O. NICCOLETTI,

O WZORZE TAYLORA.

Zawdzięczamy Pringsheimowi[1]) kryteryum, dające warunki konieczne i dostateczne na to, aby funkcya $f(x)$ zmiennej rzeczywistej x dała się rozwinąć na szereg Taylora w otoczeniu wartości a w przedziale $(a, a+R)$. Jest mianowicie koniecznem i dostatecznem, aby funkcya $f(x)$ miała w przedziale tym pochodne wszystkich rzędów, w punkcie zaś a tylko pochodne po stronie prawej albo lewej, stosownie do tego, czy R jest dodatnie czy ujemne, i aby nadto reszta Cauchy'ego

$$R_n(a, h) = \frac{(1-\theta_n)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+\theta_n h)\, h^n$$

dążyła jednostajnie do zera, gdy n dąży do nieskończoności, dla wszystkich wartości dwóch zmiennych h i θ_n, czyniących zadość (dla $R>0$) nierówności:

$$0 \leqslant h < R\,, \quad 0 \leqslant \theta_n \leqslant 1\,.$$

Nic podobnego nie ma miejsca dla funkcyj większej liczby zmiennych. Powód tego tkwi w sposobie, jakim dla tych funkcyj otrzymuje się rozwinięcie Taylora. W samej rzeczy niechaj:

---

[1]) Porów. A. Pringsheim „Zum Taylor'schen Lehrsatz", Math. Ann. **44**, str. 73

$$(E)\,[1]\quad \sum_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_1!,\mu_2!\ldots\mu_n!}\left\{\frac{\partial^{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n} f}{\partial x_1^{\mu_1}\partial x_2^{\mu_2}\ldots\partial x_n^{\mu_n}}\right\}(x_1-a_1)^{\mu_1}(x_2-a_2)^{\mu_2}\ldots(x_n-a_n)^{\mu_n},$$

będzie szeregiem n-krotnym Taylora dla funkcyi $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ w punkcie $a \equiv (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Postępowanie zwykłe, przy pomocy którego otrzymuje się rozwinięcie funkcyi $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ na szereg Taylora, polega na szukaniu sumy szeregu pojedyńczego

$$(E_1)\qquad u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_m + \ldots,$$

który otrzymujemy z szeregu wielokrotnego (E), łącząc w jedno u_m wszystkie te wyrazy, dla których suma skaźników $\mu_1 + \mu_2 + \ldots \mu_m$ ma jednę i tę samą wartość m, t. j. biorąc:

$$u_m = \sum_{\mu_1+\mu_2+\ldots\mu_n=m} \frac{1}{\mu_1!,\mu_2!\ldots\mu_n!}\left\{\frac{\partial^{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n} f}{\partial x_1^{\mu_1}\partial x_2^{\mu_2}\ldots\partial x_n^{\mu_n}}\right\}(x_1-a_1)^{\mu_1}(x_2-a_2)^{\mu_2}\ldots(x_n-a_n)^{\mu_n};$$

którekolwiek ze zwykłych wyrażeń na resztę wyraża w istocie różnicę pomiędzy funkcyą $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a sumą pierwszych m wyrazów szeregu pojedyńczego (E_1), wyżej określonego.

Otóż jest w tem coś niezupełnego. Przypomnijmy sobie, w samej rzeczy, że jeżeli damy sobie szereg n-krotny, t. j. taki, którego wyrazy zależą od n skaźników, mianowicie:

$$\sum_{\mu_1,\mu_2\ldots\mu_n} a_{\mu_1,\mu_2\ldots\mu_n} \qquad (\mu_i = 1, 2 \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, n)$$

to szereg taki nazywamy zbieżnym, gdy suma $S_{m_1, m_2, \ldots, m_n}$ jego pierwszych $m_1, m_2 \ldots m_n$ wyrazów, dla których zatem jest:

$$1 \leqslant \mu_i \leqslant m_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dąży do granicy oznaczonej i skończonej S, do sumy szeregu, gdy wszystkie skaźniki m_i dążą razem do nieskończoności, niezależnie jeden

[1]) Przez symbol $\{f\}_a$ lub $\{f\}_{a_1, a_2, \ldots, a_n}$ oznaczać będziemy funkcyę $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ w punkcie $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$; nadto, jeżeli $i_1, i_2, \ldots, i_n$ jest pewną przemianą skaźników $1, 2, \ldots, n$, przez symbol $\{f\}_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_n}}$ rozumieć będziemy wartość, jaką przyjmuje funkcya $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dla $x_{i_1} = \alpha_{i_1}, x_{i_2} = \alpha_{i_2}, \ldots, x_{i_n} = \alpha_{i_n}$.

od drugiego. Tę więc sumę $S_{m_1, m_2, \ldots, m_n}$ należy zbadać, gdy idzie o rozważenie danego szeregu n-krotnego w całej ogólności.

Zbadanie w takiem znaczeniu ogólnem szeregu wielokrotnego (E) Taylora dla funkcyi $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest zadaniem pracy niniejszej. Podaję w niej mianowicie wzór, wyrażający różnicę pomiędzy wartością funkcyi $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a sumą $\sum\limits_{m_1, m_2, \ldots, m_n}$ pierwszych $(m_1+1)\ldots(m_n+1)$ wyrazów szeregu wielokrotnego (E) (dla których $0 \leqslant \mu_i \leqslant m_i$) przy pomocy dwóch całek różnej wielokrotności, rozciągniętych na pewne funkcye, wyprowadzone z funkcyi danej za pomocą określonego prawa. Wzór ten, prócz tego, daje możność rozciągnięcia na funkcye wielu zmiennych, w znaczeniu ogólnem, dopiero co określonem, form reszt Schlömilcha i Roche'a, Lagrange'a i Cauchy'ego, gdzie powtarzają się z niewielkiemi zmianami rozważania Pringsheima, dotyczące funkcyj jednej zmiennej. Wzór nasz prowadzi do kryteryum koniecznego i dostatecznego na rozwijalność funkcyi $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n zmiennych rzeczywistych na szereg n-krotny Taylora, gdy założymy zarazem warunek zbieżności bezwzględnej[1]) tego szeregu w rozważanym obszarze. Ten ostatni warunek (który dla funkcyi jednej zmiennej rzeczywistej wynika, na mocy znanego twierdzenia o pojedyńczych szeregach potęgowych, z samej zbieżności szeregu) narzuca nietylko sama metoda dowodzenia, lecz jest on także konieczny, jeżeli szereg (E) ma być zbieżny bezwarunkowo w swym obszarze zbieżności, aby tedy przedstawiał w nim funkcyę $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, bez względu na sposób, w jaki wyrazy jego są uporządkowane i złączone, a zatem w szczególności, gdy zachowujemy zwykłe postępowanie, służące do otrzymywania wzoru Taylora.

Wzór, o którym mówimy, zawiera się wreszcie we wzorze analogicznym, ogólniejszym, z którego wypływa interesująca własność szeregów wielokrotnych (rzeczywistych) Taylora[2]).

1. Wiadomo (i dowodzi się bardzo prosto), że przy znanych założeniach, których nie ma potrzeby tu przypominać, wzór Taylora dla funkcyi $f(x)$ jednej zmiennej napisać można w ten sposób:

[1]) Porów. A. Pringsheim „Zur Theorie der Doppelreihen" Münchener Berichte. 1897. Heft I, str. 101 i nast.

