groupes correspond dans l'autre le produit des deux transformations correspondantes. Cette propriété qui établit une analogie parfaite de l'isomorphisme, comme il est défini par Lie dans sa théorie des transformations, avec celui de la théorie ordinaire des substitutions, se démontre dans le Traité de Lie (Th. der Transf. Leipzig. 1888. I, p. 293, 418—420) en recourant à la théorie du groupe paramétrique.

Or notre formule démontre cette propriété immédiatement. En effet, ayant supposé que X_1, X_2 soient deux combinaisons linéaires à coefficients constants des expressions Z, et que $X_1^{(1)}, X_2^{(1)}$ soient des combinaisons linéaires analogues des expressions Y, la transformation qui est le produit des deux transformations

$$(59)\qquad \begin{cases} x''_i = x'_i + \dfrac{t}{1!} X'_1 x'_i + \ldots \\ x'_i = x_i + \dfrac{t'}{1!} X_2 x_i + \ldots \end{cases}$$

sera:

$$(60)\qquad x''_i = x_i + \frac{t}{1} X_3 x_2 + \ldots,$$

X_3 étant donnée par la formule (31) qui à l'aide des premières relations (58) se réduit à une combinaison linéaire des Z à coefficients numériques dépendant de t, t', γ' et des c. Si maintenant on passe du premier groupe au second, laissant les mêmes t et t', on doit seulement entrechanger les Z avec les Y et donc les X avec les $X^{(1)}$; la transformation $X_3^{(1)}$ relative au nouveau produit sera la même combinaison linéaire des Y que l'est la X_3 des Z, puisque les coefficients c restent invariables pour le passage du premier groupe au second. Le théorème est donc démontré.

Il convient de remarquer que cette démonstration est valable indifféremment pour l'isomorphisme holoédrique ou mériédrique, tandis que la démonstration donnée dans l'ouvrage cité de Lie ne possède pas cet avantage.

Milan, Août 1902.

J. SOCHOCKI,

ZASADY TEORYI FUNKCYJ ELIPTYCZNYCH.

§ 1.

OKREŚLENIE I WŁASNOŚCI PEWNEJ KRZYWEJ STOPNIA TRZECIEGO.

W szeregu krzywych stopnia trzeciego istnieje jedna, której rola przy pewnym sposobie zapatrywania się jest podobną do tej, jaką odgrywa koło względem stożkowych. Z krzywą tą spotkaliśmy się już w pracy o równaniach stopnia trzeciego i czwartego [1]), gdzie przy jej pomocy rzucono nowe światło na pewne pytania, dotyczące własności pierwiastków równania stopnia czwartego.

Zwracamy się obecnie do tejże krzywej stopnia trzeciego i postaramy się pokazać, że ukrywa ona w sobie zasadnicze własności funkcyj eliptycznych, dające się wyczytać na niej w sposób podobny, jak zasadnicze własności funkcyj kołowych wyczytują się na kole.

Aby naszym rozumowaniom nadać więcej rozległości, zmuszeni jesteśmy do krzywej danej:

$$(1)\qquad y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

dołączyć drugą z nią sprzężoną, a określoną równaniem:

$$(2)\qquad y^2 = -(4x^3 - g_2 x - g_3)$$

[1]) Prace matematyczno-fizyczne. T. X, str. 164.

Pierwszą krzywą (1), rozpatrywaną oddzielnie, nazywać będziemy prawą; drugą (2) — lewą; zjednoczenie obu krzywych (1) i (2) nazywać będziemy krzywą zespoloną.

Obie krzywe posiadają oczywiście jednakowe własności; to, co okażemy dla pierwszej, będzie się uważało za dowiedzione i dla drugiej.

Forma naszej krzywej zależy od znaku wartości wyróżnika:

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 .$$

Jeżeli $\Delta < 0$, trzy pierwiastki równania $y = 0$ są różne i rzeczywiste, oznaczać je będziemy przez e_1, e_2, e_3 i przypuszczać, że

$$e_1 > e_2 > e_3 .$$

Postać krzywej jest przedstawiona w tym przypadku na figurze 1.

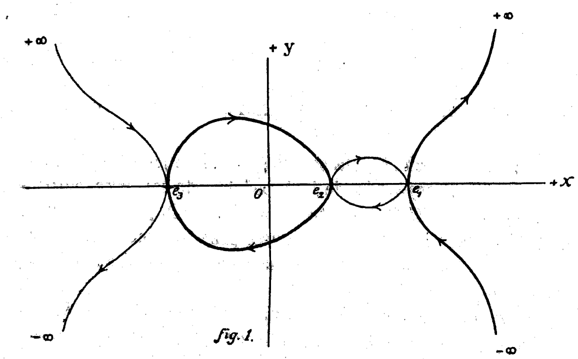

fig. 1.

Nieskończona gałęź z prawej strony i owal leżący od niej poodal, razem wzięte stanowią krzywą prawą, a lewa nieskończona gałęź wraz z owalem po prawej ręce tworzy krzywą lewą.

W przypadku przeciwnym, kiedy $\Delta < 0$, krzywa zespolona ma postać przedstawioną schematycznie na figurze 2; prawa gałęź stanowi krzywą prawą, a lewa lewą.
Równanie $y = 0$ posiada jeden pierwiastek rzeczywisty, który będziemy oznaczali przez e_1.

Przypadek $\Delta = 0$ usuniemy zupełnie z pod uwagi, bo doprowadza on tylko do funkcyj kołowych.

