Albowiem, gdy wybierzemy taki porządek mnożenia, że na a czynników A' przypadnie b czynników A'', to dostaniemy:

$$P_{ab} = p'p'' f'(an) \,.\, f''(bn)\,, \quad n = \infty$$

lecz:

$$\lim_{n=\infty} f'(an) = \frac{g_0'}{h_0'} a^{p'-q'} n^{p'-q'} = \frac{g_0'}{h_0'} a^r n^r\,, \quad n = \infty$$

$$\lim_{n=\infty} f''(bn) = \frac{g_0''}{h_0''} b^{p''-q''} \,.\, n^{p''-q''} = \frac{g_0''}{h_0''} b^{-r} n^{-r} \qquad n = \infty$$

i

$$\lim_{n=\infty} f'(an) \,.\, f''(bn) = \frac{g_0'}{h_0'} \frac{g_0''}{h_0''} \left(\frac{a}{b}\right)^r,$$

a skutkiem tego dostaniemy:

$$P_{ab} = p'p'' \frac{g_0' g_0''}{h_0' h_0''} \left(\frac{a}{b}\right)^r. \tag{30}$$

Wartości iloczynu warunkowo zbieżnego (29) różnią się od siebie czynnikami, które są r-temi potęgami liczb wymiernych.

A. PRZEBORSKI,

NIEKTÓRE ZASTOSOWANIA TEORYI KONGRUENCYJ LINIOWYCH.

(Dokończenie). [1]

ROZDZIAŁ IV.

Twierdzenia Bianchi'ego.

§ 1. W rozdziale poprzedzającym okazaliśmy, że jeżeli przez punkty jakiejkolwiek powierzchni S, nakładalnej na jednę z zasadniczych powierzchni obrotowych, przeprowadzimy w odpowiedni sposób proste, to otrzymamy kongruencyę normalnych do pewnej powierzchni minimalnej albo do pewnej powierzchni ze stałą krzywizną gaussowską.

Promienie tej kongruencyi, niezmiennie związane z powierzchnią S i pozostające przy wszelkich możliwych odkształceniach powierzchni S normalnemi do odpowiednich powierzchni minimalnych albo do powierzchni o stałej krzywiznie gaussowskiej, leżą na płaszczyznach krzywizny określonego układu krzywych geodezyjnych G powierzchni S, przedstawiających wygięcia południków. Lecz z ogólnej teoryi powierzchni ogniskowych wiemy, że te ostatnie płaszczyzny są styczne do powierzchni S_0 dopełniającej dla powierzchni S, t. j. do powierzchni, która wraz z powierzchnią S stanowi dwie powierzchnie ogniskowe kongruencyi stycznych do krzywych geodezyjnych G.

[1]) Patrz Prace mat.-fizycz. 13. 159—235 (1—78).

Tym sposobem promienie kongruencyi, rozpatrzonej w rozdziale poprzedzającym, możemy uważać jako proste, leżące na powierzchniach stycznych do powierzchni S_0.

Stąd wynika naturalnie pytanie, przy jakich warunkach promienie pewnej kongruencyi D, leżące na płaszczyznach stycznych do pewnej powierzchni S_0 i niezmiennie z temi płaszczyznami związane, będą normalnemi do powierzchni minimalnych albo do powierzchni o stałej krzywiznie gaussowskiej przy wszystkich odkształceniach powierzchni S_0; zakładamy przytem, że płaszczyzny styczne do powierzchni S_0 są niezmiennie z tą powierzchnią związane.

Otrzymamy, oczywiście, jedno z rozwiązań na to pytanie, jeżeli rozpatrzymy powierzchnie S_0 dopełniające do powierzchni S, nakładalnych na powierzchnie obrotowe zasadnicze.

Czy na tej drodze pozyskamy wszystkie rozwiązania na postawione pytanie?

Badanie dalsze wskaże, że tak nie jest. Mamy zatem badać kongruencye, utworzone z prostych, leżących na płaszczyznach stycznych do pewnej powierzchni S_0. Takie kongruencye badał pierwszy R i b a u c o u r w znanej rozprawie: „Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes" (Journ. de math. (4). **7**). Rozważa on w niej odkształcenia powierzchni, przy których płaszczyzny styczne do powierzchni pozostają z niemi niezmiennie związane. Takie odkształcenia, z któremi stale spotykać się będziemy w tym rozdziale, nazywać będziemy o d k s z t a ł c e n i a m i R i b a u c o u r a lub wprost dla krótkości o d k s z t a ł c e n i a m i (R).

Wybierzmy spółrzędne na powierzchni S_0 w ten sposób: za linie $v = \text{const}$ weźmy krzywe, których styczne są równoległe do odpowiednich promieni kongruencyi D; za linie $u = \text{const}$ weźmy krzywe, ortogonalne do linij $v = \text{const}$. Osi (T) wybierzmy tak, aby oś x była styczna do krzywych $v = \text{const}$, oś y do krzywych $u = \text{const}$.

Przy tych założeniach, równaniem jakiegokolwiek promienia kongruencyi D względem odpowiednich osi (T) będzie wprost $y = h$, gdzie h jest pewną funkcyą zmiennych u i v. Rzuty przesunięcia jakiegokolwiek punktu $M(x, h, 0)$ naszego promienia na odpowiednie osi (T) będą:

$$(1)\qquad \begin{gathered} \delta x = \xi\, du + dx - (r\, du + r_1\, dv)\, h\,;\quad \delta y = \eta_1\, dv + dh + (r\, du + r_1\, dv)\, x\,; \\ \delta z = (p\, du + p_1\, dv)\, h - (q\, du + q_1\, dv)\, x\,. \end{gathered}$$

Jeżeli punkt M opisuje powierzchnię ortogonalną do promieni D, to przy wszystkich możliwych zmianach parametrów u, v rzuty przesunięć tego

punktu na oś x są równe zeru. Tym sposobem dla tego punktu powinien zachodzić związek:

$$(2)\qquad \delta x = dx + \xi\, du - (r\, du + r_1\, dv)\, h = 0$$

przy wszelkich wartościach du i dv.

Widzimy stąd, że funkcye ξ, h, r, r_1 winny czynić zadość związkowi:

$$(3)\qquad \frac{\partial (rh - \xi)}{\partial v} = \frac{\partial (r_1 h)}{\partial u}\,.$$

W warunku tym, koniecznym i dostatecznym na to, aby kongruencya D była kongruencyą normalnych, nie występują wcale funkcye p, q, p_1, q_1, i dla tego warunek ten stosuje się do wszystkich możliwych odkształceń naszej powierzchni S_0, jeżeli założymy tylko, że promienie D są niezmiennie związane z odpowiedniemi płaszczyznami stycznemi powierzchni S_0.

Dochodzimy tym sposobem do następującego t w i e r d z e n i a R i b a u c o u r a:

J e ż e l i p r o m i e n i e p e w n e j k o n g r u e n c y i D, l e ż ą c e n a p ł a s z c z y z n a c h s t y c z n y c h p e w n e j p o w i e r z c h n i S_0 i n i e z m i e n n i e z n i ą z w i ą z a n e, s t a n o w i ą k o n g r u e n c y ę n o r m a l n y c h, t o z a c h o w u j ą t ę w ł a s n o ś ć p r z y w s z e l k i c h m o ż l i w y c h o d k s z t a ł c e n i a c h (R) p o w i e r z c h n i S_0.

Znajdźmy teraz punkty ogniskowe naszych kongruencyj. Wyznaczymy je na tej zasadzie, że jeżeli parametrom u, v nadajemy przyrosty du, dv, odpowiadające krzywym głównym powierzchni S_0 względem kongruencyi D, to przesunięcie odpowiedniego punktu ogniskowego skierowane będzie wzdłuż promienia; innemi słowy, rzuty tego przesunięcia na osi y i z będą równe zeru.

Jeżeli oznaczymy przez ϱ odciętą odpowiedniego punktu ogniskowego, to warunki nasze, na mocy równań (1), wyrazimy w ten sposób:

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial h}{\partial u} + r\varrho\right) du + \left(\frac{\partial h}{\partial v} + r_1\varrho + \eta_1\right) dv = 0\,, \\ (ph - q\varrho)\, du + (p_1 h - q_1\varrho)\, dv = 0\,. \end{gathered}$$

Rugując ϱ z tych równań, znajdziemy równanie różniczkowe krzywych głównych; rugując zaś du, dv, znajdziemy równanie stopnia drugiego na wyznaczenie odciętych punktów ogniskowych; będzie ono postaci:

$$(4)\qquad \begin{gathered} \varrho^2 (q_1 r - q r_1) + \varrho \left[r_1 ph - q\left(\frac{\partial h}{\partial v} + \eta_1\right) - r p_1 h + q_1 \frac{\partial h}{\partial u} \right] \\ + ph\left(\frac{\partial h}{\partial v} + \eta_1\right) - p_1 h \frac{\partial h}{\partial u} = 0\,. \end{gathered}$$

§ **2.** Zajmiemy się teraz wywodem warunków, przy których kongruencya D jest układem normalnych do powierzchni minimalnych albo do powierzchni o stałej krzywiznie gaussowskiej przy wszelkich możliwych odkształceniach (R) powierzchni S_0.

Rozpatrzmy najprzód przypadek pierwszy, t. j. ten, w którym kongruencya D jest normalna do powierzchni minimalnych Σ.

Jeżeli odcięta odpowiedniego punktu powierzchni minimalnej oznaczymy przez x, a jej promienie krzywizny przez R_1 i R_2, to na R_1 i R_2 znajdziemy wyrażenia:

$$R_1 = x - \varrho_1\,, \quad R_2 = x - \varrho_2\,,$$

gdzie ϱ_1 i ϱ_2 są pierwiastkami równania (4).

Warunek na to, by powierzchnia Σ była minimalną, jest oczywiście:

$$R_1 + R_2 = 2x - (\varrho_1 + \varrho_2) = 0\,,$$

albo też na mocy równań (4), po wyrugowaniu przy pomocy równań Codazzi'ego — Mainardi'ego funkcyj p, q:

$$q_1\left[2xr + \frac{\partial h}{\partial u} - \frac{\xi r_1 h}{\eta_1}\right] - p_1 r h + \frac{\xi \eta_1 K}{p_1}\left[2xr_1 + \frac{\partial h}{\partial v} + \eta_1\right]$$
$$+ \frac{\xi q_1{}^2}{\eta_1 p_1}\left[2xr_1 + \frac{\partial h}{\partial v} + \eta_1\right] = 0\,,$$

gdzie K oznacza krzywiznę gaussowską powierzchni S_0.

Ponieważ ten warunek powinien się spełniać przy wszelkich odkształceniach (R) powierzchni S_0, to musi się sprawdzać, jak to widzieliśmy wyżej, niezależnie od wartości funkcyj p_1, q_1. Wynikają stąd następujące równania, którym winny czynić zadość funkcye ξ, η_1, x, h:

$$(5)\quad 2xr + \frac{\partial h}{\partial u} - \frac{\xi r_1 h}{\eta_1} = 0\,; \qquad (6)\quad 2xr_1 + \frac{\partial h}{\partial v} + \eta_1 = 0\,; \qquad (7)\quad hr = 0\,.$$

Do tych równań dołączamy jeszcze równanie (3) i (2), mianowicie:

$$\frac{\partial (rh - \xi)}{\partial v} = \frac{\partial (r_1 h)}{\partial u}\,; \quad dx = (rh - \xi)\,du + r_1 h\,dv\,.$$

Jeżeli pominiemy przypadek $h = 0$ t. j. przypadek Weingartena, gdy promienie kongruencyi są styczne do powierzchni S_0, będzie $r = 0$, t. j., że krzywe $v = \text{const}$ są geodezyjnemi. Przez odpowiedni wybór parametru u możemy przyjąć:

$$(8)\qquad \xi = a = \text{const}\,,$$

gdzie a jest jakąkolwiek stałą, z góry daną.

Uwzględniając tę ostatnią okoliczność, możemy równanie (3) sprowadzić do postaci $\dfrac{\partial (r_1 h)}{\partial u} = 0$, skąd wnosimy, że

$$(9)\qquad r_1 h = \frac{\omega'(v)}{2}\,,$$

gdzie $\omega(v)$ jest funkcyą, tymczasowo nieznaną.

Równanie (5), po wstawieniu, $r = 0$, zamienia się na następujące: $\dfrac{1}{h}\dfrac{\partial h}{\partial u} = \dfrac{1}{\eta_1}\dfrac{\partial \eta_1}{\partial u}$, a obrawszy w odpowiedni sposób parametr v, możemy przyjąć:

$$(10)\qquad h = \eta_1\,.$$

Podstawiając tę wartość do równania (9) i całkując, znajdujemy łatwo:

$$(11)\qquad \eta_1{}^2 = a\,[\omega'(v)\,u + \omega_1(v)]\,,$$

gdzie $\omega_1(v)$ jest nową nieznaną jeszcze funkcyą zmiennej v.

Uwzględniając wyrażenia (8) i (9) i całkując równanie (2), otrzymamy następujące wyrażenie na x:

$$(12)\qquad x = -\,au + \frac{\omega(v)}{2} + k\,,$$

gdzie k jest ilością stałą.

Jeżeli wartość znalezioną na ξ, η_1, h, x wstawimy do równania (6), znajdziemy:

$$au\,\omega''(v) + \omega'(v)\,\omega(v) + 2k\omega'(v) + a\omega_1{}'(v) + 2a\omega_1(v) = 0\,.$$

Związek ten musi być prostą tożsamością, z której na wyznaczenie funkcyj ω i ω_1 otrzymujemy następujące równania:

$$\omega''(v) = 0\,, \quad \omega'(v)\,\omega(v) + 2k\omega'(v) + a\omega_1{}'(v) + 2a\omega_1(v) = 0\,.$$

Całkując pierwsze z tych równań, znajdujemy $\omega(v) = mv + n$, gdzie m i n są stałe; podstawiając tę wartość w drugie równanie, znajdziemy równanie różniczkowe rzędu pierwszego względem ω_1, którego całką będzie funkcya

$$\omega_1(v) = ge^{-2v} - \frac{m}{2a}v + \frac{m^2}{4a} - \frac{mn+2km}{2a},$$

gdzie g jest nową stałą.

Tym sposobem otrzymujemy następujące wyrażenie na wielkość η_1^2:

$$\eta_1^2 = a\left[mu - \frac{m^2}{2a}v + ge^{-2v} + \frac{m^2}{4a} - \frac{mn+2km}{2a}\right].$$

Stałej a, jak widzieliśmy poprzednio, można nadawać wartości dowolne; wybierzmy ją tak, aby było $\frac{m^2}{2a} = m$, t. j. połóżmy $2a = m$, wtedy wprowadzając zamiast v parametr $v_1 = -v$, nadamy elementowi liniowemu powierzchni naszej postać:

$$ds^2 = a^2 du^2 + a^2 [2(u+v_1) + ge^{2v_1} + 2c]\, dv^2,$$

gdzie:

$$2ac = a - n - 2k.$$

Nakoniec, jeżeli zamiast u wprowadzimy parametr $u_1 = u + c$, to znajdziemy następujące ostateczne wyrażenie elementu liniowego powierzchni S_0:

$$ds^2 = a^2 \{ du_1^2 + [2(u_1+v_1) + ge^{2v_1}]\, dv^2 \}.$$

Funkcye ω, x, h wyrażą się przez parametry u_1, v_1 sposobem następującym:

(13) $\omega(v) = -2av_1 + n; \quad x = -a(u_1+v_1) + \frac{a}{2}; \quad h = a\sqrt{2(u_1+v_1) + ge^{2v_1}}.$

Powierzchnia S_0 należy do klasy powierzchni, odkrytej po raz pierwszy przez Weingartena (Comptes rendus, t. **112**, s. 607, 706, Darboux, t. **4**, s. 308—337) i cechujących się elementem liniowym postaci:

$$ds^2 = du_1^2 + 2[u_1 + \psi'(v_1)]\, dv_1^2.$$

Jeżeli znamy jednę powierzchnię o takim elemencie liniowym, to wyznaczenie wszystkich powierzchni na nią nakładalnych sprowadza się do wyznaczenia powierzchni, mającej tę własność, że jej promienie krzywizny ϱ', ϱ'' w punkcie dowolnym i odległość p początku spółrzędnych od płaszczyzny stycznej w tym punkcie czynią zadość związkowi:

$$\varrho' + \varrho'' = -2p - \psi''(p).$$

Dochodzimy tym sposobem do pierwszego twierdzenia Bianchi'ego.

Jeżeli kongruencya liniowa D, utworzona z promieni leżących na płaszczyznach stycznych do pewnej powierzchni S_0 i niezmiennie z temi płaszczyznami związanych, pozostaje normalną do powierzchni minimalnych przy wszelkich odkształceniach (R) powierzchni S_0, wtedy ta ostatnia powierzchnia daje się nałożyć na powierzchnię Weingartena o elemencie liniowym

$$ds^2 = a^2 \{ du_1^2 + [2(u_1+v_1) + ge^{2v_1}]\, dv_1^2 \}.$$

Proste kongruencyi D są równoległe do stycznych do krzywych $v = \text{const}$, a odległość h każdego promienia D od odpowiedniej stycznej wyraża się wzorem:

$$h = a\sqrt{2(u_1+v_1) + ge^{2v_1}}.$$

W badaniu naszem zakładaliśmy, że wszystkie stałe całkowania, m, n, g, są różne od zera.

Łatwo widzieć, że przyjęcie, iż stała n jest zerem nie przedstawia nic interesującego.

Zobaczmy, jaki wpływ na wyniki nasze będzie miało przyjęcie wartości zero dla stałej g. W tym przypadku element liniowy powierzchni S_0 będzie postaci:

$$ds^2 = a^2 [du_1^2 + 2(u_1+v_1)\, dv_1^2].$$

Spostrzegamy, że powierzchnia S_0 daje się nałożyć na powierzchnię obrotową; krzywe $u_1 + v_1 = \text{const}$ odpowiadają wtedy równoleżnikom, a ich trajektorye ortogonalne południkom powierzchni obrotowej [1]).

Postarajmy się tedy sprowadzić nasz element liniowy do postaci:

$$ds^2 = a^2 [M(\lambda)\, d\lambda^2 + N(\lambda)\, d\varphi^2],$$

[1]) Prawdziwość tego wyniku jest widoczną z tego, że wszystkie powierzchnie o elemencie liniowym

$$ds^2 = f(au+bv)\, du^2 + \varphi(au+bv)\, dv^2,$$

gdzie a i b są stałe, dają się nałożyć na powierzchnie obrotowe. W samej rzeczy, w tym przypadku krzywizna K i parametry różniczkowe $\Delta_1 K$ i $\Delta_2 K$ będą funkcyami wielkości $au+bv$, a więc $\Delta_1 K = \omega(K)$, $\Delta_2 K = \omega_1(K)$, co właśnie ma miejsce dla powierzchni nakładalnych na powierzchnie obrotowe. Dalej, ponieważ krzywe $K = \text{const}$ przedstawiają wygięcie równoleżników i prócz tego $K = F(au+bv)$, to wynika stąd, że krzywe $au+bv$ odpowiadają równoleżnikom.

gdzie

$$\lambda = 2\,(u_1 + v_1)\,. \tag{14}$$

Krzywe $\varphi = \text{const}$ są trajektoryami ortogonalnemi krzywych $\lambda = \text{const}$ i dla tego równania ich znajdziemy, całkując równanie $\nabla(\lambda, \varphi) = 0$, gdzie ∇ jest pewnym niezmiennikiem mieszanym.

Całkowanie tego równania sprowadza się do całkowania równania liniowego:

$$\frac{du_1}{dv_1} - 2\,u_1 = v_1\,,$$

i dla tego otrzymamy następujące wyrażenie wielkości φ:

$$\varphi = [2\,(u_1 + v_1) + 1]\, e^{-2v_1} = (\lambda + 1)\, e^{-2v_1}\,. \tag{15}$$

Wyznaczywszy z równań (14) i (15) wielkości u_1, v_1 jako funkcye wielkości λ i φ, sprowadzimy nasz element liniowy do postaci:

$$ds^2 = a^2 \left[\frac{\lambda\, d\lambda^2}{4(\lambda+1)} + (1+\lambda)\frac{d\varphi^2}{4\,\varphi^2}\right]. \tag{16}$$

Znajdźmy teraz wyrażenie elementu liniowego powierzchni S dopełniającej do danej powierzchni S_0 względem kongruencyi stycznych do krzywych geodezyjnych $\varphi = \text{const}$. Widzieliśmy w § 5 Rozdziału II-go, że jeżeli element liniowy pewnej powierzchni może być sprowadzony do postaci:

$$ds^2 = du^2 + U^2 dv^2\,,$$

to element liniowy powierzchni dopełniającej będzie postaci:

$$ds_1^{\,2} = \frac{\left[U\dfrac{d^2U}{du^2}\right]^2}{\left[\dfrac{dU}{du}\right]^4} du^2 + \frac{dw^2}{\left[\dfrac{dU}{du}\right]^2}\,;$$

jeżeli spółrzędnemi punktów pierwszej powierzchni będą x, y, z, to spółrzędnemi odpowiednich punktów drugiej będą:

$$x_1 = x - \alpha\frac{U}{U'}\,,\quad y_1 = y - \alpha'\frac{U}{U'}\,,\quad z_1 = z - \alpha''\frac{U}{U'}\,,$$

gdzie $\alpha, \alpha', \alpha''$ są dostawy kątów, utworzone przez styczne do krzywych $v = \text{const}$ na pierwszej powierzchni z osiami spółrzędnych.

W danym przypadku mamy:

$$du^2 = a^2\frac{\lambda\, d\lambda^2}{4(\lambda+1)}\,,\quad U^2 = a^2(\lambda+1)\,,$$

a więc dla powierzchni dopełniającej otrzymamy:

$$ds_1^{\,2} = a^2\left[\frac{\lambda+1}{4\lambda}\, d\lambda^2 + \frac{\lambda}{4}\, dw^2\right].$$

Porównywając to wyrażenie elementu liniowego z ogólnem wyrażeniem elementu liniowego powierzchni obrotowej

$$ds_1^{\,2} = [1 + (f'(r_0))^2]\, dr_0^2 + r_0^2\, dv^2\,,$$

znajdziemy, że

$$v = \frac{w}{2}\,,\quad r_0^{\,2} = a^2\lambda\,,$$

a więc na wyznaczenie funkcyi $f(r_0)$ mieć będziemy równanie różniczkowe:

$$[f'(r_0)]^2 = \frac{r_0^{\,2}}{a^2}\,.$$

Całkując to równanie, otrzymamy równanie szukanej powierzchni obrotowej:

$$z = f(r_0) = \frac{x^2 + y^2}{2\,a}\,;$$

jest to paraboloida obrotowa. A zatem powierzchnią dopełniającą S dla danej powierzchni S_0 jest powierzchnia nakładalna na paraboloidę obrotową.

Okażemy teraz, że promienie naszej kongruencyi D przechodzą przez odpowiednie punkty powierzchni S, t. j., że nasza kongruencya jest kongruencyą d o ł ą c z o n ą do powierzchni S.

Zauważmy, że dostawa kąta θ, który krzywe $\varphi = \text{const}$ tworzą z krzywemi $u_1 = \text{const}$, t. j. z osiami y naszego ruchomego układu spółrzędnych (T), wyraża się w ten sposób:

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2\,(u_1+v_1)+1}}\,;$$

prócz tego odległość odpowiednich punktów powierzchni S_0 i S, równa $\dfrac{U}{U'}$, jest:

$$\delta = a\sqrt{2\,(u_1+v_1)+1}\;\;\sqrt{2\,(u_1+v_1)}\,.$$

Wynika stąd, że rzędną odpowiedniego punktu powierzchni S będzie:

$$y = \delta \cos \theta = a\sqrt{2(u_1+v_1)} = h\,,$$

co wskazuje, że punkt ten leży na odpowiednim promieniu kongruencyi D.

Rozpatrzmy wreszcie przypadek, w którym $m = 0$. Otrzymujemy wtedy następujące wartości funkcyj $\omega(v)$ i $\omega_1(v)$:

$$\omega(v) = n\,, \quad \omega_1(v) = g\,e^{-2v}\,.$$

Niechaj stała a będzie jednością; wtedy funkcye ξ, η_1, h, x będą miały następujące wyrażenia:

$$\xi = 1\,, \quad \eta_1 = \sqrt{g}\,e^{-v}\,, \quad x = -u + \frac{n+2k}{2}\,, \quad h = \sqrt{g}\,e^{-v}\,,$$

skąd wniesiemy, że element liniowy powierzchni S_0 będzie postaci:

$$ds^2 = du^2 + g\,e^{-2v}\,dv^2\,,$$

t. j. że powierzchnia S_0 jest rozwijalną.

Rzuty przesunięć odpowiedniego punktu powierzchni Σ, na podstawie wyrażeń (1), będą:

$$\delta x = 0\,, \quad \delta y = 0\,, \quad \delta z = (p\,du + p_1\,dv)\,h - (q\,du + q_1\,dv)\,x\,;$$

stąd widać, że w tym przypadku powierzchnia Σ zamienia się na krzywą, która jest trajektoryą ortogonalną płaszczyzn stycznych naszej powierzchni rozwijalnej S_0.

§ **3**. Zbadamy teraz warunki, przy których promienie naszej kongruencyi D przy wszelkich możliwych odkształceniach (R) powierzchni S_0 pozostają normalnemi do powierzchni o stałej krzywiznie gaussowskiej $\frac{1}{m}$.

Trzymając się oznaczeń, stosowanych w dwóch poprzedzających paragrafach, dochodzimy do następującego warunku:

$$R_1\,R_2 = (x-\varrho_1)\,(x-\varrho_2) = m\,,$$

gdzie ϱ_1, ϱ_2 są pierwiastkami równania (4), x zaś jest odciętą odpowiedniego punktu powierzchni Σ. Na podstawie równań (4) i równań Codazzi'ego-Mainardi'ego, przy pomocy których możemy wyrugować funkcye p i q, sprowadzimy warunek nasz do postaci:

$$q_1\left[(x^2-m)\,r + x\frac{\partial h}{\partial u} - \frac{\xi h}{\eta_1}\left(r_1 x + \frac{\partial h}{\partial v} + \eta_1\right)\right] - p_1\,h\left(rx + \frac{\partial h}{\partial u}\right)$$
$$+\left(\frac{\xi\,\eta_1 K}{p_1} + \frac{\xi}{\eta_1}\,\frac{q_1{}^2}{p_1}\right)\left[r_1\,(x^2-m) + x\frac{\partial h}{\partial v} + x\eta_1\right] = 0\,,$$

gdzie K, jak poprzednio, oznacza krzywiznę gaussowską powierzchni S_0. Związek ten powinien, zgodnie z warunkiem naszego zadania, spełniać się niezależnie od wartości funkcyj p_1, q_1 i dla tego rozpada się on na trzy następujące równania:

(17) $$r\,(x^2-m) + x\frac{\partial h}{\partial u} - \frac{\xi h}{\eta_1}\left(r_1 x + \frac{\partial h}{\partial v} + \eta_1\right) = 0\,,$$

(18) $$r_1\,(x^2-m) + x\frac{\partial h}{\partial v} + x\eta_1 = 0\,,$$

(19) $$h\left(rx + \frac{\partial h}{\partial u}\right) = 0\,,$$

do których winniśmy dołączyć równania (2) i (3), mianowicie:

$$dx = (rh - \xi)\,du + r_1\,h dv\,, \quad \frac{\partial(rh-\xi)}{\partial v} = \frac{\partial(r_1 h)}{\partial u}\,.$$

Założywszy, że h nie jest zerem, t. j. że promienie naszej kongruencyi nie są styczne do powierzchni S_0, sprowadzimy równanie (17), na mocy równania (17), do postaci:

(20) $$rm + \frac{\xi h}{\eta_1}\left(r_1 x + \frac{\partial h}{\partial v} + \eta_1\right) = 0\,,$$

skutkiem czego równanie (18) zamienia się na następujące:

(21) $$r\eta_1\,x + r_1\,\xi\,h = 0\,.$$

Tym sposobem rozwiązanie naszego pytania sprowadza się do całkowania równań (2), (3), (19), (20), (21).