[2]) Of. Niccoletti. Sulle serie doppie di Taylor (Rendiconti della Accademia des Lincei **16**, VI. 1901). Sulla formola di Taylor (Annali di Matematica **8**, str. 83 i nast.).

$$f(x_1)=f(x_0)+(x_1-x_0)f'(x_0)+\ldots+\frac{(x_1-x_0)^m}{m!}f^{(m)}(x_0)+\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x_1}(x_1-x)^m f^{(m+1)}(x)dx$$

(1)
$$=\sum_{0}^{m}{}_{\mu}\frac{(x_1-x_0)^{\mu}}{\mu!}f^{(\mu)}(x_0)+\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x_1}(x_1-x)^m f^{(m+1)}(x)\,dx\,,$$

gdzie r e s z t a R_m dana jest przez całkę pojedyńczą:

$$R_m=\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x_1}(x_1-x_0)^m f^{(m+1)}(x)\,dx\,. \tag{2}$$

Gdy do tej całki zastosujemy odpowiednio twierdzenie o wartości średniej, otrzymamy odrazu znane wyrażenie reszt S c h l ö m i l c h a i R o c h e'a, L a g r a n g e'a i C a u c h y'ego [1].

2. Niechaj będzie $\varphi(xy)$ funkcya dwóch zmiennych rzeczywistych, skończona i ciągła, wraz z pochodnemi, które mamy rozważać dla $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, $y_0 \leqslant y \leqslant y_1$; połóżmy we wzorze (1):

$$f(x)=\varphi(xy_0)+\frac{(y_1-y_0)}{1}\left\{\frac{\partial\varphi(xy)}{\partial y}\right\}_{xy_0}+\ldots+\frac{(y_1-y_0)^n}{n!}\left\{\frac{\partial^n\varphi(xy)}{\partial y^n}\right\}_{xy_0}+\frac{1}{n!}\int_{y_0}^{y}(y_1-y)^n\frac{\partial^{n+1}\varphi(xy)}{\partial y^{n+1}}dy$$

$$=\sum_{0}^{n}{}_{\nu}\frac{(y_1-y_0)^{\nu}}{\nu!}\left\{\frac{\partial^{\nu}\varphi(xy)}{\partial y^{\nu}}\right\}_{xy_0}+\frac{1}{n!}\int_{y_0}^{y}(y_1-y)^n\frac{\partial^{n+1}\varphi(xy)}{\partial y^{n+1}}\,dy\,,$$

t. j. na mocy tegoż wzoru (1), w którym zmieniono f na φ, m na n, x na y, połóżmy:

$$f(x)=\varphi(xy_1)\,.$$

Będzie:

$$\varphi(xy_1)=\sum_{0}^{m}{}_{\mu}\sum_{0}^{n}{}_{\nu}\left(\frac{\partial^{\mu+\nu}\varphi(xy)}{\partial x^{\mu}\partial y^{\nu}}\right)_{x_0y_0}\frac{(x_1-x_0)^{\mu}(x_1-y_0)^{\nu}}{\mu!\,\nu!}+\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x_1}(x_1-x)^m\left\{\frac{\partial\varphi^{m+1}(xy)}{\partial x^{m+1}}\right\}_{xy_1}dx$$

$$+\frac{1}{n!}\int_{y_0}^{y_1}(y_1-y)^n\frac{\partial^{n+1}}{\partial y^{n+1}}\left\{\sum_{0}^{m}{}_{\mu}\frac{(x_1-x_0)^{\mu}}{\mu!}\left(\frac{\partial^{\mu}\varphi(xy)}{\partial x^{\mu}}\right)_{x_0y}\right\}dy\,.$$

[1]) Perów. G e n o c c h i - P e a n o, Calcolo infinitesimale, str. 232.

Lecz na mocy wzoru (1), gdy w nim położymy $f(x)=\varphi(xy)$, będziemy mieli:

$$\sum_{0}^{m}{}_{\mu}\frac{(x_1-x_0)^{\mu}}{\mu!}\left(\frac{\partial^{\mu}\varphi(xy)}{\partial x^{\mu}}\right)_{x_0y}=\varphi(x_1y)-\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x_1}(x_1-x)^m\frac{\partial^{m+1}\varphi(xy)}{\partial x^{m+1}}\,dx\,.$$

Po podstawieniu do poprzedzającego, otrzymamy wzór:

$$\varphi(x_1y_1)=\sum_{0}^{m}{}_{\mu}\sum_{0}^{n}{}_{\nu}\frac{(x_1-x_0)^{\mu}(y_1-y_0)^{\nu}}{\mu!\,\nu!}\left\{\frac{\partial^{\mu+\nu}\varphi(xy)}{\partial x^{\mu}\partial y^{\nu}}\right\}_{x_0y_0}+R_{mn}\,, \tag{3}$$

gdzie:

(4)
$$R_{mn}=\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x_1}(x_1-x)^m\left\{\frac{\partial^{m+1}\varphi(xy)}{\partial x^{m+1}}\right\}_{xy_1}dx+\frac{1}{n!}\int_{y_0}^{y_1}(y_1-y)^n\left\{\frac{\partial^{n+1}\varphi(xy)}{\partial y^{n+1}}\right\}_{x_1y}dy$$
$$-\frac{1}{m!\,n!}\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}(x_1-x)^m(y_1-y)^n\frac{\partial^{m+n+2}\varphi(xy)}{\partial x^{m+1}\,\partial y^{n+1}}\,dx\,dy\,.$$

3. A by widzieć najprościej, w jaki sposób wzór ten można rozciągnąć na funkcye o jakiejkolwiek liczby zmiennych, wprowadźmy niektóre widoczne same przez się zmiany w znakowaniu, t. j. napiszmy szeregi (1) i (3) w ten sposób:

$$f(b_1)=\frac{(b_1-a_1)^{m+1}}{m!}\frac{\partial^m}{\partial a_1{}^m}\left\{\frac{f(a_1)}{b_1-a_1}\right\}+\frac{1}{m!}\int_{a_1}^{b_1}(b_1-x)^m f^{m+1}(x)\,dx\,; \tag{1*}$$

(3*)
$$f(b_1\,b_2)=\frac{(b_1-a_1)^{m+1}(b_2-a_2)^{n+1}}{m!\,n!}\frac{\partial^{m+n}}{\partial a_1{}^m\partial a_2{}^n}\left\{\frac{f(a_1\,a_2)}{(b_1-a_1)\,(b_2-a_2)}\right\}$$
$$+\frac{1}{m!}\int_{a_1}^{b_1}(b_1-x)^{m+1}\frac{\partial f(x,b_2)}{\partial x^{m+1}}\,dx+\frac{1}{n!}\int_{a_2}^{b_2}(b_2-y)^{n+1}\frac{\partial^{n+1}f(b_1,y)}{\partial y^{n+1}}\,dy$$
$$-\frac{1}{m!\,n!}\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}(b_1-x)^m(b_2-y)^n\frac{\partial^{m+n+2}f(xy)}{\partial x^{m+1}\partial y^{n+1}}\,dx\,dy\,.$$

Wprowadźmy jeszcze symbole działań:

$$\left\{\begin{aligned} D_1\,f(a_1)&=\frac{(b_1-a_1)^{m+1}}{m!}\frac{\partial^m}{\partial a_1{}^m}\left\{\frac{f(a_1)}{b_1-a_1}\right\},\\ E_1\,f(b_1)&=\frac{1}{m!}\int_{a_1}^{b_1}(b_1-x)^m f^{m+1}(x)\,dx\,;\end{aligned}\right. \tag{5}$$

i w przypadku dwóch zmiennych niezależnych połóżmy:

$$
(6)\quad \begin{cases} D_1\, f(a_1\, y) = \dfrac{(b_1-a_1)^{m+1}}{n!}\, \dfrac{\partial^m}{\partial {a_1}^m} \left\{ \dfrac{f(a_1\, y)}{b_1-a_1} \right\}; \quad D_2\, f(x, a_2) = \dfrac{(b_2-a_2)^{n+1}}{n!}, \\[2ex] E_1\, f(b_1\, y) = \dfrac{1}{m!} \displaystyle\int_{a_1}^{b_1} (b_1-x)^m \dfrac{\partial^{m+1} f(x_1\, y)}{\partial x^{m+1}}\, dx\,; \quad E_2\, f(x, b_2) = \int_{a_2}^{b_2} (b_2-y)^n \dfrac{\partial^{n+1} f(xy)}{\partial y^{n+1}}\, dy\,. \end{cases}
$$

