu przybliżenia prędkość jest niezależna od ciśnienia gazu i od wysokości tonu; ale uwzględniając lepkość i przewodnictwo cieplne, otrzymuje się według Kirchhoffa¹⁾ dokładniejszy wzór na rozchodzenie się głosu w rurach (o promieniu r):

$$(11) v = \sqrt{\frac{kp}{\rho}} \left[1 - \frac{\gamma}{2\alpha\sqrt{\pi N}} \right]; \quad \text{gdzie } \gamma = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} + \sqrt{\frac{\kappa}{cQ}} \left[\sqrt{k} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right];$$

który okazuje tę samą zależność od temperatury jak tamten, jeżeli się używa ciśnień odpowiednich, t. j. będących w stosunku $\frac{\mu\theta^{\frac{1}{2}+\epsilon}}{\sqrt{a}}$, i jeżeli się używa tonów o ilości drgań proporcjonalnej do $\sqrt{\frac{b}{a}}$.

Stawiając $h = a = \beta = 1$, wnioskujemy zgodnie z tym wzorem, że w rurach o rozmaitych szerokościach prędkość głosu będzie taka sama dla tonów, których częstość jest odwrotnie proporcjonalna do stosunku wymiarów, jeżeli równocześnie w tymże odwrotnym stosunku zmienia się ciśnienie gazu.

Posuwając się jeszcze o jeden stopień dalej w dokładności, trzeba zaznaczyć, że także natężenie głosu wpływać musi na jego prędkość²⁾, ale i wtedy podobieństwo będzie istniało, jeżeli amplituda zmieniać się będzie w stosunku wymiaru długości; z tego wypływa wniosek bardzo naturalny, że wpływ skończonej amplitudy w wązkich rurkach silnie się uwydatni niż w szerokich.

¹⁾ Pogg. Ann. 134, p. 177 (1868); L o w, Wied. Ann. 52, p. 652 (1894).

²⁾ Riemann. Gött. Abh. 8, p. 243 (1860); Earnshaw, Phil. Trans. 1860, p. 133; Rankine, Phil. Trans. 1870, p. 277; patrz także Riemann-Weber, Part. Diff. Gl. II, p. 469—521.

§ 9. Prawa oporu, którego doznaje ciało, poruszane w gazie z stałą prędkością, mimo licznych badań doświadczalnych, jeszcze nie są dostatecznie wyświetlone, a także próby badania teoretycznego nie powiodły się, z wyjątkiem krańcowego przypadku ruchu powolnego, gdzie przeważający wpływ lepkości spodziewać się może oporu proporcjonalnego do prędkości, co istotnie wskazują¹⁾ doświadczenia, wykonane nad bardzo powolnym ruchem. W każdym razie, ponieważ opór ma wymiar $p\alpha^2$, przeto wynika z równań (10) przy podstawieniu $\alpha = \beta = 1, h = 1, n = 1$, że dokładna proporcjonalność do prędkości istnieć musi, jeżeli z wzrostem prędkości równocześnie ciśnienie gazu podwyższymy w stosunku prędkości ($b = m$), a temperaturę w stosunku $(2 + \epsilon)$ -ej potęgi prędkości.

Przy szybszym ruchu, jak doświadczenia pokazały, opór wzrasta przybliżenie w stosunku kwadratowym prędkości; gdy szybkość zbliża się do prędkości głosu, opór wzrasta dość nagle w wiele szybszym tempie, przy jeszcze większych zaś prędkościach znowu w coraz powolniejszym stosunku²⁾.

Przeważnie też spotykamy się z założeniem proporcjonalności oporu do wymiarów powierzchniowych, choć niektóre doświadczenia wykazały jego niezupełną dokładność, a oprócz tego powszechnie przyjmuje się proporcjonalność oporu do gęstości gazu, choć to przypuszczenie nie ma do-tychczas żadnych podstaw doświadczalnych.

Wobec niepewności tych przypuszczeń i wobec zupełnego braku ścisłej teorii jest rzeczą uwagi godną, że proste rozważania podobieństwa dynamicznego posłużyć mogą do wyświetlenia niektórych z tych kwestyj.

§ 10. Przypuśćmy po pierwsze, że mierząc opór w powietrzu o pewnej temperaturze θ_0 i pewnym ciśnieniu p_0 , empirycznie znaleźliśmy zależność oporu B ciał geometrycznie podobnych, poruszanych z pewną prędkością (u_0), od ich wymiarów (x), zależność, którą wyrazimy za pomocą funkcji: $B = \varphi(x)$.

