O. NICCOLETTI,

SUR LES PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DES FONCTIONS ANALYTIQUES.

(O WŁASNOŚCIACH ARYTMETYCZNYCH FUNKCYJ ANALITYCZNYCH).

M. P. Stäckel, dans un récent mémoire de même titre que cette Note, et par une méthode [1]) dont la première idée doit être recherchée dans une remarque de Weierstrass, construit un exemple remarquable d'une fonction analytique et transcendante y d'une variable complexe x, qui, de même que son inverse $x(y)$, a une valeur algébrique par toute valeur algébrique de l'argument du domaine de son existence.

Il résulte de cet exemple de M. Stäckel que la propriété précédente n'est pas caractéristique pour les fonctions algébriques d'une variable complexe. Mais, si on remarque, avec M. Stäckel, que pour les fonctions algébriques pas seulement leurs inverses, mais aussi leurs dérivées de tous les ordres sont algébriques et prennent par conséquent des valeurs algébriques pour toute valeur algébrique de l'argument, on serait amené à penser que c'est là une propriété caractéristique des fonctions algébriques.

Or il n'est rien; il est, en effet, possible de construire une fonction transcendante d'une variable complexe, qui jouit de cette propriété; mais il y a plus: il est possible construire une équation transcendante (avec des coefficients rationnels):

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

[1]) Cf. P. Stäckel, Arithmetische Eigenschaften analytischer Functionen (Acta Mathematica. Bd. 25. S. 371—383).

des n variables complexes $x_1, x_2, \dots, x_n$, qui dans un domaine convenable (qui peut même s'étendre à tout le S_n complexe $x_1, x_2, \dots, x_n$) définit une quelconque des variables x_i en fonction analytique et transcendante des autres, et telle que, si l' on lie les $x_1, x_2 \dots x_n$ par un système de relations algébriques quelconques (à coefficients rationnels) la x_i et ses dérivées de tous les ordres se réduisent à des fonctions algébriques des quelques-unes des variables $x_i \dots x_{i-1}, x_{i+1} \dots x_n$.

1. Soit, à cet effet:

$$f(x_1, x_2 \dots x_n) = \Sigma A_{q_1 q_2 \dots q_n} x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n}, \quad (q_1+q_2+\dots+q_n \leqslant m) \tag{1}$$

une fonction rationnelle entière des n variables x à coefficients rationnels entiers sans facteur commun, de degré m, irréductible das le domaine absolu de rationnalité [1]). On peut étendre à ces fonctions la notion d'hauteur, introduite par M. Cantor [2]), et appeler par ce nom le nombre:

$$h_f = m - 1 + \Sigma |A_{q_1 q_2 \dots q_n}|. \tag{2}$$

Nons appelerons aussi h_f hauteur de l'équation algébrique [3]):

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Si la fonction f a ses coefficients rationnels, mais non entiers, et si k en est le plus petit multiple des denominateurs, nous appelerons hauteur de f l'hauteur du produit kf.

Il y a un nombre fini des fonctions [4]) de n variables, qui ont une hauteur donneé h [5]). En effet, si h est donneé, il ne peut avoir qu' un nombre fini de valeurs possibles de m et des $A_{q_1 q_2 \dots q_n}$.

---

[1]) Il est tout à fait évident que des développements analogues ont lieu, sauf quelque petite modification, dans le domaine $R(i)$ des nombres complexes de Gauss et même dans un corps algébrique quelconque.

[2]) Cf. Cantor. Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs der reellen algebraischen Zahlen (Crelle. Bd. 77. S. 258).

[3]) Ici, et dans la suite, suivant les idées arithmétiques de Kronecker, nous supposerons toujours que les fonctions et les équations à considérer aient leurs coefficients rationnels.

[4]) Nous entendons par là: fonction rationnelle entière irréductible, à coefficients rationnels entiers, sans facteur commun.

[5]) Il s'en suit, par un théorème connu de la théorie des ensembles que: l'ensemble des équations algébriques de n variables est dénombrable.

Désignons par $\varphi_h(x_1, x_2 \dots x_n)$ le produit de toutes les $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de l'hauteur h, et posons:

$$\psi_h(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1}^{h}{}_{\nu}\, \varphi_\nu(x_1, x_2 \dots x_n), \quad \psi_0(x_1, x_2 \dots x_n) = 1; \tag{3}$$

on voit que ψ_h est un polynôme à coefficients rationnels entiers des $x_1, x_2, \dots, x_n$; nous appelons λ_h son degré par rapport aux variables.