Przy pomocy tych symboli wzory (1*) i (3*) napiszemy tak:

$$(1^{**}) \qquad D_1\, f(a_1) = (1-E_1)\, f(b_1)\,,$$

$$(3^{**}) \qquad D_1\, D_2\, f(a_1\, a_2) = (1-E_1)\,(1-E_2)\, f(b_1\, b_2)\,.$$

W tych wzorach strony drugie mają odpowiednio takie znaczenia:

$$(1-E_1)\, f(b_1) = f(b_1) - E_1\, f(b_1)\,,$$

$$(1-E_1)\,(1-E_2)\, f(b_1\, b_2) = f(b_1\, b_2) - E_1\, f(b_1\, b_2) - E_2\, f(b_1\, b_2) + E_1\, E_2\, f(b_1\, b_2)\,.$$

Z wzorów (1**) i (3**) otrzymujemy odrazu przez indukcyę wzór ogólny, który chcieliśmy wyprowadzić. Niechaj $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ będzie funkcyą zmiennych rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n$, która w obszarze, określonym przez nierówności

$$a_i \leqslant x_i \leqslant b_i \qquad (i=1, 2, \dots, n)$$

jest skończona, ciągła i posiada te pochodne, które mamy rozważać. Połóżmy:

$$
(7)\quad \begin{cases} 1\,.\, f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\[1ex] D_i\, f(x_1 \dots x_{i-1}, a_i, x_{i+1} \dots x_n) = \dfrac{(b_i-a_i)^{m_i+1}}{m_i!}\, \dfrac{\partial^{m_i}}{\partial {a_i}^{m_i}} \left\{ \dfrac{f(x_1 \dots x_{i-1}\, a_i\, x_{i+1} \dots x_n)}{b_i-a_i} \right\}, \\[2ex] E_i\, f(x_1 \dots x_{i-1}, b_i, x_{i+1} \dots x_n) = \dfrac{1}{m_i!} \displaystyle\int_{a_i}^{b_i} (b_i-x_i)^{m_i} \dfrac{\partial^{m_i+1} f(x_1 \dots x_n)}{\partial x_i^{m_i+1}}\, dx_i\,. \end{cases}
$$

$$(i=1, 2, \dots, n)$$

Na podstawie twierdzeń o odwracaniu porządku różniczkowania oraz porządku różniczkowania i całkowania pod znakiem całkowym, symbole D_i i E_k będą po dwa wzajemnie przemienne dla $i \neq k$.

Przy tych oznaczeniach zachodzić będzie wzór:

$$(8) \quad D_1\, D_2 \dots D_n\, f(a_1\, a_2 \dots a_n) = (1-E_1)\,(1-E_2) \dots (1-E_n)\, f(b_1\, b_2 \dots b_n)\,,$$

gdzie znaczenie dwóch iloczynów symbolicznych zostało wyżej wyjaśnione.

Ponieważ wzór (8) zachodzi dla $n=1, 2$, dowiedziemy przeto jego ogólności, gdy założywszy, że jest prawdziwy dla pewnej wartości n, okażemy że jest prawdziwy i dla $n+1$. W tem założeniu zamiast $f(x_1\, x_2, \dots, x_n)$ podstawmy po obu stronach wzoru (8) odpowiednio:

$$D_{n+1}\, f(x_1\, x_2, \dots, x_n, a_{n+1}) = (1-E_{n+1})\, f(x_1\, x_2, \dots, x_n, b_{n+1})$$

(jest to równość na mocy wzoru (1**)); na podstawie przemienności symboli D i E o skaźnikach różnych mieć będziemy:

$$D_1\, D_2 \dots D_n\, D_{n+1}\, f(a_1 a_2, \dots, a_n\, a_{n+1}) = (1-E_1)\,(1-E_2) \dots (1-E_n)\,(1-E_{n+1})\, f(b_1\, b_2, \dots, b_n\, b_{n+1}),$$

t. j. tenże wzór (8), w którym zamiast n wzięto $n+1$. Wzór ten więc jest ogólny.

Nie stosując symboli, tak użytecznych w dowodzeniu, napiszmy wyraźnie wzór (8); będzie to właśnie wzór, który chcieliśmy otrzymać:

$$(9) \quad f(b_1 b_2 \dots b_n) = \sum_{\mu_1=0}^{m_1} \dots \sum_{\mu_n=0}^{m_\mu} \frac{1}{\mu_1!\, \mu_2! \dots \mu_n!} \left\{ \frac{\partial^{\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_n} f}{\partial x_1^{\mu_1}\, \partial x_2^{\mu_2} \dots \partial x_n^{\mu_n}} \right\} (b_1-a_1)^{\mu_1} (b_2-a_2)^{\mu_2} \dots (b_n-a_n)^{\mu_n}$$

$$+ R_{m_1\, m_2 \dots m_n}\,,$$

gdzie:

$$
\begin{aligned}
(10) \qquad R_{m_1\, m_2 \dots m_n} = {} & \sum_{i_1} \frac{1}{m_{i_1}!} \int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} (b_{i_1}-x_{i_1})^{m_{i_1}} \left\{ \frac{\partial^{m_{i_1}+1} f}{\partial x_{i_1}^{m_{i_1}+1}} \right\}_{(x_{i_1}\, b_{i_2} \dots b_{i_n})} dx_{i_1} \\
& - \sum_{(i_1 i_2)} \frac{1}{m_{i_1}!\, m_{i_2}!} \int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} \int_{a_{i_2}}^{b_{i_2}} (b_{i_1}-x_{i_1})^{m_{i_1}} (b_{i_2}-x_{i_2})^{m_{i_2}} \left\{ \frac{\partial^{m_{i_1}+m_{i_2}+2} f}{\partial x_{i_1}^{m_{i_1}+1}\, \partial x_{i_2}^{m_{i_2}+1}} \right\}_{(x_{i_1}\, x_{i_2}\, b_{i_3} \dots b_{i_n})} dx_{i_1}\, dx_{i_2} \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\
& + (-1)^{k-1} \sum_{(i_1 \dots i_k)} \frac{1}{m_{i_1}! \dots m_{i_k}!} \int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} \dots \int_{a_{i_k}}^{b_{i_k}} (b_{i_1}-x_{i_1})^{m_{i_1}} \dots (b_{i_k}-x_{i_k})^{m_{i_k}} \left\{ \frac{\partial^{m_{i_1}+\dots+m_{i_k}+k} f}{\partial x_{i_1}^{m_{i_1}+1} \dots \partial x_{i_k}^{m_{i_k}+1}} \right\}_{(x_{i_1} \dots x_{i_k}\, b_{i_{k+1}} \dots b_{i_n})} dx_i \dots dx_k \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\
& + (-1)^{n-1} \frac{1}{m_1!\, m_2! \dots m_n!} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} \prod_{i=1}^{n} (b_i-x_i)^{m_i} \left\{ \frac{\partial^{\sum_1^n m_i + n} f}{\partial x_1^{m_1+1} \dots \partial x_n^{m_n+1}} \right\}_{(x_1\, x_2 \dots x_n)} dx_1\, dx_2 \dots dx_n\,.
\end{aligned}
$$

W tym wzorze (10) symbol $\sum\limits_{(i_1 \dots i_k)}$ oznacza, że suma rozciąga się na wszystkie kombinacye klasy k skaźników $1, 2 \dots n$, a w każdem z wyrażeń sumy oznacza $(i_{k+1} \dots i_n)$ kombinacyę dopełniającą (klasy $n-k$) względem kombinacyi $(i_1\, i_2 \dots i_k)$.