Chcąc zaś wyznaczyć opór tegoż ciała w gazie o innej wartości ciśnienia p , możemy odszukać w szeregu owych pomiarów dynamicznie podobny przykład $\left(\alpha = \beta = h = m = 1; n = \frac{1}{b}\right)$, należący do wymiaru $x \frac{p}{p_0}$, zatem połączony z oporem $\varphi\left(x \frac{p}{p_0}\right)$. Ponieważ opór ma wymiar $p\alpha^2$, zatem wartości jego w tych dwóch przypadkach będą w stosunku $b\alpha^2 = \frac{1}{b}$ t. j. w od-

¹⁾ Stokes. Combr. Phil. Soc. Trans. 9 (1851); Thiesen, Wied. Ann. 26, p. 314 (1885); Smoluchowski, loc. cit., p. 105.

²⁾ Patrz referat dotyczących badań: Encyclop. math. Wiss. IV, 17, 4 (Finsterwalder); 18, 1 (Cranz).

wrotnym stosunku ciśnień, z czego wynika ogólnie wartość oporu, należącego do ciśnienia dowolnego p i wymiaru liniowego x :

$$(12) \quad f(x, p) = \frac{p_0}{p} \varphi \left(\frac{x p}{p_0} \right).$$

Jeżeli np. znaleźliśmy α że opór jest proporcjonalny do pierwszej potęgi wymiaru: $\varphi(x) = ax$, to wynika z konieczności, że będzie on niezależny od ciśnienia, a jeżeli β proporcjonalny do powierzchni: $\varphi(x) = ax^2$, wtedy musi się też okazać proporcjonalność jego do ciśnienia p .

W analogiczny sposób można rozszerzyć wyniki badań także na wpływ zmienności temperatury, jeżeli poznana została jeszcze zależność jego od prędkości (przy danem ciśnieniu i temperaturze).

Określając mianowicie przez funkcję $\varphi(u, x)$ zależność oporu od prędkości i wymiaru przy danej temperaturze θ_0 i ciśnieniu p_0 , stanowiącą specjalny przypadek $\varphi(u, x) = f(u, x, \theta_0)$ ogólniejszej funkcji f , uwzględniającej także zależność od temperatury, zważmy że do ruchu, określonego przez dowolne elementy u, x, θ , można znaleźć zawsze dynamicznie podobny przykład w szeregu zbadanych już przykładów przy temperaturze θ_0 , mianowicie podobnym będzie ($a = \beta = b = 1; m = \sqrt{h}; n = h^{\frac{1}{2} + \varepsilon}$) ruch, określony przez

spółrzędne $u \sqrt{\frac{\theta_0}{\theta}}, x \left[\frac{\theta_0}{\theta} \right]^{\frac{1}{2} + \varepsilon}$, θ_0 , przy którym zmierzony został opór $\varphi \left(u \sqrt{\frac{\theta_0}{\theta}}, x \left[\frac{\theta_0}{\theta} \right]^{\frac{1}{2} + \varepsilon} \right)$. Z wymiaru oporu (bx^2) wynika tedy związek:

$$(13) \quad f(u, x, \theta) = \left[\frac{\theta}{\theta_0} \right]^{1+2\varepsilon} \varphi \left(u \sqrt{\frac{\theta_0}{\theta}}, x \left[\frac{\theta_0}{\theta} \right]^{\frac{1}{2} + \varepsilon} \right).$$

Jeżeli np. rezultatem doświadczeń była α proporcjonalność oporu do prędkości i do wymiaru liniowego, wynika z tego także przybliżona jego niezależność od temperatury (ściśle biorąc proporcjonalność do ε -tej potęgi temperatury) podczas gdy, β proporcjonalność do kwadratu prędkości i do wymiaru powierzchniowego koniecznie pociągałaby za sobą ściśłą odwrotną proporcjonalność do temperatury.