2. Soit maintenant:

$$\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2 \dots \varrho_r \dots, \tag{4}$$

une suite divergente de nombres entiers positifs; et

$$\theta_0(x_1, x_2 \dots x_n), \theta_1(x_1, x_2 \dots x_n) \dots, \theta_r(x_1, x_2 \dots x_n) \dots, \tag{5}$$

une suite de polynômes à coefficients rationnels entiers des degrés respectifs:

$$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_r \dots, \tag{5*}$$

sur lesquels nous ne faisons d'abord aucune hypothèse.

Définissons encore n suites divergentes des nombres entiers positifs $\mu_r^{(i)}$ par les lois recurrentes:

$$\mu_{r+1}^{(i)} \geqslant \mu_r^{(i)} + \varrho_r \lambda_r + \sigma_r + 1; \; (\mu_0^{(i)} = 0), \quad (i=1,2\dots n;\ r=1,2\dots)$$

et posons, quelque soit r:

$$\omega_r(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{\mu_r^{(1)}} x_2^{\mu_r^{(2)}} \dots x_n^{\mu_r^{(n)}} \theta_r(x_1, x_2, \dots, x_n) \{\psi_r(x_1, x_2 \dots x_n)\}^{\varrho_r}; \quad (r = 0, 1, 2 \dots) \tag{7}$$

ω_r sera un polynôme en $x_1, x_2 \dots x_n$, à coefficients rationnels entiers, dont nous donnons ici quelques simples propriétes.

a) On a:

$$\omega_r(x_1 \dots x_{i+1}, 0, x_{i-1} \dots x_n) = 0, \quad (i=1,2\dots n;\ r=1,2\dots)$$

b) Le degré de ω_r par rapport à x_i est supérieur ou égal à $\mu_r^{(i)}$, inférieur ou égal à:

$$\mu_r^{(i)} + \varrho_r \lambda_r + \sigma_r = \mu_{r+1}^{(i)} - 1,$$

il s'en suit que: pour $r \neq s$, les deux polynômes ω_r, ω_s n'ont pas de termes semblables.

c) Si l'on lie les $x_1, \ldots, x_n$ par une équation algébrique (irréductible):

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0 , \tag{8}$$

tous les ω_r, pour lesquels $r \geqslant h_g$, se réduisent à zéro. En effet, pour $r \geqslant h_g$, le polynôme ψ_r et par conséquent ω_r, est divisible par $g(x_1, x_2 \ldots x_n)$.

d) Une dérivée quelconque de ω_r d'ordre inférieur à ϱ_r contient encore le facteur ψ_r; or $\lim\limits_{r=\infty} \varrho_r = +\infty$; il s'ensuit que: Si les $x_1, \ldots, x_n$ sont liés par l'équation algébrique (8), les ω_r et toutes ses dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à m, pour lesquels $r \geqslant h_g$, $\varrho_r \geqslant m$, se réduisent à zéro.

3. Considerons maintenant la série:

$$\sum_0^\infty {}_h\, u_h\, \omega_h(x_1, x_2 \ldots x_n) , \tag{9}$$

où les u_h sont des nombres rationnels, que nous allons fixer. Si on développe tous les produits, il n'y aura jamais, par la propriété *b*) des ω_r, de termes semblables dans deux termes différents de la série (9); il en resulte donc une série n-ple de puissances:

$$\Sigma\, a_{q_1 q_2 \ldots q_n} x_1^{q_1} x_2^{q_2} \ldots x_n^{q_n} , \tag{10}$$

dans laquelle chaque coefficient $a_{q_1 \ldots q_n}$ est le produit d'un nombre entier par une seule u_t; il est aussi évident qu' une même u_t figure comme facteur dans un nombre fini des coefficients $a_{q_1 q_2 \ldots q_n}$.

Désignons maintenant par:

$$\Sigma\, A_{q_1 q_2 \ldots q_n} x_1^{q_1} x_2^{q_2} \ldots x_n^{q_n} , \tag{11}$$

une série n-ple de puissances des x, qui converge absolument et uniformément dans un certain domaine à n dimensions (C peut même être identique à S_n); il sera toujours possible de satisfaire aux inégalités:

$$| a_{q_1 q_2 \ldots q_n} | < | A_{q_1 \ldots q_n} | , \tag{12}$$

par des valeurs rationnelles des u_h. En effet, ces inégalités se réduisent à d'autres de la forme:

$$| u_r | < \varepsilon_r , \qquad (r=0,1,2\ldots) \tag{13}$$

où ε_r est un nombre réel positif (pas toujours zéro) que l'on peut régarder comme parfaitement déterminé, pour chaque valeur de r, à la suite de (12).