4. Z wzorów (9) i (10) widzimy, że reszta $R_{m_1 \dots m_n}$ wyraża, jak powiedzieliśmy wyżej, przy pomocy sumy dwóch całek, różnicę pomiędzy wartością funkcyi $f(x_1\, x_2 \dots x_n)$ w punkcie $(b_1 b_2 \dots b_n)$ a sumą $E_{m_1 m_2 \dots m_n}$ pierwszych $(m_1+1)\,(m_2+1) \dots (m_n+1)$ wyrazów odpowiedniego szeregu Taylora:

$$
(E)\qquad \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \frac{1}{\mu_1!\, \mu_2! \dots \mu_n!} \left\{ \frac{\partial^{\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_n}}{\partial x_1^{\mu_1}\, \partial x_2^{\mu_2} \dots \partial x_n^{\mu_n}} \right\}_a (b_1-a_1)^{\mu_1} (b_2-a_2)^{\mu_2} \dots (b_n-a_n)^{\mu_n}.
$$

Utworzyć sobie można jasne pojęcie o formie reszty $R_{m_1 m_2 \dots m_n}$, stosując język geometryi wielowymiarowej. Uważajmy $x_1, x_2 \dots x_n$ jako spółrzędne kartezyańskie punktu przestrzeni n-wymiarowej S_n i weźmy w niej równoległościan n-wymiarowy o ścianach równoległych do nadpłaszczyzn spółrzędnych, którego dwa wierzchołki przeciwległe znajdują się w punktach $(a_1, a_2 \dots a_n)$, $(b_1, b_2 \dots b_n)$. Z wzoru (10) wynika wtedy bezpośrednio, że reszta $R_{m_1 \dots m_n}$ jest równa sumie całek określonych, rozpostartych na wszystkie przestrzenie S_k $(k=1, 2 \dots n)$ tego równoległościanu, które obejmują wierzchołek $b_1\, b_2 \dots b_n$ i wzięte dodatnio lub ujemnie, stosownie do tego, czy k jest parzyste czy nie parzyste; dla każdej z tych całek funkcya pod znakiem całkowym jest zupełnie określona przez wartości funkcyi $f(x_1\, x_2 \dots x_n)$ na rozmaitości S_k, na której rozpostarta jest całka.

5. Z wzorów (9) i (10) wypływają wnioski godne uwagi. Połóżmy we wzorze (10):

$$
(11)\quad A_{i_1 i_2 \dots i_k} = \frac{1}{m_{i_1}! \dots m_{i_k}!} \int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} \dots \int_{a_{i_k}}^{b_{i_k}} (b_{i_1}-x_{i_1})^{m_{i_1}} \dots (b_{i_k}-x_{i_k})^{m_{i_k}} \left\{ \frac{\partial^{m_{i_1}+\dots+m_{i_k}+k} f}{\partial x_{i_1}^{m_{i_1}+1} \dots \partial x_{i_k}^{m_{i_k}+1}} \right\}_{(x_{i_1} \dots x_{i_k}\, b_{i_{k+1}} \dots b_{i_n})} dx_{i_1} \dots dx_{i_k},
$$

a wtedy wzór (10) przybierze postać:

$$
(12)\qquad R_{m_1 m_2 \dots m_n} = \sum_{1}^{n}{}_k (-1)^{k-1} \sum_{(i_1 i_2 \dots i_k)} A_{i_1 i_2 \dots i_k}.
$$

Jeżeli każdy z wykładników m_{i_ϱ} rozkłada się na sumę dwóch

$$
(13)\qquad m_{i_\varrho} = \mu_{i_\varrho}^{(i_1 \dots i_k)} + \nu_{i_\varrho}^{(i_1 \dots i_k)},
$$

(gdzie $\mu_{i_\varrho}^{(i_1 \dots i_k)} > 0$), wtedy całkę k-krotną $A_{\nu_1 \dots i_k}$ można także napisać w postaci:

$$
A_{i_1 i_2 \dots i_k} = \frac{1}{m_{i_1}! \dots m_{i_k}!} \int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} \dots \int_{a_{i_k}}^{b_{i_k}} (b_{i_1}-x_{i_1})^{\mu_{i_1}^{(i_1 \dots i_k)}-1} \dots (b_{i_k}-x_{i_k})^{\mu_{i_k}^{(i_1 \dots i_k)}-1} \cdot (b_{i_1}-x_{i_1})^{\nu_{i_1}^{(i_1 \dots i_k)}+1} \dots (b_{i_k}-x_{i_k})^{\nu_{i_k}^{(i_1 \dots i_k)}+1}
$$
$$
\cdot \left\{ \frac{\partial^{m_{i_1}+\dots+m_{i_k}+k} f}{\partial x_{i_1}^{m_{i_1}+1} \dots \partial x_{i_k}^{m_{i_k}+1}} \right\}_{(x_{i_1} \dots x_{i_k}\, b_{i_{k+1}} \dots b_{i_n})} dx_{i_1} \dots dx_{i_k},
$$

a stosując wielokrotnie twierdzenie o wartości średniej, jeszcze tak:

$$
(11^*)\quad A_{i_1 \dots i_k} = \frac{(1-\theta_{i_1}^{(i_1 \dots i_k)})^{m_{i_1}-\mu_{i_1}^{(i_1 \dots i_k)}+1} \dots (1-\theta_{i_k}^{(i_1 \dots i_k)})^{m_{i_k}-\mu_{i_k}^{(i_1 \dots i_k)}+1}}{m_{i_1}! \dots m_{i_k}!\, \mu_{i_1}^{(i_1 \dots i_k)} \dots \mu_{i_k}^{(i_1 \dots i_k)}} (b_{i_1}-a_{i_1})^{m_{i_1}+1} \dots (b_{i_k}-a_{i_k})^{m_{i_k}+1}
$$
$$
\cdot \left\{ \frac{\partial^{m_{i_1}+\dots+m_{i_k}+k} f}{\partial x_{i_1}^{m_i+1} \dots \partial x_{i_k}^{m_{i_k}+1}} \right\}_{\substack{(x_{i_\varrho}=a_{i_\varrho}+\theta_{i_\varrho}^{(i_1 \dots i_k)}(b_{i_\varrho}-a_{i_\varrho});\; b_{i_{k+1}} \dots b_{i_n}) \\ (\varrho=1, 2 \dots k)}}.
$$

Wyrażenie to, podstawione we wzór (12), daje formę reszty Schlömilcha i Roche'a. We wzorze (11*) $\theta_{i_\varrho}^{(i_1 \dots i_k)}$ są wielkości, zawarte pomiędzy zerem a jednością: $0 < \theta_{i_\varrho}^{(i_1 \dots i_k)} < 1$. Jeżeli we wzorach (11*) i (12) uczynimy $\mu_{i_\varrho}^{(i_1 \dots i_k)} = m_{i_\varrho} + 1$, otrzymamy formę reszty Lagrange'a:

$$
(14)\quad R_{m_1 m_2 \dots m_n} = \sum_{1}^{n}{}_k (-1)^{k-1} \sum_{(i_1 \dots i_k)} \frac{(b_{i_1}-a_{i_1})^{m_{i_1}+1} \dots (b_{i_k}-a_{i_k})^{m_{i_k}+1}}{(m_{i_1}+1)! \dots (m_{i_k}+1)!}
$$
$$
\cdot \left\{ \frac{\partial^{m_{i_1}+m_{i_2}+\dots+m_{i_k}+k} f}{\partial x_{i_1}^{m_{i_1}+1}\, \partial x_{i_2}^{m_{i_2}+1} \dots \partial x_{i_k}^{m_{i_k}+1}} \right\}_{\substack{(x_{i_\varrho}=a_{i_\varrho}+\theta_{i_\varrho}^{(i_1 \dots i_k)}(b_{i_\varrho}-a_{i_\varrho});\; b_{i_{k+1}} \dots b_n) \\ (\varrho=1, 2 \dots k)}}.
$$