Kombinując równania (19) i (21), znajdziemy, że

$$\eta_1\frac{\partial h}{\partial u} = h\frac{\partial \eta_1}{\partial u}\,,$$

skąd, przy odpowiednim wyborze parametru v, będzie:

(22) $$h = \eta_1\,.$$

Przy tej wartości h równanie (19) zamienia się na następujące:

$$r = -\frac{1}{\eta_1}\frac{\partial \xi}{\partial v} = -\frac{1}{x}\frac{\partial \eta_1}{\partial u}, \tag{23}$$

skąd łatwo znajdujemy:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = rh - \xi = -\frac{\partial \xi}{\partial v} - \xi, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = r_1 h = \frac{\eta_1}{\xi}\frac{\partial \eta_1}{\partial u} = \frac{x}{\xi}\frac{\partial \xi}{\partial v}. \tag{24}$$

Podstawiwszy te wartości w równaniu (3) i kładąc dla skrócenia $\frac{1}{\xi}\frac{\partial \xi}{\partial v} = \omega$, nadamy równaniu temu postać:

$$x\frac{\partial \omega}{\partial u} + \xi\frac{\partial \omega}{\partial v} = 0. \tag{25}$$

Otrzymana stąd wartość na x powinna czynić zadość równaniu (2), albo, co na jedno wychodzi, równaniom (24). Podstawiając tę wartość na x w drugie z równań (24), znajdziemy, że funkcya ω winna czynić zadość równaniu różniczkowemu postaci;

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\frac{\partial \omega}{\partial v}}{\frac{\partial \omega}{\partial u}}\right] = 0.$$

Wybrawszy odpowiednio parametr u, możemy przyjąć, że

$$\frac{\partial \omega}{\partial u} + \frac{\partial \omega}{\partial v} = 0,$$

a całkując ostatnie równanie, znajdziemy następujące wyrażenie na ω:

$$\omega = \frac{1}{\xi}\frac{\partial \xi}{\partial v} = \varphi'(v-u), \tag{26}$$

gdzie φ jest funkcyą dotąd niewiadomą. Prócz tego z równania (25) wnosimy, że przy rzeczonym wyborze parametru u, będzie:

$$x = \xi. \tag{27}$$

Zcałkowawszy równanie (26), znajdziemy

$$\xi = e^{\varphi(v-u) + \psi(u)}, \tag{28}$$

gdzie funkcyę $\psi(u)$ wyznaczymy z warunku

$$\frac{\partial x}{\partial u} = rh - \xi = -\frac{\partial \xi}{\partial v} - \xi,$$

który w tym przypadku sprowadza się do postaci:

$$\psi'(u) = -1.$$

Znajdujemy stąd:

$$\psi(u) = -u + k,$$

gdzie k jest stałą dowolną.

Pozostaje jeszcze wyznaczyć funkcye η_1 i φ.

Napiszmy równanie (21) w postaci:

$$\eta_1\frac{\partial \eta_1}{\partial u} = \xi\frac{\partial \xi}{\partial v},$$

albo przy uwzględnieniu wartości ξ, w ten sposób:

$$\frac{\partial(\eta_1^2)}{\partial u} = 2\varphi'(v-u)\, e^{2\varphi(v-u) - 2u + 2k};$$

całkując to równanie, znajdziemy:

$$\eta_1^2 = \gamma(v) + 2\int \varphi'(v-u)\, e^{2[\varphi(v-u) - u + k]}\, du, \tag{29}$$

gdzie $\gamma'(v)$ jest funkcyą wielkości v, dotąd niewiadomą.

Równanie (20), po podstawieniu w nie wszystkich znalezionych wartości funkcyj ξ, η_1, x, h, przybierze postać:

$$\begin{aligned}&(e^{2[\varphi(v-u) - u + k]} - m)\,\varphi'(v-u) + \gamma(v) + \frac{\gamma'(v)}{2}\\ &+ \int [2\varphi'^2(v-u) + \varphi''(v-u) + 2\varphi'(v-u)]\, e^{2\varphi(u) - 2u + 2k}\, du = 0.\end{aligned} \tag{30}$$

Różniczkując względem u równanie (30), otrzymamy:

$$m\varphi''(v-u) = 0,$$

a ponieważ m jest różne od zera (zakładamy, że krzywizna powierzchni Σ jest skończona), będzie stąd przeto:

$$\varphi(v-u) = n(v-u) + n_1, \tag{31}$$

gdzie, nie zmniejszając ogólności, możemy założyć $n_1 = 0$.

Podstawiwszy tę wartość funkcyi φ w równaniu (30), sprowadzimy je po wykonaniu prostych rachunków do postaci:

$$\gamma'(v) + 2\gamma(v) - 2mn = 0.$$

Zcałkowawszy to równanie liniowe, znajdziemy:

$$\gamma(v) = mn + b e^{-2v},$$

gdzie b jest ilością stałą.

Znając φ i γ, znajdziemy łatwo z równania (29):

$$\eta_1^2 = mn + b e^{-2v} - \frac{n}{n+1} e^{2nv-2(n+1)u+2k};$$

z równania zaś (28) będzie:

$$\xi = e^{nv-(n+1)u+k}$$

Tym sposobem element liniowy naszej powierzchni S_0 będzie miał wyrażenie:

$$ds^2 = e^{2nv-2(n+1)u+2k}\,du^2 + \left[be^{-2v} - \frac{n}{n+1} e^{2nv-2(n+1)u+2k} + mn\right] dv^2. \tag{32}$$

Wprowadziwszy zamiast v parametr $v_1 = v + \frac{k}{n}$, sprowadzimy element liniowy do postaci:

$$ds^2 = e^{2\tau}\,du^2 + \left[ge^{-2v_1} - \frac{n}{n+1} e^{2\tau} + mn\right] dv_1^2, \tag{33}$$

gdzie:

$$\tau = nv_1 - (n+1)u. \tag{34}$$

Nasze wyrażenie na ds^2 staje się iluzyjnem, gdy stała n ma wartość równą -1 i dla tego ten przypadek wymaga osobnego rozbioru.

Jeżeli $n = -1$, t. j. jeżeli funkcya $\varphi(v-u)$ ma wartość $u-v$, to podstawiwszy tę wartość w równaniu (30), otrzymamy następujące równanie liniowe na wyznaczenie funkcyi γ:

$$\gamma'(v) + 2\gamma(v) + 2(m - e^{-2v+2k}) = 0,$$

skąd po zcałkowaniu znajdziemy:

$$\gamma(v) = 2v e^{-2(v-k)} + b e^{-2(v-k)} - m,$$

gdzie b jest stałą całkowania. Znając φ i γ, wyznaczymy już η_1 i ξ, mianowicie:

$$\eta_1^2 = 2(v-u)e^{-2(v-k)} + b e^{-2(v-k)} - m, \quad \xi = e^{-v+k},$$

a element liniowy naszej powierzchni S_0 będzie w tym przypadku miał postać:

$$ds^2 = e^{-2(v-k)}\,du^2 + \left[2(v-u)e^{-2(v-k)} + b e^{-2(v-k)} - m\right] dv^2. \tag{35}$$

Wprowadziwszy nowy parametr v_1 tak, że $v = v_1 + k$, otrzymamy:

$$ds^2 = e^{-2v_1}\,du^2 + \left[2(v_1-u)e^{-2v_1} + g e^{-2v_1} - m\right] dv^2, \tag{36}$$

gdzie przez g oznaczyliśmy nową stałą $2k + b$.

Powierzchnie, których element liniowy jest typu (36), odgrywają ważną rolę w teoryi powierzchni potrójnie ortogonalnych Weingartena [1]).

Zbierając wszystko, co powyżej przedstawiono, możemy wypowiedzieć następujące twierdzenie:

Jeżeli pewna kongruencya liniowa D, której promienie leżą na odpowiednich płaszczyznach stycznych pewnej powierzchni S_0 i są niezmiennie z temi płaszczyznami związane, pozostaje normalną do powierzchni Σ o krzywiznie stałej $\frac{1}{m}$ przy wszelkich odkształceniach (R) powierzchni S_0, to element liniowy powierzchni S_0 może być sprowadzony do jednej z postaci (33) lub (36). Spółrzędne odpowiednich punktów powierzchni Σ względem wybranych osi (T) będą:

$$x = \xi, \quad y = h = \eta_1,$$

[1]) Porówn. Bianchi, Rozdział XX.

gdzie przez ξ^2 i $\eta_1{}^2$ oznaczamy spółczynniki w wyrażeniu elementu liniowego (33) lub (36) powierzchni S_0.

Pozostaje rozpatrzeć przypadek, w którym powierzchnia S_0 daje się nałożyć na powierzchnię obrotową i wykazać, że jest ona wtedy powierzchnią dopełniającą do jednej z powierzchni zasadniczych o elemencie liniowym:

$$ds^2 = \frac{a^2\, du^2}{\sin^4 u\,(a+m\sin^2 u)} + k^2 \operatorname{cotg}^2 u\, dv^2 .$$

Powierzchnia S_0 da się nałożyć na powierzchnię obrotową, wtedy oczywiście, gdy stała g, zachodząca w wyrażeniu (33) jest zerem. W istocie, wtedy spółczynniki wyrażenia elementu liniowego powierzchni S_0 będą funkcyami wielkości τ, która znów jest funkcyą liniową parametrów u i v.

Krzywe $\tau = \text{const}$ będą wygięciami równoleżników, a ich trajektorye ortogonalne $\varphi = \text{const}$ wygięciami południków.

Połóżmy:

$$\frac{e^{2\tau}}{m(n+1) - e^{2\tau}} = \lambda ,$$

wtedy równanie różniczkowe trajektoryj ortogonalnych do krzywych $\tau = \text{const}$, będzie postaci:

$$\lambda\, du + dv = 0$$

lub

$$dv - \frac{d\lambda}{2(1+\lambda)(n\lambda+n+1)} = 0 .$$

Stąd otrzymamy równanie trajektoryj ortogonalnych w postaci skończonej:

$$\varphi = v - \int \frac{d\lambda}{2(1+\lambda)(n\lambda+n+1)} = c .$$

Za linie spółrzędne na powierzchni S_0 obierzmy krzywe $\lambda = \text{const}$ i $\varphi = \text{const}$.

Łatwo widzieć, że element liniowy naszej powierzchni sprowadzić się da do postaci:

$$ds^2 = \frac{m\, d\lambda^2}{\lambda(1+\lambda)(n\lambda+n+1)} + \frac{mn(n\lambda+n+1)}{(n+1)(1+\lambda)}\, d\varphi^2 .$$

Według wyrażenia (10) w Rozdziale II, element liniowy powierzchni S,

będącej drugą powierzchnią ogniskową stycznych do krzywych $\varphi = \text{const}$ będzie:

$$ds_1{}^2 = \frac{m(n\lambda+n+1)}{4\lambda^3(1+\lambda)}\, d\lambda^2 + \frac{m}{\lambda}\, dw^2 .$$

Kładąc:

$$\lambda = \frac{n+1}{n} \operatorname{tg}^2 \theta ,$$

sprowadzimy nasz element liniowy do postaci:

$$ds^2 = \frac{mn\, d\theta^2}{\sin^4\theta\,(n+\sin^2\theta)} + k^2 \operatorname{cotg}^2\theta\, dw^2 ,$$

gdzie k jest stała. Wnosimy stąd, że powierzchnia S daje się nałożyć na jednę z powierzchni obrotowych.

Wyznaczając, jak na końcu § 2, rzędną odpowiedniego punktu powierzchni S, znajdziemy, że równa się ona h, t. j. że promienie naszej kongruencyi przechodzą przez odpowiednie punkty powierzchni S; innemi słowy, kongruencya nasza jest kongruencyą dołączoną do jednej z powierzchni, dających się nałożyć na określoną zasadniczą powierzchnię obrotową.

Jeżeli stałej n nadamy wartość zero, wtedy, jak łatwo widzieć, powierzchnia S_0 będzie rozwijalną, powierzchnia Σ zniekształci się na linię krzywą, ortogonalną do płaszczyzn stycznych powierzchni S_0.

ROZDZIAŁ V.

Twierdzenie odwrotne do pierwszego twierdzenia Guicharda. Pewne przekształcenie powierzchni minimalnych. Twierdzenie odwrotne do pierwszego twierdzenia Bianchi'ego.

§ **1.** Widzieliśmy w trzecim rozdziale, że znając powierzchnię S, dającą się nałożyć na paraboloidę obrotową i mającą element liniowy postaci:

(1) $$ds^2 = \frac{a^2\,du^2}{\sin^6 u} + k^2 \operatorname{cotg}^2 u\, dv^2\,,$$

gdzie a i k są stałe, już przez to samo określamy dwie powierzchnie minimalne Σ i Σ_1. Powierzchnie te będą odpowiednio normalne do układów promieni padających i odbitych D i D_1, układów stanowiących kongruencye d o ł ą c z o n e do powierzchni S. Promienie kongruencyj D i D_1 leżą na płaszczyznach krzywizny krzywych $v = \text{const}$ i stanowią ze stycznemi do tych krzywych, poprowadzonemi w odpowiednich punktach padania promieni, kąty u i $-u$.

Odległości l punktów powierzchni Σ i Σ_1 od odpowiednich punktów powierzchni S wyrażają się przez kąty u przy pomocy wzoru:

(2) $$2\,l = \frac{a}{\sin^2 u}\,.$$

Linie krzywiznowe powierzchni Σ i Σ_1 odpowiadają jednemu i temu samemu układowi krzywych sprzężonych, przeprowadzonych na powierzchni S.

Dajmy, że mamy pewną powierzchnię minimalną Σ. Okażemy w tym rozdziale, że na normalnych do powierzchni Σ można znaleść zawsze takie punkty M, których miejscem geometrycznem będzie powierzchnia S o elemencie liniowym (1), t. j. powierzchnia, dająca się nałożyć na paraboloidę obrotową. Dla tej powierzchni S układ normalnych do powierzchni Σ jest kongruencyą dołączoną.

Znalazłszy powierzchnię S, będziemy już mogli wyznaczyć drugą powierzchnię minimalną Σ_1, którą można uważać za pewne p r z e k s z t a ł c e n i e powierzchni Σ.

Tym sposobem pytanie o wyznaczeniu powierzchni S przedstawia, oczywiście, pytanie odwrotne do zadania G u i c h a r d a a ściśle związane z pytaniem o pewnem przekształceniu powierzchni minimalnych.

Widzieliśmy dalej w rozdziale IV-ym, że znając pewną powierzchnię typu Weingartenowskiego o elemencie liniowym

$$ds^2 = du^2 + [2\,(u+v) + g\,e^{2v}]\,dv^2\,,$$

gdzie g jest stała, znajdujemy pewną powierzchnię minimalną Σ, normalną do kongruencyi prostych, leżących na płaszczyznach stycznych do powierzchni S_0 i równoległych do odpowiednich stycznych do linij krzywych $v = \text{const}$.

Nie jest pozbawione interesu i pytanie odwrotne, mianowicie, czy dla każdej powierzchni minimalnej Σ można znaleść odpowiednią powierzchnię Weingartenowską, związaną z powierzchnią Σ związkiem takim, jak wspomniana powierzchnia S_0.

Zajmmy się w tym rozdziale rozwiązaniem tych dwóch pytań, t. j. pytań odwrotnych do zadań G u i c h a r d a i B i a n c h i'ego.

§ **2.** Dajmy zatem, że mamy pewną powierzchnię minimalną Σ. Odnieśmy ją do linij krzywiznowych $\alpha = \text{const}$ i $\beta = \text{const}$; osi (T) obierzmy tak, aby oś x dotykała krzywych $\beta = \text{const}$, oś y — krzywych $\alpha = \text{const}$.

Wiadomo [1]), że element liniowy powierzchni Σ daje się w tym przypadku sprowadzić do postaci:

(3) $$ds^2 = \frac{\omega^2}{4}(d\alpha^2 + d\beta^2)\,;$$

wielkości zasadnicze, charakteryzujące naszą powierzchnię, będą:

$$\xi = \eta_1 = -\frac{\omega}{2}\,;\; p = q_1 = 0\,;\; p_1 = q = \frac{1}{\omega}\,;\; r = -\frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\,;\; r_1 = \frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\,,$$

gdzie ω jest całką równania różniczkowego:

(4) $$\frac{\partial^2 \log\omega}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 \log\omega}{\partial\beta^2} = \frac{1}{\omega^2}\,.$$

Na normalnej do powierzchni Σ weźmy jakikolwiek punkt $M(0, 0, l)$; rzuty jego przesunięć na osi (T) będą:

(5) $$\delta x = \frac{2\,l - \omega^2}{2\,\omega}\,d\alpha\,,\quad \delta y = -\frac{2\,l + \omega^2}{2\,\omega}\,d\beta\,,\quad \delta z = dl\,.$$

Zobaczmy, czy nie można wybrać punktu M tak, aby on w przestrzeni opisał taką powierzchnię S nakładalną na paraboloidę obrotową, aby normalne do powierzchni Σ stanowiły kongruencyę dołączoną do powierzchni S.

[1]) D a r b o u x, t. 3, p. 321.

Dla wyznaczenia wielkości l mamy dwa warunki. Pierwszym z nich jest związek (2) pomiędzy l a kątem u, który normalna do powierzchni Σ tworzy z odpowiednią płaszczyzną styczną do powierzchni S; drugi warunek stanowi to, że linie krzywiznowe powierzchni Σ odpowiadają krzywym sprzężonym powierzchni S. Wyrazimy analitycznie te dwa warunki i okażemy, że są z sobą zgodne.

Równaniem płaszczyzny stycznej do powierzchni S w odniesieniu do odpowiednich osi (T) będzie:

$$Mx+Ny+z-l=0\,; \tag{6}$$

spółczynniki M i N określimy z warunku

$$M\delta x+N\delta y+\delta z=0\,,$$

w którym δx, δy, δz są rzuty przesunięć rozważanego punktu. Ponieważ związek poprzedzający zachodzi dla wszelkich możliwych wartości $d\alpha$, $d\beta$, przeto:

$$M=-\frac{2\,\omega}{2\,l-\omega^2}\,\frac{\partial l}{\partial \alpha}\,,\quad N=\frac{2\,\omega}{2\,l+\omega^2}\,\frac{\partial l}{\partial \beta}\,. \tag{7}$$

Jeżeli u jest kątem, który normalna do powierzchni Σ tworzy z płaszczyzną (6), będzie oczywiście:

$$\sin^2 u=\frac{1}{M^2+N^2+1}\,.$$

Kładąc tę wartość $\sin^2 u$ w równanie (2), znajdziemy pierwszy warunek na wyznaczenie funkcyi l, mianowicie:

$$M^2+N^2=\frac{2\,l-a}{a}\,. \tag{I}$$

Warunek (I) jest równaniem różniczkowem o pochodnych cząstkowych rzędu 1-go szukanej funkcyi l.

Przejdźmy do warunku drugiego.

Przez punkt nieruchomy P przestrzeni, przyjęty za początek ruchomego układu spółrzędnych (T_1), którego osi są stale równoległe do odpowiednich osi spółrzędnych (T), poprowadźmy płaszczyznę równoległą do płaszczyzny (6); równaniem jej w odniesieniu do układu (T_1) będzie:

$$Mx+Ny+z=0\,. \tag{8}$$

Udzielmy parametrowi przyrostu $d\alpha$; niechaj wtedy osi (T_1) przyjmą położenie (T_1'), punkt M powierzchni S niechaj przesunie się po krzywej $\beta=\text{const}$ do pewnego punktu M'. Równaniem płaszczyzny, przechodzącej przez punkt P i równoległej do płaszczyzny stycznej powierzchni S w punkcie M', w odniesieniu do osi (T_1') będzie oczywiście:

$$M'x'+N'y'+z'=0\,, \tag{9}$$

gdzie:

$$M'=M+\frac{\partial M}{\partial \alpha}\,d\alpha\,,\quad N'=N+\frac{\partial N}{\partial \alpha}\,d\alpha\,.$$

Przecięcie płaszczyzn (8) i (9) da nam w granicy kierunek sprzężony z krzywą $\alpha=\text{const}$ na powierzchni S.

Równanie płaszczyzny (9) w odniesieniu do osi (T_1) otrzymamy, kładąc (porówn. wzory (11) w § 6 Rozdziału II):

$$x'=x-\left(\frac{y}{\omega}\,\frac{\partial\omega}{\partial\beta}+\frac{z}{\omega}\right)d\alpha\,,\quad y'=y+\frac{x}{\omega}\,\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\,d\alpha\,,\quad z'=z+\frac{x}{\omega}\,d\alpha\,,$$

a zatem prosta graniczna przecięcia płaszczyzn (8) i (9) dana będzie przez równanie (8) i równanie:

$$\left(\frac{\partial M}{\partial\alpha}+\frac{N}{\omega}\,\frac{\partial\omega}{\partial\beta}+\frac{1}{\omega}\right)x+\left(\frac{\partial N}{\partial\alpha}-\frac{M}{\omega}\,\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\right)y-\frac{Mz}{\omega}=0\,.$$

Jeżeli krzywe $\alpha=\text{const}$ i $\beta=\text{const}$ są krzywemi sprzężonemi na powierzchni S, to prosta, o której mowa, musi być równoległa do przesunięcia punktu M wzdłuż krzywej $\alpha=\text{const}$. Napisawszy ten warunek, otrzymujemy równanie:

$$\frac{\partial N}{\partial\alpha}=\frac{M}{\omega}\,\frac{\partial\omega}{\partial\beta}-\frac{MN}{\omega}\,; \tag{II}$$

jest to równanie o pochodnych cząstkowych rzędu 2-go funkcyi l. W rozwiniętej postaci przedstawia się ono tak:

$$\frac{\partial^2 l}{\partial\alpha\,\partial\beta}=-\frac{2\,l+\omega^2}{2\,l-\omega^2}\,\frac{1}{\omega}\,\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\,\frac{\partial l}{\partial\alpha}-\frac{2\,l-\omega^2}{2\,l+\omega^2}\,\frac{1}{\omega}\,\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\,\frac{\partial l}{\partial\beta}$$
$$+\frac{8\,l}{(2\,l-\omega^2)\,(2\,l+\omega^2)}\,\frac{\partial l}{\partial\alpha}\,\frac{\partial l}{\partial\beta}\,.$$

Równanie (II) możemy przedstawić nieco inaczej; korzystając mianowicie z wyrażeń (7) na M i N, możemy napisać:

$$\text{(III)} \qquad \frac{\partial M}{\partial \beta} = \frac{N}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + \frac{MN}{\omega}.$$

§ 3. Należy teraz wykazać zgodność równań (I) i (II) lub, co na jedno wychodzi, równań (I) i (III).

Dajmy, że tak jest istotnie. W tem założeniu, zróżniczkujmy równanie (I) względem α i otrzymaną stąd wartość na $\frac{\partial N}{\partial \alpha}$ wstawmy w równanie (II); znajdziemy:

$$M\left[\frac{\partial M}{\partial \alpha} + \frac{N}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial \beta} - \frac{N^2}{\omega} + \frac{2\,l - \omega^2}{2\,\alpha\omega}\right] = 0.$$

Wyłączmy na razie przypadek $M = 0$; będzie:

$$\text{(IV)} \qquad \frac{\partial M}{\partial \alpha} = -\frac{N}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial \beta} + \frac{N^2}{\omega} - \frac{2\,l - \omega^2}{2\,\alpha\omega}.$$

Różniczkując równanie (I) względem β, korzystając z wyrażenia (III) na $\frac{\partial M}{\partial \beta}$ i wyłączając przypadek $N = 0$, znajdziemy jeszcze:

$$\text{(V)} \qquad \frac{\partial N}{\partial \beta} = -\frac{M}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - \frac{M^2}{\omega} + \frac{2\,l + \omega^2}{2\,\alpha\omega}.$$

Jeżeli zatem równania (I) i (II) są zgodne, to muszą być zgodne równania (II) i (V), t. j. powinny zachodzić tożsamościowo związki:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \alpha\,\partial \beta} = \frac{\partial^2 M}{\partial \beta\,\partial \alpha}, \quad \frac{\partial^2 N}{\partial \alpha\,\partial \beta} = \frac{\partial^2 N}{\partial \beta\,\partial \alpha}.$$

O prawdziwości tych ostatnich tożsamości łatwo przekonać się przez zróżniczkowanie wyrażeń (II)—(V), gdy przy tem uwzględnimy związek (I) oraz przypomnimy sobie, że ω jest całką równania

$$\frac{\partial^2 \log \omega}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \log \omega}{\partial \beta^2} = \frac{1}{\omega^2}.$$

Jeżeli teraz przeniesiemy wszystkie wyrazy w równaniu (I) na stronę pierwszą i tak otrzymaną stronę oznaczymy przez L, to na mocy równań (II)—(V) znajdziemy, że pochodne $\frac{\partial L}{\partial \alpha}$ i $\frac{\partial L}{\partial \beta}$ są tożsamościowo równe zeru, t. j.

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \beta} = 0,$$

skąd wynika, że $L = \text{const}$. Aby równania (II)—(V) były zgodne, musi ta stała być zerem.

Równania (II)—(V) są trzema równaniami o pochodnych cząstkowych rzędu 2-go funkcyi l; jeżeli te równania są zgodne, to w pewnym obszarze posiadają całkę holomorficzną, określoną przez wartości początkowe funkcyj l, $\frac{\partial l}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial l}{\partial \beta}$ dla $\alpha = \alpha_0$ i $\beta = \beta_0$. Zgodność równań (II)—(V) wymaga, aby te wartości początkowe czyniły zadość związkowi $L_0 = 0$, gdzie L_0 jest wartością funkcyi L, gdy w niej zamiast funkcyj l, $\frac{\partial l}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial l}{\partial \beta}$ podstawimy ich wartości początkowe. Zważywszy teraz, że stałą a wybraliśmy dowolnie, widzimy, że w wyrażeniu na l występują trzy stałe dowolne 0, l_0, $\left(\frac{\partial l}{\partial \alpha}\right)_0$, a więc powierzchni S, czyniących zadość dwóm naszym warunkom, będzie ∞^3.

§ 4. Okażemy teraz, że wszystkie znalezione powierzchnie S dają się nałożyć na paraboloidę obrotową. Zwróćmy się do wyrażeń (5) na rzuty przesunięć punktu M powierzchni S; otrzymamy wtedy następujące wyrażenie elementu liniowego tej powierzchni:

$$ds_0^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 = \left[\frac{(2\,l - \omega^2)^2}{4\,\omega^2} + \left(\frac{\partial l}{\partial \alpha}\right)^2\right] d\alpha^2$$
$$+ 2\frac{\partial l}{\partial \alpha}\frac{\partial l}{\partial \beta}\,d\alpha\,d\beta + \left[\frac{(2\,l + \omega^2)^2}{4\,\omega^2} + \left(\frac{\partial l}{\partial \beta}\right)^2\right] d\beta^2.$$

Jeżeli S jest jedną z szukanych powierzchni nakładalnych na paraboloidę obrotową, to na niej krzywe $l = \text{const}$ powinny być równoleżnikami geodezyjnemi, t. j. parametr różniczkowy $\Delta_1(l)$, względem elementu liniowego ds_0^2 powinien być funkcyą samej wielkości l [1]).

Utworzywszy ten parametr, znajdziemy:

$$\Delta_1 l = \frac{2\,l - a}{2\,l}.$$

Jak wiadomo [2]), różniczka łuku linij geodezyjnych, ortogonalnych do krzywych $l = \text{const}$, wyraża się w ten sposób:

[1]) Bianchi l. c., str. 159.
[2]) Bianchi l. c., str. 160.

$$d\theta = \sqrt{\frac{2l}{2l-0}}\, dl\,,$$

element zaś liniowy powierzchni S może być sprowadzony do postaci:

$$ds_0{}^2 = d\theta^2 + \sigma^2\, dw^2\,.$$

Dla wyznaczenia funkcyi σ, znajdźmy wyrażenie krzywizny geodezyjnej linij l, korzystając ze znanego wzoru B o n n e t a:

$$\frac{1}{\varrho_{gl}} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial\alpha}\, \frac{F\dfrac{\partial l}{\partial\beta} - G\dfrac{\partial l}{\partial\alpha}}{H} + \frac{\partial}{\partial\beta}\, \frac{F\dfrac{\partial l}{\partial\alpha} - E\dfrac{\partial l}{\partial\beta}}{H} \right\},$$

gdzie

$$H = \sqrt{E\left(\frac{\partial l}{\partial\alpha}\right)^2 - 2F\frac{\partial l}{\partial\alpha}\,\frac{\partial l}{\partial\beta} + G\left(\frac{\partial l}{\partial\beta}\right)^2};$$

E, F, G są spółczynnikami elementu liniowego uważanej powierzchni S.

Korzystając z równań (I) — (V) i wprowadzając zamiast l zmienną u na podstawie wzoru $2l = \dfrac{a}{\sin^2 u}$, otrzymamy po wykonaniu wszelkich rachunków:

$$-\frac{1}{\varrho_{gl}} = \frac{\partial \log\sigma}{\partial u} = -\frac{1}{\sin u \cos u}\,,$$

skąd:

$$\sigma = k \operatorname{cotg} u\,,$$

gdzie k jest pewną stałą.

Z uwagi, że

$$d\theta = \sqrt{\frac{2l}{2l-a}}\, dl = -\frac{a\, du}{\sin^3 u}\,,$$

można element liniowy powierzchni S przedstawić w postaci:

$$ds_0{}^2 = \frac{a^2\, du^2}{\sin^6 u} + k^2 \operatorname{cotg}^2 u\, dw^2\,,$$

skąd wnosimy, że powierzchnia ta daje się nałożyć na paraboloidę obrotową.

Aby dowieść, że kongruencya normalnych do powierzchni Σ jest kongruencyą dołączoną do powierzchni S, winniśmy dowieść, że na powierzchni S krzywe $l = \text{const}$ są ortogonalne do płaszczyzn, przechodzących przez odpowiednie normalne do powierzchni S i Σ.

Równaniem jakiejkolwiek z tych płaszczyzn, w odniesieniu do układu spółrzędnych (T), będzie oczywiście:

$$Nx - My = 0\,.$$

Rzuty przesunięć punktu M powierzchni S wzdłuż krzywej $l = \text{const}$ wyrażają się tak:

$$\delta x = \frac{2l-\omega^2}{2\omega}\, d\alpha\,, \quad dy = \frac{2l+\omega^2}{2\omega}\, \frac{\dfrac{\partial l}{\partial\alpha}}{\dfrac{\partial l}{\partial\beta}}\, d\alpha\,, \quad \delta z = 0\,,$$

lub na mocy równań (7):

$$\delta x = \frac{2l-\omega^2}{2\omega}\, d\iota\,, \quad \delta y = -\frac{2l-\omega^2}{2\omega}\, \frac{M}{N}\, d\alpha\,, \quad \delta z = 0\,,$$

skąd wynika:

$$-\frac{M}{\delta y} = \frac{N}{\delta x}\,,$$

i to jest właśnie warunek szukany.