Za pomocą analogicznego rozumowania można na tej samej podstawie, korzystając z podobieństwa ($b = h = 1; m = \frac{1}{\sqrt{a}}; n = \frac{\beta}{\sqrt{a}}$), wyprowadzić wnioski co do oporu w rozmaitych gazach, które się dają objąć wzorem ogólnym:

$$(14) \quad \text{opór } B = \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^2 \frac{M_0 p_0}{M p} \left(\frac{\theta}{\theta_0} \right)^{1+2\varepsilon} \cdot \varphi \left(u \sqrt{\frac{\theta_0 M}{\theta M_0}}; \frac{x \mu_0 p}{\mu p_0} \sqrt{\frac{M}{M_0}} \left[\frac{\theta}{\theta_0} \right]^{\frac{1}{2} + \varepsilon} \right),$$

w którym znak (θ) oznacza wartości dla powietrza lub gazu normalnego, badanego. Pokazuje się zatem, że np. w założeniu α) opór będzie przybliżenie proporcjonalny do lepkości gazu (ściśle biorąc do ilorazu lepkości przez ε -tę potęgę temperatury), przy założeniu β) do jego gęstości.

Zauważyć należy, że zwykle przyjęte założenie proporcjonalności do przekroju ciała i do gęstości gazu nie da się utrzymać przy żadnym innym prawie, prócz właśnie owego prawa kwadratu prędkości, użycie więc tych założeń stanowczo jest błędem przy prędkościach krańcowo małych lub też bardzo dużych.

§ 11. Związki powyższe są matematycznie ściśle i pozostają oczywiście także ważnymi, mimo że przy przekroczeniu pewnych granic ruch staje się niestałym kłębującym (mouvement turbulent), co się ujawnia np. w powstaniu szmeru świszczącego (Reibungstöne); i mimo że zjawisko to pod względem teoretycznym jeszcze zupełnie jest niewytłomaczone, możemy (wskutek $a = \beta = h = m = 1; b = \frac{1}{n}; N = \frac{1}{t} = \frac{m}{n} = \frac{1}{n}$) przypowieździeć, że przy danej prędkości i temperaturze w pewnym gazie wysokość tonu (liczba drgań) będzie odwrotnie proporcjonalna do wymiaru ciała poruszanych, jeżeli równocześnie ciśnienie zostanie zmienione w odwrotnym stosunku wymiarów.

Istotnie prawo tego rodzaju zostało znalezione przez Strouhala¹⁾ w pracy nad tonami, powstającymi wskutek ruchu szybkiego ciała walcowatych, drutów i t. d. w powietrzu, ale prawo jeszcze dalej sięgające, mianowicie: że w powietrzu o ciśnieniu atmosferycznym liczba drgań jest przybliżenie proporcjonalna do ilorazu prędkości przez promień walca:

$$N = c \frac{v}{r}.$$

Za pomocą naszej metody wywnioskujemy łatwo, że wzór ten pociąga za sobą niezależność wysokości tonu od ciśnienia i temperatury.

Strouhala twierdzi wprawdzie, że obniżenie temperatury powoduje podwyższenie tonu, ale liczby, które przytacza, odpowiadające temperaturom 9°5' C. i 37° C., wcale nie wydają się przekonywającymi; zresztą, co prawda, także i wzór powyższy nie jest całkiem dokładny.

Łatwo też sprawdzić, że wzór ten pociąga za sobą równość stałej c dla różnych gazów, zatem niezależność tonu od rodzaju gazu. Nie znamy jeszcze doświadczeń dotyczących tej kwestyi.

¹⁾ Wied. Ann. 5, p. 216 (1878).

§ 12. Joule i Kelvin spostrzegli¹⁾, że ciała szybko poruszane w powietrzu, jak termometry, druty tworzące ogniwa termoelektryczne i t. p., ogrzewają się i że przyrost temperatury przy większych prędkościach, między $30 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ i $100 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, jest przybliżenie proporcjonalny do kwadratu prędkości, niezależny zaś od materiału i wymiarów ciała (wynosił około 1°C . dla $55 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$). Można zatem przyjąć $\Delta\theta = u^2 \cdot f(\theta, p)$, gdzie funkcja θ, p , określa zależność współczynnika proporcjonalności od temperatury i ciśnienia powietrza, nie zbadaną bliżej w owych doświadczeniach.

Do ruchu, dla którego owe prawo zostało stwierdzone, otrzymany ruch dynamicznie podobny, stawiając $a = \beta = h = m = 1; n = \frac{1}{b}$; przy czym $\Delta\theta$ musi pozostać niezmiennione; zatem $f(\theta, p) = f(\theta, pb)$; to znaczy, że owo podwyższenie temperatury musi być niezależne od ciśnienia powietrza. Również łatwo okazać (przy pomocy podobieństwa: $a = \beta = b = 1; m = \sqrt{h}$; $n = h^{s+\frac{1}{2}}$), że nie może ono zależeć od temperatury, przy której doświadczenie się odbywa.