Jeżeli w tych wzorach uczynimy wszystkie liczby $\mu_{i_\varrho}^{(i_1 \dots i_k)}$ równemi jedności, otrzymamy formę reszty Cauchy'ego:

$$
(15)\quad R_{m_1 m_2 \dots m_k} = \sum_{1}^{n}{}_k (-1)^k \sum_{(i_1 \dots i_k)} \frac{(1-\theta_{i_1}^{(i_1 \dots i_k)})^{m_{i_1}} \dots (1-\theta_{i_k}^{(i_1 \dots i_k)})^{m_{i_k}}}{m_{i_1}! \dots m_{i_k}!} (b_{i_1}-a_{i_1})^{m_{i_1}+1} \dots (b_{i_k}-a_{i_k})^{m_{i_k}+1}
$$
$$
\cdot \left\{ \frac{\partial^{m_{i_1}+\dots+m_{i_k}+k} f}{\partial x_{i_1}^{m_i+1} \dots \partial x_{i_k}^{m_{i_k}+1}} \right\}_{\substack{(x_{i_\varrho}=a_{i_\varrho}+\theta_{i_\varrho}^{(i_1 \dots i_k)}(b_{i_\varrho}-a_{i_\varrho});\; b_{i_{k+1}} \dots b_n) \\ (\varrho=1, 2 \dots k)}}.
$$

Jeżeli w tym ostatnim wzorze położymy $b_{i_\varrho}=a_{i_\varrho}+h_{i_\varrho}$, to przyjmie on postać:

$$(15^*)\quad R_{m_1 m_2 \dots m_n}=\sum_{1}^{n}{}_k(-1)^{k-1}\sum_{(i_1\dots i_k)}\frac{(1-\theta_{i_1}^{(i_1\dots i_k)})^{m_{i_1}}\dots(1-\theta_{i_k}^{(i_1\dots i_k)})^{m_{i_k}}}{m_{i_1}!\dots m_{i_k}!}$$
$$\cdot\left\{\frac{\partial^{m_{i_1}+m_{i_2}+\dots+m_{i_k}+k} f}{\partial x_{i_1}^{m_i+1}\,\partial x_{i_2}^{m_i+1}\dots\partial x_{i_k}^{m_k+1}}\right\}_{\substack{(i_1\dots i_k)\\ (x_{i_\varrho}=a_{i_\varrho}+\theta_{i_\varrho}h_{i_\varrho};\ a_{i_{k+1}}+h_{i_{k+1}}\dots a_{i_n}+h_{i_n})\\ (\varrho=1,2\dots k)}} h_{i_1}^{m_{i_1}+1}\,h_{i_2}^{m_{i_2}+1}\dots h_{i_k}^{m_{i_k}+1}.$$

6. Ta forma reszty jest szczególnie ważna. Prowadzi ona do wspomnianego wyżej kryteryum P r i n g s h e i m a, dotyczącego rozwijalności funkcyi $f(x_1 x_2 \dots x_n)$ na szereg n-krotny T a y l o r a.

Dajmy, że mamy:

$$(16)\quad f(a_1+h_1,\dots,a_n+h_n)=\sum_{0}^{\infty}{}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}\frac{1}{\mu_1!\dots\mu_n!}\left\{\frac{\partial^{\mu_1+\dots+\mu_n} f}{\partial x_1^{\mu_1}\dots\partial x_n^{\mu_n}}\right\}_a h_1^{\mu_1}\dots h_n^{\mu_n},$$

dla w s z y s t k i c h wartości $h_1,\dots,h_n$, czyniących zadość nierównościom:

$$(17)\qquad 0\leqslant h_i<R_i,\qquad (i=1,\dots,n)$$

oraz że dla tych wartości h_i szereg po stronie drugiej jest bezwzględnie zbieżny t. j., że jest zbieżny szereg wartości bezwzględnych jego wyrazów. Dla tych to wartości h_i wolno wtedy (a dowodzi się to podobnie jak dla szeregów potęgowych o jednej tylko zmiennej) różniczkować szereg wyraz po wyrazie, ile razy chcemy, i każdy z szeregów pochodnych będzie też bezwzględnie zbieżny w obszarze zbieżności szeregu danego.

Niechaj $r_1, r_2 \dots r_n$ będą liczby całkowite dodatnie, nie wyłączając i zera, zresztą dowolne; połóżmy wraz z P r i n g s h e i m e m:

$$(18)\quad \varphi_{r_1\dots r_n}(a_1+h_1,\dots,a_n+h_n)$$
$$=\sum_{r_1}^{\infty}{}_{\mu_1}\dots\sum_{r_n}^{\infty}{}_{\mu_n}\frac{1}{(\mu_1-r_1)!\dots(\mu_n-r_n)!}\left|\frac{\partial^{\mu_1+\dots+\mu_n} f}{\partial x_1^{\mu_1}\dots\partial x_n^{\mu_n}}\right|_a h_1^{\mu_1-r_1}\dots h_n^{\mu_n-r_n};$$
$$(r_1, r_2,\dots, r_n=0,1,2\dots)$$

będzie $\varphi_{r_1\dots r_n}(a_1+h_1,\dots,a_n+h_n)$ funkcyą n zmiennych $x_i=a_i+h_i$ $(i=1,\dots,n)$ skończoną i ciągłą wraz ze wszystkiemi swojemi pochodnemi w obszarze, określonym przez nierówności (17). Nadto, jak łatwo widzieć, funkcya ta posiada następujące własności:

$$(19)\begin{cases}(a)\quad \left\{\dfrac{\partial^{\mu_1-r_1+\dots+\mu_n-r_n}\varphi_{r_1\dots r_n}(x_1\dots x_n)}{\partial x_1^{\mu_1-r_1}\dots\partial x_n^{\mu_n-r_n}}\right\}_a=\left|\dfrac{\partial^{\mu_1+\dots+\mu_n} f}{\partial x_1^{\mu_1}\dots\partial x_n^{\mu_n}}\right|_a\\[2ex] \qquad \varphi_{r_1+s_1,\,r_2+s_2\dots r_n+s_n}(x_1 x_2\dots x_n)\\ (b)\quad =\dfrac{\partial^{s_1+s_2+\dots+s_n}\varphi_{r_1 r_2\dots r_n}(x_1 x_2\dots x_n)}{\partial x_1^{s_1}\,\partial x_2^{s_2}\dots\partial x_n^{s_n}}=\dfrac{\partial^{r_1+r_2+\dots+r_n}\varphi_{s_1 s_2\dots s_n}(x_1 x_2\dots x_n)}{\partial x_1^{r_1}\,\partial x_2^{r_2}\dots\partial x_n^{r_n}}\\ \qquad\qquad (r_1, s_2=0,1,2\dots)\\[2ex] (c)\quad \left|\dfrac{\partial^{r_1+r_2+\dots+r_n} f}{\partial x_1^{r_1}\,\partial x_2^{r_2}\dots\partial x_n^{r_n}}\right|\leqslant\varphi_{r_1\dots r_n}(x_1 x_2\dots x_n).\end{cases}$$

Połóżmy:

$$(20)\qquad h_i=h'_i+h''_i,\qquad (i=1,2,\dots,n)$$

gdzie h'_i, h''_i są liczby dodatnie, nie wyłączając zera; na zasadzie wzoru (19, a) będzie:

$$\varphi_{r_1\dots r_n}(a_i+h_i)=\varphi_{r_1\dots r_n}(a_i+h'_i+h''_i)$$
$$=\sum_{0}^{\infty}{}_{\mu_1\dots\mu_n}\frac{1}{\mu_1!\dots\mu_n!}\left\{\frac{\partial^{\mu_1+\dots+\mu_n}\varphi_{r_1\dots r_n}}{\partial x_1^{\mu_1}\dots\partial x_n^{\mu_n}}\right\}_a(h'_1+h''_1)^{\mu_1}\dots(h'_n+h''_n)^{\mu_n}.$$