Doszliśmy zatem do twierdzenia:

K a ż d e j p o w i e r z c h n i m i n i m a l n e j Σ o d p o w i a d a ∞^3 p o w i e r z c h n i S, d a j ą c y c h s i ę n a ł o ż y ć n a p a r a b o l o i d ę o b r o t o w ą t a k, ż e n o r m a l n e d o p o w i e r z c h n i Σ s t a n o w i ą k o n g r u e n c y ę d o ł ą c z o n ą d o p o w i e r z c h n i S.

§ **5**. Wyłączyliśmy wyżej z badania naszego przypadek $M = 0$ lub $N = 0$, który teraz rozstrząśniemy szczegółowiej.

Dajmy najprzód $M = 0$; wtedy z równania (III) wynika, że albo $N = 0$, albo $\dfrac{\partial\omega}{\partial\alpha} = 0$. Pierwsze nie daje nam rozwiązania zagadnienia, albowiem wtedy będzie $l = \text{const}$ i $u = \text{const}$, a takiego rozwiązania nasze równania oczywiście nie dopuszczają. Jeżeli zaś przyjmiemy drugie, t. j. że $\dfrac{\partial\omega}{\partial\alpha} = 0$, wtedy powierzchnia Σ będzie powierzchnią obrotową, a ponieważ jest zarazem i minimalną, będzie zatem k a t e n o i d ą.

Wszystkie równania (I)—(V) sprowadzają się do jednego równania (I), które w tym przypadku będzie równaniem różniczkowem zwyczajnem rzędu pierwszego. Całka tego równania zawiera j e d n ę stałą dowolną; dołączając do niej jeszcze stałą dowolną a, widzimy, że będzie ∞^2 powierzchni S, czyniących zadość naszym warunkom. Element liniowy tych powierzchni będzie postaci:

$$ds_0^2 = \frac{(2\,l-\omega^2)^2}{4\,\omega^2}\,d\alpha^2 + \left[\frac{(2\,l+\omega^2)^2}{4\,\omega^2} + \left(\frac{dl}{d\beta}\right)^2\right] d\beta^2 .$$

Ponieważ l i ω są funkcyami jednego parametru β, przeto już z samej postaci elementu liniowego widać, że powierzchnia S jest nakładalna na powierzchnię obrotową. Przy pomocy takiej samej analizy jak w paragrafie poprzedzającym przekonać się można, że powierzchnia S jest nakładalna na paraboloidę obrotową.

Przy pomocy bardzo prostych rozważań można wykazać, że powierzchnia S w tym przypadku będzie powierzchnią obrotową. W rzeczy samej, ponieważ odległość l pomiędzy odpowiedniemi punktami powierzchni S i Σ jest funkcyą jednego parametru β, to nie zmienia się ona przy przesunięciach po tych powierzchniach wzdłuż krzywych $\beta = \mathrm{const}$; innemi słowy, przesunięcia wzdłuż jakiejkolwiek krzywej $\beta = \mathrm{const}$ po powierzchniach S i Σ będą równoległe do siebie. Lecz ponieważ na katenoidzie Σ krzywe $\beta = \mathrm{const}$, jako równoleżniki są okręgami kół, to i na powierzchni S będą okręgami kół. Nakoniec, ponieważ krzywe te na ostatniej powierzchni są wygięciami równoleżników, to stąd jasną jest rzeczą, że powierzchnia S będzie w tym przypadku p o w i e r z c h n i ą o b r o t o w ą. Doszliśmy tedy do twierdzenia:

K a ż d e j k a t e n o i d z i e Σ o d p o w i a d a ∞^2 p o w i e r z c h n i o b r o t o w y c h, n a k ł a d a l n y c h n a p a r a b o l o i d ę o b r o t o w ą, p r z y c z e m n o r m a l n e d o p o w i e r z c h n i Σ s t a n o w i ą k o n g r u e n c y ę d o ł ą c z o n ą d o p o w i e r z c h n i S.

§ **6**. Wiemy na zasadzie pierwszego twierdzenia G u i c h a r d a, że miejscem geometrycznem punktów symetrycznych do punktów powierzchni Σ względem odpowiednich płaszczyzn stycznych do powierzchni S będzie pewna powierzchnia minimalna Σ_1.

Dowiedziemy tego, nie korzystając z twierdzenia G u i c h a r d a.

Rozpatrzmy miejsce geometryczne Σ_1 punktów symetrycznych do punktów powierzchni Σ względem płaszczyzn stycznych do powierzchni S, t. j. względem płaszczyzn:

$$Mx + Ny + z - l = 0 .$$

Spółrzędnemi uważanego punktu będą oczywiście:

$$x = \frac{2\,lM}{M^2+N^2+1}\,, \quad y = \frac{2\,lN}{M^2+N^2+1}\,, \quad z = \frac{2\,l}{M^2+N^2+1}\,,$$

lub na mocy związku (I):

$$x = aM\,, \quad y = aN\,, \quad z = a\,. \tag{10}$$

Wnosimy stąd, ż e o d l e g ł o ś ć p u n k t ó w p o w i e r z c h n i Σ_1 o d p ł a s z c z y z n s t y c z n y c h, p r z e p r o w a d z o n y c h d o p o w i e r z c h n i Σ w p u n k t a c h o d p o w i e d n i c h, j e s t w i e l k o ś c i ą s t a ł ą.

Znajdźmy wyrażenie na element liniowy powierzchni Σ_1.

Rzuty przesunięć punktu (10) na odpowiednie osi będą:

$$\delta x = -\frac{\omega}{2}\,d\alpha + a\,dM + \frac{a}{\omega}\,d\alpha - \left(-\frac{1}{\omega}\,\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\,d\alpha + \frac{1}{\omega}\,\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\,d\beta\right) aN\,,$$

$$\delta y = -\frac{\omega}{2}\,d\beta + a\,dN + \left(-\frac{1}{\omega}\,\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\,d\alpha + \frac{1}{\omega}\,\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\,d\beta\right) aM - \frac{a}{\omega}\,d\beta\,,$$

$$\delta z = \frac{a}{\omega}\,(N\,d\beta - M\,d\alpha)\,,$$

lub na mocy równań (II)—(V):

$$\delta x = \frac{1}{\omega}\,(aN^2 + a - l)\,d\alpha + \frac{a\,MN}{\omega}\,d\beta\,,$$

$$\delta y = -\frac{a\,MN}{\omega}\,d\alpha + \frac{1}{\omega}\,(l - a - aM^2)\,d\beta\,, \tag{11}$$

$$\delta z = -\frac{aM}{\omega}\,d\alpha + \frac{aN}{\omega}\,d\beta\,.$$

Uwzględniwszy związek (I), znajdziemy następujące wyrażenie na element liniowy powierzchni Σ_1:

$$ds_1^2 = \frac{\omega_1^2}{4}\,(d\alpha^2 + d\beta^2)\,, \tag{12}$$

gdzie ω_1 jest funkcya, określona równaniem:

$$\frac{\omega_1^2}{4} = \frac{l^2}{\omega^2} \tag{13}$$

Równaniem płaszczyzny stycznej do naszej powierzchni Σ_1 będzie, jak to łatwo widzieć:

$$aM(x-aM)+aN(y-aN)+(a-l)(z-a)=0\,,$$

lub na mocy związku (I):

$$aMx+aNy+(a-l)z-al=0\,. \tag{14}$$

Widzimy stąd, że odległość odpowiedniego punktu powierzchni Σ od płaszczyzny (14) wynosi:

$$\delta=\frac{|\,al\,|}{+\sqrt{a^2M^2+a^2N^2+(a-l)^2}}=|\,a\,|\,,$$

t. j. równa się stałej wielkości $|\,a\,|$, która jest odległością odpowiedniego punktu powierzchni Σ_1 od płaszczyzny stycznej do powierzchni Σ.

Tym sposobem związek pomiędzy powierzchniami Σ i Σ_1 jest wzajemny.

Dowiedziemy jeszcze, że powierzchnia Σ_1 jest minimalna, oraz że linie asymptotyczne i krzywiznowe powierzchni Σ_1 odpowiadają liniom asymptotycznym i krzywiznowym powierzchni Σ.

W dowodzeniu tem posługiwać się będziemy metodą, nieraz już stosowaną, i którą często jeszcze stosować będziemy.

Weźmy jakikolwiek punkt nieruchomy P za początek spółrzędnych (T_1), których osi pozostają stale równoległe do odpowiednich osi spółrzędnych (T). Przez punkt P poprowadźmy płaszczyznę równoległą do płaszczyzny stycznej (14) do powierzchni Σ_1; równaniem tej płaszczyzny w układzie (T_1) będzie:

$$aMx+aNy+(a-l)z=0\,. \tag{15}$$

Udzielmy parametrom α, β przyrostów $d\alpha, d\beta$; wtedy osi (T_1) przyjmą położenie (T_1'); względem zaś tego ostatniego układu równaniem płaszczyzny przechodzącej przez punkt P i równoległej do odpowiedniej płaszczyzny stycznej do powierzchni Σ_1 będzie:

$$aM'x'+aN'y'+(a-l')z'=0\,,$$

gdzie:

$$M'=M+dM\,,\quad N'=N+dN\,,\quad l'=l+dl\,.$$

Równaniem tej płaszczyzny w układzie (T_1) na mocy znanych wzorów na przekształcenie spółrzędnych (patrz § 6, Rozdział II) będzie:

$$Hx+Ky+Lz=0\,, \tag{16}$$

gdzie:

$$H=\left(aN^2+a-2l+\frac{\omega^2}{2}\right)d\alpha+a\,MN\,d\beta\,,$$

$$K=-a\,MN\,d\alpha+\left(\frac{\omega^2}{2}-a+2l-a\,M^2\right)d\beta\,,$$

$$L=a\left(l-a-\frac{\omega^2}{2}\right)M\,d\alpha+a\left(a-l-\frac{\omega^2}{2}\right)N\,d\beta\,.$$

Prosta, według której przecinają się płaszczyzny (15) i (16), jest równoległa do kierunku sprzężonego na powierzchni Σ_1 z kierunkiem, który charakteryzuje zmianę parametrów α, β o wielkości $d\alpha, d\beta$. Stąd wynika, że jeżeli przez $\delta_1 x, \delta_1 y, \delta_1 z$ oznaczymy rzuty przesunięć po krzywej sprzężonej z krzywą $(d\alpha, d\beta)$, to warunek:

$$H\,\delta_1 x+K\,\delta_1 y+L\,\delta_1 z=0\,, \tag{17}$$

będzie równaniem różniczkowem krzywych sprzężonych poprowadzonych na powierzchni Σ_1.

Jeżeli teraz przez $\delta\alpha, \delta\beta$ oznaczymy przyrosty parametrów, odpowiadające przesunięciu $(\delta_1 x, \delta_1 y, \delta_1 z)$, to na mocy związku (I) równanie (17) sprowadzimy do postaci:

$$d\alpha\,\delta\alpha-d\beta\,\delta\beta=0\,. \tag{18}$$

To równanie jest zarazem równaniem krzywych sprzężonych na danej powierzchni Σ. Tym sposobem dochodzimy do wniosku, że *każdemu układowi krzywych sprzężonych na powierzchni Σ odpowiada układ krzywych sprzężonych na powierzchni Σ_1, i naodwrót.*

Można to twierdzenie wyrazić nieco inaczej, mianowicie: *linie asymptotyczne powierzchni Σ i Σ_1 odpowiadają sobie wzajemnie.*

Wreszcie łatwo widzieć, że równanie (18) spełnia się przy $\alpha=\text{const}$, $\beta=\text{const}$; a ponieważ te linie są wzajemnie ortogonalnemi na powierzchni Σ_1, przeto są jej liniami krzywiznowemi. Tym sposobem *linie krzywiznowe na powierzchniach Σ i Σ_1 odpowiadają sobie wzajemnie.*

Równaniem linij asymptotycznych na powierzchniach Σ i Σ_1 będzie:

$$d\alpha^2-d\beta^2=0$$

i dla tego kładąc:

$$u=\frac{\alpha+\beta}{2}, \quad v=\frac{\alpha-\beta}{2},$$

napiszemy równanie linij asymptotycznych w postaci:

$$u=\text{const}, \quad v=\text{const}.$$

Te ostatnie krzywe weźmy za linie spółrzędne na powierzchni Σ_1; wtedy element liniowy naszej powierzchni sprowadzi się do postaci:

$$ds_1^2=\frac{\omega_1^2}{4}(du^2+dv^2),$$

skąd widać, że linie asymptotyczne na powierzchni Σ_1 są ortogonalne, a więc powierzchnia Σ_1 jest powierzchnią minimalną.

Tak więc całkowanie równań (I)—(V) prowadzi do przekształcenia powierzchni minimalnej Σ na inną powierzchnię minimalną Σ_1. Powierzchnie Σ i Σ_1 są związane ze sobą w ten sposób, że odległość punktów jednej z nich od płaszczyzn stycznych, poprowadzonych w odpowiednich punktach drugiej, jest stała. Prócz tego linie krzywiznowe i asymptotyczne jednej powierzchni odpowiadają liniom krzywiznowym i asymptotycznym drugiej.

§ 7. Bonnet dowiódł [1]), że z każdą powierzchnią minimalną związana jest w pewien sposób inna powierzchnia minimalna, zwana dołączoną (surface adjointe) do pierwszej.

Oznaczmy przez Σ^0, Σ_1^0 dwie powierzchnie minimalne, dołączone odpowiednio do powierzchni Σ i Σ_1 poprzedzającego paragrafu. Zobaczmy, jaki zachodzi związek pomiędzy powierzchniami Σ^0 i Σ_1^0.

Przedtem jednak rozpatrzmy powierzchnie, związane z jakąkolwiek powierzchnią minimalną Σ takim sposobem, że płaszczyzny styczne w odpowiednich punktach tych powierzchni i powierzchni Σ są równoległe do siebie, styczne zaś, poprowadzone w odpowiednich punktach do odpowiednich krzywych na szukanych powierzchniach i na powierzchni Σ, są wzajemnie ortogonalne.

Okażemy, że wszystkie szukane powierzchnie są powierzchniami minimalnemi i że w ich liczbie będą powierzchnie dołączone do powierzchni Σ.

[1]) Note sur la théorie générale des surfaces (Comptes rendus t. XXXVII, 529–532), patrz także Darboux t. I, str. 322.

Obierzmy dowolny punkt nieruchomy P jako początek ruchomego układu spółrzędnych (T_1), którego osi pozostają stale równoległe do odpowiednich osi spółrzędnych (T); te ostatnie są związane z powierzchnią Σ w sposób umówiony w § 1 niniejszego rozdziału.

Szukane powierzchnie będą obwiedniemi płaszczyzn, których równania w odniesieniu do układu (T) będą postaci:

$$z=z_0\,, \tag{19}$$

gdzie z_0 jest pewną funkcyą wielkości α i β. Normalne do szukanych powierzchni są kongruencyami liniowemi, których promienie są równoległe do odpowiednich osi spółrzędnych (T_1); równaniami któregokolwiek promienia w odniesieniu do osi (T_1) będą:

$$x=x_0\,,\quad y=y_0\,,$$

gdzie x_0, y_0 są funkcye wielkości α i β. Postarajmy się z powyższych warunków wyznaczyć funkcye x_0, y_0, z_0.

Zachowując wszystkie znakowania poprzednich paragrafów, znajdziemy następujące wyrażenia na rzuty przesunięć jakiegokolwiek punktu (x, y, z) na osi (T_1):

$$\tag{20}\begin{aligned}\delta x&=dx+\frac{z}{\omega}d\alpha-\left(-\frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\beta}+\frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}d\beta\right)y\,,\\ \delta y&=dy+\left(-\frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\beta}d\alpha+\frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}d\beta\right)x-\frac{z}{\omega}d\beta\,,\\ \delta z&=dz+\frac{y}{\omega}d\beta-\frac{x}{\omega}d\alpha\,.\end{aligned}$$

Ponieważ przesunięcie punktu (x_0, y_0, z_0), należącego do szukanej obwiedniej płaszczyzn (19), przy jakichkolwiek nieskończenie małych zmianach parametrów α i β, odbywają się w płaszczyznie (19), przeto dla wszelkich wartości $d\alpha$, $d\beta$, rzuty tych przesunięć na oś z są równe zeru, t. j.

$$dz_0+\frac{y_0}{\omega}d\beta-\frac{x_0}{\omega}d\alpha=0\,,$$

skąd wnosimy, że:

$$x_0=\omega\frac{\partial z_0}{\partial\alpha}\,,\quad y_0=-\omega\frac{\partial z_0}{\partial\beta}\,. \tag{21}$$

Zwróćmy się teraz do warunku drugiego, który możemy wyrazić w ten sposób: przesunięcia wzdłuż odpowiednich krzywych, przeprowadzonych na szukanej obwiedniej i na powierzchni Σ są wzajemnie ortogonalne. Ponieważ rzuty przesunięć odpowiedniego punktu powierzchni Σ na osi (T_1) będą oczywiście:

$$\delta x = -\frac{\omega}{2}\,d\alpha\,, \quad \delta y = -\frac{\omega}{2}\,d\beta\,, \quad \delta z = 0\,,$$

to warunek drugi sprowadzi się do trzech następujących:

$$(22)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial x_0}{\partial \alpha} + \frac{z_0}{\omega} + \frac{\partial \log \omega}{\partial \beta}\, y_0 = 0\,, \\ &\frac{\partial x_0}{\partial \beta} - \frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha}\, y_0 + \frac{\partial y_0}{\partial \alpha} - \frac{\partial \log \omega}{\partial \beta}\, x_0 = 0\,, \\ &\frac{\partial y_0}{\partial \beta} + \frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha}\, x_0 - \frac{z_0}{\omega} = 0\,. \end{aligned}$$

Drugi z warunków (22) spełnia się tożsamościowo na mocy równań (21); co się zaś tyczy pierwszego i trzeciego warunku (22), to na mocy tychże równań przybierają one postać:

$$(23)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 z_0}{\partial \alpha^2} = -\frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha}\,\frac{\partial z_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial \log \omega}{\partial \beta}\,\frac{\partial z_0}{\partial \beta} - \frac{z_0}{\omega^2}\,, \\ &\frac{\partial^2 z_0}{\partial \beta^2} = \frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha}\,\frac{\partial z_0}{\partial \alpha} - \frac{\partial \log \omega}{\partial \beta}\,\frac{\partial z_0}{\partial \beta} - \frac{z_0}{\omega^2}\,. \end{aligned}$$

Widzimy tedy, że szukane powierzchnie istnieć będą, jeżeli równania (23) będą zgodne.

Mamy tedy dowieść, że równania te są zgodne. Różniczkując pierwsze z nich względem β i pamiętając, że ω jest całką równania:

$$\frac{\partial^2 \log \omega}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \log \omega}{\partial \beta^2} = \frac{1}{\omega^2}\,,$$

znajdziemy łatwo, że

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{\partial^2 z_0}{\partial \alpha\,\partial \beta} + \frac{\partial \log \omega}{\partial \beta}\,\frac{\partial z_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha}\,\frac{\partial z_0}{\partial \beta}\right] = 0\,.$$

Podobnież, różniczkując drugie z równań (23) względem α, znajdziemy:

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{\partial^2 z_0}{\partial \alpha\,\partial \beta} + \frac{\partial \log \omega}{\partial \beta}\,\frac{\partial z_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha}\,\frac{\partial z_0}{\partial \beta}\right] = 0\,,$$

skąd wnosimy, że jeżeli równania (23) są zgodne, to z_0 czyni zadość równaniu:

$$(24)\qquad \frac{\partial^2 z_0}{\partial \alpha\,\partial \beta} = -\frac{\partial \log \omega}{\partial \beta}\,\frac{\partial z_0}{\partial \alpha} - \frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha}\,\frac{\partial z_0}{\partial \beta} + \frac{k}{2}\,,$$

gdzie k jest pewną stałą.

Teraz już przy pomocy prostego różniczkowania przekonamy się, że równania (23) i (24) są zgodne przy jakichkolwiek wartościach stałych k, albowiem wartości na $\frac{\partial^3 z_0}{\partial \alpha^2 \partial \beta}$ i $\frac{\partial^3 z_0}{\partial \alpha \partial \beta^2}$, z równań tych otrzymać się dające, są równe.

Na mocy wyrażeń (21), równanie (24) możemy napisać w postaci:

$$(25)\qquad \frac{\partial x_0}{\partial \beta} - \frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha}\, y_0 = -\frac{\partial y_0}{\partial \alpha} - \frac{\partial \log \omega}{\partial \beta}\, x_0 = \frac{k\omega}{2}\,.$$

Jeżeli zauważymy, że na podstawie warunków (22) rzuty przesunięć punktu (x_0, y_0, z_0) na osi (T_1) są:

$$\delta x = \left(\frac{\partial x_0}{\partial \beta} - \frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha}\, y_0\right) d\beta\,, \quad \delta y = -\left(\frac{\partial x_0}{\partial \beta} - \frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha}\, y_0\right) d\alpha\,, \quad \delta z = 0\,,$$

znajdziemy następujące wyrażenie elementu liniowego naszej obwiedniej:

$$ds_0^2 = \frac{k^2\omega^2}{4}\,(d\alpha^2 + d\beta^2)\,.$$

Wnosimy stąd, że wszystkie powierzchnie które otrzymamy, nadając stałej k wszelkie możliwe wartości, będą homotetyczne z powierzchnią Σ. W przypadku, gdy $k = \pm 1$, znajdziemy niektóre powierzchnie Σ^0 nakładalne na powierzchnię Σ.

Znajdźmy promienie krzywizny i linie krzywiznowe otrzymanych przez nas powierzchni, które dla krótkości oznaczać będziemy przez Σ_k.

Na podstawie równań (22) i (25), rzuty przesunięć dowolnego punktu, leżącego na promieniu $x = x_0$, $y = y_0$, lub — co na jedno wychodzi — punktu na normalnej do powierzchni Σ_k będą:

$$\delta x = \frac{z - z_0}{\omega}\,d\alpha + \frac{k\omega}{2}\,d\beta\,, \quad \delta y = -\frac{k\omega}{2}\,d\alpha + \frac{z_0 - z}{\omega}\,d\beta\,, \quad \delta z = d\,(z - z_0)\,.$$

Jeżeli przyrosty parametrów $(d\alpha, d\beta)$ odpowiadają liniom krzywiznowym powierzchni Σ_k, to przesunięcie odpowiedniego środka krzywizny tej powierzchni będzie skierowane wzdłuż normalnej do powierzchni Σ_k; innemi słowy, dla uważanego przesunięcia środka krzywizny mamy:

$$(26)\quad \delta x = \frac{z - z_0}{\omega}\, d\alpha + \frac{k\omega}{2}\, d\beta = 0\,, \quad \delta y = -\frac{k\omega}{2}\, d\alpha + \frac{z_0 - z}{\omega}\, d\beta = 0\,.$$

Rugując stąd z, znajdziemy równanie różniczkowe linij krzywiznowych powierzchni Σ_k; będzie ono postaci:

$$d\alpha^2 - d\beta^2 = 0\,,$$

skąd wnosimy, że liniom krzywiznowym powierzchni Σ_k odpowiadają linie asymptotyczne powierzchni Σ.

Zauważywszy dalej, że w danym przypadku $z - z_0$ jest wielkością odpowiedniego promienia krzywizny powierzchni Σ_k i rugując z równania (26) $\frac{d\alpha}{d\beta}$, znajdziemy:

$$(z - z_0)^2 = \frac{k^2\omega^4}{4}\,,$$

skąd wnosimy, że powierzchnia Σ_k jest powierzchnią minimalną; a zatem, jeżeli przyjmiemy, że $k = \pm 1$, to odpowiednie powierzchnie Σ^0 będą powierzchniami dołączonemi do danej powierzchni Σ.

Zbierając otrzymane wyniki, dochodzimy do następującego twierdzenia. Powierzchnie Σ_k, związane z pewną powierzchnią minimalną Σ w ten sposób, że płaszczyzny styczne, poprowadzone w odpowiednich punktach powierzchni Σ i Σ_k są do siebie równoległe, styczne zaś do odpowiednich krzywych, poprowadzone w odpowiednich punktach, są odpowiednio ortogonalne, są powierzchniami minimalnemi homotetycznemi z powierzchnią Σ; linie krzywiznowe powierzchni Σ_k odpowiadają liniom asymptotycznym powierzchni Σ. Jeżeli spółczynnik podobieństwa k równa się ± 1, to odpowiednie powierzchnie Σ_k są powierzchniami dołączonemi do powierzchni Σ.

§ 8. W § poprzedzającym dowiedliśmy, że dla każdej powierzchni minimalnej istnieją powierzchnie dołączone minimalne, t. j. powierzchnie, związane sposobem określonym z powierzchnią daną.

Rozpatrzymy teraz powierzchnie Σ^0 i $\Sigma_1{}^0$, odpowiednio dołączone do powierzchni Σ i Σ_1, o których była mowa w § 6 tego rozdziału.

Spółrzędne odpowiedniego punktu M powierzchni Σ^0 w odniesieniu do osi (T_1) będą na zasadzie powyższego:

$$(27)\quad x_0 = \omega\frac{\partial z_0}{\partial \alpha}\,, \quad y_0 = -\omega\frac{\partial z_0}{\partial \beta}\,, \quad z_0\,,$$

gdzie z_0 czyni zadość równaniu (23) i (24), przyczem w drugiem z nich nadaje się stałej k wartość ± 1.

Niechaj $M_1(x_1, y_1, z_1)$ będzie odpowiednim punktem powierzchni $\Sigma_1{}^0$, dołączonej do powierzchni Σ_1; x_1, y_1, z_1 — niechaj będą spółrzędnemi tego punktu w odniesieniu do tychże osi (T_1).

Powierzchnię $\Sigma_1{}^0$ charakteryzuje to, że: 1) jej płaszczyzna styczna wyraża się równaniem:

$$(28)\quad aM(x - x_1) + aN(y - y_1) + (a - l)(z - z_1) = 0\,,$$

gdzie M, N, l są funkcye znane; 2) jeżeli przez $\delta x, \delta y, \delta z$ oznaczymy rzuty przesunięć punktu powierzchni Σ_1, odpowiadającego punktowi $M_1(x_1, y_1, z_1)$ powierzchni $\Sigma_1{}^0$, to dla wszelkich możliwych wartości $d\alpha, d\beta$ zachodzi związek:

$$(29)\quad \delta x\,\delta x_1 + \delta y\,\delta y_1 + \delta z\,\delta z_1 = 0\,;$$

i wreszcie 3) element liniowy powierzchni $\Sigma_1{}^0$ wyraża się wzorem (patrz § 6, wyrażenia (12) i (13)):

$$(30)\quad ds_1{}^2 = \frac{l^2}{\omega^2}(d\alpha^2 + d\beta^2)\,.$$

Wiemy prócz tego, że liniom krzywiznowym powierzchni $\Sigma_1{}^0$ będą odpowiadały krzywe asymptotyczne powierzchni Σ_1, t. j. krzywe:

$$u = \frac{\alpha + \beta}{2} = \text{const}\,, \quad v = \frac{\alpha - \beta}{2} = \text{const}\,.$$

Wychodząc z tych warunków, wyznaczymy spółrzędne punktu x_1, y_1, z powierzchni $\Sigma_1{}^0$.

Rzuty przesunięć naszego punktu są:

$$\delta x_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + \frac{z_1}{\omega} + \frac{\partial \log \omega}{\partial \beta} y_1\right) d\alpha + \left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta} - \frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha} y_1\right) d\beta = A_1\, d\alpha + B_1\, d\beta\,,$$

$$(31)\quad \delta y_1 = \left(\frac{\partial y_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial \log \omega}{\partial \beta} x_1\right) d\alpha + \left(\frac{\partial y_1}{\partial \beta} + \frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha} x_1 - \frac{z_1}{\omega}\right) d\beta = A_2\, \delta\alpha + B_2\, d\beta\,,$$

$$\delta z_1 = \left(\frac{\partial z_1}{\partial \alpha} - \frac{x_1}{\omega}\right) d\alpha + \left(\frac{\partial z_1}{\partial \beta} + \frac{y_1}{\omega}\right) d\beta = A_3\, d\alpha + B_3\, d\beta\,.$$

Tu dla skrócenia oznaczyliśmy przez $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ spółczynniki przy $d\alpha$ i $d\beta$ w wyrażeniach na δx_1, δy_1, δz_1.