Podobnie też dowiesć można ($a = m = h = b = 1; n = \beta$), że ogrzanie musi być niezależne od lepkości gazu, przy pomocy zaś podstawienia $h = a; m = n = b = 1; \beta = a^{-s}$, że ono dla różnych gazów musi być proporcjonalne do ich ciężaru cząsteczkowego.

Można zatem objąć powyższe uogólnienia wzoru Kelvin-Joulea, jednym wzorem: $\Delta\theta = aMu^2$, gdzie a jest stałą, równą dla wszystkich gazów (o ile mają równe h).

Gdyby ekstrapolacja tego wzoru dla u większych aniżeli prędkość głosu była dozwolona — co oczywiście nie wydaje się prawdopodobne — można by obliczyć, że meteor, lecący z prędkością $2.8 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$, musiałby się ogrzać do 2500°C . Dla małych prędkości (poniżej $30 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$) powyższe prawo empiryczne przestaje być ważne, ale pomiary nie były wystarczające do uwydatnienia odpowiedniej modyfikacji tego wzoru.

§ 13. Przejdziemy do analogicznego rozpatrywania praw wpływu gazów. Przy stosunkowo małej różnicy ciśnienia z obu stron długiej a waz-

kiej rurki objętość gazu przepływającego jest określona przez prawo Poiseuille-Meyera:

$$\Omega = \frac{p_2 - p_1}{l} \frac{r^4 \pi}{8\mu}$$

(jeżeli objętość gazu zostaje zmierzona pod ciśnieniem przeciętnym $\frac{p_1 + p_2}{2}$).

Stawiając $m = h = a = \beta = 1; b = \frac{1}{n}$, widzimy, że zastosowanie tego wzoru do rurek n razy dłuższych i szerszych tylko wtedy jest uprawnione, jeżeli równocześnie ciśnienia w stosunku $\frac{1}{n}$ zostaną zmniejszone (porówn. § 2). Ale prawidło, wypowiedziane w ostatnim zdaniu, nie jest wcale ograniczone do ruchu statecznego ani też do ruchów „spokojnych“; stosuje się np. równie dobrze do wypływu z naczynia zamkniętego przez otwór w ścianie.

Wzór powyższy służy zwykle jako podstawa do wyznaczenia współczynnika lepkości gazu, posiada jednakowoż tylko szczupły obręb ścisłej stosowności, gdyż nie uwzględnia ani bezwładności gazu, ani tarcia, powstającego wskutek zmienności prędkości wzdłuż rurki, ani różnic temperatury spowodowanych ruchem¹⁾.

Mimo to, można wykonać ściśle pomiary względnej lepkości rozmaitych gazów, korzystając z podobieństwa dynamicznego ($h = n = 1; m = \frac{1}{V\alpha}; b = \frac{\beta}{V\alpha}$), t. j.: używając do tych porównawczych pomiarów ciśnień proporcjonalnych do wartości współczynnika $\frac{\mu}{VM}$ dla różnych gazów. Przy użyciu takich ciśnień odpowiednich stosunek ciśnienia czynnego do objętości przyprylwającej $\frac{p_1 - p_2}{\Omega}$ będzie dokładną miarą lepkości, i to pozostanie ogólnie ważnym, bez względu na kształt naczynia lub przewodu, nawet dla wypływu przez otwór w cienkiej blaszce. Użycie rurek Poiseuille'a oczywiście zawsze będzie dogodniejsze, ponieważ błędy, pochodzące tam z niezupełnie odpowiedniego dobrania ciśnienia, nie dadzą się odczuć; także dla gazów o różnych wartościach współczynnika k użycie tej metody da lepsze rezultaty, aniżeli zwykły sposób mierzenia.

Można także wprowadzić znaczne ulepszenie w mierzeniu zależności lepkości gazów od temperatury dzięki podobieństwu ($a = \beta = n = 1; m = V\sqrt{h}$; $b = h^{\frac{1}{2} + s}$). Jeżeli przy dwóch doświadczeniach, wykonanych nad tym sa-

¹⁾ Kelvin. Math. Phys. Papers I, p. 400, 445.