Jeżeli w tym szeregu n-krotnym rozwiniemy wszystkie dwumiany $(h'_i+h''_i)^{\mu_i}$ i złączymy wyrazy, zawierające tę samą potęgę liczb h''_i (co jest możliwem, ponieważ ten szereg ma wszystkie wyrazy dodatnie, jest zatem bezwzględnie zbieżny), wtedy z (19, b) będziemy mieli:

$$(21)\quad \varphi_{r_1\dots r_n}(a_i+h'_i+h''_i)=\sum_{0}^{\infty}{}_{\mu_1\dots\mu_n}\frac{1}{\mu_1!\dots\mu_n!}\left\{\frac{\partial^{\mu_1+\dots+\mu_n}\varphi_{r_1\dots r_n}}{\partial x_1^{\mu_1}\dots\partial x_n^{\mu_n}}\right\}_{(a_i+h'_i)} h''^{\mu_1}_1\dots h''^{\mu_n}_n,$$

dla wszystkich wartości h'_i, h''_i, określonych przez nierówności:

$$(22)\qquad 0\leqslant h'_i\leqslant h'_i+h''_i<h_i,\qquad (i=1,2,\dots,n)$$

i dla tych wartości h'_i, h''_i szereg (21) jest jeszcze bezwzględnie zbieżny. Ponieważ nadto wszystkie jego wyrazy są dodatnie i suma ich jest funkcyą skończoną i c i ą g ł ą wielkości h_i, a więc i wielkości h'_i, h''_i w obszarze, określonym przez nierówności (22), przeto, na zasadzie znanego twierdzenia o szeregach z wyrazami zmiennemi [1]), szereg będzie w tym obszarze j e d n o s t a j n i e z b i e ż n y. Jeżeli zatem weźmiemy liczbę σ dodatnią i dowolnie małą, będziemy mogli znaleść n liczb m_i $(i=1,\dots,n)$ (będących w ogóle funkcyami skaźników $r_1 \dots r_n$) takich, że gdy $\mu_1 \geqslant m_i$ $(i=1,\dots,n)$, reszta $R_{\mu_1\dots\mu_n}$ szeregu (21) będzie mniejsza od σ, a ponieważ wszystkie wyrazy reszty $R_{\mu_1\dots\mu_n}$ są dodatnie, będzie a f o r t i o r i:

$$\frac{1}{\mu_1!\dots\mu_n!}\left\{\frac{\partial^{\mu_1+\dots+\mu_n}\varphi_{r_1\dots r_n}}{\partial x_1^{\mu_1}\dots\partial x_n^{\mu_n}}\right\}_{(a'_i+h'_i)} h''^{\mu_1}_1\dots h''^{\mu_n}_n < \sigma\,,$$

a więc także, na mocy wzoru (19, a, c):

$$\frac{1}{\mu_1!\dots\mu_n!}\left|\frac{\partial^{\mu_1+r_1+\dots+\mu_n+r_n} f}{\partial x_1^{\mu_1+r_1}\dots\partial x_n^{\mu_n+r_n}}\right|_{(a'_i+h'_i)} h''^{\mu_1}_1\dots h''^{\mu_n}_n < \sigma\,,$$

dla wszystkich układów wartości (całkowitych) $\mu_1,\dots,\mu_n$, które c z y n i ą z a d o ś ć p r z y n a j m n i e j j e d n e j z n i e r ó w n o ś c i:

$$\mu_1 \geqslant m_i\,. \qquad {\scriptstyle (i=1,\dots,n)}$$

Połóżmy teraz:

$$(22^*)\qquad h'_i = h_i\theta_i\,,\quad h''_i = h_i(1-\theta_i)\,;\quad 0\leqslant\theta_i\leqslant 1\,,\quad 0\leqslant h_i < R_i\,; \qquad {\scriptstyle (i=1,\dots,n)}$$

dla wszystkich wartości h_i, θ_i, przez te wzory (22*) określonych, będzie:

$$\frac{(1-\theta_1)^{\mu_1}\dots(1-\theta_n)^{\mu_n}}{\mu_1!\dots\mu_n!}\left|\frac{\partial^{\mu_1+r_1+\dots+\mu_n+r_n} f}{\partial x_1^{\mu_1+r_1}\dots\partial x_n^{\mu_n+r_n}}\right|_{(a_i+\theta_i h_i)} h_1^{\mu_1}\dots h_n^{\mu_n} < \sigma\,,$$

a mnożąc przez $h_1^{r_1}\dots h_n^{r_n}$ i oznaczając przez σ_1 liczbę dowolnie małą, otrzymamy:

$$(23)\quad \frac{(1-\theta_1)^{\mu_1}\dots(1-\theta_n)^{\mu_n}}{\mu_1!\dots\mu_n!}\left|\frac{\partial^{\mu_1+r_1+\dots+\mu_n+r_n} f}{\partial x_1^{\mu_1+r_1}\dots\partial x_n^{\mu_n+r_n}}\right|_{(a_i+\theta_i h_i)} h_1^{\mu_1+r_1}\dots h_n^{\mu_n+r_n} < \sigma_1\,.$$

7. Niechaj $(i_1 i_2 \dots i_k)$ będzie jakąkolwiek kombinacyą klasy k $(1\leqslant k\leqslant n)$ liczb $1, 2 \dots n$; $(i_{k+1}\dots i_n)$ kombinacyą dopełniającą; połóżmy we wzorze (23):

[1]) Patrz np. D i n i, Fondamenti par la teorica..., str. 110.

$$r_{i_1}=r_{i_2}=\dots=r_{i_k}=1\,,\quad \mu_{i_{k+1}}=r_{i_{k+1}}=\dots=\mu_{i_n}=r_{i_n}=0\,,$$

$$\underset{(\varrho=1,2\dots k)}{\theta_{i_\varrho}=\theta_{i_\varrho}^{(i_1\dots i_k)}}\,;\quad \theta_{i_{k+1}}=\dots=\theta_{i_n}=1\,,$$

a otrzymamy wzór:

$$(24)\quad\left|\frac{(1-\theta_{i_1}^{(i_1\dots i_k)})^{\mu_{i_1}}\dots(1-\theta_{i_k}^{(i_1\dots i_k)})^{\mu_{i_k}}}{\mu_1!\dots\mu_{i_k}!}\left\{\frac{\partial^{\mu_{i_1}+\dots+\mu_{i_k}+k} f}{\partial x_{i_1}^{\mu_{i_1}+1}\dots\partial x_{i_k}^{\mu_{i_k}+1}}\right\}_{\substack{(i_1\dots i_k)\\ (a_{i_\varrho}+\theta_{i_\varrho}h_{i_\varrho};\ a_{i_{k+1}}+h_{i_{k+1}}\dots a_{i_k}+h_{i_n})\\ (\varrho=1,\dots,k)}} h_{i_1}^{\mu_{i_1}+1}\dots h_{i_k}^{\mu_{i_k}+1}\right| < \sigma\,,$$

dla wszystkich wartości $\mu_{i_1},\dots,\mu_{i_k}$, k t ó r e c z y n i ą z a d o ś ć p r z y n a j m n i e j j e d n e j z n i e r ó w n o ś c i: .

$$(25)\qquad \mu_{i_\varrho}\geqslant m_{i_\varrho}\,. \qquad {\scriptstyle (\varrho=1,\dots,n)}$$