Supposons, pour simplifier, que (11) converge dans tout le S_n complexe; alors si depuis une certaine valeur de r les (13) sont vérifiées, la fonction

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_0^\infty {}_h\, u_h\, \omega_h(x_1, \ldots, x_n) = \Sigma\, a_{q_1 q_2 \ldots q_n} x_1^{q_1} x_2^{q_2} \ldots x_n^{q_n} , \tag{14}$$

sera une transcendante entière des n variables x, et il sera de même de toutes ses dérivées partielles d'un ordre quelconque: celles ci pourront en outre se calculer par la dérivation terme à terme de la série (9) autant de fois que l'on veut.

Ce n'est pas inutile de remarquer que: les nombres rationnels u_h peuvent être choisis tout à fait arbitraires entre les limites fixées par les (13).

4. Soit maintenant l'équation:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 ; \tag{15}$$

sous certaines conditions initiales, que nous supposons vérifiées en un point donné de S_n (p. ex. l'origine, ce qui exige des conditions relatives à $\theta_0(x_1 \ldots x_n)$ seulement) elle définit une varieté analytique V dans une region de S_n à n dimensions. C'est dans cette region que nous développerons nos considérations.

A) Toute variété algébrique de S_n coupe la variété V suivant une variété algébrique.

Nous appelons variété algébrique dans S_n l'ensemble des points, dont les cordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vérifient un système d'équations algébriques:

$$g_\varrho(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 . \qquad (\varrho = 1, 2 \ldots q) \tag{16}$$

L'intersection éventuelle de la variété (16) avec la V est définie en effet par le système simultané des équations (15), (16); en désignant alors par $h+1$ la plus grande parmi les hauteurs des facteurs irréductibles des g_ϱ, on voit aisément que tous les ω_r, pour lesquels $r > h$, se réduisent à zéro (2, *c*). En faisant donc, quelque soit t:

$$F^{(t)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_0^t {}_h\, u_h\, \omega_h(x_1, \ldots, x_n) , \tag{17}$$

on peut substituer au système (15), (16) le système des $q+1$ équations algébriques:

$$F_h(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0 ; \quad g_\varrho(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0 \qquad (\varrho = 1, 2 \ldots q) \tag{18}$$

ce qui démontre le théorème A).

Nous appelons élément d'ordre s de la variété V le système:

$$(x_1, x_2 \dots x_n\,;\ dx_1, dx_2, \dots, dx_n\,;\ \dots d^s x_1, d^s x_2 \dots d^s x_n)\,,$$

des coordonnées x et de leurs différentielles jusqu' à l'ordre s, qui vérifient l'équation $F=0$ et ses différentielles jusqu' à l'ordre s. On a alors:

B) Tout élement d'ordre fini de la variété V, correspondant à un point de l'intersection de V avec une variété algébrique quelconque dans S_n, est aussi algébrique.

En effet, considérons avec les équations (15), (16) celles que l'on obtient par la différentiation de F jusqù à l'ordre s:

$$d^t F = 0\,. \qquad (t=1,2\dots s) \tag{19}$$

Le premier membre de chacune des équations (19) est une fonction rationnelle entière des différentielles $d^u x_i$, dont les coefficients sont les dérivées partielles de F d'ordre non supérieur à s.

Si les (16) sont vérifiées, tous les polynômes ω_r, pour lesquels $r > h$, $\varrho_r > s$ et leurs dérivées sont nuls (2, d); il s'en suit que chacune des (19) se réduit à un polynôme par rapport à tous ses arguments, ce qui démontre le théorème B).

Supposons que l'origine soit dans la variété V et que toutes les dérivées $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$ y soient différentes de zéro. C'est ce qui peut arriver d'une infinité de façons, choissisant convenablement le premier polynôme θ_0 de la suite (5). Il est alors possible d'exprimer une quelconque des variables x_i en série des puissances des autres $n-1$:

$$x_i = P(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)\,, \quad (i=1,2\dots n)\,, \quad P(0\dots 0)=0 \tag{20}$$

ayant un domaine de convergence à $n-1$ dimensions autour du point $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = (0\dots 0)$.