Ponieważ przesunięcia punktu x_1, y_1, z_1 przy wszelkich nieskończenie małych zmianach parametrów α, β odbywają się w płaszczyznie (27), będziemy przeto mieli dwa warunki;

$$(32)\quad \begin{aligned} a\, MA_1 + a\, NA_2 + (a - l)\, A_3 &= 0\,, \\ a\, MB_1 + a\, NB_2 + (a - l)\, B_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Przy uwzględnieniu wyrażeń (11), warunek (29) rozpadnie się na trzy następujące:

$$A_1\, (l - aM^2) - A_2 a\, MN - A_3 a\, M = 0\,,$$

$$B_1 a\, MN + B_2\, (aN^2 - l) + B_3 a\, N = 0\,,$$

$$A_1 a\, MN + A_2\, (aN^2 - l) + A_3 a\, N + B_1\, (l - aM^2) - B_2 a\, MN - B_3 a\, M = 0\,,$$

które, przy pomocy równań (32), sprowadzimy do postaci:

$$(33)\quad A_1 - M A_3 = 0\,,\quad B_2 - N B_3 = 0\,,\quad A_2 - N A_3 - B_1 + M B_3 = 0\,.$$

Teraz już łatwo będzie przedstawić związki (32) i (33) w ten sposób:

$$(34)\quad \begin{gathered} A_1 - M A_3 = 0\,,\quad A_2 - \frac{aN^2 - l}{aN} A_3 = 0\,,\quad B_1 - \frac{aM^2 - l}{aM} B_3 = 0\,, \\ B_2 - NB_3 = 0\,,\quad MA_3 - NB_3 = 0\,. \end{gathered}$$

Z tych równań mamy przedewszystkiem:

$$A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = 0\,,$$

co znaczy, że krzywe $\alpha = \text{const}$ i $\beta = \text{const}$ na powierzchni $\Sigma_1{}^0$ są ortogo-

nalne. Dalej na mocy równań (34) i ostatniego naszego warunku o powierzchni $\Sigma_1{}^0$ będzie:

$$A_1{}^2 + A_2{}^2 + A_3{}^2 = \frac{l^2}{a^2 N^2} A_3{}^2 = B_1{}^2 + B_2{}^2 + B_3{}^2 = \frac{l^2}{a^2 M^2} B_3{}^2 = \frac{l^2}{\omega^2}\,,$$

skąd wnosimy, że:

$$A_3 = \frac{\partial z_1}{\partial \alpha} - \frac{x_1}{\omega} = \pm \frac{aN}{\omega}\,,\quad B_3 = \frac{\partial z_1}{\partial \beta} + \frac{y_1}{\omega} = \pm \frac{aM}{\omega}\,.$$

Z tych związków znajdujemy:

$$(35)\quad x_1 = \omega \frac{\partial z_1}{\partial \alpha} \mp aN\,,\quad y_1 = -\omega \frac{\partial z_1}{\partial \beta} \pm aM\,.$$

Podstawiając te wartości x_1, y_1 do równań (34) i korzystając z naszych równań zasadniczych (I) — (V), otrzymamy następujące równania, którym powinna czynić zadość funkcya z_1:

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial \alpha^2} = -\frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial z_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \log \omega}{\partial \beta} \frac{\partial z_1}{\partial \beta} - \frac{z_1}{\omega^2}\,,$$

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial \alpha \partial \beta} = -\frac{\partial \log \omega}{\partial \beta} \frac{\partial z_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial z_1}{\partial \beta} \pm \frac{1}{2}\,,$$

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial \beta^2} = \frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial z_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial \log \omega}{\partial \beta} \frac{\partial z_1}{\partial \beta} - \frac{z_1}{\omega^2}\,.$$

Widzimy, że równania, którym czyni zadość funkcya z_1 są tożsame z równaniami (23) i (24), którym czyni zadość funkcya z_0, i dla tego wybrawszy odpowiednio stałe całkowania, możemy przyjąć, że $z_1 = z_0$, a porównawszy następnie wyrażenia (27) i (35), mieć będziemy:

$$x_0 - x_1 = \pm aN\,,\quad y_0 - y_1 = \mp aM\,,\quad z_0 - z_1 = 0\,,$$

skąd:

$$aM\,(x_0 - x_1) + aN\,(y_0 - y_1) + (a - l)\,(z_0 - z_1) = 0\,.$$

Innemi słowy, punkt (x_0, y_0, z_0) powierzchni Σ^0 leży na płaszczyznie stycznej do powierzchni $\Sigma_1{}^0$, wtedy gdy punkt (x_1, y_1, z_1) powierzchni $\Sigma_1{}^0$ leży na płaszczyznie stycznej $z = z_0$ do powierzchni Σ^0.

Wnosimy stąd, że proste, łączące odpowiednie punkty powierzchni Σ^0 i $\Sigma_1{}^0$, są styczne do tych powierzchni. Można to inaczej wyrazić tak:

powierzchnie Σ^0 i Σ^1 są powierzchniami ogniskowemi pewnej kongruencyi liniowej. Jak widzieliśmy, są to powierzchnie minimalne na których krzywe $\alpha = \text{const}$ i $\beta = \text{const}$ są liniami asymptotycznemi.

Przyśliśmy tym sposobem do kongruencyj liniowych, charakteryzujących się tem, że linie asymptotyczne na ich powierzchniach ogniskowych odpowiadają sobie wzajemnie; kongruencye takie nazywają się kongruencyami W ze względu na ich analogię z kongruencyami normalnych do jakiejkolwiek powierzchni W, której powierzchnie ogniskowe, jak widzieliśmy (Rozdział II § 7) związane są podobną odpowiedniością.

Przypadek, w którym powierzchnie kongruencyi W są powierzchniami minimalnemi, t. j. przypadek właśnie rozpatrzony przez nas, zbadał szczegółowo pierwszy Thybaut w interesującej rozprawie p. t.: „Sur la déformation du paraboloïde et sur quelques problèmes qui s'y rattachent" [1]) w której doszedł do tychże kongruencyj na innej zupełnie drodze.

Nie będziemy tu wchodzili w dalsze dotyczące tych kongruencyj szczegóły, po które odsyłamy czytelnika do wymienionej pracy Thybauta; zauważymy tylko, że na drodze, przez nas stosowanej, dojść można do najogólniejszych kongruencyj, badanych przez Thybauta.

Ponieważ punkt ruchomy P, będący początkiem układu spółrzędnych (T_1) obrany został zupełnie dowolnie, wnosimy stąd, że powierzchnie minimalne dołączone do danej, dadzą się wyznaczyć w przestrzeni, prócz pewnego przesunięcia postępowego. Możemy przeto w następujący sposób wyrazić otrzymane wyniki: powierzchnie Σ^0 i Σ_1^0, dołączone do powierzchni Σ i Σ_1, mogą być przy pomocy przesunięcia postępowego sprowadzone do takiego położenia, że będą powierzchniami ogniskowemi pewnej kongruencyi Thybauta. Rozumie się samo przez się, że zakładamy, iż powierzchnie Σ i Σ_1 są związane ze sobą w ten sposób, jak podano w § 6 niniejszego rozdziału.

§ **9**. Widzieliśmy w rozdziale III, że nasze powierzchnie minimalne Σ i Σ_1 są normalne do pewnego układu kół (K), których środki leżą na odpowiednich płaszczyznach stycznych do pewnej określonej powierzchni S, nakładalnej na paraboloidę obrotową (Rozdział III § 7). Koła te są równocześnie ortogonalne do nieskończonej mnogości powierzchni.

Ta okoliczność pozwala nam równanie (I)—(V) przekształcić tak, że rozwiązanie zagadnień, odwrotnych do zagadnień Guicharda i Bianchi'ego, sprowadzi się do całkowania pewnego układu równań liniowych o cząstkowych pochodnych rzędu 1-go i 2-go.

1) „Annales de l'École normale supérieure" 1897. № 2 i 3.

Pierwszy Bianchi sprowadził do całkowania takiego układu równań rozwiązanie pierwszego z dwóch wspomnianych zagadnień, w szeregu not w „Atti della Reale Accademia dei Lincei" 1899 i w rozprawie: „Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante" [1]). W wywodzie tych twierdzeń znakomity geometra posługuje się jedynie przekształceniami analitycznemi, lubo w uwadze do wspomnianej rozprawy mówi o związku pomiędzy temi przekształceniami a podaną wyżej własnością układu kół (K).

W dalszym wykładzie z tej własności kół (K) korzystać będziemy.

Środek C jednego z rozważanych kół (K) jest, jak łatwo widzieć, punktem przecięcia trzech płaszczyzn odpowiednich: 1) płaszczyzny stycznej do powierzchni Σ; 2) płaszczyzny stycznej do powierzchni S i 3) płaszczyzny, przechodzącej przez odpowiednie normalne do powierzchni Σ, Σ_1 i S.

Równania tych płaszczyzn w odniesieniu do odpowiednich osi (T) będą:

$$z = 0\,, \quad Mx + Ny + z - l = 0\,, \quad Nx - My = 0$$

i dla tego spółrzędne środka C uważanego koła K są:

$$x_0 = \frac{Ml}{M^2+N^2} = \frac{aMl}{2l-a}\,, \quad y_0 = \frac{Nl}{M^2+N^2} = \frac{aNl}{2l-a}\,, \quad z_0 = 0\,,$$

a jego promień:

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \frac{\sqrt{a}\,l}{\sqrt{2l-a}}\,. \tag{36}$$

Niechaj γ oznacza kąt, który odcinek OC (przez O oznaczamy punkt powierzchni Σ, w którym znajduje się początek spółrzędnych (T)), tworzy z osią x układu (T); będzie:

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{a}\,M}{\sqrt{2l-a}}\,, \quad \sin\gamma = \frac{\sqrt{a}\,N}{\sqrt{2l-a}}\,. \tag{37}$$

Spółrzędne odpowiednich punktów rozważanego okręgu będą oczywiście:

$$x = x_0 - r_0 \cos\gamma \cos t = r_0 \cos\gamma\,(1 - \cos t)\,,$$
$$y = y_0 - r_0 \sin\gamma \cos t = r_0 \sin\gamma\,(1 - \cos t)\,,$$
$$z = r_0 \sin t\,,$$

gdzie t jest kąt, który odpowiedni promień koła tworzy z odcinkiem CO.

1) Annali di Matematica 1899.

Weźmy na okręgu pewien punkt G i napiszmy warunek, że jego przesunięcia są ortogonalne do okręgu (K).

Jeżeli przez $\delta x, \delta y, \delta z$ oznaczymy rzuty przesunięć punktu G na osi (T), to warunek ten będzie postaci:

$$\sin t \cos\gamma \,\delta x + \sin t \sin\gamma \,\delta y + \cos t \,\delta z = 0 \,.$$

Kładąc tu zamiast $\delta x, \delta y, \delta z$ ich wartości, przedstawimy to wyrażenie w postaci:

$$A\,d\alpha + B\,d\beta + T\,dt = 0 \,, \tag{38}$$

gdzie:

$$A = \frac{r_0 \cos\gamma}{\omega} - \frac{r_0\cos\gamma}{\omega}\cos t + \left(\frac{\partial r_0}{\partial\alpha} - \frac{\omega\cos\gamma}{2}\right)\sin t \,,$$

$$B = -\frac{r_0\sin\gamma}{\omega} + \frac{r_0\sin\gamma}{\omega}\cos t + \left(\frac{\partial r_0}{\partial\beta} - \frac{\omega\sin\gamma}{2}\right)\sin t \,,$$

$$T = r_0 \,.$$

Aby warunek (38) zachodził przy wszelkich możliwych wartościach $d\alpha$ i $d\beta$, jest koniecznem i dostatecznem, by spełniał się tożsamościowo związek:

$$A\left(\frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial\beta}\right) + B\left(\frac{\partial T}{\partial\alpha} - \frac{\partial A}{\partial t}\right) + T\left(\frac{\partial A}{\partial\beta} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}\right).$$

To wyrażenie sprowadza się do postaci:

$$P\sin t + Q\cos t + R = 0 \,, \tag{39}$$

gdzie:

$$P = \frac{r_0^2}{2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\omega\sin\gamma}{r_0}\right) - \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\omega\cos\gamma}{r_0}\right)\right],$$

$$R = -Q = r_0^3\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sin\gamma}{r_0\omega}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\cos\gamma}{r_0\omega}\right)\right] + r_0\sin\gamma\cos\gamma \,.$$

Ponieważ rozważany przez nas układ kół jest ortogonalny do nieskończonej mnogości powierzchni; innemi słowy, ponieważ związek (39) zachodzi dla nieskończenie wielkiej liczby wartości t, to jest koniecznem, aby było:

$$P = 0 \,, \quad R = -Q = 0 \,.$$

Podstawiając w wyrażenie P, Q, R zamiast γ, r_0 wartości tych ostatnich z równań (36), (37), będziemy mieli:

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{M\omega}{l}\right) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{N\omega}{l}\right), \quad \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{N}{\omega l}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{M}{\omega l}\right) = -\frac{MN}{l^2} \,. \tag{40}$$

Prawdziwość tych równań można stwierdzić przy pomocy równań (II) i (III). W samej rzeczy, dodając równania (II) i (III), otrzymamy:

$$\frac{\partial(N\omega)}{\partial\alpha} + MN = \frac{\partial(M\omega)}{\partial\beta} - MN,$$

lub także:

$$\frac{\partial(N\omega)}{\partial\alpha} + \frac{MN(2l-\omega^2)}{2l} = \frac{\partial(M\omega)}{\partial\beta} - \frac{MN(2l+\omega^2)}{2l} \,.$$

Uwzględniając tu wartości na M i N, możemy ostatnie równanie napisać w postaci:

$$\frac{1}{l}\frac{\partial(N\omega)}{\partial\alpha} - \frac{N\omega}{l^2}\frac{\partial l}{\partial\alpha} = \frac{1}{l}\frac{\partial(M\omega)}{\partial\beta} - \frac{M\omega}{l^2}\frac{\partial l}{\partial\beta} \,,$$

a to jest właśnie pierwsze z równań (40).

Jeżeli teraz podzieliwszy równania (II) i (III) przez ωl, dodamy je i do obu stron otrzymanej równości dodamy jeszcze:

$$\frac{2l-\omega^2}{2\omega^2 l^2}NM - \frac{2l+\omega^2}{2\omega^2 l^2}MN = -\frac{MN}{l^2} \,,$$

znajdziemy drugie z równań (40).

Szczególnie interesującem dla nas jest pierwsze z równań (40); pokazuje ono, że możemy zawsze przyjąć, iż

$$\frac{\omega M}{l} = \frac{2}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} \,, \quad \frac{\omega N}{l} = \frac{2}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} \,,$$

gdzie φ jest pewną określoną funkcyą. Jeżeli wprowadzimy jeszcze funkcyę ψ przy pomocy związku:

$$\psi = \frac{\varphi}{l} \,, \tag{41}$$

znajdziemy następujące wyrażenia na M i N:

$$(42) \qquad M = \frac{2}{\omega\varphi}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\,, \quad N = \frac{2}{\omega\psi}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\,.$$

§ **10**. Posługując się równaniami (I)—(V), łatwo wyprowadzić układ równań *liniowych* o pochodnych cząstkowych, którym czynią zadość funkcye φ i ψ.

Jeżeli wyrażenie (41) zróżniczkujemy względem α i β i w otrzymane w ten sposób wyrażenie wstawimy, zamiast pochodnych funkcyi l, wartości tych pochodnych, wyrażone przez pochodne funkcyi φ, znajdziemy:

$$(\mathrm{VI}) \qquad \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = \frac{2}{\omega^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\,, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\beta} = -\frac{2}{\omega^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\,,$$

a równanie (I) przybierze postać:

$$(43) \qquad L = \frac{4}{\omega^2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2\right] - \frac{2\,\varphi\psi}{\alpha} + \psi^2 = 0\,.$$

Znajdźmy wyrażenia na pochodne funkcyj M i N przez pochodne funkcyi φ i podstawmy je w równanie (II)—(IV); uwzględniwszy jeszcze równania (VI) i (43), otrzymamy następujące równania *liniowe* o pochodnych cząstkowych rzędu drugiego:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} = \frac{1}{\omega}\,\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} - \frac{1}{\omega}\,\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} + \frac{\omega^2 - 2\,\alpha}{4\,\alpha}\,\psi + \frac{\varphi}{2\,\alpha}\,,$$

$$(\mathrm{VII}) \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{1}{\omega}\,\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{1}{\omega}\,\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\,,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2} = -\frac{1}{\omega}\,\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{1}{\omega}\,\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} + \frac{\omega^2 + 2\,\alpha}{4\,\alpha}\,\psi - \frac{\varphi}{2\,\alpha}\,.$$

Jeżeli teraz utworzymy rozmaite wyrażenie na $\frac{\partial^3\varphi}{\partial\alpha^2\,\partial\beta}$, $\frac{\partial^3\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta^2}$, $\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\,\partial\beta}$, spostrzeżemy, że równania (VI) i (VII) będą zgodne na mocy *jednego tylko* warunku:

$$\frac{\partial^2 \log\omega}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 \log\omega}{\partial\beta^2} = \frac{1}{\omega^2}\,.$$

Różniczkując względem α i β funkcyę L, stanowiącą stronę lewą równania (43), przekonywamy się, że na mocy równań (VI) i (VII) pochodne $\frac{\partial L}{\partial\alpha}$ i $\frac{\partial L}{\partial\beta}$ są tożsamościowo równe zeru, przeto:

$$L = g = \mathrm{const}\,.$$

Tym sposobem znajdujemy następującą ważną cechę, odróżniającą równania (II)—(V) od równań (VI) i (VII), mianowicie, dla pierwszych z nich równanie $L = 0$ jest *warunkiem* ich zgodności; dla drugich $L = \mathrm{const}$ jest tylko *wynikiem* samych równań.

Łatwo widzieć, w czem tkwi przyczyna takiej różnicy. Równania (VI) i (VII) są *liniowe*, wtedy gdy funkcya L jest *formą kwadratową* względem φ, ψ, $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}$; rozumie się tedy samo przez się, że równanie $L = \mathrm{const}$ nie może być warunkiem zgodności równań (VI) i (VII).

Stałą g, na którą zamienia się funkcya L dla całek równań (VI) i (VII), określają początkowe wartości funkcyj φ, ψ, $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}$ dla $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$; te wartości początkowe określają zarazem, ogólnie mówiąc, w pewnym obszarze całki holomorficzne równań (VI) i (VII). Tym sposobem całki tych równań zależą od *czterech* stałych dowolnych φ_0, ψ_0, $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)_0$, $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)_0$.

Przy rozwiązaniu zagadnienia odwrotnego do zagadnienia *Guicharda*, powinniśmy obrać te stałe tak, aby funkcya L dla całek naszych równań była równa zeru. Ponieważ ta funkcya jest jednorodna względem φ, ψ, $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}$, to z warunku $L_0 = 0$ wyznaczymy stosunek dwóch z pomiędzy tych stałych. Jeżeli zauważymy teraz, że wyrażenie na l może być przedstawione w postaci:

$$l = \frac{\varphi}{\psi} = \frac{A\varphi_0 + B\psi_0 + C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)_0 + D\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)_0}{A_1\varphi_0 + B_1\psi_0 + C_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)_0 + D_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)_0}\,,$$

gdzie A, B, C, D, ... są określone funkcye zmiennych α, β, to spostrzeżemy, że w wyrażeniu tem zachodzą tylko *dwie* stałe dowolne, jeżeli nie będziemy liczyli stałej α.

Dochodzimy tym sposobem do znanego już wyniku, że każdej powierzchni minimalnej $\boldsymbol{\Sigma}$ odpowiada, ogólnie mówiąc, ∞^3 powierzchni S, nakładalnych na paraboloidę obrotową.

W założeniu, że pozostajemy w warunkach twierdzenia odwrotnego do twierdzenia G u i c h a r d a, znajdujemy ze związków (42):

$$N\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} - M\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = 0\,,$$

skąd wnosimy, że na powierzchni Σ krzywe $\varphi = \mathrm{const}$ są ortogonalne do odpowiednich płaszczyzn

$$Nx - My = 0\,,$$

t. j. do płaszczyzn, przechodzących przez odpowiednie normalne do powierzchni Σ i S.

W dowodzeniu pierwszego twierdzenia B i a n c h i'ego widzieliśmy, że obwiednią tych płaszczyzn jest powierzchnia o elemencie liniowym

$$ds^2 = a^2\,du^2 + a^2\,[2\,(u+v) + 2\,c]\,dv^2\,,$$

gdzie a i c są stałe, t. j. powierzchnie typu Weingartenowskiego, nakładalne na powierzchnię obrotową. Postaramy się dowieść tego samego i w obecnym przypadku, a równocześnie rozszerzymy nieco warunki naszego zagadnienia, mianowicie, postaramy się znaleść element liniowy obwiedniej płaszczyzn, przechodzących przez normalne do powierzchni Σ i ortogonalnych do krzywych $\varphi = \mathrm{const}$, poprowadzonych na tej powierzchni. Założymy przytem, że funkcya φ jest całką równań (VI) i (VII), czyniącą zadość warunkowi:

$$\text{(VIII)}\qquad \frac{4}{\omega^2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2\right] - \frac{2\,\varphi\,\psi}{a} + \psi^2 = g\,,$$

gdzie g jest pewną stałą.

§ **11**. Równaniem płaszczyzny, dla której chcemy wyznaczyć element liniowy jej obwiedniej, będzie w odniesieniu do odpowiednich osi (T):

$$(\ 4)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\,x - \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\,y = 0$$

i dla tego spółrzędnemi punktu tej płaszczyzny będą:

$$(45)\qquad x = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\,t\,,\quad y = \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\,t\,,\quad z\,,$$

gdzie t jest parametrem dowolnym.

Spółrzędne punktu szukanej obwiedniej, znajdziemy z warunku, że przesunięcia tego punktu przy wszelkich możliwych nieskończenie małych zmianach parametrów α, β odbywają się w płaszczyźnie (44).

Jeżeli przez δx, δy, δz oznaczymy rzuty przesunięć szukanego punktu na osi (T), to warunek nasz przedstawi się analitycznie w ten sposób:

$$A\,d\alpha + B\,d\beta = \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\,\delta x - \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\,\delta y = 0\,.$$

Ponieważ według naszego założenia warunek ten zachodzi dla wszelkich możliwych wartości na $d\alpha$ i $d\beta$, to rozpada się on na dwa następujące:

$$(46)\qquad A = 0\,,\quad B = 0\,,$$

z których potrafimy wyznaczyć t i z.

Rzuty przesunięć naszego punktu będą:

$$(47)\quad \begin{cases} \delta x = -\dfrac{\omega}{2}\,d\alpha + d\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\,t\right) + \dfrac{z}{\omega}\,d\alpha - \left(-\dfrac{1}{\omega}\,\dfrac{\partial\omega}{\partial\beta}\,d\alpha + \dfrac{1}{\omega}\,\dfrac{\partial\omega}{\partial\alpha}\,d\beta\right)\dfrac{\partial\varphi}{\partial\beta}\,t\,, \\[2ex] \delta y = -\dfrac{\omega}{2}\,d\beta + d\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial\beta}\,t\right) + \left(-\dfrac{1}{\omega}\,\dfrac{\partial\omega}{\partial\beta}\,d\alpha + \dfrac{1}{\omega}\,\dfrac{\partial\omega}{\partial\alpha}\,d\beta\right)\dfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\,t - \dfrac{z}{\omega}\,d\beta\,, \\[2ex] \delta z = dz + \dfrac{t}{\omega}\left[\dfrac{\partial\varphi}{\partial\beta}\,d\beta - \dfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\,d\alpha\right]. \end{cases}$$

Korzystając z równań (VI), (VII) i pomijając na razie przypadki, w których $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = 0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = 0$, sprowadzimy równania (46) do postaci:

$$\frac{z}{\omega} + \frac{t}{2\,a}\left[\frac{(\omega^2 - 2\,a)\,\psi}{2} + \varphi\right] = \frac{\omega}{2}\,,$$

$$\frac{z}{\omega} - \frac{t}{2\,a}\left[\frac{(\omega^2 + 2\,a)\,\psi}{2} - \varphi\right] = -\frac{\omega}{2}\,.$$

Znajdujemy stąd:

$$t = \frac{2\,a}{\psi\,\varphi}\,,\quad z = \frac{a\,\psi - \varphi}{\psi}\,,$$

a więc spółrzędnemi odpowiedniego punktu szukanej obwiedniej będą:

$$x = \frac{2\,a}{\psi\,\omega}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\,,\quad y = \frac{2\,a}{\psi\,\omega}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\,,\quad z = \frac{a\,\psi - \varphi}{\psi}\,.$$

Wprowadzając te wartości do wyrażeń (47) znajdziemy rzuty przesunięć naszego punktu wyrażone w ten sposób:

$$\delta x = -\frac{2a}{\omega\psi^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}d\psi\,,\quad \delta y = -\frac{2a}{\omega\psi^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}d\psi\,,\quad \delta z = -d\left(\frac{\varphi}{\psi}\right) - \frac{a\,d\psi}{\psi}\,.$$

Uwzględniwszy jeszcze związek (VIII), otrzymamy następujące wyrażenie na szukany element liniowy:

$$ds^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 = \left[\frac{2\varphi}{a\psi} - 1 + \frac{g}{\psi^2}\right]\frac{a^2\,d\psi^2}{\psi^2} + \left[d\left(\frac{\varphi}{\psi}\right) + \frac{a\,d\psi}{\psi}\right]^2.$$

Kładąc:

$$\frac{d\psi}{\psi} = -dv\,,\quad d\left(\frac{\varphi}{\psi}\right) - a\,dv = a\,d\theta\,,$$

skąd:

$$\psi = e^{-v}\,,\quad \frac{1}{a}\frac{\varphi}{\psi} = \theta + v + \frac{1}{2}\,,$$

znajdziemy:

$$ds^2 = a^2\,d\theta^2 + a^2\left[2(\theta + v) + ge^{2v}\right]dv^2\,. \tag{48}$$

Widzimy stąd, że szukana obwiednia jest powierzchnią typu Weingartenowskiego, jaką napotkaliśmy już w § 2 Rozdziału IV. Rolę spółrzędnej x w tym §-ie gra teraz spółrzędna z:

$$z = a - \frac{\varphi}{\psi} = \frac{a}{2} - a(\theta + v)\,,$$

rolę funkcyi h funkcya $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, t. j. funkcya

$$r = a\sqrt{2(\theta + v) + ge^{2v}}\,,$$

A zatem znaleziona powierzchnia S_0 znajduje się z powierzchnią Σ w takim związku, w jakim znajdują się powierzchnie S_0 i Σ w pierwszem twierdzeniu B i a n c h i'ego.

Widzieliśmy, że całka φ układu równań różniczkowych (VI) i (VII) zawiera c z t e r y stałe dowolne; jeżeli dołączymy do nich jeszcze stałą a, dojdziemy do następującego twierdzenia, odwrotnego względem pierwszego twierdzenia B i a n c h i'ego.

K a ż d e j p o w i e r z c h n i m i n i m a l n e j Σ o d p o w i a d a ∞^5 p o w i e r z c h n i S_0 t y p u W e i n g a r t e n o w s k i e g o o e l e m e n c i e l i n i o w y m (48). W y z n a c z e n i e t y c h p o w i e r z c h n i z a l e ż y o d c a ł k o w a n i a u k ł a d u r ó w n a ń r ó ż n i c z k o w y c h l i n i o w y c h (VI) i (VII). P o w i e r z c h n i e S_0 s ą o b w i e d n i e m i p ł a s z c z y z n, p r z e c h o d z ą c y c h p r z e z n o r m a l n e d o p o w i e r z c h n i Σ i o r t o g o n a l n y c h d o k r z y w y c h $\varphi = \text{const}$, p o p r o w a d z o n y c h n a p o w i e r z c h n i Σ.

§ 12. Pozostaje jeszcze powiedzieć kilka słów o pominiętym wyżej przypadku $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = 0$ albo $\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = 0$.

Z równań (VII), gdy w nich przyjmiemy, że $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = 0$, znajdujemy, że jest to możliwe tylko wtedy, gdy $\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} = 0$, t. j. gdy powierzchnia Σ jest katenoidą. Krzywe $\varphi = \text{const}$ są wtedy równoleżnikami, a więc obwiednią płaszczyzn ortogonalnych do krzywych $\varphi = \text{const}$, t. j. płaszczyzn południków będzie oś obrotu. W tym więc przypadku powierzchnia S_0 zniekształca się na linię prostą.

ROZDZIAŁ VI.

Twierdzenie odwrotne do trzeciego twierdzenia Guicharda. Przekształcenie powierzchni o krzywiznie stałej ujemnej. Twierdzenie odwrotne do drugiego twierdzenia Bianchi'ego dla powierzchni o krzywiznie stałej ujemnej.

§ 1. W rozdziale poprzedzającym dowiedliśmy twierdzeń, odwrotnych do pierwszych twierdzeń G u i c h a r d a i B i a n c h i'ego i podaliśmy jedno interesujące przekształcenie powierzchni minimalnych.

W rozdziale niniejszym zajmiemy się rozwiązaniem analogicznych zagadnień dla powierzchni o stałej ujemnej krzywiznie gaussowskiej.

Niechaj będzie dana pewna powierzchnia Σ o krzywiznie gaussowskiej stałej ujemnej; nie zmniejszając ogólności, możemy przyjąć, że ta krzywizna jest równa -1.

Odnieśmy tę powierzchnię do linij krzywiznowych $\alpha=\text{const}$, $\beta=\text{const}$; osi układu spółrzędnych (T) obierzmy tak, aby oś x była styczna do krzywych $\beta = \text{const}$, oś y do krzywych $\alpha = \text{const}$.