Wynika stąd, że każda z $2n-1$ wielkości

$$(24^*)\quad \underset{(k=1,2\dots n)}{\frac{(1-\theta_{i_1}^{(i_1\dots i_k)})^{\mu_{i_1}}\dots(1-\theta_{i_k}^{(i_1\dots i_k)})^{\mu_{i_k}}}{\mu_{i_1}!\dots\mu_{i_k}!}}\left\{\frac{\partial^{\mu_{i_1}+\dots+\mu_{i_k}+k} f}{\partial x_{i_1}^{\mu_{i_1}+1}\dots\partial x_{i_k}^{\mu_{i_k}+1}}\right\}_{\substack{(i_1\dots i_k)\\ (a_{i_\varrho}+\theta_{i_\varrho};\ a_{i_{k+1}}+i_{k+1},\dots,a_{i_n}+h_{i_n})\\ (\varrho=1,2\dots k)}} h_{i_1}^{\mu_{i_1}+1}\dots h_{i_n}^{\mu_{i_n}+1}\,,$$

dąży j e d n o s t a j n i e do zera, gdy w nich wielkości h_{i_ϱ}, $\theta_{i_\varrho}^{(i_1\dots i_k)}$ uważamy za zmienne n i e z a l e ż n e, poddane warunkom

$$0\leqslant h_i\leqslant R_i\,;\quad 0\leqslant\theta_i^{(i_1\dots i_k)}\leqslant 1\,,$$

i j e d e n p r z y n a j m n i e j ze skaźników $\mu_{i_1}\dots\mu_{i_k}$, od których zależą uważane wielkości, dąży do nieskończoności.

Odwrotnie, gdy te warunki są spełnione, szereg (E) jest zbieżny bezwzględnie w obszarze, określonym przez nierówności (17), i sumą jego jest $f(a_i+h_1,\ a_2+h_2,\dots,a_n+h_n)$.

Istotnie, połóżmy w równaniu (24):

$$\theta_{i_\varrho}^{(i_1\dots i_k)}=0\,;\quad 0<h_{i_\varrho}=\bar h_{i_\varrho}<R_{i_\varrho}\,;\quad h_{i_{k+1}}=\dots=h_{i_n}=0\,;$$
$${\scriptstyle (\varrho=1,2\dots k\,,\quad k=1,2\dots n)\,,}$$

będziemy mieli:

$$\frac{1}{\mu_{i_1}!\dots\mu_{i_k}!}\left\{\frac{\partial^{\mu_{i_1}+\dots+\mu_{i_k}+k} f}{\partial x_{i_1}^{\mu_{i_1}+1}\dots\partial x_{i_k}^{\mu_{i_k}+1}}\right\}\bar h_{i_1}^{\mu_{i_1}+1}\dots\bar h_{i_k}^{\mu_{i_k}+1}<\sigma\,,$$

a więc a fortiori:

$$\frac{1}{(\mu_{i_1}+1)!\dots(\mu_{i_k}+1)!}\left\{\frac{\partial x_{i_1}{}^{\mu_{i_1}+1\dots\mu_{i_k}+k} f}{\partial x_{i_1}{}^{\mu_{i_1}+1}\dots\partial x_{i_k}{}^{\mu_{i_k}+1}}\right\}_{(\mu_i+1)\dots(\mu_{i_k}+1)} \overline{h}_{i_1}{}^{\mu_{i_1}+1}\dots\overline{h}_{i_k}{}^{\mu_{i_k}+1} < \frac{\sigma}{(\mu_{i_1}+1)\dots(\mu_{i_k}+1)}\,\sigma < \sigma,$$

to jest wszystkie wyrazy szeregu (E) pozostaną skończone dla $h_i = \overline{h}_i \ {\scriptstyle (i=1,2,\dots,n)}$; szereg (E) będzie zatem bezwzględnie i jednostajnie zbieżny dla wszystkich wartości h_i, dodatnich i ujemnych, mniejszych odpowiednio od $\overline{h}_i$; t. j. ponieważ wielkości $\overline{h}_i$ są tak blizkie wielkości R_i jak chcemy, szereg (E) będzie zbieżny bezwzględnie i jednostajnie dla wszystkich wartości h_i, czyniących zadość nierównościom (17). Nadto, dla tych wartości suma szeregu jest równa $f(a_1+h_1,\dots,a_n+h_n)$, gdyż według równań (15*) (gdy w nich zmienimy m_i na μ_i) różnica pomiędzy $f(a_1+h_1,\dots,a_n+h_n)$, a sumą $E_{\mu_1\dots\mu_n}$ pierwszych $(\mu_1+1)\dots(\mu_n+1)$ wyrazów szeregu (E) wyraża się jako suma 2^n-1 wielkości, z których każda na zasadzie równań (24) ma granicę zero, gdy jeden przynajmniej ze skaźników μ, od których ona zależy, dąży do nieskończoności w jakikolwiek sposób.

Możemy tedy wypowiedzieć twierdzenie: Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby funkcya $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n zmiennych rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n$ dała się rozwinąć na szereg Taylora w punkcie $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ dla wszystkich wartości wielkości h_i, określonych przez nierówności

$$0 \leqslant h_i < R_i \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\dots,n)}$$

tak, aby dla tych wszystkich wartości szereg był bezwzględnie zbieżny, jest (prócz tego, by w rozważanym obszarze funkcya $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ posiadała pochodne wszystkich rzędów skończone i ciągłe), aby każda z 2^n-1 wielkości (24*) dążyła równomiernie do zera dla wszystkich wartości h_i danych przez nierówności (17) i wszystkich wartości θ_i, takich, że:

$$0 \leqslant \theta_i \leqslant 1 \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\dots,n)}$$

gdy jeden przynajmniej ze skaźników μ, od których zależy, dąży do nieskończoności jakimkolwiek sposobem.

Warunki analogiczne, których nie ma potrzeby wymieniać, mają miejsce, gdy wszystkie lub niektóre z wielkości h_i przybierają wartości ujemne lub wartości ujemne i dodatnie zarazem.

8. Wzór (9) prowadzi do wzoru ogólniejszego, w którym sam jest zawarty.

Przyjmijmy, że skaźniki $1, 2 \dots n$ rozłożyliśmy na k grup, zawierających odpowiednio $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$ elementów:

$$a_1, a_2, \dots, a_{\nu_1};\quad \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\nu_2}; \dots; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\nu_k} \quad (\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_k = n)$$

i połóżmy:

$$(25)\qquad \left\{\begin{array}{ll} x_{a_i} = a_{a_i} + (b_{a_i} - a_{a_i})\, t_1, & {\scriptstyle (i=1,2,\dots,\nu_1)} \\ x_{\beta_j} = a_{\beta_j} + (b_{\beta_j} - a_{\beta_j})\, t_2, & {\scriptstyle (j=1,2,\dots,\nu_2)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ x_{\lambda_s} = a_{\lambda_s} + (b_{\lambda_s} - a_{\lambda_s})\, t_k, & {\scriptstyle (s=1,2,\dots,\nu_k)} \end{array}\right.$$