Dans ce domaine x_i est définie comme fonction analytique et monodrome de ses arguments, et elle à évidemment les propriétés suivantes:

C) Si on lie les x par un système quelconque de relations algébriques, une quelconque de ces variables x_i, et ses dérivées partielles par rapport aux autres, calculées moyennant (20), se réduisent à des fonctions algébriques de quelques-unes de ces variables.

5. Ce résultat, si remarquable qu' il soit, ne suffit pas, ainsi que M. Stäckel le fait observer, à nous assurer de l'éxistence des fonctions analytiques et transcendantes d'une ou de plusieurs variables complexes ayant les propriétés enoncées dans le théorème C). On pourrait en effet, penser que l'équation $F=0$, tout étant transcendante, définisse dans tout point algébrique $(\xi_1 \dots \xi_n)$ de la variété V des éléments (dans le sens de Weierstrass) des fonctions analytiques algébriques:

$$x_i - \xi_i = P(x_1 - \xi_1 \dots x_{i-1} - \xi_{i+1},\ x_{i+1} - \xi_{i+1} \dots x_n - \xi_n)\,,\quad P(0\dots 0)=0 \tag{21}$$

c'est à dire, ou pourrait penser que tout élément (21), tiré de $F=0$, vérifie une équation algébrique:

$$g_{(\xi)}(x_1, x_2 \dots x_n) = 0\,, \tag{22}$$

variable de point en point, d'élément en élément. Pour nous éxprimer avec clarté, si non avec toute rigueur, on pourrait penser que la variété V contienne un ensemble infini de variétés algébriques, distinctes ou coincidentes de S_n, de sorte qu'on ne pourrait plus affirmer la transcendance des éléments (21), correspondant à un point algébrique quelconque de V.

Une pareille éventualité semblerait extremement improbable, si on a égard a tout ce qu'il y a d'arbitraire dans la construction de $F(x_1, x_2 \dots x_n)$. Cependant elle demeure comme une grave difficulté, qui peut infirmer tous les développements ci-dessus, jusqù à ce qu'elle ne soit pas énlevée. Heureusement elle le peut être à l'aide d'une méthode ingénieuse et élégante, imaginée par M. Stäckel pour une équation à deux variables x, y, beaucoup plus particulière que la notre, mais qui peut être étendue, convenablement modifiée, même au problème général, dont nous nous occupons.

6. Il est donc encore à démontrer que la transcendante entière $F(x_1, x_2 \dots x_n)$ peut être determinée de façon que l'on puisse tirer de $F=0$ la variable x_i en fonction analytique et transcendante des autres $n-1$; c'est à dire, que l'on peut tirer de cette équation une série de puissances:

$$x_i - \xi_i = P(x_1 - \xi_1 \dots x_{i-1} - \xi_{i-1},\ x_{i+1} - \xi_{i+1} \dots x_n - \xi_n)\,,$$

qui vérifie l'équation, mais qui ne peut en vérifier aucune autre algébrique par rapport aux variables x.

Désignons, à cet effet, par α un nombre entier positif quelconque et considérons la fonction:

$$\begin{aligned} F^{(\alpha)}(x_1 \dots x_n; u_0 \dots u_\alpha) = u_0\,\omega_0(x_1 \dots x_n) + u_1\,\omega_1(x_1 \dots x_n) + \dots \\ + u_\alpha\,\omega_\alpha(x_1 \dots x_n)\,, \end{aligned} \tag{23}$$

déjà définie par la formule (17). Régardant $F^{(\alpha)}$ comme fonction des $x_1, \dots, x_n, u_0, \dots, u_\alpha$, ou peut toujours obtenir qu'elle soit irréductible par rapport à toutes ces variables dans le domaine absolu de rationnalité. En effet, elle est linéaire homogène par rapport aux u; un quelconque de ses diviseurs doit donc dépendre seulement des x, et diviser par là toutes les fonctions $\omega_0 = \theta_0, \omega_1, \omega_2 \ldots \omega_\alpha$; il s'en suit que, *si ces polynômes n'ont pas de facteurs communs*, la $F^{(\alpha)}$, régardée comme fonction des x et des u, sera irréductible. C'est ce qu' on peut faire d'un nombre infini de façons; il suffit, par exemple:

a) que les polynômes $\theta_0, \theta_1 \ldots \theta_\alpha$ n'aient pas de facteurs communs;

b) que θ_0 ne possède pas de facteurs irreductibles, dont l'hauteur soit moindre ou égale à α.