Przy tych założeniach, wielkości zasadnicze, charakteryzujące powierzchnię Σ, będą miały następujące wartości:

$$\xi = \cos\omega\,,\quad \eta_1 = \sin\omega\,,\quad r = \frac{\partial\omega}{\partial\beta}\,,\quad r_1 = \frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\,,$$

$$p = q_1 = 0\,,\quad p_1 = \cos\omega\,,\quad q = \sin\omega\,,$$

gdzie ω jest całką równania różniczkowego

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial\beta^2} = \sin\omega\cos\omega\,. \tag{1}$$

Element liniowy naszej powierzchni będzie oczywiście postaci:

$$ds^2 = \cos^2\omega\, d\alpha^2 + \sin^2\omega\, d\beta^2\,.$$

Na normalnej do powierzchni Σ, przez pewien punkt O tej powierzchni przechodzącej, weźmy punkt $M(0, 0, l)$; miejscem geometrycznem tego punktu przy ruchu punktu O po powierzchni Σ będzie pewna powierzchnia S. Oznaczmy przez u kąt pomiędzy normalną do powierzchni Σ a płaszczyzną styczną do powierzchni S, przeprowadzoną w odpowiednim punkcie M. Jeżeli powierzchnia S będzie powierzchnią nakładalną na jedną z zasadniczych powierzchni obrotowych, i jeżeli przytem kongruencya normalnych do powierzchni Σ będzie kongruencyą dołączoną do powierzchni S, to pomiędzy odległością l odpowiednich punktów powierzchni S i Σ a kątem u powinien zachodzić związek (por. § 3 Rozdział II):

$$l^2 = \frac{a}{\sin^2 u} - 1\,, \tag{2}$$

gdzie a jest pewna stała. Aby powierzchnia S była rzeczywista, stała ta powinna być dodatnia. Widzieliśmy nadto w Rozdziale III, że linie krzywiznowe powierzchni Σ powinny odpowiadać liniom sprzężonym powierzchni S. Wyraźmy te dwa warunki analitycznie.

Rzuty przesunięć punktu $M(0, 0, l)$ na odpowiednie osi (T) będą, jak łatwo widzieć:

$$\delta x = (\cos\omega + l\sin\omega)\, d\alpha\,,\quad \delta y = (\sin\omega - l\cos\omega)\, d\beta\,,\quad \delta z = dl\,; \tag{3}$$

równaniem zaś płaszczyzny stycznej do powierzchni S w punkcie M, niechaj będzie:

$$Mx + Ny - (z - l) = 0\,. \tag{4}$$

Spółczynniki M i N wyznaczają się z warunku, że przesunięcia punktu M przy wszelkich nieskończenie małych zmianach parametrów α, β odbywają się w płaszczyznie (4), t. j. że dla wszelkich wartości na $d\alpha$, $d\beta$ zachodzi związek:

$$M\,\delta x + N\,\delta y - \delta z = 0\,.$$

Znajdujemy stąd następujące wartości na te spółczynniki:

$$M = \frac{1}{\cos\omega + l\sin\omega}\,\frac{\partial l}{\partial\alpha}\,,\quad N = \frac{1}{\sin\omega - l\cos\omega}\,\frac{\partial l}{\partial\beta}\,. \tag{5}$$

Z uwagi, że $\sin u$ jest dostawą kąta, który normalna do płaszczyzny (4) tworzy z osią z, napiszemy warunek (2) w postaci:

$$M^2 + N^2 + 1 = \frac{l^2+1}{a}\,; \tag{I}$$

warunek ten jest co do l—jak nietrudno sprawdzić—równaniem o pochodnych cząstkowych rzędu 1-go.

Przechodzimy do wywodu warunku drugiego.

Przez pewien punkt nieruchomy P przestrzeni, będący początkiem ruchomego układu spółrzędnych (T_1), którego osi są stale równoległe do odpowiednich osi układu (T), poprowadźmy płaszczyznę równoległą do płaszczyzny (4); równaniem tej płaszczyzny w odniesieniu do układu (T_1) będzie:

$$Mx + Ny - z = 0\,. \tag{6}$$

Nadajmy parametrowi α przyrost $d\alpha$; spółrzędne (T_1) przyjmą wtedy położenie (T_1'); odpowiednie punkty O i M powierzchni Σ i S przesuną się wzdłuż krzywych $\beta = \mathrm{const}$ i przejdą w położenia O' i M'. Równaniem płaszczyzny, przechodzącej przez punkt P i równoległej do płaszczyzny stycznej do powierzchni S w punkcie M', będzie w odniesieniu do osi (T_1'):

$$M'x' + N'y' - z' = 0\,, \tag{7}$$

gdzie:

$$M' = M + \frac{\partial M}{\partial\alpha}\, d\alpha\,,\quad N' = N + \frac{\partial N}{\partial\alpha}\, d\alpha\,.$$

Przecięcie płaszczyzn (6) i (7) da nam w granicy kierunek sprzężony z krzywą $\beta = \mathrm{const}$, na powierzchni S.

Otrzymamy równanie płaszczyzny (7) względem osi (T_1'), kładąc:

$$x' = x + \left(y \frac{\partial\omega}{\partial\beta} - z \sin\omega\right) d\alpha\,, \quad y' = y - x \frac{\partial\omega}{\partial\beta}\, d\alpha\,, \quad z' = z + x \sin\omega\, d\alpha\,,$$

a więc prosta graniczna przecięcia płaszczyzn (6) i (7) dana będzie przez równanie (6) i przez równanie:

$$x \left[\frac{\partial M}{\partial\alpha} - N \frac{\partial\omega}{\partial\beta} - \sin\omega\right] + y \left[\frac{\partial N}{\partial\alpha} + M \frac{\partial\omega}{\partial\beta}\right] - z M \sin\omega = 0\,.$$

Jeżeli przyjmiemy teraz, że krzywe $\alpha = \text{const}$ i $\beta = \text{const}$ na powierzchni S są krzywemi sprzężonemi, innemi słowy, że przesunięcie punktu M wzdłuż krzywej $\alpha = \text{const}$ jest równoległe do prostej granicznej, to znajdziemy nasz drugi warunek:

$$\left(\frac{\partial N}{\partial\alpha} + M \frac{\partial\omega}{\partial\beta}\right)(\sin\omega - l\cos\omega) - M \sin\omega \frac{\partial l}{\partial\beta} = 0\,,$$

co, na mocy rowneń (5), można napisać tak:

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial N}{\partial\alpha} = - M \frac{\partial\omega}{\partial\beta} + MN \sin\omega\,.$$

Warunek ten, który co do l jest równaniem różniczkowem o pochodnych cząstkowych rzędu 2-go, możemy przedstawić w postaci:

$$\frac{\partial^2 l}{\partial\alpha\,\partial\beta} = -(\sin\omega - l\cos\omega) \frac{\partial\omega}{\partial\beta} M + (\cos\omega + l\sin\omega) \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} N - (\cos 2\omega + l \sin 2\omega) MN\,.$$

Równanie (II) możemy napisać jeszcze inaczej. Różniczkując mianowicie wyrażenie (5) na M względem β i uwzględniając poprzedzające wyrażenie na $\frac{\partial^2 l}{\partial\alpha\,\partial\beta}$, możemy zamiast równania (II) napisać następujące:

$$\text{(III)} \qquad \frac{\partial M}{\partial\beta} = N \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} - MN \cos\omega\,.$$

§ **2**. Pozostaje jeszcze wykazać, że równania (I) i (II) lub — co na jedno wychodzi — równania (I) i (III) są zgodne.

Przyjmijmy, że zgodność tych dwóch ostatnich równań ma miejsce. W tem założeniu zróżniczkujmy równanie (I) względem α i wstawmy do

otrzymanego w ten sposób równania zamiast $\frac{\partial N}{\partial\alpha}$ wartość tej pochodnej, wziętą z równania (II); wyłączając przypadek $M = 0$, znajdziemy:

$$\text{(IV)} \qquad \frac{\partial M}{\partial\alpha} = N \frac{\partial\omega}{\partial\beta} - N^2 \sin^2\omega + \frac{l(\cos\omega + l\sin\omega)}{a}\,.$$

Różniczkując znów równanie (I) względem β, uwzględniając wartość wyrażenia $\frac{\partial M}{\partial\beta}$ z równania (III) i wyłączając przypadek $N = 0$, otrzymamy jeszcze:

$$\text{(V)} \qquad \frac{\partial N}{\partial\beta} = - M \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} + M^2 \cos^2\omega + \frac{l(\sin\omega - l\cos\omega)}{a}\,.$$

Tak więc, jeżeli równania (I), (II) i (III) są zgodne, to muszą być zgodne równania (II)—(V), t. j. muszą zachodzić tożsamościowo związki:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{\partial^2 M}{\partial\beta\,\partial\alpha}\,, \quad \frac{\partial^2 N}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{\partial^2 N}{\partial\beta\,\partial\alpha}\,.$$

Prawdziwość tych tożsamości łatwo stwierdzić za pomocą prostego różniczkowania wyrażeń (II)—(V), przy uwzględnieniu związku (I) oraz tej okoliczności, że ω jest całką równania (1).

Jeżeli teraz przeniesiemy wszystkie wyrazy w równaniu (I) na stronę lewą, i takąż stronę otrzymanego równania oznaczymy przez L, to na mocy równań (II) i (V) pochodne $\frac{\partial L}{\partial\alpha}$ i $\frac{\partial L}{\partial\beta}$ będą tożsamościowo zerami, t. j.

$$\frac{\partial L}{\partial\alpha} = 0\,, \quad \frac{\partial L}{\partial\beta} = 0\,,$$

skąd wnosimy, że $L = \text{const}$ dla całek równań (II)—(V).

Dla zgodności równań (II)—(V) stała ta, jak widzieliśmy wyżej, powinna być równa zeru.

Równania (II)—(V), do których całkowania sprowadza się rozwiązanie naszego zagadnienia, są co do funkcyi l t r z e m a równaniami o pochodnych cząstkowych rzędu drugiego.

Jeżeli te równania będą zgodne, to w ogóle mówiąc, będą one miały w pewnym obszarze całkę, określić się dającą przez początkowe wartości funkcyj l, $\frac{\partial l}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial l}{\partial\beta}$ dla $\alpha = \alpha_0$ i $\beta = \beta_0$.

Aby równania (II)—(V) były zgodne, to wartości początkowe powinny czynić zadość związkowi $L_0 = 0$, gdzie przez L_0 oznaczamy wartość funkcyi L dla $\alpha = \alpha_0$ i $\beta = \beta_0$.

Jeżeli teraz uwzględnimy okoliczność, że stała a obrana została zupełnie dowolnie i podlega jedynie temu ograniczeniu, aby $a > 0$, to widzimy, że w wyrażeniu na l występować będą trzy stałe dowolne: a, l_0 $\left(\frac{\partial l}{\partial \alpha}\right)_0$, i dla tego liczba powierzchni S, czyniących zadość dwóm naszym warunkom, będzie ∞^3.

§ **3**. Okażemy, że wszystkie te powierzchnie S są nakładalne na jednę z zasadniczych powierzchni obrotowych, t. j. że ich element liniowy wyraża się wzorem:

$$ds_0^2 = \frac{a^2\, du^2}{\sin^4 u\,(a - \sin^2 u)} + k^2 \operatorname{cotg}^2 u \,.\, dv^2\,,$$

gdzie k jest stała. Dowiedziemy jeszcze, że układ normalnych do powierzchni Σ stanowi kongruencyę, dołączoną do tych powierzchni S.

Jeżeli jedno i drugie jest prawdą, wtedy krzywe $l = \text{const}$ na powierzchniach S powinny być równoleżnikami geodezyjnemi, a wtedy parametr różniczkowy rzędu pierwszego $\Delta_1(l)$, utworzony względnie do elementu liniowego powierzchni S, powinien być funkcyą samej tylko wielkości l.

Na zasadzie wyrażeń (3) i (5) element liniowy powierzchni S przedstawia się tak:

$$ds_0^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 = (\cos\omega + l\sin\omega)^2 (M^2+1)\, d\alpha^2$$

$$+ 2(\sin\omega - l\cos\omega)(\cos\omega + l\sin\omega)\, MN\, d\alpha\, d\beta + (\sin\omega - l\cos\omega)^2 (N^2+1)\, d\beta^2\,.$$

Łatwo znajdziemy, że parametr różniczkowy $\Delta_1(l)$ będzie:

$$\Delta_1 l = \frac{M^2+N^2}{M^2+N^2+1} = \frac{l^2+1-a}{l^2+1}\,,$$

t. j. że jest on funkcyą samej wielkości l.

Różniczką długości łuku krzywych geodezyjnych ortogonalnych do krzywych $l = \text{const}$, będzie:

$$d\theta = \frac{dl}{\sqrt{\Delta_1(l)}} = \sqrt{\frac{l^2+1}{l^2+1-a}}\, dl\,.$$

Jeżeli zamiast zmiennej l wprowadzimy zmienną u przy pomocy związku (2), otrzymamy:

$$d\theta^2 = \frac{a^2\, du^2}{\sin^4 u\,(a - \sin^2 u)}\,.$$

Element liniowy naszej powierzchni S może być sprowadzony do postaci:

$$ds_0^2 = d\theta^2 + \sigma^2\, dv^2\,.$$

Wyznaczymy funkcyę σ, obliczywszy według znanego wzoru Bonneta krzywiznę geodezyjną linij $l = \text{const}$. Tym sposobem na wyznaczenie funkcyi σ otrzymamy równanie:

$$-\frac{1}{\varrho_{gl}} = \frac{\partial \log\sigma}{\partial u} = -\frac{1}{\sin u \cos u}\,,$$

skąd znajdziemy:

$$\sigma = k \operatorname{cotg} u\,,$$

gdzie przy odpowiednim wyborze parametru v możemy uważać wielkość k za stałą.

Tak więc element liniowy naszej powierzchni S może być sprowadzony do postaci:

$$ds_0^2 = \frac{a^2\, du^2}{\sin^4 u\,(a - \sin^2 u)} + k^2 \operatorname{cotg}^2 u \,.\, dv^2\,,$$

t. j. powierzchnia S jest nakładalna na jednę z zasadniczych powierzchni obrotowych: na sinusoidę hyperboliczną, katenoidę skróconą lub wydłużoną i na logarytmową powierzchnię obrotową. Te trzy przypadki charakteryzują się, jak widzieliśmy, wartością stałej a, mianowicie dla pierwszego jest $a > 1$, dla drugiego $a < 1$, dla trzeciego $a = 1$.

Aby dowieść, że normalne do powierzchni Σ tworzą kongruencyę dołączoną do powierzchni S, pokażemy, że na tej ostatniej powierzchni krzywe $l = \text{const}$. są ortogonalne do płaszczyzny, przechodzącej przez normalne do powierzchni Σ i S.

Równaniem tej płaszczyzny będzie:

$$Nx - My = 0\,.$$

Rzuty przesunięcia odpowiedniego punktu M powierzchni S wzdłuż krzywej $l = \text{const}$ będą na zasadzie równań (3):

$$\delta x = (\cos\omega + l\sin\omega)\, d\alpha\,, \quad \delta y = -(\sin\omega - l\cos\omega)\frac{\frac{\partial l}{\partial \alpha}}{\frac{\partial l}{\partial \beta}}\, d\alpha\,, \quad \delta z = 0\,,$$

lub, jeżeli uwzględnimy wyrażenie (5):

$$\delta x = (\cos\omega + l\sin\omega)\, d\alpha\,, \quad \delta y = -(\cos\omega + l\sin\omega)\frac{M}{N}\, d\alpha\,, \quad \delta z = 0\,,$$

skąd wynika:

$$\frac{N}{\delta x} = -\frac{M}{\delta y}\,.$$

Jest to właśnie warunek szukany.

Zestawiając rezultaty w §§ niniejszym i poprzednim, dochodzimy do twierdzenia:

„Każdej powierzchni Σ o krzywiznie gaussowskiej ujemnej odpowiada ∞^3 powierzchni S nakładalnych na zasadnicze powierzchnie obrotowe, przyczem normalne do powierzchni Σ tworzą kongruencyę dołączoną do powierzchni S".

§ 4. Przechodzimy do rozpatrzenia przypadków wyżej wyłączonych, mianowicie gdy jedna z funkcyj M lub N jest równa zeru.

Dajmy, że $M = 0$; na mocy równania (III) znajdujemy wtedy, że albo $N = 0$, albo $\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = 0$.

Pierwszy warunek nie daje nam rozwiązania naszego zadania, albowiem wtedy mielibyśmy, że $l = \text{const}$ i $u = \text{const}$. Warunek drugi wskazuje, że nasza powierzchnia Σ jest powierzchnią obrotową.

Wszystkie równania, służące do wyznaczenia funkcyi l, sprowadzają się do jednego równania (I) różniczkowego zwyczajnego rzędu 1-go. Całka tego równania zawiera jednę stałą dowolną; dołączając jeszcze stałą a, widzimy, że w tym przypadku będzie ∞^2 powierzchni S, czyniących zadość dwóm naszym warunkom.

Przy pomocy takich samych rozumowań, jak w § 5 poprzedzającego rozdziału, przekonamy się, że powierzchnie S będą powierzchniami obrotowemi.

Dochodzimy tym sposobem do następującego twierdzenia:

Każdej powierzchni obrotowej Σ o krzywiznie gaussowskiej ujemnej odpowiada ∞^2 powierzchni

obrotowych S, nakładalnych na jednę z zasadniczych powierzchni obrotowych, przyczem normalne do powierzchni Σ tworzą kongruencyę dołączoną do powierzchni S.

§ 5. Rozpatrzymy obecnie powierzchnię Σ_1, której punkty są symetryczne do punktów danej powierzchni Σ względem odpowiednich płaszczyzn stycznych do powierzchni S, t. j. względem płaszczyzn:

$$Mx + Ny - z + l = 0\,.$$

Spółrzędnemi odpowiedniego punktu O_1 powierzchni Σ_1 będą oczywiście:

$$x = -\frac{2\,al\,M}{l^2+1}\,, \quad y = -\frac{2\,al\,N}{l^2+1}\,, \quad z = \frac{2\,al}{l^2+1}\,. \tag{8}$$

Znajdźmy wyrażenie elementu liniowego powierzchni Σ_1.

Rzuty przesunięć punktu O_1 na odpowiednie osi (T), jeżeli uwzględnimy równania (I)—(V), będą:

$$\left\{\begin{aligned}
\delta x &= \frac{(l^2-1)\cos\omega - 2l\sin\omega}{l^2+1}\left(\frac{2\,aM^2}{l^2+1} - 1\right) d\alpha + \frac{(l^2-1)\sin\omega + 2l\cos\omega}{l^2+1}\cdot\frac{2\,aMN}{l^2+1}\, d\beta\,,\\
\delta y &= \frac{(l^2-1)\cos\omega - 2l\sin\omega}{l^2+1}\cdot\frac{2\,aMN}{l^2+1}\, d\alpha + \frac{(l^2-1)\sin\omega + 2l\cos\omega}{l^2+1}\left(\frac{2\,aN^2}{l^2+1} - 1\right) d\beta\,,\\
\delta z &= \frac{(l^2-1)\cos\omega - 2l\sin\omega}{l^2+1}\,\frac{2\,aM}{l^2+1}\, d\alpha - \frac{(l^2-1)\sin\omega + 2l\cos\omega}{l^2+1}\,\frac{2\,aN}{l^2+1}\, d\beta\,.
\end{aligned}\right. \tag{9}$$

Element liniowy naszej powierzchni Σ_1 b dzie postaci:

$$ds_1{}^2 = A^2\, d\alpha^2 + B^2\, d\beta^2\,,$$

gdzie:

$$A = \frac{(l^2-1)\cos\omega - 2l\sin\omega}{l^2+1}\,, \quad B = \frac{(l^2-1)\sin\omega + 2l\cos\omega}{l^2+1}\,.$$

Z uwagi, że funkcye A, B czynią zadość związkowi $A^2 + B^2 = 1$, możemy przyjąć, że

$$A = \cos\Omega = \frac{(l^2-1)\cos\omega - 2l\sin\omega}{l^2+1}\,, \quad B = \sin\Omega = \frac{(l^2-1)\sin\omega + 2l\cos\omega}{l^2+1}\,, \tag{10}$$

gdzie Ω jest funkcyą rzeczywistą. Przy takiem założeniu element liniowy powierzchni Σ_1 przedstawi się w postaci:

(11) $$ds_1^2 = \cos^2\Omega \,.\, d\alpha^2 + \sin^2\Omega \,.\, d\beta^2 \,.$$

Równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni Σ_1 będzie:

(12) $$2\,a\,Mx + 2\,a\,Ny + (l^2+1-2\,a)\,z + 2\,al = 0\,,$$

a zatem równanie odpowiedniej normalnej przedstawi się tak:

$$\frac{x + \dfrac{2\,a\,lM}{l^2+1}}{2\,a\,M} = \frac{y + \dfrac{2\,a\,lN}{l^2+1}}{2\,a\,N} = \frac{z - \dfrac{2\,a\,l}{l^2+1}}{l^2+1-2\,a}\,.$$

Normalna ta, jak tego należało oczekiwać, przechodzi przez odpowiedni punkt $M\,(0, 0, l)$ powierzchni S.

Znajdźmy teraz równanie różniczkowe krzywych sprzężonych na powierzchni Σ_1. W tym celu posiłkujemy się metodą, niejednokrotnie już przez nas stosowaną. Weźmy pewien punkt nieruchomy P za początek układu spółrzędnych (T_1), którego osi pozostają stale równoległemi do odpowiednich osi układu (T). Równaniem płaszczyzny równoległej do płaszczyzny (12) i przechodzącej przez punkt P będzie w odniesieniu do układu (T_1):

(13) $$2\,a\,Mx + 2\,a\,Ny + (l^2+1-2\,a)\,z = 0\,.$$

Nadajmy parametrom α i β pewne przyrosty $d\alpha$, $d\beta$; osi spółrzędnych (T_1) niechaj przyjmą wtedy położenie (T_1'); punkt O_1 powierzchni Σ_1 przesunie się po krzywej, którą charakteryzują przyrosty $d\alpha$, $d\beta$, do pewnego punktu O_1'. Równaniem płaszczyzny równoległej do płaszczyzny stycznej do powierzchni Σ_1 w punkcie O_1' będzie w odniesieniu do osi (T_1'):

$$2\,a\,M'x' + 2\,a\,N'y' + (l'^2+1-2\,a)\,z' = 0\,,$$

gdzie:

$$M' = M + dM\,,\quad N' = N + dN\,,\quad l' = l + dl\,.$$

Odniósłszy to równanie do dawnych osi (T_1), znajdziemy, że równaniami prostej równoległej do kierunku sprzężonego z krzywą $(d\alpha, d\beta)$ będą równanie (13) i równanie:

$$Hx + Gy + Lz = 0\,,$$

gdzie:

$$H = 2\,a\,dM - 2\,a\,N\left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\,d\alpha + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\,d\beta\right) + (l^2+1-2a)\sin\omega\,d\alpha\,,$$

$$G = 2\,a\,dN + 2\,a\,M\left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\,d\alpha + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\,d\beta\right) - (l^2+1-2a)\cos\omega\,d\beta\,,$$

$$L = 2l\,dl - 2a\,M\sin\omega\,d\alpha + 2a\,N\cos\omega\,d\beta\,.$$

Jeżeli przez $\delta\alpha$, $\delta\beta$ oznaczymy przyrosty parametrów, odpowiadające przesunięciu punktu O_1 po powierzchni Σ_1 wzdłuż krzywej, sprzężonej z krzywą, którą charakteryzują przyrosty $d\alpha$, $d\beta$, to przy pomocy prostych obliczeń, przy uwzględnieniu równań (I)—(V), sprowadzimy szukane równanie krzywych sprzężonych na powierzchni Σ_1 do postaci:

(14) $$d\alpha\,\delta\alpha - d\beta\,\delta\beta = 0\,.$$

To równanie jest zarazem równaniem różniczkowem krzywych sprzężonych powierzchni Σ. Dochodzimy zatem do wniosku, że każdemu układowi krzywych sprzężonych powierzchni Σ odpowiada układ krzywych sprzężonych powierzchni Σ_1.

W szczególności, liniom krzywiznowym i asymptotycznym powierzchni Σ odpowiadają linie krzywiznowe i asymptotyczne powierzchni Σ_1. Co do linij asymptotycznych, jest to jasne samo przez się; co się zaś tyczy linij krzywiznowych, to na mocy ostatniego równania linie $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$. są krzywemi sprzężonemi powierzchni Σ_1; równocześnie są one wzajemnie ortogonalne, jak to widać z wzoru na element liniowy powierzchni Σ_1. Stąd jest rzeczą jasną, że krzywe te są liniami krzywiznowemi powierzchni Σ_1.

Pozostaje jeszcze dowieść, że powierzchnia Σ_1 ma krzywiznę stałą ujemną równą -1.

Zwróćmy się do spółrzędnych (T_1), mających swój początek w punkcie nieruchomym P. Z równania płaszczyzny stycznej do powierzchni Σ_1 widać, że spółrzędne obrazu sferycznego punktu O_1 powierzchni Σ_1 w odniesieniu do osi (T_1) będą:

$$x_1 = \frac{2\,a\,M}{l^2+1}\,,\quad y_1 = \frac{2\,a\,N}{l^2+1}\,,\quad z_1 = 1 - \frac{2\,a}{l^2+1}\,,$$

rzuty zaś przesunięcia obrazu sferycznego na osi (T_1) lub na osi (T) są oczywiście:

$$\delta x_1 = -\sin\Omega\left(\frac{2a}{l^2+1}M^2-1\right)d\alpha+\cos\Omega\,\frac{2aMN}{l^2+1}\,d\beta\,,$$

$$\delta y_1 = -\sin\Omega\,\frac{2aMN}{l^2+1}\,d\alpha+\cos\Omega\left(\frac{2a}{l^2+1}N^2-1\right)d\beta\,,$$

$$\delta z_1 = -\sin\Omega\,\frac{2aM}{l^2+1}\,d\alpha-\cos\Omega\,\frac{2aN}{l^2+1}\,d\beta\,,$$

gdzie $\sin\Omega$ i $\cos\Omega$ mają wartości (10).

Stąd i zważając, że promienie krzywizny naszej powierzchni Σ_1 wyrażają wielkości stosunków $\frac{\delta x}{\delta x_1}, \frac{\delta y}{\delta y_1}, \frac{\delta z}{\delta z_1}$ przy przesunięciach wzdłuż krzywych $\beta = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$, znajdziemy:

$$R_1 = -\operatorname{cotg}\Omega\,, \quad R_2 = \operatorname{tg}\Omega\,,$$

a zatem krzywizna powierzchni Σ_1 równa się -1. Wynika stąd także, że funkcya Ω czyni zadość równaniu różniczkowemu:

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2\Omega}{\partial\beta^2} = \sin\Omega\cos\Omega\,.$$

§ **6**. Widzieliśmy przed chwilą, że nasze powierzchnie Σ i Σ_1 o krzywiznie stałej ujemnej są ze sobą związane w ten sposób, że liniom krzywiznowym i asymptotycznym jednej odpowiadają linie krzywiznowe i asymptotyczne drugiej. Jeżeli przypomnimy sobie rezultaty, otrzymane w rozdziale II naszej pracy, spostrzeżemy, że takaż odpowiedniość zachodzi pomiędzy powierzchniami o krzywiznie ujemnej, które są przekształceniami Bäcklundowskiemi jednej jakiejkolwiek powierzchni.

Nasuwa się przeto naturalnie pytanie, czy powierzchnie Σ i Σ_1 nie są przekształceniami jakiejś powierzchni Σ_2, lub innemi słowy, czy nie można przejść od powierzchni Σ do powierzchni Σ_1 przy pomocy dwóch kolejno stosowanych przekształceń $B_{\sigma_1}, B_{\sigma_2}$?

Zwracając się do § 13 Rozdziału II-go i zachowując wszystkie użyte tam znakowania (dla krótkości pisać będziemy θ zamiast θ_1), otrzymamy, w razie twierdzącej odpowiedzi na postawione pytanie, następujące wyrażenia na spółrzędne punktu O_1 powierzchni Σ_1:

$$x = -\frac{2alM}{l^2+1} = [m_1+m_2\cos(\Omega-\omega)]\cos\theta-\mu_1 m_2\sin(\Omega-\omega)\sin\theta\,,$$

(15) $$y = -\frac{2alN}{l^2+1} = [m_1+m_2\cos(\Omega-\omega)]\sin\theta+\mu_1 m_2\sin(\Omega-\omega)\cos\theta\,,$$

$$z = \frac{2al}{l^2+1} = m_1 m_2\sin(\Omega-\omega)\,.$$

Tu m_1, μ_1 są stałe, charakteryzujące przekształcenie B_{σ_1}, przy pomocy którego przechodzimy od powierzchni Σ do powierzchni Σ_2 z elementem liniowym

$$ds_2{}^2 = \cos^2\theta\,d\alpha^2+\sin^2\theta\,d\beta^2\,.$$

Stałe m_2, μ_2 charakteryzują przekształcenie B_{σ_2}, prowadzące od powierzchni Σ_2 do powierzchni Σ_1.