¹⁾ Co do wpływu tego czynnika: Smoluchowski loc. cit., p. 104.

nym gazem w różnych temperaturach używać będziemy ciśnień proporcjonalnych do potęgi $\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)$ -tej temperatury, wtedy różnica wartości $\frac{p_1 - p_2}{\Omega}$ będzie dokładną miarą zmiany lepkości wskutek temperatury.

Metoda ta zasługuje na uwagę zwłaszcza z tej przyczyny, że dawniejsze pomiary, przy użyciu rurek Poiseuille'a a aparatu Maxwell-Meyera (krążków wahających się), dały wyniki sprzeczne w owej kwestyi, i że sprzeczność ta dotychczas nie została wyjaśniona w sposób zadawalający¹⁾.

Także metodę Maxwell-Meyera można zresztą ulepszyć w sposób analogiczny, o tyle jednak więcej skomplikowany, że należałoby odpowiednio dobrać nie tylko ciśnienie gazu, ale także czas wahania krążka.

§ 14. Do szerszych rur, jakie w praktyce bywają używane do przewodów gazowych, wzór Poiseuille'a nie może być stosowany, i nie mamy jeszcze ani zaczątku odpowiedniej teorii. W praktyce zwykle przyjmuje się wzór: $u = a \sqrt{\frac{(p_1 - p_2) d}{l \rho}}$, w którym d oznacza przekrój rury, l jej długość, ρ gęstość gazu, u przeciętną jego prędkość.

Wymiary jego istotnie odpowiadają koniecznemu warunkowi $\left(\frac{h}{a} = m^2\right)$, nawet dla rozmaitych gazów, jeżeli się przez ρ rozumie ich gęstość $\rho = \frac{p}{R\theta}$.

Natomiast forma wzoru, proponowana przez Stockalpera²⁾ na mocy doświadczeń przy budowie tunelu Gottharda: $u = a \sqrt{\frac{(p_1 - p_2) d}{l \rho \left(5 + \frac{1}{d}\right)}}$, jest niemożliwa, gdyż nie spełnia warunków jednorodności.

Można w ogóle w podobny sposób, jak to czyniliśmy dla oporu ciał, albo też bezpośrednio, używając równań (10), obliczyć ogólny wzór, wyznaczający zależność prędkości u od p_1, p_2, l, d, θ i od współczynników gazu M, μ , jeżeli doświadczalnie zbadano np. zależność jej od wielkości p_1, p_2, l dla powietrza (M_0, μ_0) o pewnej temperaturze θ_0 .

Oznaczając tę zależność za pomocą funkcji $\varphi(p_1, p_2, l)$, otrzymamy ogólnie:

$$(15) u = \sqrt{\frac{\theta M_0}{\theta_0 M}} \varphi \left(\frac{p_1 \mu_0 d}{\mu d_0} \sqrt{\frac{M}{M_0}} \left[\frac{\theta_0}{\theta} \right]^{\frac{1}{2} + \varepsilon}; \frac{p_2 \mu_0 d}{\mu d_0} \sqrt{\frac{M}{M_0}} \left[\frac{\theta_0}{\theta} \right]^{\frac{1}{2} + \varepsilon}; \frac{l d_0}{d} \right).$$

¹⁾ Schumann. Wied. Ann. 23, p. 353 (1884).

²⁾ Dingle's. Polyt. J. 1880.

Wpływ gazu przez otwór w cienkiej blaszce stanowi krańcowy przypadek przeciwny do ruchu w rurkach Poiseuille'a. Przy małej nadwyżce ciśnienia, objętości rozmaitych gazów wypływających czynią zadość z pewnym przybliżeniem prawu Bunsena: odwrotnej proporcjonalności do pierwiastku z gęstości (zatem z M), ale zależnie od kształtu otworu mogą się przytrafić znaczne zboczenia od tego prawidła¹⁾. Wobec tego zauważyć należy, że będzie ona ściśle ważną dla otworu jakiegobądź rodzaju, jeżeli ciśnienia zostaną obrane proporcjonalnie do $\frac{\mu}{\sqrt{M}}$, jak to wynika z podobieństwa $\left(h = n = 1; m = \sqrt{\frac{1}{a}}; b = \frac{\beta}{\sqrt{a}}\right)$.