Przy zastosowaniu przekształcenia (25) funkcya $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ staje się funkcyą $F(t_1, t_2, \dots, t_k)$ k zmiennych rzeczywistych $t_1, t_2, \dots, t_k$, która dla wartości tych zmiennych, zawartych pomiędzy zerem a jednością (z włączeniem tych granic), czyni zadość warunkom ciągłości i różniczkowalności, przy których można do niej stosować wzór (9). Będziemy tedy mieli na podstawie tego wzoru:

$$(26)\qquad F(1, 1, \dots, 1) = f(b_1, b_2, \dots, b_n)$$
$$= \sum \frac{1}{\mu_1!\,\mu_2!\dots\mu_n!}\left\{\frac{\partial^{\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_n} f}{\partial x_1{}^{\mu_1}\,\partial x_2{}^{\mu_2}\dots\partial x_n{}^{\mu_n}}\right\}(b_1-a_1)^{\mu_1}(b_2-a_2)^{\mu_2}\dots(b_n-a_n)^{\mu_n} + \overline{R}_{p_1 p_2\dots p_k},$$

gdzie znak sumy rozciąga się na wszystkie wartości całkowite, dodatnie i zerowe liczb $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_n$, dla których:

$$(27)\quad \mu_{a_1}+\mu_{a_2}+\dots+\mu_{a_{\nu_1}} \leqslant p_1;\ \mu_{\beta_1}+\mu_{\beta_2}+\dots+\mu_{\beta_{\nu_2}} \leqslant p_2;\dots;\mu_{\lambda_1}+\mu_{\lambda_2}+\dots+\mu_{\lambda_k} \leqslant p_k,$$

i gdzie reszta $\overline{R}_{p_1 p_2\dots p_k}$ jest postaci:

$$(28)\qquad \begin{aligned} \overline{R}_{p_1 p_2\dots p_k} = &\sum_{1}^{k}{}_{i_1} \frac{1}{p_{i_1}!}\int_0^1 (1-t_{i_1})^{p_1}\,\frac{\partial^{p_{i_1}+1} F(1, 1 \dots t_{i_1}, 1 \dots 1)}{\partial t_1{}^{p_{i_1}+1}}\,dt_{i_1} \\ &- \sum \frac{1}{p_{i_1}!\,p_{i_2}!}\int_0^1\!\!\int_0^1 (1-t_{i_1})^{p_i}(1-t_{i_2})^{p_{i_2}}\,\frac{\partial^{p_{i_1}+p_{i_2}+1} F(1,\dots,1, t_{i_1}\dots t_{i_2}, 1,\dots,1)}{\partial t_{i_1}{}^{p_{i_1}+1}\,\partial t_{i_2}{}^{p_{i_2}+1}}\,dt_{i_1}\,dt_{i_2} \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ (-1)^{k-1}\frac{1}{p_1!\,p_2!\dots p_k!}\int_0^1\!\!\int_0^1\!\!\dots\!\int_0^1 (1-t_1)^{p_1}\dots(1-t_k)^{p_k}\,\frac{\partial^{p_1+p_2+\dots+p_k+k} F(t_1\, t_2 \dots t_k)}{\partial t_1{}^{p_1+1}\,\partial t_2{}^{p_2+1}\dots\partial t_k{}^{p_k+1}}\,dt_1\,dt_2\dots dt_k. \end{aligned}$$

Jest to właśnie wzór, który chcieliśmy otrzymać. Czyniąc w nim $k = n$, $\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_k = 1$, otrzymujemy znów wzór (9) (przez prostą zmianę zmiennych); kładąc zaś $k = 1$, $\nu = n$, otrzymujemy wzór:

$$(29)\quad f(b_1, b_2 \dots b_n) = f(a_1, a_2 \dots a_n) + u_1 + u_2 \dots + u_m + \frac{1}{m!}\int_0^1 (1-t)^m\,\frac{d^{m+1} F(t)}{dt^{m+1}}\,dt,$$

w którym (jak na początku) przez u_i oznaczyliśmy kompleks wyrazów szeregu (E), mających wymiar i; wzór ten zlewa się ze zwykłym wzorem Taylora dla funkcyj n zmiennych, gdy resztę jego wyrazimy przez całkę określoną.

Jest widocznem, że do wyrażenia (28) reszty $\overline{R}_{p_1 p_2 \ldots p_k}$ można zastosować przekształcenia analogiczne z temi przekształceniami, które od wzoru (10) doprowadziły do form reszt, podanych przez Schlömilcha i Roche'a, Lagrange'a, Cauchy'ego.

9. Poniższe rozważania dotyczące szeregów wielokrotnych rzucą jaśniejsze światło na znaczenie i doniosłość wzoru (26).

Powiedzieliśmy już na początku, że szereg n-krotny

$$\sum_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n} a_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} \qquad (\mu_i = 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2, \ldots, n) \tag{30}$$

nazywa się zbieżnym, gdy suma $S_{m_1 \ldots m_n}$ jego pierwszych $m_1 m_2 \ldots m_n$ wyrazów (dla których zatem $1 \leqslant \mu_i \leqslant m_i$; $(i=1,2,\ldots,n)$) dąży do granicy oznaczonej i skończonej S, t. j. do sumy szeregu, gdy wszystkie skaźniki m_i dążą razem do nieskończoności, niezależnie jeden od drugiego.

Ale z szeregiem (30) można postąpić jeszcze inaczej. Można mianowicie szukać sumy według wierszy, czyniąc, by w sumie $S_{m_1 m_2 \ldots m_n}$ każdy skaźnik m_i osobno i kolejno dążył do nieskończoności (co jest możliwe $n!$ różnemi sposobami), albo, jeszcze ogólniej, rozłożywszy skaźniki $m_1, m_2 \ldots m_k$ na grupy, można w sumie $S_{m_1 \ldots m_k}$ pozwolić dążyć do nieskończoności osobno i kolejno skaźnikom pojedyńczej grupy. Tym sposobem zamiast szukania granicy n-krotnej szukamy kolejno n-granic pojedyńczych, albo, jeszcze ogólniej, pewnej liczby granic, z których każda jest wielokrotności niższej od n.

Z szeregiem (30) możemy jeszcze wykonać następujące działanie:

Rozłóżmy n skaźników $m_1, m_2, \ldots, m_n$ na k grup $(k < n)$, mających odpowiednio $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$ elementów $(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_k = n)$, i niechaj $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{\nu_1}$ będą elementy pierwszej grupy, $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_{\nu_2}$ elementy drugiej i t. d., $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{\nu_k}$ elementy ostatniej. Łącząc w jeden wyraz wszystkie te wyrazy szeregu, dla których każda ze sum:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{\nu_1};\quad \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{\nu_2};\ \ldots;\ \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{\nu_k}$$

ma wartość oznaczoną, otrzymamy z danego szeregu n-krotnego szereg k-krotny, którego sumę możemy wyznaczyć albo wprost albo przy pomocy któregokolwiek z wyżej wskazanych sposobów.

Jest odrazu widocznem, że ze zbieżności szeregu danego nie wynika bynajmniej w ogólności istnienie którejkolwiek z granic wyżej wskazanych, i nawet, gdy którekolwiek z tych granic istnieją, nie wynika bynajmniej równość ich sumie S szeregu. Ma to zaś miejsce wtedy, gdy szereg (30) jest bezwzględnie zbieżny (tu okazuje się wielka ważność bezwzględnej zbieżności); istotnie szereg taki jest zbieżny bezwarunkowo t. j. niezależnie od porządku wyrazów i wtedy jeden z którychkolwiek wyżej opisanych procesów dodawania prowadzi zawsze do tej samej granicy S, będącej sumą szeregu [1]).

Otóż wzór (26), jak jest odrazu jasnem, wyraża sumę pierwszych $(p_1+1) \ldots (p_k+1)$ wyrazów szeregu k-krotnego, który otrzymujemy z szeregu (E) Taylora dla funkcyi $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, gdy n skaźników $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n$ rozłożymy na k grup (27) w № 8 i połączymy w jeden wyraz te wyrazy, w których skaźniki każdej n grup dają sumę stałą. Na tem właśnie polega, według nas, znaczenie i doniosłość tego wzoru, że pozwala podać w formie skończonej dla każdej klasy szeregów (przy zachodzeniu ich zbieżności) sumę pierwszych wyrazów któregokolwiek z szeregów, wyprowadzonych z szeregu danego w sposób wskazanych. Nie jest mi wiadomem i zdaje się, nie zbadano dotąd, czy zachodzi to także dla innych klas szeregów.

[1]) Porów. A. Pringsheim. „Zur Theorie des Doppelreihen" (Münch. Berichte 1897).