Z wyrażeń (10) poprzedzającego paragrafu znajdziemy łatwo:

(16) $$\sin(\Omega-\omega) = \frac{2l}{l^2+1}\,, \quad \cos(\Omega-\omega) = \frac{l^2-1}{l^2+1}\,.$$

Wstawiając te wartości do wyrażeń (15), widzimy przedewszystkiem, że:

(17) $$m_1 m_2 = a$$

i prócz tego, że:

$$-2alM = [m_1(l^2+1)+m_2(l^2-1)]\cos\theta-2m_2\mu_1 l\sin\theta\,,$$

$$-2alN = [m_1(l^2+1)+m_2(l^2-1)]\sin\theta+2m_2\mu_1 l\cos\theta\,.$$

Określone w ten sposób funkcye M i N powinny czynić zadość równaniom (I)—(V); podstawiając wartości M i N w równanie (I), otrzymamy:

$$[(m_1+m_2)^2-4a]\,l^4+[2(m_1{}^2-m_2{}^2)+4m_2{}^2\mu_1{}^2-4a(1-a)]\,l^2+(m_1-m_2)^2 = 0\,.$$

Związek ten powinien być prostą tożsamością, t. j. stałe m_1, m_2 powinny czynić zadość jeszcze związkom:

$$(m_1+m_2)^2 = 4a\,; \quad m_1{}^2-m_2{}^2+2m_2{}^2\mu_1{}^2-2a(1-a) = 0\,; \quad m_1-m_2 = 0\,.$$

Łatwo widzieć, że związkom tym stanie się zadość, skoro położymy:

(18) $$m_1 = m_2 = \pm\sqrt{a}\,, \quad \mu_1{}^2 = 1-a\,.$$

Ponieważ stałe μ_1, m_1, μ_2, m_2 połączone są związkami:

$$m_1{}^2+\mu_1{}^2 = 1\,, \quad m_2{}^2+\mu_2{}^2 = 1\,,$$

przeto na mocy poprzedzających równości będzie $\mu_1{}^2 = \mu_2{}^2$, skąd $\mu_2 = \pm\mu_1$. Dalsze badanie wskaże, który z dwóch znaków wybrać należy.

Na zasadzie otrzymanych warunków wyrażenia na M i N będą postaci:

$$m_1 M = \mu_1 \sin\theta - l\cos\theta\,, \quad m_1 N = -\mu_1\cos\theta - l\sin\theta\,. \tag{19}$$

Nie trudno sprawdzić przy pomocy prostego różniczkowania, że znalezione wyrażenia na M i N czynią zadość tożsamościowo równaniom (II)—(V), jeżeli tylko pamiętać będziemy o tem, że θ jest całką układu równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}+\frac{\partial\omega}{\partial\beta} = -\frac{\mu_1\cos\theta\,\sin\omega}{m_1}+\frac{\sin\theta\,\cos\omega}{m_1}\,,\\ &\frac{\partial\theta}{\partial\beta}+\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} = \frac{\mu_1\sin\theta\,\cos\omega}{m_1}-\frac{\cos\theta\,\sin\omega}{m_1}\,. \end{aligned}\tag{20}$$

Pozostaje dowieść, że otrzymana funkcya Ω czyni zadość równaniom analogicznym do równań (20), w których należy tylko zamiast $\theta, \omega, m_1, \mu_1$ napisać odpowiednio $\Omega, \theta, m_2, \mu_2$.

Kombinując otrzymane w ten sposób równania z równaniami (20), znajdziemy, że funkcya Ω powinna czynić zadość następującym równaniom różniczkowym:

$$\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial\alpha} = -\frac{1}{m_1}(\mu_2\cos\Omega+\mu_1\cos\omega)\sin\theta+\frac{1}{m_1}(\sin\Omega+\sin\omega)\cos\theta\,,$$

$$\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial\beta} = \frac{1}{m_1}(\mu_2\sin\Omega+\mu_1\sin\omega)\cos\theta-\frac{1}{m_1}(\cos\Omega+\cos\omega)\sin\theta\,,$$

w których uwzględniliśmy już warunek $m_1 = m_2$.

Podstawiając tu zamiast $\sin\Omega$, $\cos\Omega$ oraz pochodnych $\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial\alpha}, \frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial\beta}$ ich wartości i rugując z otrzymanych wyrażeń $\cos\theta$ i $\sin\theta$ przy pomocy równań (19), dochodzimy do warunków:

$$(\mu_1+\mu_2)(\mu_1 M - Nl)\,[\cos\omega\,(1-l^2)+2l\sin\omega] = 0\,,$$

$$(\mu_1+\mu_2)(\mu_1 N + Ml)\,[\sin\omega\,(1-l^2)+2l\cos\omega] = 0\,.$$

Stąd jest rzeczą jasną, że szukanym warunkiem będzie:

$$\mu_1+\mu_2 = 0\,. \tag{21}$$

W rzeczy samej, żaden z pozostałych czynników nie może być zerem; albowiem przyrównawszy te czynniki do zera, otrzymalibyśmy na l wartość

niezależną od a, co jest oczywiście niemożliwem, albo też $l = \text{const}$, co nie daje nam również rozwiązania naszego zadania.

Widzimy tedy, że przekształcenie powierzchni Σ na powierzchnię Σ_1 daje się osiągnąć przy pomocy dwóch kolejno stosowanych przekształceń Bäcklunda B_{σ_1} i B_{σ_2}, charakteryzujących się odpowiednio stałemi (m_1, μ_1), $(m_1, -\mu_1)$.

W Rozdziale II widzieliśmy, że stałe m_1, μ_1, m_2, μ_2 mają wartości następujące:

$$m_1 = \cos\sigma_1\,, \quad \mu_1 = \sin\sigma_1\,, \quad m_2 = \cos\sigma_2\,, \quad \mu_2 = \sin\sigma_2\,;$$

gdzie kąty $\frac{\pi}{2}-\sigma_1$, $\frac{\pi}{2}-\sigma_2$ są kątami, utworzonemi przez płaszczyzny ogniskowe odpowiednich kongruencyj liniowych pseudosferycznych.

Z warunków (18) i (21) wnosimy, że w uważanym przypadku stałe σ_1, σ_2 są połączone związkiem $\sigma_2 = -\sigma_1$. Dalej, ponieważ stałe m_1, μ_1 mają wartości:

$$m_1 = \sqrt{a}\,, \quad \mu_1^2 = 1 - a\,,$$

gdzie a jest liczbą rzeczywistą dodatnią, widzimy, że kąty σ_1, σ_2 przy warunku $a < 1$ będą rzeczywiste; przy $a = 1$ będziemy mieli oczywiście dwa przekształcenia B_0 Bianchi'ego; wreszcie przy $a > 1$ przekształcenia $B_{\sigma_1}, B_{\sigma_2}$ będą urojone sprzężone, i dla tego to właśnie kolejne ich stosowanie prowadzi do rzeczywistej powierzchni Σ_1 (porówn. § 14 Rozdziału II-go).

Doszliśmy zatem do następującego twierdzenia:

Normalne do jakiejkolwiek powierzchni Σ o krzywiznie stałej ujemnej, po odbiciu od powierzchni S, nakładalnej na jedną z powierzchni obrotowych zasadniczych, dla której normalne do powierzchni Σ tworzą kongruencyę dołączoną, będą normalnemi do powierzchni Σ_1 o takiejże krzywiznie stałej ujemnej. Od powierzchni Σ do powierzchni Σ_1 przejść możemy drogą kolejnego stosowania dwóch przekształceń Bäcklunda $B_{\sigma_1}, B_{\sigma_2}$. Nadto, jeżeli powierzchnia S daje się nałożyć na katenoidę skróconą albo wydłużoną, wtedy oba te przekształcenia są rzeczywiste; jeżeli nakłada się ona na powierzchnię obrotową logarytmową, rzeczone przekształcenia są przekształceniami Bianchi'ego; nakoniec, jeżeli powierzchnia S nakłada się na sinusoidę hyperboliczną obrotową, wtedy przekształcenia B_{σ_1}, B_{σ_2} są urojone sprzężone.

§ 7. W rozdziale poprzedzającym pokazaliśmy, w jaki sposób rozwiązanie wszystkich postawionych tam pytań sprowadzić można do całkowania pewnego układu równań liniowych o pochodnych cząstkowych rzędu 1-go i 2-go. Stosując analogiczną metodę, możemy to samo uczynić i w rozważanym obecnie przypadku.

Rozpatrzmy w tym celu układ kół (K) ortogonalnych do naszych powierzchni Σ i Σ_1 o krzywiznie stałej ujemnej, a których środki znajdują się na odpowiednich płaszczyznach stycznych do powierzchni S. Widzieliśmy w Rozdziale III, że ta kongruencya kół będzie ortogonalna do nieskończonej mnogości powierzchni. Środek C któregokolwiek z tych kół będzie punktem przecięcia trzech odpowiednich płaszczyzn

$$z=0\,,\quad Mx+Ny-z+l=0\,,\quad Nx-My=0\,;$$

w rzeczy samej pierwsza z tych płaszczyzn jest styczna do powierzchni Σ, druga do powierzchni S; trzecia zaś przechodzi przez normalne do tych dwóch powierzchni, a więc i przez normalną do powierzchni Σ_1. Tym sposobem spółrzędne środka C będą:

$$x_0=-\frac{Ml}{M^2+N^2}=\frac{-a\,Ml}{l^2+1-a}\,,\quad y_0=\frac{-a\,Nl}{l^2+1-a}\,,\quad z_0=0\,,$$

a promień koła:

$$r_0^2=\frac{a^2\,l^2\,(M^2+N^2)}{(l^2+1-a)^2}=\frac{a\,l^2}{l^2+1-a}\,. \tag{22}$$

Oznaczmy przez O początek spółrzędnych (T), przez γ kąt, który odcinek OC tworzy z osią x; będzie:

$$\cos\gamma=-\frac{\sqrt{a}\,M}{\sqrt{l^2+1-a}}\,,\quad \sin\gamma=-\frac{\sqrt{a}\,N}{\sqrt{l^2+1-a}}\,. \tag{23}$$

Jeżeli przez t oznaczymy kąt, utworzony przez jakikolwiek promień z odcinkiem CO, to spółrzędne odpowiedniego punktu naszego koła wyrażą się w ten sposób:

$$\begin{aligned} x&=x_0-r_0\cos\gamma\cos t=r_0\cos\gamma\,(1-\cos t)\,,\\ y&=y_0-r_0\sin\gamma\cos t=r_0\sin\gamma\,(1-\cos t)\,,\\ z&=r_0\sin t\,. \end{aligned} \tag{24}$$

Weźmy na kole jakikolwiek punkt G i napiszmy warunek, aby przesunięcia tego punktu były ortogonalne do koła (K).

Jeżeli przez δx, δy, δz oznaczymy rzuty przesunięć punktu G na osi (T), to warunek, o którym mowa, wyrazi się w postaci:

$$\sin t\cos\gamma\,\delta x+\sin t\sin\gamma\,\delta y+\cos t\,\delta z=0\,.$$

Podstawiając tu wartości na δx, δy, δz, będziemy mieli:

$$A\,d\alpha+B\,d\beta+T\,dt=0\,, \tag{25}$$

gdzie:

$$A=r_0\sin\omega\cos\gamma+\left(\frac{\partial r_0}{\partial\alpha}+\cos\omega\cos\gamma\right)\sin t-r_0\sin\omega\cos\gamma\cos t\,;$$

$$B=-r_0\cos\omega\sin\gamma+\left(\frac{\partial r_0}{\partial\beta}+\sin\omega\sin\gamma\right)\sin t+r_0\cos\omega\sin\gamma\cos t\,;$$

$$T=r_0\,.$$

Aby warunek (25) zachodził przy wszelkich możliwych wartościach na $d\alpha$, $d\beta$, jest koniecznem i dostatecznem, by spełniał się tożsamościowo związek:

$$A\left(\frac{\partial B}{\partial t}-\frac{\partial T}{\partial\beta}\right)+B\left(\frac{\partial T}{\partial\alpha}-\frac{\partial A}{\partial t}\right)+T\left(\frac{\partial A}{\partial\beta}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)=0\,,$$

który, jak łatwo sprawdzić, sprowadza się do postaci:

$$P\sin t+Q\cos t+R=0\,, \tag{26}$$

gdzie:

$$P=r_0^2\left[\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\cos\omega\cos\gamma}{r_0}\right)-\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sin\omega\sin\gamma}{r_0}\right)\right],$$

$$Q=-R=-r_0^3\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\cos\omega\sin\gamma}{r_0}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\sin\omega\cos\gamma}{r_0}\right)\right]+r_0\cos\gamma\sin\gamma\,.$$

Ponieważ rozważany przez nas układ kół jest ortogonalny do nieskończonej mnogości powierzchni, albo innemi słowy, ponieważ związek (26) ma miejsce dla nieskończonej mnogości wartości funkcyi t, to koniecznie zachodzić muszą związki:

$$P=0\,,\quad Q=-R=0\,.$$

Wstawiając tu zamiast γ i r_0 ich wartości, sprowadzimy te wyrażenia do postaci:

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\cos\omega\, M}{l}\right)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sin\omega\, N}{l}\right) \tag{27}$$

i

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\cos\omega\, N}{l}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\sin\omega\, M}{l}\right)+\frac{MN}{l^2}=0. \tag{28}$$

O prawdziwości tych ostatnich związków łatwo przekonać się przy pomocy równań (II) i (III). W samej rzeczy, kombinując te dwa równania, otrzymamy:

$$\sin\omega\frac{\partial N}{\partial\alpha}+\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}N\cos\omega-\sin^2\omega\, MN=\cos\omega\frac{\partial M}{\partial\beta}-\frac{\partial\omega}{\partial\beta}M\sin\omega+\cos^2\omega MN;$$

dzieląc obie części przez l i dodając do obu stron po $-\frac{MN\sin\omega\cos\omega}{l^2}$, znajdziemy łatwo związek (27). Dla otrzymania związku (28) postępujemy w ten sposób: mnożymy równanie (II) przez $\frac{\cos\omega}{l}$, równanie (III) przez $\frac{\sin\omega}{l}$, dodajemy otrzymane wyrażenia i znajdujemy:

$$\frac{\cos\omega}{l}\frac{\partial N}{\partial\alpha}-\frac{\sin\omega}{l}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}N+\frac{\sin\omega}{l}\frac{\partial M}{\partial\beta}+\frac{\cos\omega}{l}\frac{\partial\omega}{\partial\beta}M=0;$$

dodajemy teraz do obu stron po $-\frac{MN}{l^2}$ i uwzględniamy tożsamość:

$$\frac{MN}{l^2}=\frac{MN(\cos^2\omega+l\sin\omega\cos\omega)}{l^2}+\frac{MN(\sin^2\omega-l\cos\omega\sin\omega)}{l^2}$$

$$=\frac{\cos\omega\,.\,N}{l^2}\frac{\partial l}{\partial\alpha}+\frac{\sin\omega\,.\,M}{l^2}\frac{\partial l}{\partial\beta},$$

a wtedy otrzymamy równanie (28).

Szczególnie interesującem jest równanie (27): pokazuje ono, że funkcye $\frac{\cos\omega\,.\,M}{l}$ i $\frac{\sin\omega\,.\,N}{l}$ można uważać za pochodne cząstkowe względem α i β jednej i tej samej funkcyi, t. j. że:

$$\frac{\cos\omega\,.\,M}{l}=\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha},\quad \frac{\sin\omega\,.\,N}{l}=\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta};$$

jeżeli prócz tego wprowadzimy funkcyę ψ przy pomocy związku:

$$\psi=\frac{\varphi}{l}, \tag{29}$$

to funkcye M i N wyrażone będą w sposób następujący:

$$M=\frac{1}{\psi\cos\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha},\quad N=\frac{1}{\psi\sin\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}. \tag{30}$$

§ 8. Przy pomocy równań (I)—(V) łatwo wyprowadzić równania różniczkowe o pochodnych cząstkowych, którym czynią zadość funkcye φ i ψ.

Różniczkując wyrażenie (29) względem α i β, podstawiając następnie zamiast pochodnych funkcyi l wartości tych pochodnych, wyrażone przez pochodne funkcyi φ, znajdziemy, że;

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}=-\operatorname{tg}\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha},\quad \frac{\partial\psi}{\partial\beta}=\operatorname{cotg}\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}. \tag{VI}$$

Równanie (I) przybierze teraz postać:

$$L=\frac{1}{\cos^2\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2-\frac{\varphi^2}{a}-\frac{(1-a)\,\psi^2}{a}=0. \tag{VII}$$

Jeżeli uwzględniając ten warunek, zróżniczkujemy wzory (30) względem α i β i podstawimy otrzymane stąd wartości pochodnych funkcyj M i N do równań (II)—(V), znajdziemy łatwo następujące równania, którym czynią zadość funkcye φ i ψ:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}=-\operatorname{tg}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\operatorname{cotg}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}+\frac{\cos^2\omega}{a}\varphi-\frac{1-a}{a}\psi\sin\omega\cos\omega,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\beta}=-\operatorname{tg}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\operatorname{cotg}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}, \tag{VIII}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2}=-\operatorname{tg}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\operatorname{cotg}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}+\frac{\sin^2\omega}{a}\varphi+\frac{1-a}{a}\psi\sin\omega\cos\omega$$

Jeżeli utworzymy teraz różne wyrażenia na

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\partial\beta},\quad \frac{\partial^3\varphi}{\partial\alpha\partial\beta^2},\quad \frac{\partial^3\varphi}{\partial\beta\partial\alpha^2},$$

przekonamy się, że równania (VI) i (VIII) będą zgodne na mocy j e d n e g o t y l k o warunku:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2\omega}{\partial\beta^2}=\sin\omega\cos\omega\,.$$

Różniczkując względem α i β funkcyę L, stanowiącą stronę lewą równania (VII), spostrzeżemy, że na mocy równań (VI) i (VIII) pochodne $\frac{\partial L}{\partial\alpha}$ i $\frac{\partial L}{\partial\beta}$ są tożsamościowo równe zeru, a więc:

$$L=g=\text{const.}$$

Tym sposobem równanie to jest wynikiem równań (VI) i (VIII).

Stała g wyznacza się z początkowych wartości funkcyj $\psi, \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}$ i $\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}$ dla $\alpha=\alpha_0$ i $\beta=\beta_0$; te same wartości początkowe określają, mówiąc ogólnie, całki w pewnym obszarze holomorficzne równań (VI) i (VII). Podobnie jak w § 10 Rozdziału V-go, przekonamy się, że w przypadku, rozpatrzonym przez nas w §§ poprzedzających, t. j. gdy $g=0$, wyrażenie na funkcyę l t. j. $l=\frac{\varphi}{\psi}$ zawiera w sobie d w i e stałe dowolne, jeżeli nie liczyć stałej a.

Tym sposobem dochodzimy do znanego rezultatu, że każdej powierzchni Σ o krzywiznie stałej ujemnej odpowiada ∞^3 powierzchni S, nakładalnych na powierzchnie obrotowe zasadnicze i związanych sposobem określonym z powierzchnią Σ.

W warunkach twierdzenia odwrotnego do twierdzenia G u i c h a r d a, z równań (30) mamy:

$$M\frac{1}{\sin\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}-N\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=0\,,$$

skąd wnosimy, że na powierzchni Σ krzywe $\varphi=\text{const}$, gdzie φ jest całką równań (VI) i (VII), czyniącą zadość równaniu $L=0$, są ortogonalne do płaszczyzn

$$Nx-My=0\,,$$

t. j. do płaszczyzn, przechodzących przez odpowiednie normalne do powierzchni S i Σ.

W dowodzeniu drugiego twierdzenia B i a n c h i'ego widzieliśmy, że

obwiednia tych płaszczyzn jest powierzchnią nakładalną na powierzchnię obrotową, której element liniowy może być sprowadzony do postaci:

$$ds^2=e^{2\tau}\,d\theta^2+\left[a+\frac{a}{1-a}e^{2\tau}\right]dv^2\,,$$

gdzie a jest stała, $\tau=-av-(1-a)\,\theta$.

Postaramy się tego dowieść i w tym przypadku, ale jednocześnie rozszerzymy nieco nasze zagadnienie, a mianowicie poszukamy elementu liniowego obwiedniej płaszczyzn, przechodzących przez normalne do powierzchni Σ i ortogonalnych do krzywych $\varphi=\text{const}$, poprowadzonych na tej powierzchni; φ ma być całką równań (VI) i (VIII), czyniącą zadość równaniu $L=g$, gdzie g jest pewna stała dowolna.

§ **9**. I tak niechaj φ i ψ będą całki równań różniczkowych (VI) i (VIII), czyniące zadość związkowi $L=g$. Równaniem odpowiedniej płaszczyzny, ortogonalnej do krzywej $\varphi=\text{const}$ i przechodzącej przez normalną do powierzchni Σ, będzie w odniesieniu do układu (T):

$$\cos\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}x-\sin\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}y=0 \tag{31}$$

i dla tego spółrzędnemi punktu tej powierzchni będą:

$$x=\sin\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}t\,,\quad y=\cos\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}t\,,\quad z\,,$$

gdzie t oznacza parametr dowolny.

Spółrzędne punktu, którego miejscem geometrycznem będzie obwiednia płaszczyzn (31), wyznaczymy z warunku, że przesunięcie punktu przy wszelkich możliwych zmianach parametrów α, β odbywają się w płaszczyznie (31).

Jeżeli przez δx, δy, δz oznaczymy rzuty przesunięć szukanego punktu na osi (T), to warunek nasz wyrazi się analitycznie w ten sposób:

$$A\,d\alpha+B\,d\beta=\cos\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\delta x-\sin\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\delta y=0\,. \tag{32}$$

Ponieważ według założenia warunek ten spełnia się przy wszelkich wartościach na $d\alpha$, $d\beta$, przeto rozpada się na dwa warunki:

$$A=0\,,\quad B=0\,, \tag{33}$$

z których potrafimy wyznaczyć szukane wielkości t i z.

Przesunięcia rzutów naszego punktu będą:

$$\delta x = \cos\omega\, d\alpha + d\left(t \sin\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right) + z \sin\omega\, d\alpha - \left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta} d\alpha + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} d\beta\right) t \cos\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\beta},$$

$$\delta y = \sin\omega\, d\beta + d\left(t \cos\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right) + \left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta} d\alpha + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} d\beta\right) t \sin\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} - z \cos\omega\, d\beta,$$

$$\delta z = dz + t \cos^2\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} d\beta - t \sin^2\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} d\alpha.$$

Korzystając z równań zasadniczych (VI) i (VIII) i pomijając na razie przypadki $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = 0$ i $\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = 0$, łatwo sprowadzimy nasze warunki (33) do postaci:

$$\cos\omega + t\left[\frac{\cos^2\omega \sin\omega}{a}\varphi - \frac{1-a}{a}\psi \sin^2\omega \cos\omega\right] + z \sin\omega = 0,$$

$$\sin\omega + t\left[\frac{\sin^2\omega \cos\omega}{a}\varphi + \frac{1-a}{a}\psi \cos^2\omega \sin\omega\right] - z \cos\omega = 0,$$

stąd wyznaczymy szukane funkcye t i z:

$$t = \frac{-a}{\varphi \sin\omega \cos\omega}, \quad z = \frac{(a-1)\psi}{\varphi}.$$

Tym sposobem spółrzędne punktów szukanej obwiedniej wyrażą się w sposób następujący:

$$x = -\frac{a}{\varphi\cos\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, \quad y = -\frac{a}{\varphi\sin\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}, \quad z = \frac{(a-1)\psi}{\varphi}.$$

Stąd zaś, korzystając z równań (VI) i (VIII), znajdziemy następujące wyrażenia na rzuty przesunięć δx, δy, δz:

$$\delta x = \frac{a}{\varphi^2\cos\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^2 d\alpha + \frac{a}{\varphi^2\cos\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)\partial\beta = \frac{a}{\varphi^2\cos\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right) d\varphi,$$

$$\delta y = \frac{a}{\varphi^2\sin\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right) + \frac{a}{\varphi^2\sin\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2 = \frac{a}{\varphi^2\sin\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right) d\varphi,$$

$$\delta z = \frac{\psi}{\varphi}\left[\frac{1-a}{\varphi} d\varphi - \frac{d\psi}{\psi}\right].$$

Element liniowy rozważanej obwiedniej będzie tedy postaci:

$$ds^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 = \frac{a^2}{\varphi^4}\left[\frac{1}{\cos^2\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2\right] d\varphi^2$$
$$+ \frac{\psi^2}{\varphi^2}\left[\frac{1-a}{\varphi} d\varphi - \frac{d\psi}{\psi}\right]^2;$$

na mocy zaś związku

$$\frac{1}{\cos^2\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2 = g + \frac{\varphi^2}{a} + \frac{1-a}{a}\psi^2,$$

będzie:

$$ds^2 = \frac{n^2}{\varphi^4}\left[g - \frac{\varphi^2}{n} - \frac{1+n}{n}\psi^2\right] d\varphi^2 + \frac{\psi^2}{\varphi^2}\left[\frac{1+n}{\varphi} d\varphi - \frac{d\varphi}{\psi}\right]^2,$$

gdzie przez n oznaczyliśmy wielkość $-a$.

Jeżeli założymy, że:

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = dv, \quad (1+n)\frac{d\varphi}{\varphi} - \frac{d\psi}{\psi} = (1+n)\, d\theta,$$

t. j. że:

$$\varphi = e^v, \quad \psi = \frac{e^{(1+n)v-(1+n)\theta}}{1+n},$$

to sprowadzimy nasz element liniowy do postaci:

$$(34) \qquad ds^2 = e^{2\tau} d\theta^2 + \left[g n^2 e^{-2v} - n - \frac{n}{1+n} e^{2\tau}\right] dv^2,$$

gdzie:

$$\tau = nv - (n+1)\theta.$$

Widzimy stąd, że powierzchnia nasza jest powierzchnią, jaką napotkaliśmy w drugiem twierdzeniu Bianchi'ego.

Łatwo widzieć, że odległość jakiegokolwiek punktu tej powierzchni od odpowiedniej płaszczyzny stycznej do powierzchni $\boldsymbol{\Sigma}$ równa się spółrzędnej z, która wyraża się w następujący sposób przez θ i v:

$$z^2 = e^{2\tau};$$

odległość ϱ między normalną do powierzchni Σ i równoległą od niej styczną do obwiedniej naszej wyraża się tak:

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 = gn^2 e^{-2v} - n - \frac{n}{n+1} e^{2\tau}.$$

Widzimy tedy, że otrzymana powierzchnia S_0 jest z powierzchnią Σ w takim związku, w jakim znajdują się powierzchnie S_0 i Σ w drugiem twierdzeniu Bianchi'ego.

Podobnie jak w § 11 Rozdziału II-go dochodzimy tu do twierdzenia odwrotnego do drugiego twierdzenia Bianchi'ego, a mianowicie:

Każdej powierzchni Σ o krzywiznie stałej ujemnej odpowiada ∞^5 powierzchni S_0 o elemencie liniowym (34). Wyznaczenie tych powierzchni zależy od całkowania układu równań liniowych o pochodnych cząstkowych rzędu 1-go i 2-go, mianowicie równań (VI) i (VIII). Powierzchnie S_0 są obwiedniemi płaszczyzn, przechodzących przez normalne do powierzchni Σ i ortogonalnych do krzywych $\varphi = \text{const}$, poprowadzonych na powierzchni Σ.

§ **10**. W wywodzie drugiego twierdzenia Bianchi'ego widzieliśmy, że prócz powierzchni S_0 o elemencie liniowym (34), związanych w sposób określony z powierzchniami Σ o krzywiznie stałej ujemnej, są z temiż powierzchniami Σ w sposób analogiczny związane i powierzchnie S_0 o elemencie liniowym:

$$ds^2 = e^{-2v} du^2 + [2(v-u) e^{-2v} + be^{-2v} - m] dv^2, \tag{35}$$

gdzie b i m są pewne stałe (por. § 3 Rozdziału IV-go). Powstaje teraz pytanie, czy dla każdej powierzchni Σ o krzywiznie stałej ujemnej znaleść można powierzchnie S_0, związane określonym sposobem z powierzchnią Σ i mające element liniowy postaci (35).

By rozwiązać to pytanie, skorzystamy ze wskazówek Bianchi'ego, według których przekształcimy równania (VI) i (VIII) [1].

Przekształcenie to jest następujące: w równaniach (VI) i (VIII), oraz w równaniu:

$$\frac{1}{\cos^2\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2 = g + \frac{\varphi^2}{a} + \frac{1-a}{a}\psi^2. \tag{36}$$

[1] Atti della R. Acc. dei Lincei **9** §, zesz. 6.

zamiast ψ napiszmy $\psi + c$, gdzie c jest stała; przy tej zmianie równania (VI) nie zmienią się oczywiście. Połóżmy następnie:

$$\left(\frac{1}{a} - 1\right) c = n,$$

a w otrzymanych w ten sposób równaniach przyjmijmy $\frac{1}{a} - 1 = 0$, uważając n za wielkość niezależną od a. Tym sposobem dojdziemy do następującego układu równań:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} = -\operatorname{tg}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \operatorname{cotg}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} + \varphi\cos^2\omega - n\sin\omega\cos\omega,\\
\text{(IX)}\quad &\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\beta} = -\operatorname{tg}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \operatorname{cotg}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}.\\
&\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2} = -\operatorname{tg}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \operatorname{cotg}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} + \varphi\sin^2\omega + n\sin\omega\cos\omega,
\end{aligned}$$

$$\text{(X)}\quad \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = -\operatorname{tg}\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\beta} = \operatorname{cotg}\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}.$$

$$\text{(XI)}\quad L = \frac{1}{\cos^2\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2 - \varphi^2 - 2n\psi = g.$$

O zgodności równań (IX) i (X) łatwo przekonać się przy pomocy bezpośredniego różniczkowania; jedynym warunkiem zgodności będzie:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial\beta^2} = \sin\omega\cos\omega.$$

Dalej przy pomocy bezpośredniego różniczkowania przekonywamy się, że funkcye $\frac{\partial L}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial L}{\partial\beta}$ są tożsamościowo równe zeru.

Podobnie, jak wyżej przy rozstrząsaniu równań (VI) i (VIII), spostrzeżemy i to, że całki φ i ψ układu równań (IX) i (X) zależą od czterech stałych dowolnych, przy pomocy których wyznaczyć będzie można stałą g, zachodzącą w równaniu (XI).