Łatwo się przekonać, że ścisła stosowność prawa Bunsena w zwykłej używanej formie, t. j. przy stałym ciśnieniu, pociągałaby za sobą proporcjonalność objętości przepływającego gazu do przekroju otworu $\left(h = b = \beta = 1; n = m = \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$, podczas gdy proporcjonalność jej do trzeciej potęgi wymiarów (geometrycznie podobnych otworów) wymagałaby, żeby rozmaite gazy, caeteris paribus, przepływały w ilościach odwrotnie proporcjonalnych do współczynnika lepkości, jak to w specjalnym przypadku ilustruje prawo Poiseuille'a.

§ 15. Saint Venant i Wantzel²⁾ zauważyli, że prędkość gazu wypływającego przez otwór nie może być powiększona przez podwyższenie ciśnienia ponad pewną granicę, która nie zależy od różnicy ciśnienia wewnętrznego p_2 i zewnętrznego p_1 , tylko od ich stosunku $\frac{p_2}{p_1}$. Przyjąwszy ten wynik, wyobraźmy sobie dwa doświadczenia nad tym samym otworem, ale z różnymi ciśnieniami, w których ta wartość krytyczna została osiągnięta:

$$(1) \frac{p_2}{p_1} = \frac{P_2}{P_1} \quad (2).$$

Ów ruch pierwotny, określony przez p_2, p_1 , będzie podobny do trzeciego rodzaju ruchu (3), określonego przez ciśnienia P_2, P_1 i wymiary otworu zmniejszone w stosunku $\frac{p_2}{P_2} = \frac{p_1}{P_1}$. Ponieważ prędkość nie zmienia się przy zmianie 1—3, porównanie z przypadkiem drugim pokazuje, że prędkość w ogóle będzie niezależna od wymiarów otworu³⁾.

¹⁾ Donnan. Phil. Mag. 49, p. 423 (1900).

²⁾ Patrz na str. 5-ej²⁾.

³⁾ Przybliżenie równa prędkości głosu: Hugoniot, Comptes Rendus 103, p. 1178 (1886); Lamb, Hydrodynamics p. 28.

Wniosek ten, będący konsekwencją istnienia stosunku krytycznego $\frac{p_2}{p_1} = 1.89$, zgadza się z wynikami prac nad tym przedmiotem.

Mach i Salcher¹⁾ i Emden²⁾ spostrzegli powstawanie prążków w promieniu gazu wypływającego, gdy stosunek ciśnień przekracza ową wartość krytyczną. Emden tłumaczy to zjawisko różnicami gęstości, odpowiadającymi szeregowi fal akustycznych stojących. Odstęp tych prążków wyraził przez wzór empiryczny:

$$\lambda = 0.88 d \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} - 1.9,$$

w której d oznacza średnicę otworu wypływania.

Korzystając z naszej metody, byłby jednak Emden mógł sobie oszczędzić część pracy doświadczalnej, bo wystarczyło dowieść empirycznie, że λ jest tylko zależne od stosunku ciśnień: $\lambda = f\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$; wtedy już z podobieństwa ($\alpha = \beta = h = m = 1; b = \frac{1}{n}$) bezpośrednio wynika, że λ musi być także proporcjonalne do wymiarów d . Podobnie też znalazłszy raz dla powietrza taki wzór, można było bezpośrednio wnioskować na podstawie ($b = h = 1; m = \frac{1}{V\alpha}, n = \frac{\beta}{V\alpha}$), że odstęp prążków musi być niezależny od istoty gazu, co faktycznie wykazały doświadczenia Emdena, tak samo jak możemy przepowiedzieć (wskutek podobieństwa $\alpha = \beta = n = 1; m = \sqrt{h}; b = h^{\frac{1}{2} + \epsilon}$), że wielkość ta okaże się niezależna od temperatury.

§ 16. Ruchy kłębujące (mouvements turbulents), występujące przy szybkim wypływie, ujawniają się jako ton świszający. Kohlrausch³⁾ badał takie tony, używając szczelin wąskich jako otworów, co do zależności od szerokości szczeliny s i od ciśnienia p_1 gazu w rezerwoarze przed szczeliną. Gaz wypływał na wolne powietrze, skutek zatem zmiany ciśnienia zewnętrznego p_2 nie mógł się w owych pomiarach uwytłumaczyć. Możemy jednak a priori obliczyć, jaka ta zależność będzie, zważając że ilość drgań N ma wymiar $\frac{u}{x}$ i powołując się na podobieństwo ($\alpha = \beta = m = h = 1; n = \frac{1}{b}$). Pisząc wzór empiryczny Kohlrauscha w formie $N = \varphi(s, p_1)$, otrzymamy

¹⁾ Wien. Ber. 98 (1889); Wied. Ann. 42, p. 144 (1890).