Sous ces hypothèses on voit tout de suite que les polynômes $\omega_1, \omega_1 \ldots \omega_\alpha$ n'ont pas de facteurs communs.

La (23) est donc bien irréductible; il en sera de même du numérateur de la fonction rationnelle que l'on tire en posant:

$$x_i = \frac{1}{\xi_i}; \quad u_t = \frac{1}{v_t}. \qquad (i=1,2\ldots n;\ t=0,1\ldots\alpha) \tag{24}$$

Soit r_s le dégré de $F^{(\alpha)}$ en x_s; après la substitution (24) on aura:

$$F^{(\alpha)}\left(\frac{1}{\xi_1}, \frac{1}{\xi_2} \cdots \frac{1}{\xi_n}; \frac{1}{v_0}, \frac{1}{v_1} \cdots \frac{1}{v_\alpha}\right) = \frac{1}{v_0 \ldots v_\alpha \prod_s^n \xi_s^{r_s}} G^{(\alpha)}(\xi_1 \ldots \xi_n;\ v_0 \ldots v_\alpha), \tag{25}$$

étant $G^{(\alpha)}$ irreductible par rapport à ses arguments. En vertu d'un théorème connu de M. Hilbert [1]) on pourra donner alors aux variables $\xi_1 \ldots \xi_{n-1}$ des valeurs entieres $\lambda_1^{(1)} \ldots \lambda_{n-1}^{(1)}$, non inférieures à α en valeur absolue, de façon que:

$$G^{(\alpha)}(\lambda_1^{(1)} \ldots \lambda_{n-1}^{(1)}, \xi_n;\ v_0 \ldots v_\alpha), \tag{26}$$

soit de même irréductible et par rapport à ξ_n du même degré que $G^{(\alpha)}(\xi_1 \ldots \xi_{n-1}\, \xi_n, v_0 \ldots v_\alpha)$ [2]).

Les valeurs des $\lambda_i^{(1)}$ $(i=1,2\ldots n-1)$ ayant été fixées d'une façon quelconque d'après les hypothèses précédentes, on pourra donner aux $v_0, v_1 \ldots v_\alpha$ des

[1]) Cf. Hilbert. Ueber die Irreducibilität ganzer rationaler Functionen (Crelles Journal. Bd. 110. S. 122).

[2]) Ceci est toujours possible; il suffit, en effet, de choisir $\lambda_1^{(1)} \ldots \lambda_{n-1}^{(1)}$ de sorte que, non seulement la (26), mais aussi

$$\xi_n^{r_n}\, G^{(\alpha)}\left(\lambda_1^{(1)} \ldots \lambda_{n-1}^{(1)} \frac{1}{\xi_n}, v_0 \ldots v_\alpha\right)$$

(r_n etant le dégré de (23)) soit irréductible.

valeurs rationnelles entières $c_0, c_1 \ldots c_\alpha$ qui, d'après les (13), vérifient les inégalités:

$$|c_\varrho| > \frac{1}{\varepsilon}, \qquad (\varrho = 0,1\ldots\alpha)$$

et telles que même la fonction de la *seule* ξ_n:

$$G^{(\alpha)}(\lambda_1^{(1)} \ldots \lambda_{n-1}^{(1)}, \xi_n, c_0 \ldots c_\alpha), \tag{27}$$

soit irréductible et du degré même que $G^{(\alpha)}(\xi_1 \ldots \xi_n, v_0 \ldots v_\alpha)$ par rapport à ξ_n.

Considérons alors les deux fonctions:

$$F^{(\alpha)}\left(\frac{1}{\lambda_1^{(1)}} \cdots \frac{1}{\lambda_{n-1}^{(1)}}, x_n;\ u_0, u_1 \ldots u_\alpha\right), \tag{26*}$$

$$F^{(\alpha)}\left(\frac{1}{\lambda_1^{(1)}} \cdots \frac{1}{\lambda_{n-1}^{(1)}}, x_n;\ \frac{1}{c_0}, \frac{1}{c_1} \cdots \frac{1}{c_\alpha}\right); \tag{27*}$$

elles sont aussi irréductibles dans le domaine absolu de rationnalité et ont par rapport à x_n le même degré que (23). En effet, si il n'en était pas ainsi, une au moins des (26), (27) contiendrait comme facteur une puissance de ξ_n avec un exposant différent de zéro, et serait par là irréductible.