Znajdźmy teraz obwiednią płaszczyzn, przechodzących przez normalne do powierzchni S_0, i ortogonalnych do odpowiednich krzywych $\varphi = \text{const}$, przeprowadzonych na powierzchni Σ.

Równaniem jakiejkolwiek z tych płaszczyzn w odniesieniu do odpowiednich osi (T) będzie:

$$\cos\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} x - \sin\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} y = 0, \tag{37}$$

a więc spółrzędnemi jakiegokolwiek punktu tej płaszczyzny będą:

$$x = \sin\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} t, \quad y = \cos\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} t, \quad z.$$

Znajdziemy funkcye t i z dla punktów szukanej obwiedniej z warunku, że przesunięcia tych punktów przy nieskończenie małych zmianach parametrów α, β będą odbywały się w odpowiednich płaszczyznach (37).

Warunek ten

$$A\,d\alpha + B\,d\beta = \cos\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} \delta x - \sin\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} \delta y = 0,$$

rozpada się na dwa warunki:

$$A = 0, \quad B = 0.$$

Jeżeli obliczymy wyrażenia na δx, δy, i skorzystamy przytem z równań (IX), (X), równania $A = 0$, $B = 0$ przybiorą postać;

$$\cos\omega + t\sin\omega\cos\omega\,[\varphi\cos\omega - n\sin\omega] + z\sin\omega = 0,$$

$$\sin\omega + t\sin\omega\cos\omega\,[\varphi\sin\omega + n\cos\omega] - z\cos\omega = 0.$$

Stąd łatwo znajdziemy wartości funkcyj t i z, odpowiadające punktowi szukanej obwiedniej:

$$t = -\frac{1}{\varphi\sin\omega\cos\omega}, \quad z = -\frac{n}{\varphi},$$

tak, że spółrzędne tego punktu będą:

$$x = -\frac{1}{\varphi\cos\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, \quad y = -\frac{1}{\varphi\sin\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}, \quad z = -\frac{n}{\varphi}.$$

Rzuty przesunięć rozważanego punktu na osi (T) będą, na mocy równań (IX) i (X) postaci:

$$\delta x = \frac{1}{\varphi^2\cos\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^2 d\alpha + \frac{1}{\varphi^2\cos\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} d\beta = \frac{1}{\varphi^2\cos\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} d\varphi,$$

$$\delta y = \frac{1}{\varphi^2\sin\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} d\alpha + \frac{1}{\varphi^2\sin\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2 d\beta = \frac{1}{\varphi^2\sin\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} d\varphi,$$

$$\delta z = \frac{n\,d\varphi}{\varphi^2} - \frac{d\psi}{\varphi} = \frac{1}{\varphi}\left[\frac{n\,d\varphi}{\varphi} - d\psi\right],$$

a przeto element liniowy szukanej powierzchni będzie miał wyrażenie następujące:

$$ds^2 = \frac{1}{\varphi^2}\left[\frac{n\,d\varphi}{\varphi} - d\psi\right]^2 + \frac{d\varphi^2}{\varphi^4}\left[\frac{1}{\cos^2\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2\right].$$

Uwzględniwszy związek (XI), możemy ds^2 napisać tak:

$$ds^2 = \frac{1}{\varphi^2}\left[\frac{n\,d\varphi}{\varphi} - d\psi\right]^2 + \frac{d\varphi^2}{\varphi^4}\left[g + \varphi^2 + 2n\psi\right].$$

Kładąc:

$$\frac{n\,d\varphi}{\varphi} - d\psi = n\,d\theta, \quad \frac{d\varphi}{\varphi} = dv,$$

a więc:

$$\psi = n(v - \theta), \quad \varphi = ne^v,$$

nadamy elementowi liniowemu postać:

$$ds^2 = e^{-2v}d\theta^2 + \left[1 + \frac{g}{n^2}e^{-2v} + 2(v-\theta)e^{-2v}\right]dv^2. \tag{38}$$

Jest to element liniowy typu (35). Jeżeli wyrazimy przez parametry θ i v, odległość z punktu uważanej obwiedniej od odpowiedniej płaszczyzny stycznej do powierzchni Σ, oraz odległość $\varrho = \sqrt{x^2+y^2}$ pomiędzy normalną do powierzchni Σ a równoległą od niej styczną do obwiedniej, to łatwo znajdziemy wartości:

$$z^2 = e^{-2v}, \quad \varrho^2 = x^2 + y^2 = 1 + \frac{g}{n^2}e^{-2v} + 2(v-\theta)e^{-2v}.$$

Tym sposobem i dla tego przypadku dowiedliśmy twierdzenia odwrotnego do drugiego twierdzenia Bianchi'ego dla powierzchni o krzywiznie stałej ujemnej. Twierdzenie to możemy wyrazić w ten sposób:

Każdej powierzchni Σ o krzywiznie stałej ujemnej odpowiada ∞^5 powierzchni S_0 o elemencie liniowym (38). Wyznaczenie tych powierzchni zależy od całkowania układu równań różniczkowych liniowych o pochodnych cząstkowych rzędu 1-go i 2-go, mianowicie równań (IX) i (X). Powierzchnie S_0 są obwiedniemi płaszczyzn, przechodzących przez normalne do powierzchni Σ i ortogonalnych do krzywych $\varphi = \text{const}$, przeprowadzonych na powierzchni Σ.

W przypadkach, w których jedna z pochodnych $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}$ jest zerem, podobnie, jak na końcu poprzedzającego rozdziału, przekonać się można, że jest to możliwe tylko wtedy, gdy powierzchnia Σ jest powierzchnią obrotową. W tym przypadku powierzchnia S_0 zniekształca się na oś obrotu.

ROZDZIAŁ VII.

Twierdzenie odwrotne do drugiego twierdzenia Guicharda. Przekształcenie powierzchni o krzywiznie stałej dodatniej. Twierdzenie odwrotné do drugiego twierdzenia Bianchi'ego dla powierzchni o stałej krzywiznie dodatniej.

§ 1. Pozostaje nam jeszcze zbadanie rozpatrzonych w Rozdziale poprzedzającym pytań w tym przypadku, kiedy krzywizna powierzchni początkowej Σ jest dodatnia. Nie zmniejszając ogólności, możemy przyjąć, że ta krzywizna równa się $+1$.

Jako linie spółrzędne na powierzchni Σ przyjmijmy linie krzywiznowe $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$; osi układu spółrzędnych (T) obierzmy tak, aby oś x była styczna do krzywych $\beta = \text{const}$, oś y do krzywych $\alpha = \text{const}$.

Wielkościami zasadniczemi, charakteryzującemi naszą powierzchnię Σ, będą:

$$\xi = \cosh \omega\,, \quad \eta_1 = \sinh \omega\,, \quad p_1 = -\cosh \omega\,, \quad q = \sinh \omega\,, \quad p = q_1 = 0$$

$$r = -\frac{\partial \omega}{\partial \beta}\,, \quad r_1 = \frac{\partial \omega}{\partial \alpha}\,,$$

gdzie ω jest całką równania różniczkowego:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} + \sinh \omega \cosh \omega = 0\,. \tag{1}$$

[1]) Darboux, l. c. t. III, str. 385.

Element liniowy powierzchni naszej, będzie, oczywiście, postaci:

$$ds^2 = \cosh^2 \omega\, ds^2 + \sinh^2 \omega\, d\beta^2\,.$$

Na normalnej do powierzchni Σ, poprowadzonej w pewnym punkcie O, weźmy punkt $M(0, 0, l)$; miejscem geometrycznem tego punktu będzie pewna powierzchnia S. Oznaczmy przez u kąt, który normalna do powierzchni Σ tworzy z płaszczyzną styczną do powierzchni S, poprowadzoną w odpowiednim punkcie M.

Jeżeli powierzchnia S jest nakładalna na jednę z powierzchni obrotowych zasadniczych i jeżeli normalne do powierzchni Σ tworzą kongruencyę, dołączoną do powierzchni S, wtedy: po pierwsze, pomiędzy odległością l odpowiednich punktów O i M, a kątem u zachodzi związek:

$$l^2 = \frac{a}{\sin^2 u} + 1\,, \tag{2}$$

gdzie a jest pewna stała; i po drugie, linie krzywiznowe powierzchni Σ odpowiadają krzywym sprzężonym powierzchni S (patrz Rozdz. III § 3 i § 5).

Łatwo widzieć, że, aby powierzchnia S była rzeczywista, stała a musi spełniać jeden z dwóch warunków: albo $a > 0$ albo $0 > a > -1$; pierwszy przypadek ma miejsce, gdy $l^2 > 1$, drugi, gdy $l^2 < 1$.

Rzuty przesunięć punktu $M(0, 0, l)$ na osi (T) będą:

$$\delta x = (\cosh \omega + l \sinh \omega)\, d\alpha\,, \quad \delta y = (\sinh \omega + l \cosh \omega)\, d\beta\,, \quad \delta z = dl\,. \tag{3}$$

Niechaj równaniem płaszczyzny stycznej do powierzchni S, przez punkt M przeprowadzonej, będzie:

$$Mx + Ny - z + l = 0\,. \tag{4}$$

Spółczynniki M i N wyznaczają się z warunku, że przesunięcia punktu M przy wszelkich możliwych nieskończenie małych zmianach parametrów α, β powinny odbywać się w płaszczyznie (4), t. j. że dla wszelkich wartości $d\alpha$, $d\beta$ zachodzi związek:

$$M\,\delta x + N\,\delta y - \delta z = 0\,.$$

Stąd znajdujemy następujące wartości na M i N:

$$M = \frac{1}{\cosh \omega + l \sinh \omega}\,\frac{\partial l}{\partial \alpha}\,, \quad N = \frac{1}{\sinh \omega + l \cosh \omega}\,\frac{\partial l}{\partial \beta}\,. \tag{5}$$

Ponieważ $\sin u$ jest dostawą kąta, który normalna do płaszczyzny (4) tworzy z normalną do powierzchni Σ, przeto warunek (2) można napisać w postaci:

$$\text{(I)} \qquad M^2 + N^2 + 1 = \frac{l^2 - 1}{a}.$$

Jest to, jak łatwo spostrzedz, równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych rzędu 1-go funkcyi l.

Przejdźmy do wywodu drugiego warunku. Przez nieruchomy punkt P przestrzeni, będący początkiem ruchomego układu spółrzędnych (T_1), którego osi są stale równoległe do odpowiednich osi układu spółrzędnych (T), poprowadźmy płaszczyznę równoległą do płaszczyzny (4); równaniem tej płaszczyzny w odniesieniu do układu (T_1) będzie:

$$\text{(6)} \qquad Mx + Ny - z = 0.$$

Nadajmy parametrowi α przyrost $d\alpha$; przytem spółrzędne (T_1) przyjmą położenie (T_1'); odpowiednie punkty O i M powierzchni Σ i S przesuną się wzdłuż krzywych $\beta = \text{const}$ i przejdą w położenia O' i M'. Równaniem płaszczyzny, przechodzącej przez punkt P i równoległej do płaszczyzny stycznej do powierzchni S w punkcie M, będzie w odniesieniu do osi (T_1'):

$$\text{(7)} \qquad M'x' + N'y' - z' = 0,$$

gdzie:

$$M' = M + \frac{\partial M}{\partial\alpha} d\alpha, \quad N' = N + \frac{\partial N}{\partial\alpha} d\alpha.$$

Przecięcie płaszczyzn (6) i (7) daje w granicy kierunek sprzężony z krzywą $\beta = \text{const}$ na powierzchni S.

Równanie płaszczyzny (7) w odniesieniu do osi (T_1) otrzymamy, kładąc (patrz Rozdział II § 6):

$$x' = x - \left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta} y + z\sinh\omega\right) d\alpha, \quad y' = y + x\frac{\partial\omega}{\partial\beta} d\alpha, \quad z' = z + x\sinh\omega\, d\alpha,$$

a więc prosta graniczna przecięcia płaszczyzn (6) i (7) będzie dana przez równanie (6) i przez równanie:

$$x\left[\frac{\partial M}{\partial\alpha} + N\frac{\partial\omega}{\partial\beta} - \sinh\omega\right] + y\left[\frac{\partial N}{\partial\alpha} - M\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\right] - zM\sinh\omega = 0.$$

Jeżeli przyjmiemy teraz, że na powierzchni S krzywe $\alpha = \text{const}$ i $\beta = \text{const}$ są sprzężone, innemi słowy, że przesunięcie punktu M wzdłuż krzywej $\alpha = \text{const.}$ jest równoległe do prostej, o której mowa, to otrzymamy drugi warunek:

$$\left(\frac{\partial N}{\partial\alpha} - M\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\right)(\sinh\omega + l\cosh\omega) - M\sinh\omega\frac{\partial l}{\partial\beta} = 0,$$

który, na mocy wzorów (5), sprowadza się do postaci:

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial N}{\partial\alpha} = M\frac{\partial\omega}{\partial\beta} + MN\sinh\omega.$$

Warunek ten jest co do funkcyi l równaniem różniczkowem o pochodnych cząstkowych rzędu 2-go; możemy go napisać także w postaci:

$$\frac{\partial^2 l}{\partial\alpha\,\partial\beta} = (\sinh\omega + l\cosh\omega)\frac{\partial\omega}{\partial\beta} M + (\cosh\omega + l\sinh\omega)\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} N$$
$$+ (\cosh 2\omega + l\sinh 2\omega)\, MN.$$

Równanie (II) możemy też przedstawić i nieco odmiennie. A mianowicie, różniczkując wyrażenie (5) na M względem β i uwzględniając powyższe wyrażenie na $\frac{\partial^2 l}{\partial\alpha\,\partial\beta}$, możemy zamiast (II) napisać równanie z niem tożsame:

$$\text{(III)} \qquad \frac{\partial M}{\partial\beta} = N\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} + MN\cosh\omega.$$

§ 2. Winniśmy teraz wykazać, że równania (I) i (II), albo — co na jedno wychodzi — równania (I) i (III) są zgodne.

Dajmy, że tak jest w istocie. W tem założeniu zróżniczkujmy równanie (I) względem α i wstawmy w otrzymane równanie, zamiast pochodnej $\frac{\partial N}{\partial\alpha}$ jej wartość (II); wyłączając na teraz przypadek $M = 0$, znajdziemy, że:

$$\text{(IV)} \qquad \frac{\partial M}{\partial\alpha} = -N\frac{\partial\omega}{\partial\beta} - N^2\sinh\omega + \frac{l(\cosh\omega + l\sinh\omega)}{a}.$$

Nakoniec, różniczkując równanie (I) względem β, uwzględniając wyrażenie (III) na $\frac{\partial M}{\partial\beta}$ i wyłączając przypadek $N = 0$, znajdziemy jeszcze:

$$\text{(V)} \qquad \frac{\partial N}{\partial\beta} = -M\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} - M^2\cosh\omega + \frac{l(\sinh\omega + l\cosh\omega)}{a}.$$

Tak więc, jeżeli równania (I), (II) i (III) są zgodne, to muszą być zgodne równania (II)—(V), t. j. muszą spełniać się tożsamościowo związki:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial\alpha\,\partial\beta}=\frac{\partial^2 M}{\partial\beta\,\partial\alpha},\quad \frac{\partial^2 N}{\partial\alpha\,\partial\beta}=\frac{\partial^2 N}{\partial\beta\,\partial\alpha}.$$

Prawdziwość tych tożsamości łatwo sprawdzić za pomocą prostego różniczkowania wyrażeń (II)—(V), przy uwzględnieniu związku (I) i pamiętając, że ω czyni zadość równaniu (1).

Jeżeli przeniesiemy wszystkie wyrazy w równaniu (I) na stronę lewą i oznaczymy stronę lewą tak otrzymanego równania przez L, to na mocy równań (II)—(V) znajdziemy, że pochodne $\frac{\partial L}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial L}{\partial\beta}$ są tożsamościowo równe zeru, t. j.:

$$\frac{\partial L}{\partial\alpha}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial\beta}=0,$$

skąd wnosimy, że dla całki równań (II)—(V) funkcya L równa się stałej. Dla zgodności równań (II)—(V) stała ta, jak widzieliśmy, powinna równać się zeru.

Równania (II)—(V), do całkowania których sprowadza się rozwiązanie naszego zadania, są trzema równaniami o pochodnych cząstkowych rzędu 2-go co do funkcyi l. Rozumując podobnie, jak w § 2 poprzedzającego rozdziału, dojdziemy do wniosku, że istnieje ∞^3 powierzchni S, czyniących zadość naszym warunkom.

§ **3**. Okażemy, że wszystkie te powierzchnie są nakładalne na jedną z powierzchni obrotowych zasadniczych o elemencie liniowym:

$$ds^2=\frac{a^2\,du^2}{\sin^4 u\,(a+\sin^2 u)}+k^2\cot^2 u\,dv^2,$$

gdzie k jest stała. Okażemy, prócz tego, że układ normalnych do powierzchni Σ przedstawia kongruencyę d o ł ą c z o n ą do powierzchni S.

Jeżeli oba założenia nasze są prawdziwe, wtedy na powierzchni S krzywe $l=\text{const.}$ są równoleżnikami geodezyjnemi. Aby to stwierdzić, utwórzmy parametr różniczkowy $\Delta_1(l)$ względem elementu liniowego powierzchni S. Ten element liniowy będzie, jak łatwo widzieć, następujący:

$$ds_0{}^2=(\cosh\omega+l\sinh\omega)^2\,(M^2+1)\,d\alpha^2+(\sinh\omega+l\cosh\omega)^2\,(N^2+1)\,d\beta^2$$
$$+\,2\,(\cosh\omega+l\sinh\omega)\,(\sinh\omega+l\cosh\omega)\,MN\,d\alpha\,d\beta.$$

Utworzywszy wyrażenie na $\Delta_1(l)$, znajdziemy:

$$\Delta_1(l)=\frac{M^2+N^2}{M^2+N^2+1}=\frac{l^2-1-a}{l^2-1}.$$

Różniczka długości łuku linij geodezyjnych ortogonalnych do krzywych $l=\text{const.}$ będzie:

$$d\theta=\sqrt{\frac{l^2-1}{l^2-1-a}}\,dl.$$

Wprowadzając zmienną u, połączoną z wielkością l związkiem (2), otrzymamy:

$$d\theta^2=\frac{a^2\,du^2}{\sin^4 u\,(a+\sin^2 u)}.$$

Element liniowy powierzchni S może być napisany w postaci:

$$ds_0{}^2=d\theta^2+\sigma^2\,dv^2.$$

Funkcyę σ wyznaczymy, obliczywszy według znanego wzoru B o n n e t a krzywiznę geodezyjną linij $l=\text{const}$; znajdziemy w ten sposób, że:

$$\sigma=k\cot u,$$

gdzie k jest stała. Element liniowy naszej powierzchni S może być tedy sprowadzony do postaci:

$$ds_0{}^2=\frac{a^2\,dv^2}{\sin^4 u\,(a+\sin^2 u)}+k^2\cot^2 u\,dv^2,$$

a zatem, stosownie do tego, czy a będzie dodatnie albo ujemne, powierzchnia S da się nałożyć na hyperboloidę dwupowłokową obrotową albo na elipsoidę obrotową około osi wielkiej.

Dalej, podobnie jak w § 3 poprzedzającego Rozdziału, przekonamy się, że krzywe $l=\text{const.}$ na powierzchni S są ortogonalne do płaszczyzn, przechodzących przez odpowiednie normalne do powierzchni Σ i S.

Dochodzimy tym sposobem do następującego twierdzenia:

Każdej powierzchni Σ o krzywiznie gaussowskiej stałej dodatniej odpowiada ∞^3 powierzchni S, nakładalnych albo na hyperboloidę dwupowłokową obrotową albo na elipsoidę obrotową około osi wielkiej, przyczem normalne do powierzchni Σ tworzą kongruencyę dołączoną do powierzchni S.

Rozumując zaś podobnie jak w § 4 Rozdziału poprzedzającego, dochodzimy do następującego twierdzenia:

Każdej powierzchni obrotowej Σ o krzywiznie gaussowskiej stałej dodatniej odpowiada ∞^2 powierzchni obrotowych S nakładalnych albo na hyperboloidę dwupowłokową obrotową albo na elipsoidę obrotową około osi wielkiej, przyczem normalne do powierzchni Σ tworzą kongruencyę dołączoną do powierzchni S.

§ 4. Rozpatrzymy teraz powierzchnię Σ_1, której punkty są symetryczne do punktów powierzchni Σ względem odpowiednich płaszczyzn stycznych do powierzchni S t. j. względem płaszczyzn:

$$Mx + Ny - z + l = 0 .$$

Spółrzędnemi odpowiedniego punktu O_1 powierzchni Σ_1 będą oczywiście

$$(8) \qquad x = -\frac{2alM}{l^2-1}, \quad y = -\frac{2alN}{l^2-1}, \quad z = \frac{2al}{l^2-1} .$$

Znajdźmy wyrażenie na element liniowy powierzchni Σ_1.

Rzuty przesunięć punktu O_1 możemy, przy uwzględnieniu równań (I)—(V), przedstawić w postaci:

$$\delta x = \frac{\cosh\omega(1+l^2)+2l\sinh\omega}{l^2-1}\left[\frac{2aM^2}{l^2-1}-1\right]d\alpha + \frac{\sinh\omega(1+l^2)+2l\cosh\omega}{l^2-1}\cdot\frac{2aMN}{l^2-1}\,d\beta ,$$

$$\delta y = \frac{\cosh\omega(1+l^2)+2l\sinh\omega}{l^2-1}\,\frac{2aMN}{l^2-1}\,d\alpha + \frac{\sinh\omega(1+l^2)+2l\cosh\omega}{l^2-1}\left[\frac{2aN^2}{l^2-1}-1\right]d\beta ,$$

$$\delta z = -\frac{\cosh\omega(1+l^2)+2l\sinh\omega}{l^2-1}\,\frac{2aM}{l^2-1}\,d\alpha - \frac{\sinh\omega(1+l^2)+2l\cosh\omega}{l^2-1}\,\frac{2aN}{l^2-1}\,d\beta .$$

Element liniowy powierzchni Σ_1 będzie:

$$ds_1^{\,2} = A^2\,d\alpha^2 + B^2\,d\beta^2 ,$$

gdzie:

$$A = \frac{\cosh\omega\,(1+l^2)+2l\sinh\omega}{l^2-1}, \quad B = \frac{\sinh\omega\,(1+l^2)+2l\cosh\omega}{l^2-1} .$$

Zważywszy, że funkcye A, B czynią zadość związkowi $A^2 - B^2 = 1$, możemy znaleść taką funkcyę rzeczywistą Ω, aby było:

$$\cosh\Omega = \pm A , \quad \sinh\Omega = \pm B .$$

Element liniowy powierzchni Σ_1 będzie wtedy postaci:

$$ds_1^{\,2} = \cosh^2\Omega\,d\alpha^2 + \sinh^2\Omega\,d\beta^2 ,$$

gdzie Ω wyznacza się z wyrażeń:

$$(9) \qquad \begin{aligned} \cosh\Omega &= \pm\frac{\cosh\omega\,(l^2+1)+2l\sinh\omega}{l^2-1} , \\ \sinh\Omega &= \pm\frac{\sinh\omega\,(l^2+1)+2l\cosh\omega}{l^2-1} . \end{aligned}$$

Znaki górne należy brać w przypadku $l^2 > 1$, dolne, gdy $l^2 < 1$.

Równaniem płaszczyzny stycznej do powierzchni Σ_1 będzie jak łatwo widzieć:

$$(10) \qquad 2aMx + 2aNy + (l^2-1-2a)z + 2al = 0 ,$$

a więc równaniem normalnej będzie:

$$\frac{x + \frac{2alM}{l^2-1}}{2aM} = \frac{y + \frac{2alN}{l^2-1}}{2aN} = \frac{z - \frac{2al}{l^2-1}}{l^2-1-2a} .$$

Znajdźmy teraz równania różniczkowe krzywych sprzężonych na powierzchni Σ_1.

Przez punkt nieruchomy P przestrzeni, będący początkiem ruchomego układu spółrzędnych (T_1), którego osi są stale równoległe do osi (T), poprowadźmy płaszczyznę równoległą do płaszczyzny stycznej (10) do powierzchni Σ_1; równaniem jej w układzie (T_1) będzie:

$$(11) \qquad 2aMx + 2aNy + (l^2-1-2a)z = 0 .$$

Nadajmy parametrom α, β przyrosty $d\alpha, d\beta$; osi (T_1) przyjmą położenie (T_1'), punkt O_1 po pewnej krzywej (c) przeniesie się do punktu O_1'. W odniesieniu do układu (T_1') równaniem płaszczyzny równoległej do płaszczyzny stycznej do powierzchni Σ_1 w punkcie O_1' i przechodzącej przez nasz punkt nieruchomy P będzie:

$$2aM'x' + 2aN'y' + (l'^2-1-2a)z' = 0 ,$$

gdzie:

$$M' = M + dM , \quad N' = N + dN , \quad l' = l + dl .$$

Odniósłszy to równanie do dawnych osi (T_1), znajdziemy łatwo, że prosta równoległa do kierunku sprzężonego z krzywą (c) na powierzchni Σ_1 będzie dana przez równanie (11) i przez równanie:

$$Hx + Gy + Lz = 0\,,$$

gdzie:

$$H = 2a\,dM - 2a\left(-\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\,d\alpha + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\,d\beta\right)N + (l^2 - 1 - 2a)\sinh\omega\,d\alpha\,,$$

$$G = 2a\,dN + 2a\left(-\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\,d\alpha + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\,d\beta\right)M + (l^2 - 1 - 2a)\cosh\omega\,d\beta\,,$$

$$L = 2l\,dl - 2a\,M\sinh\omega\,d\alpha - 2a\,N\cosh\omega\,d\beta\,.$$

Jeżeli przez $\delta\alpha$, $\delta\beta$ oznaczymy przyrosty parametrów, odpowiadające przesunięciu punktu O_1 po powierzchni Σ_1 wzdłuż krzywej sprzężonej z krzywą (c), to, po wykonaniu prostych rachunków i uwzględnieniu równań (I)—(V), znajdziemy równanie różniczkowe krzywych sprzężonych na powierzchni Σ_1:

$$d\alpha\,\delta\alpha + d\beta\,\delta\beta = 0\,.$$

Równanie to jest zarazem równaniem krzywych sprzężonych na powierzchni Σ.

Widzimy tedy, że każdemu układowi krzywych sprzężonych na powierzchni Σ odpowiada układ krzywych sprzężonych na powierzchni Σ_1, i naodwrót. W szczególności łatwo wykazać, że linie krzywiznowe i asymptotyczne powierzchni Σ odpowiadają liniom krzywiznowym i asymptotycznym powierzchni Σ_1. Dowód tego jest taki sam, jak w § 5 Rozdziału poprzedzającego.

Pozostaje jeszcze wykazać, że powierzchnia Σ_1 ma krzywiznę gaussowską stałą równą $+1$.

Zwróćmy się znowu do spółrzędnych (T_1), mających początek w nieruchomym punkcie P_1. Z równania normalnej do powierzchni Σ_1 jest rzeczą jasną, że spółrzędne obrazu sferycznego odpowiedniego punktu powierzchni Σ_1, w odniesieniu do układu (T_1) będą:

$$x_1 = \frac{2a\,M}{l^2-1}\,,\quad y_1 = \frac{2a\,N}{l^2-1}\,,\quad z_1 = 1 - \frac{2a}{l^2-1}\,.$$

Rzuty przesunięć obrazu sferycznego na osi (T_1) lub co wychodzi na to samo, na osi (T) będą oczywiście:

$$\delta x_1 = \mp\sinh\Omega\left(\frac{2a\,M^2}{l^2-1} - 1\right)d\alpha \mp \cosh\Omega\,\frac{2a\,MN}{l^2-1}\,d\beta\,,$$

$$\delta y_1 = \mp\sinh\Omega\,\frac{2a\,MN}{l^2-1}\,d\alpha \mp \cosh\Omega\left[\frac{2a\,N^2}{l^2-1} - 1\right]d\beta\,,$$

$$\delta z_1 = \pm\sinh\Omega\,\frac{2a\,M}{l^2-1}\,d\alpha \pm \cosh\Omega\,\frac{2a\,N}{l^2-1}\,d\beta\,,$$

gdzie $\sinh\Omega$ i $\cosh\Omega$ mają wartość (9).

Stąd i z uwagi, że promienie krzywizny naszej powierzchni Σ_1 są wielkościami stosunków $\frac{\delta x}{\delta x_1}$, $\frac{\delta y}{\delta y_1}$, $\frac{\delta z}{\delta z_1}$ przy przesunięciach wzdłuż krzywych $\beta = \text{const}$ i $\alpha = \text{const}$, znajdziemy:

$$R_1 = -\operatorname{cotgh}\Omega\,,\quad R_2 = -\operatorname{tgh}\Omega\,,$$

i dla tego krzywizna gaussowska powierzchni Σ_1 równa się $+1$. Stąd wynika także, że funkcya Ω czyni zadość równaniu różniczkowemu:

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\beta^2} + \sinh\Omega\cosh\Omega = 0\,.$$

§ 5 Odpowiedniość pomiędzy powierzchniami Σ i Σ_1 jest, jak dopiero co widzieliśmy, analogiczną do odpowiedniości pomiędzy dwoma badanemi w Rozdziale II-gim przekształceniami jednej i tej samej powierzchni o krzywiznie stałej dodatniej. Na tej podstawie starajmy się znaleść, jeżeli można, taką powierzchnię Σ_2 o krzywiznie gaussowskiej $+1$, której przekształceniami byłyby dwie nasze powierzchnie Σ i Σ_1.