²⁾ Wied. Ann. 69, p. 264, 426, 453 (1899).

³⁾ Wied. Ann. 13, p. 545 (1881).

tak ogólny wzór, zawierający zależność od ciśnienia p_2 : $N = \frac{p_2}{p_0} \varphi\left(\frac{sp_2}{p_0}, \frac{p_1 p_0}{p_2}\right)$, a w podobny sposób można by także przepowiedzieć zależność od temperatury.

Pomiary Kohlrauscha nie dadzą się jednak wyzyskać w taki sposób, ponieważ nie znajdujemy podanych w nich bezpośrednich wartości p_1 , tylko od tychże zależne średnie prędkości U gazu wypływającego i ponieważ rezultaty ostateczne, streszczone we wzorze przybliżonym $N = A(U - B)$ i w tabliczce wartości A, B , jako funkcji zmiennej s , nie uwytłumiają tych związków w wyraźnej postaci matematycznej.

§ 17. W dotychczas omawianych zastosowaniach pomijaliśmy zupełnie pewien czynnik, jako nie znaczący w porównaniu z innymi, to jest: siłę ciężkości. Ciężkość odgrywa jednak pierwszorzędą rolę w pewnej klasie zjawisk aerodynamicznych, t. j. przy wytwarzaniu prądów konwekcyjnych w otoczeniu ciał ogrzanych i w pewnych zastosowaniach do fizyki atmosfery.

Musimy w takich razach uzupełnić warunki (10) dodatkowym równaniem, odnoszącym się do wymiarów siły ciężkości g , które ogranicza różnorodność podobieństwa o jeden stopień, ponieważ wtedy spełnione muszą być warunki:

$$(16) \quad m^2 = n = ah; \quad b = \frac{m}{n} \beta l^e.$$

Tak np. Lorenz¹⁾ obliczył z pewnem przybliżeniem ilość ciepła, umiesioną przez 1 cm² powierzchni ściany [o wysokości H , a szerokości nieskończonej], ogrzanej o θ_0 stopni ponad temperaturę T gazu otaczającego na:

$$L = -\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0.548 \sqrt{\frac{cg \alpha^2 \theta^2}{\mu HT}} \theta_0^{3/4}.$$

dziwny kształt tego wzoru mógłby wzbudzić pewne wątpliwości, ale podstawienie odpowiednich wymiarów (c ma wymiar R, g bez wymiaru) daje wynik zgodny z warunkami podobieństwa (16), co prawda, o ile się pomija wielkość ϵ , t. j. zmienność współczynników lepkości i przewodnictwa; pominięcie to stanowi oczywiście ograniczenie ważności do małych θ_0 .

§ 18. Poważną trudność teoretyczną przy oznaczeniu przewodnictwa ciepłego gazów nastęrcza właśnie obecność prądów konwekcyjnych, które nie dadzą się zupełnie usunąć, choć można wpływ ich zmniejszyć przez roz-

¹⁾ Wied. Ann. 13, p. 582 (1881). Wzór ten także w innych przypadkach okazał się przydatnym.

rzędzie gazu, przyczem jednak poniżej pewnej granicy ciśnienia, jako nowe źródło błędów występuje t. zw. molekularny skok temperatury ¹⁾).

Wobec tego jest rzeczą interesującą, że względne wartości współczynnika α dla różnych gazów można otrzymać mimo nieznanych prądów konwekcyjnych, korzystając albo z podobieństwa $\left(h = 1; n = \alpha; b = \frac{\beta}{V\alpha} \right)$, albo

z $(n = 1; h = \frac{\beta}{\alpha}; b = \beta h^e)$ t. j. używając dla różnych gazów naczyń o rozmiarach odpowiednich i ciśnien odpowiednich, albo też temperatur i ciśnien odpowiednich.