7. Il s'en suit que la fonction:

$$F^{(\alpha)}\left(x_1\, x_2 \ldots x_n;\ \frac{1}{c_0}, \frac{1}{c_1} \cdots \frac{1}{c_\alpha}\right), \tag{28}$$

est aussi irréductible dans le domaine absolu de rationnalité. En effet, s'il n'était pas ainsi, elle devrait se décomposer en un produit de deux facteurs $\varphi_1(x_1 \ldots x_n), \varphi_2(x_1 \ldots x_n)$:

$$F^{(\alpha)}\left(x_1\, x_2 \ldots x_n;\ \frac{1}{c_0}, \frac{1}{c_1} \cdots \frac{1}{c_\alpha}\right) = \varphi_1(x_1\, x_2 \ldots x_n) \,.\, \varphi_2(x_1\, x_2 \ldots x_n);$$

en y substituant $x_i = \frac{1}{\lambda_i^{(1)}}$ $(i=1,2\ldots n-1)$, la (28) se réduit à la (27*); mais on à vu que celle-ci est irréductible; par la substitution ci-dessus l'un des deux facteurs φ_1, φ_2 doit donc se réduire à l'unité. Supposons que ce soit φ_2; alors φ_1 devra se réduire à la (27*); il aura donc par rapport à x_n le même degré que (27*) et par conséquent que (28). Il s'en suit que φ_2 doit être de degré zéro par rapport à x_n, c'est à dire, il doit être fonction de $x_1\, x_2 \ldots x_{n-1}$, seulement. Mais on peut toujours écarter une pareille éventualité pour la (28); il suffit, p. ex: que le polynôme θ_0 ait un terme fonction de x_n seul. Ce terme en effet ne manquera jamais dans (28) (cf. 2, *b*)) quelque ce soit le système de valeurs, qu'on choisit pour $u_0, \dots, u_\alpha$ (pourvu que $u_0 \neq 0$); il en résulte que la (28) ne peut pas avoir des diviseurs indépendants de x_n.

Considérons encore la (28), que nous avons reconnu irréductible. Soit c le plus petit multiple commun des nombres $c_0, c_1 \dots c_\alpha$; $c \,.\, F^{(\alpha)}$ est alors une fonction rationnelle entière des $x_1, \dots, x_n$ à coefficients entiers depourvus de facteur commun; son hauteur en outre ne sera pas évidemment moindre que la somme des rapports: $\left|\frac{c}{c_0}\right|, \left|\frac{c}{c_1}\right|, \dots, \left|\frac{c}{c_\alpha}\right|$, en particulier que $\alpha + 1$.

Désignons maintenant par $\alpha_1 - 1$ le plus petit des $\lambda_i^{(1)}$ $(i=1,2\dots n-1)$ et supposons qu'on ait choisi les nombres entiers $c_0, c_1 \dots c_\alpha$, de façon que la somme:

$$c\left\{\left|\frac{1}{c_0}\right| + \left|\frac{1}{c_1}\right| + \dots + \left|\frac{1}{c_\alpha}\right|\right\}$$

soit supérieure à α_1 (on peut, p. ex: choisir d'une manière quelconque $c_0, \dots, c_{\alpha-1}$ et puis c_α plus grand que $\alpha_1\, c_{\alpha-1}$ en valeur absolue); la (28) aura alors une hauteur plus grande que α_1.

8. Posons dans (14):

$$(29)\quad u_0 = \frac{1}{c_0}, \; u_1 = \frac{1}{c_1}; \; \dots, u_\alpha = \frac{1}{c_\alpha}; \; u_{\alpha+1} = u_{\alpha+2} = \dots = u_{\alpha_1 - 1} = 0;$$

et considérons la fonction:

$$(30)\quad F^{(\alpha_1)}(x_1 x_2 \dots x_n; u_{\alpha_1}) = F^{(\alpha)}\left(x_1 \dots x_n; \frac{1}{c_0}, \frac{1}{c_1}, \dots, \frac{1}{c_\alpha}\right) + u_{\alpha_1}\, \omega_{\alpha_1}(x_1 x_2 \dots x_n).$$