Zachowując wszystkie znakowania § 16 Rozdziału II-go,—dla krótkości pisać tylko będziemy θ zamiast θ_1—będziemy mieli następujące wyrażenia na spółrzędne x, y, z odpowiedniego punktu powierzchni Σ_1:

$$x = -\frac{2a\,lM}{l^2-1} = i\,[m_1\cosh\theta + m_2\cosh\theta\cosh(\Omega-\omega) + \mu_1\,m_2\sinh\theta\sinh(\Omega-\omega)]\,,$$

$$y = -\frac{2a\,lN}{l^2-1} = -[m_1\sinh\theta + m_2\sinh\theta\cosh(\Omega-\omega) + \mu_1\,m_2\cosh\theta\sinh(\Omega-\omega)]\,, \tag{12}$$

$$z = \frac{2a\,l}{l^2-1} = -m_1\,m_2\sinh(\Omega-\omega)\,.$$

Tu m_1, μ_1 są stałe, charakteryzujące przekształcenie B_{σ_1}, przy pomocy którego przechodzimy od powierzchni Σ do powierzchni Σ_2 z elementem liniowym:

$$ds^2 = \cosh^2\theta\, d\alpha^2 + \sinh^2\theta\, d\beta^2 .$$

Stałe zaś m_2, μ_2 charakteryzują przekształcenie B_{σ_2}, prowadzące od powierzchni Σ_2 do powierzchni Σ_1.

Z wyrażeń (9) poprzedzającego paragrafu znajdziemy łatwo, że

$$\sinh(\Omega-\omega) = \pm\frac{2l}{l^2-1}, \quad \cosh(\Omega-\omega) = \pm\frac{l^2+1}{l^2-1}, \tag{13}$$

gdzie znaki górne stosują się oczywiście do przypadku $l^2 > 1$, t. j. gdy nasza stała $a > 0$, dolne do przypadku $l^2 < 1$, t. j. gdy a czyni zadość nierównościom $0 > a > -1$. Podstawiając te wartości w wyrażeniu (12), znajdziemy:

$$a = \mp m_1 m_2 \tag{14}$$

oraz:

$$-2alM = i\{[m_1(l^2-1) \pm m_2(l^2+1)]\cosh\theta \pm 2\mu_1 m_2 l \sinh\theta\},$$

$$2alN = \quad [m_1(l^2-1) \pm m_2(l^2+1)]\sinh\theta \pm 2\mu_1 m_2 l \cosh\theta .$$

Określone w ten sposób funkcye M i N winny czynić zadość równaniom (I)—(V); podstawiając te wartości M i N w równanie (I), otrzymamy:

$$l^4[4a+(m_1\pm m_2)^2] + 2l^2[(m_2^2-m_1^2-2a(1+a)-2\mu_1^2 m_2^2] + (m_1\mp m_2)^2=0 .$$

Związek ten powinien być prostą tożsamością i dla tego stałe m_1, m_2 powinny czynić zadość nie tylko związkowi (14) lecz także związkom:

$$4a+(m_1\pm m_2)^2 = 0, \quad m_1 \mp m_2 = 0, \quad a(1+a)+\mu_1^2 m_2^2 = 0 . \tag{15}$$

Zestawiając otrzymane warunki z warunkiem (14), znajdziemy:

$$m_1 = \pm m_2 = \sqrt{-a}, \quad \mu_1^2 = \mu_2^2 \tag{16}$$

Uwzględniając te związki, otrzymamy następujące wyrażenia na M i N:

$$m_1 M = i(l\cosh\theta + \mu_1 \sinh\theta); \quad m_1 N = -(l\sinh\theta + \mu_1\cosh\theta), \tag{17}$$

a podstawiając je w równania (II)—(V), przekonamy się, że czynią one zadość tym równaniom tożsamościowo, skoro uwzględnimy, że funkcya θ czyni zadość układowi równań różniczkowych (patrz § 15 Rozdziału II-go):

$$(18)\quad \begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial\alpha} + i\frac{\partial\omega}{\partial\beta} &= \frac{\mu_1 i \sinh\omega\cosh\theta}{m_1} - \frac{i\cosh\omega\sinh\theta}{m_1}, \\ \frac{\partial\theta}{\partial\beta} + i\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} &= -\frac{\mu_1\cosh\omega\sinh\theta}{m_1} + \frac{\sinh\omega\cosh\theta}{m_1}. \end{aligned}$$

Pozostaje dowieść, że otrzymana funkcya θ czyni zadość równaniom analogicznym do równań (18), w których zamiast θ, ω, m_1, μ_1 napisano odpowiednio Ω, θ, $m_2 = \pm m_1$, μ_2. Kombinując otrzymane w ten sposób równanie z równaniem (18), sprowadzimy równanie, którym winna czynić zadość funkcya Ω, do postaci:

$$\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial\alpha} = \left[\frac{\mu_2 i\cosh\Omega}{\pm m_1} + \frac{\mu_1 i\cosh\omega}{m_1}\right]\sinh\theta - \left[\frac{i\sinh\Omega}{\pm m_1} + \frac{i\sinh\omega}{m_1}\right]\cosh\theta,$$

$$\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial\beta} = -\left[\frac{\mu_2\sinh\Omega}{\pm m_1} + \frac{\mu_1\sinh\omega}{m_1}\right]\cosh\theta + \left[\frac{\cosh\Omega}{\pm m_1} + \frac{\cosh\omega}{m_1}\right]\sinh\theta .$$

Podstawiając tu zamiast $\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial\beta}$, M, $N\cosh\Omega$, $\sinh\Omega$ ich wartości, otrzymane w dwóch ostatnich paragrafach, sprowadzimy wyrażenia nasze do postaci:

$$(\mu_1+\mu_2)\cosh\Omega\sinh\theta = 0; \quad (\mu_1+\mu_2)\sinh\Omega\cosh\theta = 0 .$$

Łatwo widzieć, że jedynym warunkiem na to, aby oba te wyrażenia były tożsamościowo zerami, jest:

$$\mu_1 + \mu_2 = 0,$$

gdyż w innych przypadkach otrzymalibyśmy na funkcyę l wyrażenia od stałej a niezależne, co być nie może, jeżeli założymy, że a jest dowolne.

Zbierając otrzymane rezultaty, widzimy, że powierzchnia Σ_1 może być otrzymana drogą kolejnego stosowania do powierzchni Σ dwóch przekształceń B_{σ_1}, B_{σ_2}, przyczem stałe m_1, m_2, μ_1, μ_2 tych przekształceń są połączone związkami:

$$\text{gdy } a>0, \quad m_1 = m_2 = \sqrt{-a} = ib, \quad \mu_1 = -\mu_2 = \sqrt{1+b^2};$$

$$\text{gdy } a<0, \quad m_1 = -m_2 = \sqrt{-a} = b < 1, \quad \mu_1 = -\mu_2 = \sqrt{1-b^2}.$$

Zestawiając ten rezultat z rezultatami, otrzymanemi w końcu Rozdziału II-go, widzimy, że znalezione przez nas teraz przekształcenia B_{σ_1}, B_{σ_2} należą właśnie do tych przekształceń zespolonych, których kolejne stosowanie powinno doprowadzać do powierzchni rzeczywistej.

§ 6. Postaramy się teraz sprowadzić rozwiązanie wszystkich postawionych w tym Rozdziale pytań do całkowania układu równań l i n i o w y c h o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego i drugiego. W tym celu przekształcimy równania (II)—(V), korzystając z własności kongruencyi kół ortogonalnych do powierzchni Σ i Σ_1, mających środki w odpowiednich płaszczyznach stycznych do powierzchni S, która to własność polega na tem, że kongruencya ta jest ortogonalna do nieskończonej mnogości powierzchni. Środek C jednego któregokolwiek z tych kół jest punktem przecięcia trzech odpowiednich płaszczyzn: płaszczyzn stycznych do powierzchni Σ i S i płaszczyzny, przechodzącej przez normalne do tych dwóch powierzchni, t. j. płaszczyzn, których równaniami są:

$$z = 0\,, \quad Mx + Ny - z + l = 0\,, \quad Nx - My = 0\,.$$

Spółrzędne środka będą tedy następujące:

$$x_0 = -\frac{Ml}{M^2+N^2} = -\frac{a\,Ml}{l^2-1-a}\,,$$

$$y_0 = -\frac{Nl}{M^2+N^2} = \frac{-a\,Nl}{l^2-1-a}\,, \quad z_0 = 0\,,$$

a promień r_0 odpowiedniego koła:

$$r_0 = \frac{a^2\, l^2\,(M^2+N^2)}{(l^2-1-a)^2} = \frac{a\, l^2}{l^2-1-a}\,. \tag{19}$$

Oznaczmy przez O początek spółrzędnych przez γ — kąt, który odcinek OC tworzy z osią x, wtedy:

$$\cos\gamma = -\frac{\sqrt{a}\,M}{\sqrt{l^2-1-a}}\,, \quad \sin\gamma = \frac{\sqrt{a}\,N}{\sqrt{l^2-1-a}}\,. \tag{20}$$

Jeżeli przez t oznaczymy kąt, utworzony przez którykolwiek z promieni koła z odcinkiem CO, wtedy spółrzędne punktu odpowiedniego rozważanego okręgu będą:

$$x = r_0 \cos\gamma\,(1-\cos t)\,, \quad y = r_0 \sin\gamma\,(1-\cos t)\,, \quad z = r_0 \sin t\,. \tag{21}$$

Jeżeli punkt rozważany opisuje powierzchnię ortogonalną do kół, to jego przesunięcia przy wszelkich możliwych wartościach $d\alpha$, $d\beta$ czynią zadość związkowi:

$$\sin t \cos\gamma\,\delta x + \sin t \sin\gamma\,\delta y + \cos t\,\delta z = 0\,, \tag{22}$$

w którym δx, δy, δz są rzutem przesunięć naszego punktu na odpowiednie osi układu (T).

Jeżeli zamiast tych rzutów podstawimy ich wartości, równanie (22) sprowadzi się do postaci:

$$A\,d\alpha + B\,d\beta + T\,dt = 0\,, \tag{23}$$

gdzie:

$$A = r_0 \sinh\omega \cos\gamma + \left(\frac{\partial r_0}{\partial\alpha} + \cosh\omega\cos\gamma\right)\sin t - r_0 \sinh\omega\cos\gamma\cos t\,,$$

$$B = r_0 \cosh\omega \sin\gamma + \left(\frac{\partial r_0}{\partial\beta} + \sinh\omega\sin\gamma\right)\sin t - r_0 \cosh\omega\sin\gamma\cos t\,,$$

$$T = r_0\,.$$

Aby warunek (23) spełniał się przy wszelkich wartościach na $d\alpha$ i $d\beta$, jest koniecznem i dostatecznem, aby zachodził tożsamościowo związek:

$$A\left(\frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial\beta}\right) + B\left(\frac{\partial T}{\partial\alpha} - \frac{\partial A}{\partial t}\right) + T\left(\frac{\partial A}{\partial\beta} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}\right) = 0\,,$$

mający postać:

$$P\sin t + Q\cos t + R = 0\,,$$

gdzie:

$$P = r_0^2\left[\frac{\partial}{\partial\beta}\,\frac{\cosh\omega\cos\gamma}{r_0} - \frac{\partial}{\partial\alpha}\,\frac{\sinh\omega\sin\gamma}{r_0}\right],$$

$$Q = -R = r_0\left[r_0^2\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\,\frac{\cosh\omega\sin\gamma}{r_0} - r_0^2\,\frac{\partial}{\partial\beta}\,\frac{\sinh\omega\cos\gamma}{r_0} - \sin\gamma\cos\gamma\right].$$

Ponieważ koła nasze są ortogonalne do nieskończonej mnogości powierzchni, przeto:

$$P = 0\,, \quad Q = -R = 0\,.$$

Podstawiając w tych równaniach zamiast γ i r_0 ich wartości z równań (19) i (20), znajdziemy:

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\,\frac{\cosh\omega\, M}{l} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\,\frac{\sinh\omega\, N}{l}\,, \quad \frac{\partial}{\partial\alpha}\,\frac{\cosh\omega\, N}{l} - \frac{\partial}{\partial\beta}\,\frac{\sinh\omega\, M}{l} + \frac{MN}{l^2} = 0\,. \tag{24}$$

O prawdziwości tych równań możemy przekonać się następującym sposobem. Kombinując równania (II) i (III), otrzymamy:

$$\cosh\omega\frac{\partial M}{\partial\beta}+M\sinh\omega\frac{\partial\omega}{\partial\beta}-MN\cosh^2\omega\,,$$

$$=\sinh\omega\frac{\partial N}{\partial\alpha}+N\cosh\omega\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}-MN\sinh^2\omega\,;$$

jeżeli podzielimy obie strony przez l i dodamy do nich po $-\dfrac{MN\sinh\omega\cosh\omega}{l^2}$, łatwo dojdziemy do pierwszego z równań (24).

Dla wywodu drugiego równania postępujemy tak: mnożymy równanie (III) przez $\dfrac{\sinh\omega}{l}$, od otrzymanego równania odejmujemy równanie (II) pomnożone przez $\dfrac{\cosh\omega}{l}$; znajdziemy wtedy:

$$\frac{\sinh\omega}{l}\frac{\partial M}{\partial\beta}+M\frac{\cosh\omega}{l}\frac{\partial\omega}{\partial\beta}-\frac{\cosh\omega}{l}\frac{\partial N}{\partial\alpha}-N\frac{\sinh\omega}{l}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}=0\,,$$

a dodawszy tożsamość:

$$-M\frac{\sinh\omega}{l^2}\frac{\partial l}{\partial\beta}+N\frac{\cosh\omega}{l^2}\frac{\partial l}{\partial\alpha}=\frac{MN}{l^2}\,,$$

dojdziemy do drugiego z równań (24).

Pierwsze z równań (24) pokazuje, że funkcye $M\dfrac{\cosh\omega}{l}$ i $N\dfrac{\sinh\omega}{l}$ są pochodnemi cząstkowemi jednej i tej samej funkcyi, t. j.:

$$M\frac{\cosh\omega}{l}=\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\,,\quad N\frac{\sinh\omega}{l}=\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\,;$$

jeżeli wprowadzimy jeszcze funkcyę ψ, określoną przez równanie:

(25) $$\psi=\frac{\varphi}{l}\,,$$

znajdziemy następujące wyrażenia na funkcye M i N:

(26) $$M=\frac{1}{\psi\cosh\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\,,\quad N=\frac{1}{\psi\sinh\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\,.$$

§ 7. Przy pomocy równań (I)—(V) łatwo znaleść równania różniczkowe o pochodnych cząstkowych rzędu 2-go i 1-go, którym czynią zadość wprowadzone przez nas funkcye φ i ψ. W samej rzeczy, jeżeli w równaniu (I) zamiast funkcyj M i N podstawimy ich wartości (26), sprowadzimy to równanie do postaci:

(VI) $$L=\frac{1}{\cosh^2\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^2+\frac{1}{\sinh^2\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2-\frac{\varphi^2}{a}+\frac{1+a}{a}\varphi^2=0\,,$$

gdzie przez L oznaczamy stronę lewą naszego równania.

Różniczkując wyrażenie (25) i uwzględniając wyrażenia (26), znajdziemy łatwo:

(VII) $$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}=-\operatorname{tgh}\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\,,\quad \frac{\partial\psi}{\partial\beta}=-\operatorname{cotgh}\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\,.$$

Jeżeli teraz zróżniczkujemy wyrażenia (26) względem α i β, podstawimy w równaniach (II)—(V) otrzymane wartości funkcyj l, M, N i ich pochodnych i prócz tego uwzględnimy równania (VI) i (VII), znajdziemy szukane równania:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}=\operatorname{tgh}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}-\operatorname{cotgh}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}+\frac{\cosh^2\omega}{a}\varphi+\frac{a+1}{a}\psi\sinh\omega\cosh\omega\,,$$

(VIII) $$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\beta}=\operatorname{tgh}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\operatorname{cotgh}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\,,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2}=-\operatorname{tgh}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\operatorname{cotgh}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}+\frac{\sinh^2\omega}{a}\varphi+\frac{a+1}{a}\psi\sinh\omega\cosh\omega$$

Utworzywszy teraz rozmaite wyrażenia na $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\partial\beta}$, $\dfrac{\partial^3\varphi}{\partial\alpha\partial\beta^2}$, $\dfrac{\partial^3\varphi}{\partial\beta\partial\alpha^2}$, spostrzeżemy, że równania (VII) i (VIII) są zgodne na mocy jednego tylko warunku:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial\beta^2}+\sinh\omega\cosh\omega=0\,.$$

Różniczkując względem α i β funkcyę L, stanowiącą stronę lewą równania (VI), znajdziemy, że na mocy równań (VII) i (VIII) jest ona tożsamościowo równa zeru, a więc:

$$L=g=\text{const}\,.$$

Tym sposobem równanie

$$(\mathrm{IX})\quad L=\frac{1}{\cosh^2\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^2+\frac{1}{\sinh^2\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2-\frac{\varphi^2}{a}+\frac{1+a}{a}\,\psi^2=g=\mathrm{const}\,,$$

jest wynikiem równań (VII) i (VIII).

Stała g wyznacza się przy pomocy początkowych wartości funkcyj φ, $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}$, ψ dla $\alpha=\alpha_0$, $\beta=\beta_0$; te wartości początkowe określają nam, ogólnie mówiąc, całki równań (VII) i (VIII), holomorficzne w pewnym obszarze.

Podobnie jak w § 10 Rozdziału V-go, przekonamy się, że w przypadku, rozpatrzonym przez nas w §§ poprzedzających, mianowicie, gdy $g=0$, wyrażenie na funkcyę l, t. j. $\frac{\varphi}{\psi}$, zależy od dwóch stałych dowolnych.

W tym ostatnim przypadku ze związku (26) znajdujemy, że:

$$M\frac{1}{\sinh\omega}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}-N\frac{1}{\cosh\omega}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=0\,,$$

skąd wnosimy, że krzywe $\varphi=\mathrm{const}$,— gdzie φ jest całką równań (VII) i (VIII), czyniącą zadość warunkowi $L=0$,— poprowadzone na powierzchni Σ, są ortogonalne do płaszczyzn

$$Nx-My=0\,,$$

przechodzących przez odpowiednie normalne do powierzchni Σ i S.

Wiemy już z twierdzenia Bianchi'ego, że obwiednia tych ostatnich płaszczyzn jest nakładalna na powierzchnię obrotową o elemencie liniowym:

$$ds^2=e^{2\tau}\,d\theta^2+\left[a-\frac{a}{1+a}\,e^{2\tau}\right]dv^2\,,$$

gdzie a jest stała, τ zaś ma wyrażenie:

$$\tau=av-(a+1)\,\theta\,.$$

Zamiast dowodu tego twierdzenia, zajmiemy się wyznaczeniem elementu liniowego obwiedniej płaszczyzn, ortogonalnych do krzywych $\varphi=\mathrm{const}$, poprowadzonych na powierzchni Σ i przechodzących przez normalne do tej powierzchni, przyczem za funkcyę φ weźmiemy całkę równań (VII) i (VIII), czyniącą zadość związkowi (VI), gdzie g oznacza jakąkolwiek stałą.

§ 8. Równaniem rozważanej płaszczyzny będzie oczywiście;

$$(27)\qquad \cosh\omega\,\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\,x-\sinh\omega\,\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=0\,,$$

a zatem spółrzędne jakiegokolwiek punktu tej płaszczyzny będą:

$$x=\sinh\omega\,\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\,t\,,\quad y=\cosh\omega\,\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\,t\,,\quad z\,,$$

gdzie t oznacza parametr dowolny.

Znajdziemy wartości parametru t i spółrzędnej z dla odpowiedniego punktu szukanej obwiedniej z warunku, że przesunięcia tego punktu przy wszelkich możliwych zmianach parametrów α, β odbywać się będą w płaszczyznie (27).

Rzuty przesunięć naszego punktu na osi (T) będą:

$$\delta x=\cosh\omega\,d\alpha+d\left(t\sinh\omega\,\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)+z\sinh\omega\,d\alpha-\left(-\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\,d\alpha+\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\,d\beta\right)t\cosh\omega\,\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\,,$$

$$\delta y=\sinh\omega\,d\beta+d\left(t\cosh\omega\,\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)+\left(-\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\,d\alpha+\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\,d\beta\right)t\sinh\omega\,\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+z\cosh\omega\,d\beta\,,$$

$$\delta z=dz-t\cosh^2\omega\,\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\,d\beta-t\sinh^2\omega\,\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\,d\alpha\,,$$

i dla tego równania, służące do wyznaczenia funkcyj t i z, przybiorą postać:

$$\sinh\omega+\frac{t}{a}\sinh\omega\cosh\omega\,[\varphi\sinh\omega+(a+1)\,\psi\cosh\omega]+z\cosh\omega=0\,,$$

$$\cosh\omega+\frac{t}{a}\sinh\omega\cosh\omega\,[\varphi\cosh\omega+(a+1)\,\psi\sinh\omega]+z\sinh\omega=0\,.$$

Rozwiązawszy te równania, otrzymamy:

$$t=-\frac{a}{\varphi\sinh\omega\cosh\omega}\,,\quad z=\frac{(a+1)\,\psi}{\varphi}\,,$$

a więc spółrzędne szukanego punktu będą:

$$x=-\frac{a}{\varphi\cosh\omega}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\,,\quad y=-\frac{a}{\varphi\sinh\omega}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\,,\quad z=\frac{(a+1)\,\psi}{\varphi}\,,$$

rzuty zaś jego przesunięć, na mocy równań (VII) i (VIII), przedstawią się w postaci:

$$\delta x=\frac{a}{\varphi^2\cosh\omega}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\,d\varphi\,,\quad \delta y=\frac{a}{\varphi^2\sinh\omega}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\,d\varphi\,,\quad \delta z=-\frac{\psi}{\varphi}\left[\frac{(a+1)\,d\varphi}{\varphi}-\frac{d\psi}{\psi}\right].$$

Jeżeli uwzględnimy związek (IX), to element liniowy rozważanej powierzchni przedstawi się tak:

$$ds^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 = a^2 \left[\frac{\varphi^2}{a} - \frac{1+a}{a} \psi^2 + g \right] \frac{d\varphi^2}{\varphi^4}$$

$$+ \frac{\psi^2}{\varphi^2} \left[\frac{a+1}{\varphi} d\varphi - \frac{d\psi}{\psi} \right]^2.$$

Połóżmy tu:

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = dv, \quad \frac{(1+a)\, d\varphi}{\varphi} - \frac{d\psi}{\psi} = (1+a)\, d\theta,$$

lub, co na jedno wychodzi:

$$\varphi = e^v, \quad \psi = \frac{e^{(1+a)v - (1+a)\theta}}{1+a},$$

to nasz element liniowy sprowadzimy do postaci:

$$ds^2 = e^{2\tau} d\theta^2 + \left[g\, a^2 e^{-2v} + a - \frac{a}{1+a} e^{2\tau} \right] dv^2,$$

gdzie:

$$\tau = av - (a+1)\, \theta.$$

Podobnie jak w § 9 Rozdziału poprzedzającego, przekonamy się, że znaleziona powierzchnia S_0 jest w takim związku z powierzchnią Σ, w jakim były powierzchnie S_0 i Σ w drugiem twierdzeniu Bianchi'ego.

Dochodzimy tym sposobem do następującego twierdzenia:

Każdej powierzchni Σ o krzywiznie stałej dodatniej odpowiada ∞^5 powierzchni o elemencie liniowym (28). Wyznaczenie tych powierzchni zależy od całkowania układu równań różniczkowych rzędu 1-go i 2-go (VII) i (VIII). Powierzchnie S_0 są obwiedniemi płaszczyzn, przechodzących przez normalne do powierzchni Σ i ortogonalnych do krzywych $\varphi = \text{const}$, poprowadzonych na powierzchni Σ.

§ **9**. Zobaczmy, w jaki sposób znaleźć można powierzchnie o elemencie liniowym postaci:

$$ds^2 = e^{-2v} \left[du^2 + 2\,(v-u)\, e^{-2v} + be^{-2v} - m \right] dv^2, \tag{29}$$

które, jak to widzieliśmy w drugiem twierdzeniu Bianchi'ego, są związane w sposób określony z powierzchniami o stałej krzywiznie dodatniej.

W tym celu zastosujmy znów metodę Bianchi'ego, użytą przy przekształcaniu równań (VII), (VIII) i (IX), a mianowicie wstawmy do tych równań $\psi + c$ zamiast ψ, gdzie c jest stała. W otrzymanych w ten sposób równaniach połóżmy:

$$\frac{(1+a)\, c}{a} = n,$$

a następnie przyjmijmy, że

$$\frac{1}{a} + 1 = 0,$$

gdzie n uważać będziemy za wielkość niezależną od a.

Tym sposobem dojdziemy do równań:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = \operatorname{tgh} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \operatorname{cotgh} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - \varphi \cosh^2 \omega + n \sinh \omega \cosh \omega,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha\, \partial \beta} = \operatorname{tgh} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \operatorname{cotgh} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}, \tag{X}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} = - \operatorname{tgh} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \operatorname{cotgh} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - \varphi \sinh^2 \omega + n \sinh \omega \cosh \omega.$$

Równania (VII) pozostaną bez zmiany; równanie zaś (IX) przybierze postać:

$$L = \frac{1}{\cosh^2 \omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{1}{\sinh^2 \omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right)^2 + \varphi^2 + 2 n \psi = g = \text{const}. \tag{XI}$$

Za pomocą zwyczajnego różniczkowania przekonywamy się, że równania (VII), (X) i (XI) są zgodne na mocy jedynego warunku:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} + \sinh \omega \cosh \omega = 0.$$

Podobnie jak w § poprzedzającym, znajdźmy obwiednią płaszczyzn ortogonalnych do odpowiednich krzywych $\varphi = \text{const}$, poprowadzonych na powierzchni Σ i przechodzących przez normalne do powierzchni Σ, t. j. płaszczyzn

$$\cosh \omega \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} x - \sinh \omega \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} y = 0. \tag{30}$$

Spółrzędne punktów tej płaszczyzny będą:

$$x = \sinh\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, \quad y = \cosh\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} t, \quad z,$$

gdzie t oznacza parametr dowolny.

Przy pomocy rozumowań takich, jak poprzednio, znajdziemy następujące równania na wyznaczenie wartości t i z, odpowiadających punktowi szukanej obwiedniej:

$$\cosh\omega + t\sinh\omega\cosh\omega\,(n\sinh\omega - \varphi\cosh\omega) + z\sinh\omega = 0,$$

$$\sinh\omega + t\sinh\omega\cosh\omega\,(n\cosh\omega - \varphi\sinh\omega) + z\cosh\omega = 0,$$

skąd łatwo znajdziemy:

$$t = \frac{1}{\varphi\sinh\omega\cosh\omega}, \quad z = -\frac{n}{\varphi},$$

a więc spółrzędne punktu szukanej obwiedniej będą:

$$x = \frac{1}{\varphi\cosh\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, \quad y = \frac{1}{\varphi\sinh\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}, \quad z = -\frac{n}{\varphi}.$$

Przesunięcia jej rzutów na osi (T) są oczywiście:

$$\delta x = -\frac{1}{\varphi^2\cosh\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}d\varphi, \quad \delta y = -\frac{1}{\varphi^2\sinh\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}d\varphi, \quad \delta z = \frac{1}{\varphi}\left[d\psi + \frac{n d\varphi}{\varphi}\right],$$

a więc na mocy równania (XI) element liniowy uważanej powierzchni będzie:

$$ds^2 = \frac{1}{\varphi^2}\left[d\psi + \frac{n\,d\varphi}{\varphi}\right]^2 + \left[g - \varphi^2 - 2n\varphi\right]\frac{d\varphi^2}{\varphi^4}.$$

Połóżmy:

$$\frac{n\,d\varphi}{\varphi} + d\psi = n\,d\theta, \quad \frac{d\varphi}{\varphi} = dv,$$

t. j.:

$$\psi = -n(v-\theta), \quad \varphi = ne^{v},$$

a sprowadzimy nasz element liniowy do postaci:

$$ds^2 = e^{-2v}d\theta^2 + \left[\frac{g}{n^2}e^{-2v} - 1 + 2(v-\theta)e^{-2v}\right]dv^2. \tag{31}$$

Wnosimy stąd, że nasza powierzchnia ma ten sam element liniowy, co powierzchnia S_0 w twierdzeniu Bianchi'ego.

Tym sposobem, podobnie jak na końcu Rozdziału poprzedzającego, dochodzimy do twierdzenia odwrotnego do drugiego twierdzenia Bianchi'ego, mianowicie:

Każdej powierzchni Σ o krzywiznie stałej dodatniej odpowiada ∞^5 powierzchni S_0 o elemencie liniowym (31). Wyznaczenie tych powierzchni zależy od całkowania układu równań różniczkowych liniowych rzędu 1-go i 2-go (IX) i (X). Powierzchnie S_0 przedstawiają obwiednie płaszczyzn, przechodzących przez normalne do powierzchni Σ i ortogonalnych do krzywych $\varphi = \text{const}$, poprowadzonych na powierzchni Σ.

Nie zatrzymujemy się nad przypadkiem, w którym jedna z pochodnych $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}$ jest zerem, gdyż wyniki zbadania tego przypadku są identyczne z wynikami, otrzymanemi na końcu Rozdziału poprzedzającego.