Także zależność współczynnika przewodnictwa od temperatury, będąca przedmiotem długoletniego sporu naukowego między Winkelmannem a Graetzem ²⁾ i dotychczas nie wyznaczona z dostateczną pewnością, może być zbadana w sposób całkiem ścisły, jeżeli się zważy, że powstanie

ruch analogiczny $(\alpha = \beta = 1; n = h = m; b = h^{e - \frac{1}{2}})$ przy temperaturze wyższej, w naczyniu o wymiarach w tym samym stosunku większych, z ciśnieniem proporcjonalnym do potęgi $\left(e - \frac{1}{2} \right)$ -ej, i że prąd ciepła (pro 1 cm² powierzchni) wtedy powiększony zostanie w stosunku h^e , z czego e wyznaczone być może.

Oczywiście wchodzi tu w grę także inne trudności doświadczalne, ale sądzę, że np. metoda galwanicznego ogrzewania drucików ³⁾ łatwo dałaby się do tych przepisów dostosować, i że wyniki w każdym razie byłyby dokładniejsze, niż przy pominięciu takich ostrożności.

Możnaby także, podobnie jak w rozdziałach poprzednich, dokonać uogólnienia empirycznie znalezionych rezultatów co do wpływu prądów konwekcyjnych, ale poprzestaniemy na tych kilku przykładach, ponieważ zakres zastosowań tu jest szerszy niż w owych przypadkach, zwłaszcza, że jeszcze nie posiadamy odpowiednich badań doświadczalnych, które by posłużyć mogły za punkt wyjścia.

¹⁾ Smoluchowski. Wied. Ann. 64, p. 101 (1898); Wien. Ber. 107, p. 304 (1898); 108, p. 5 (1899).

²⁾ Patrz Winkelmann. Handb. d. Phys. II, 2, p. 316—319.

³⁾ Schliermacher. Wied. Ann. 34, p. 623 (1888); patrz także Smoluchowski, Wien. Ber. 108, p. 17 (1899).

M. ERNST.

WYZNACZENIE KSZTAŁTU POZORNEGO SKLEPIENIA NIEBIESKIEGO.

Znane zjawisko, że widzialne nad naszymi głowami sklepienie niebieskie, przedstawia się oczom naszym nie w postaci półkuli, lecz w kształcie powierzchni, której odległość od środka wzrasta w miarę, jak zbliżamy się do poziomu, było od najdawniejszych czasów przedmiotem licznych badań. Jednakowoż w przeważnej części tych badań dążono do wyjaśnienia zjawiska z punktu widzenia optyczno-fizyologicznego, a stosunkowo mało zajmowano się dokładnym wyznaczeniem kształtu geometrycznego. Tymczasem podstawą wszelkiej ścisłej teorii zjawiska musi być ów ściśle wyznaczony kształt geometryczny, i z tym kształtem zgadzać się muszą wyniki wielkościowe, wynikające z pomiarów, osiąganych w dziedzinie optyki fizyologicznej. Wprawdzie pomiary w dziedzinie wspomnianej nauki nie są tak dokładne i ścisłe, jak np. w astronomii lub fizyce, ale nie ulega wątpliwości, że postęp wiedzy przewyciężył zdoła trudności, które się tu przy wykonywaniu ścisłych pomiarów następują. Dopóki wszakże to będzie niemożliwe, dopóty żadna teoria fizyologiczna kształtu pozornego sklepienia niebieskiego nie będzie w stanie zadowolić całkowicie astronoma, choćby inne względny przemawiały za jej słusznością.

Zachodzi tu wszakże trudność wielka, że nie można wcale mówić o jakimś kształcie trwałym i ogólnym, zmienia się on prawdopodobnie w zależności od stanu atmosfery, a jest on też niewątpliwie różny dla każdego indywiduum. Jeżeli chodzi o kształt ogólny, wszystkie spostrzeżenia są zgodne, gdy wszakże chodzi o ściślejszą definicję kształtu za pomocą liczb, różnice subiektywne są bardzo znaczne.

Przy wyznaczaniu kształtu pozornego sklepienia niebieskiego postępowano zazwyczaj w ten sposób, iż wybierano gwiazdy, które w danej chwili na podstawie prostego szacowania znajdowały się na środku koła wierzchołkowego gwiazdy pomiędzy zenitem a horyzontem, a następnie obliczano lub też mierzono prawdziwą wysokość gwiazdy. Gdyby sklepienie niebieskie było półkulistym, z rachunku lub pomiaru powinnyby się otrzymać wysokość,