On peut toujours s'aider de la sorte que (30) soit irréductible par rapport aux $x_1 x_2 \dots x_n, u_{\alpha_1}$; il suffit à ce but qu'elle n'admette pas un diviseur fonction des $x_1 \dots x_n$ seulement; c'est ce qui arrivera certainement, si l'on suppose que: le polynôme θ_{α_1} n'admette pas des diviseurs irréductibles d'hauteur plus grande que α_1. En effet, dans ce cas, un diviseur quelconque irréductible du polynôme ω_{α_1} aura une hauteur moindre ou égale à α, et il ne peut pas être identique avec (28), qui est irréductible et d'hauteur supérieure.

Nous pourrons alors, ainsi que l'on a fait pour $F^{(\alpha)}$, déterminer des nombres rationnels entiers $\lambda_i^{(2)}$ $(i=1,2\dots n-1)$, plus grands que α_1 en valeur absolue, et après un entier c_{α_1}, supérieur en valeur absolue à $\frac{1}{\varepsilon_{\alpha_1}}$ et aux tous les $\lambda_i^{(2)}$, tels que chacune des fonctions:

$$(31)\quad F^{(\alpha_1)}\left(\frac{1}{\lambda_1^{(2)}}, \dots, \frac{1}{\lambda_{n-1}^{(2)}}, x_n; u_{\alpha_1}\right),$$

$$(32)\quad F^{(\alpha_1)}\left(\frac{1}{\lambda_1^{(2)}}, \dots, \frac{1}{\lambda_{n-1}^{(2)}}, x_n; \frac{1}{c_{\alpha_1}}\right),$$

$$(33)\quad F^{(\alpha_1)}\left(x_1 \dots x_n; \frac{1}{c_{\alpha_1}}\right),$$

soit irréductible par rapport à ses variables et que, si $\alpha_2 - 1$ est le moindre des nombres $\lambda_i^{(2)}$, la (33) ait une hauteur plus grande que α_2.

Il est maintenant clair comment on pourra poursuivre le raisonnement. Donc:

a) si, depuis une certaine valeur de α, tout polynôme θ_r a tous ses diviseurs irréductibles d'hauteur moindre ou égale à r;

b) si les polynômes $\theta_0, \theta_1 \dots \theta_\alpha$ n'ont pas des facteurs communs;

c) si tout facteur irréductible de θ_0 a une hauteur plus grande que α;

d) si il y a dans θ_0 un terme fonction de x_n seulement,

on pourra, en s'aidant comme ci-dessus, construire une suite divergente des nombres entiers positifs:

$$\alpha_1, \; \alpha_2 \dots, \; \alpha_h \dots,$$

et respectivement n suites congruentes (encore divergentes et de nombres entiers):

$$\lambda_i^{(1)}, \; \lambda_i^{(2)} \dots, \; \lambda_i^{(h)} \dots, \qquad (i = 1, 2 \dots n-1)$$

$$c_0, \; c_1 \dots c_\alpha; \; c_{\alpha_1}, \; c_{\alpha_2} \dots c_{\alpha_h} \dots$$

telles, que toute fonction:

$$(34)\quad F^{(\alpha_i)}\left(\frac{1}{\lambda_1^{(i+1)}} \dots \frac{1}{\lambda_n^{(i+1)}}, x_n; \frac{1}{c_{\alpha_i}}\right),$$

$$(35)\quad F^{(\alpha_i)}\left(x_1 x_2 \dots x_n; \frac{1}{c_{\alpha_i}}\right),$$

soit irréductible par rapport à ses variables dans le domaine absolu de rationnalité et encore que (35) ait une hauteur supérieure à α_{i+1}. Nous remarquons aussi que le dégré en x_n de (34), (35) n'est pas moindre que $\mu_{\alpha_i}^{(n)}$; encore ces degrés forment par conséquent une suite divergente.

9. Ceci posé, considérons la fonction:

$$\overline{F}(x_1 x_2 \dots x_n) = \frac{1}{c_0}\,\omega_0(x_1 \dots x_n) + \frac{1}{c_1}\,\omega_1(x_1 \dots x_n) + \dots \tag{36}$$
$$+ \frac{1}{c_\alpha}\,\omega_\alpha(x_1 \dots x_n) + \frac{1}{c_{\alpha_1}}\,\omega_{\alpha_1}(x_1 \dots x_n) + \dots,$$

et supposons que $\omega_0 = \theta_0$ se réduit à zéro pour $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, sans que cela arrive pour aucune des dérivées $\frac{\partial \theta_0}{\partial x_i}$ $(i=1,2\dots n)$, ce qui est possible d'un nombre infini de façons, tout étant vérifiées les conditions *b*), *c*), *d*) de l'article (8). On pourra alors tirer de l'équation:

$$\overline{F}(x_1 x_2 \dots x_n) = 0\,, \tag{36*}$$

un élément analytique, une série de puissances:

$$x_n = P_n(x_1 \dots x_{n-1})\,, \quad P(0, \dots, 0) = 0 \tag{37}$$

qui vérifiera l'équation (36) et sera absolument et uniformément convergente dans un certain domaine $C(x_1 \dots x_{n-1})$ environnant le point $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$.

Dans les hypothèses ci-dessus, l'élément analytique (37) est transcendant.

S'il n'en est pas ainsi, il vérifiera, en effet, une équation algébrique irréductible:

$$g(x_1 x_2 \dots x_n) = 0\,, \tag{38}$$

de degré m; et si l'on substitue dans (38) aux $x_1 \dots x_{n-1}$ des valeurs rationnelles arbitraires, ou aura toujours une équation irréductible, ou non, d'un degré en x_n égal ou moindre que m.

Soit maintenant

$$\overline{F}^{(\alpha_i)}\left(x_1 x_2 \dots x_n\,;\, \frac{1}{c_{\alpha_i}}\right),$$

une des fonctions (35), dont le degré en x_n surpasse m, et telle en outre que le point $x_r = \frac{1}{\lambda_r^{(i+1)}}$ $(r=1,2\dots n-1)$ soit intérieur au domaine de convergence de la série (37).

Faisons alors dans (36*), (37), (38):

$$x_r = \frac{1}{\lambda_r^{(i+1)}}\,, \qquad (r=1,2\dots n-1)$$

et désignons par $\frac{1}{\lambda_n^{(i+1)}}$ la valeur algébrique de x_n; on tirera de (37):

$$\frac{1}{\lambda_n^{(i+1)}} = P_n\left(\frac{1}{\lambda_1^{(i+1)}}, \dots, \frac{1}{\lambda_{n-1}^{(i+1)}}\right); \tag{39}$$

la (38) deviendra une équation:

$$g\left(\frac{1}{\lambda_1^{(i+1)}} \dots \frac{1}{\lambda_{n-1}^{(i+1)}}\,,\, x_n\right) = 0\,, \tag{40}$$

à coefficients rationnels d'un degré non supérieur à m. Pour ce qui à égard à (36*), il faut remarquer que parmi les $\lambda_r^{(i+1)}$ $(r=1,2\dots n-1)$ il y en a un, soit il $\lambda_r^{(i+1)}$, dont la valeur absolue est égale à $\alpha_{i+1} - 1$; le nombre $\frac{1}{\lambda_r^{(i+1)}}$ est alors algébrique et son hauteur est α_{i+1}. Il s'en suit que par cette substitution tous les polynômes ω_t $(t \geqslant \alpha_{i+1})$ se réduisent à zéro; la (36*) se réduit par conséquent à l'équation irréductible d'un degré supérieur à m:

$$\overline{F}^{(\alpha_i)}\left(\frac{1}{\lambda_1^{(i+1)}} \dots \frac{1}{\lambda_{n-1}^{(i+1)}}\,,\, x_n\,;\, \frac{1}{c_{\alpha_i}}\right) = 0\,. \tag{41}$$

Cette équation et la (40), qui est d'un degré moindre, devraient avoir une racine commune, la (39), ce qui est absurd. Il ne peut donc exister une équation (38) vérifiée par la série (37); cette série est donc bien transcendante ainsi que nous avons affirmé.

10. En résumant, nous pourrons énoncer le théorème:

Il existe de transcendantes entières de n variables complexes: $x_1, x_2 \dots x_n$, qui, égalées à zéro, définissent, dans un domaine convenable, une quelconque de ces variables en fonction analytique et transcendante des autres et telles en outre que ces fonctions et leurs dérivées se réduisent à des fonctions algébriques de nombre des $x_1 \dots x_n$ sur toute varieté algébrique de l'espace complexe $(x_1\, x_2 \dots x_n)$.

Pise, 26. VI. 1903.