Nie zwracając żadnej uwagi na znak wyróżnika, weźmy jakąkolwiek z dwu krzywych, wybierzmy na jej obwodzie punkt dowolny (x_0, y_0) i przeprowadźmy przezeń dowolną sieczną

$$(3) \qquad y - y_0 = 2t(x - x_0) .$$

Oznaczmy przez (x_1, y_1), (x_2, y_2) dwa pozostałe punkty przecięcia się siecznej (3) z krzywą, na której obwodzie obrany został punkt (x_0, y_0). Wartości x_1 i x_2 są pierwiastkami równania stopnia drugiego:

$$(4) \qquad x^2 + (x_0 \mp t^2)\, x \pm t^2 x_0 \mp t y_0 + x_0^2 - \frac{1}{4} g_2 = 0 ,$$

gdzie znaki górne odpowiadają krzywej prawej, a dolne lewej. Odpowiednie wartości na y_1, y_2 otrzymują się z równania (3).

Z równania (4) otrzymujemy:

$$(5) \qquad x_0 + x_1 + x_2 = \pm t^2$$

co doprowadza nas do następującego twierdzenia.

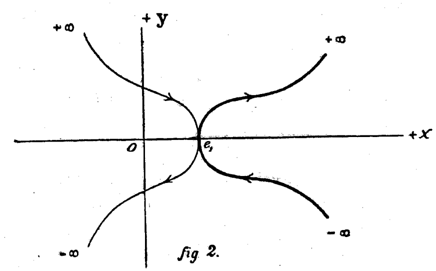

fig 2.

Twierdzenie. Jeśli α oznacza kąt, jaki dana sieczna tworzy z osią odciętych, to suma odciętych trzech punktów przecięcia się siecznej z krzywą równa się $\pm \frac{1}{4} tg^2\alpha$. Znak $+$ odpowiada krzywej prawej, znak $-$ lewej.

Weźmy teraz pod uwagę środek ciężkości trzech punktów przecięcia się siecznej (3) z krzywą; nazywać go można dla skrócenia poprostu środkiem ciężkości na danej siecznej, oznaczmy go przez (ξ, η). Mamy:

$$\xi = \frac{x_0 + x_1 + x_2}{3} = \pm \frac{1}{3} t^2 ,$$

$$\eta = y_0 + 2t \left(\pm \frac{1}{3} t^2 - x_0\right).$$

Stąd wynika bezpośrednio następujący wniosek.

W n i o s e k. Miejscem geometrycznem środków ciężkości na układzie cięciw równoległych jest prosta prostopadła do osi odciętych (osi symetryi krzywej), na odległości od początku spółrzędnych równej $\frac{1}{12} tg^2\alpha$. Na mocy tego wniosku, gdy mamy narysowaną krzywą, łatwo jest odszukać długość, która przy kreśleniu była przyjęta za jedność.

Dajmy teraz, że punkt (x_0, y_0) przypada w jednym z wierzchołków krzywej, np. $(e_1, 0)$. W takim razie z równań (4) i (5) otrzymujemy:

$$x_1 x_2 = \pm t^2 e_1 + e_1^2 + e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3 = \pm t^2 e_1 + e_2 e_3 ,$$
$$x_1 + x_2 = \pm t^2 - e_1 ,$$

a stąd po wyrugowaniu wielkości t^2, otrzymujemy:

$$e_1^2 + x_1 x_2 - e_1 (x_1 + x_2) = 2 e_1^2 + e_2 e_3 ,$$

albo oznaczywszy dla skrócenia

$$(6) \qquad \begin{aligned} 2 e_1^2 + e_2 e_3 &= (e_1 - e_2)(e_1 - e_3) = l_1^2 , \\ (x_1 - e_1)(x_2 - e_1) &= l_1^2 . \end{aligned}$$

Dla siecznych, przechodzących przez wierzchołek $(e_2, 0)$ albo $(e_3, 0)$ zachodzą wzory odpowiednio analogiczne, mianowicie:

$$(x_1 - e_2)(x_2 - e_2) = l_2^2 ,$$
$$(x_1 - e_3)(x_2 - e_3) = l_3^2 ,$$

przyczem:

$$l_2^2 = (e_2 - e_1)(e_2 - e_3) , \quad l_3^2 = (e_3 - e_1)(e_3 - e_2) .$$

Wzór (6) ma ważne znaczenie: daje się on wyrazić w następującej postaci:

T w i e r d z e n i e. Niech r i r' będą długości dowolnego promienia, wychodzącego z wierzchołka $(e_i, 0)$. Iloczyn rzutów tych dwóch długości na oś odciętych nie zależy od kierunku promienia, zatem:

$$r r' \cos^2 (rx) = l_i^2 .$$

§ 2.

WZORY RÓŻNICZKOWE.

Znów, jak poprzednio, niech (x_0, y_0) przedstawia punkt, wzięty dowolnie na jednej z dwóch krzywych sześciennych, prawej czy lewej. Przez ten punkt, przyjęty za nieruchomy, przeprowadźmy dowolną sieczną

$$(1) \qquad y - y_0 = 2t (x - x_0)$$

i uważajmy t za zmienną niezależną. Oznaczywszy dwa pozostałe punkty przecięcia się siecznej z krzywą przez (x_1, y_1), (x_2, y_2) i biorąc pod uwagę, że x_1 i x_2 są pierwiastkami równania (4), § 1, mamy:

$$x_1 + x_2 = \pm t^2 - x_0 ,$$

$$x_1 x_2 = \pm x_0 t^2 \mp y_0 t + x_0^2 - \frac{1}{4} g_2 ,$$

a przechodząc do różniczek, otrzymujemy:

$$dx_1 + dx_2 = \pm 2t\, dt ,$$

$$x_2\, dx_1 + x_1\, dx_2 = \pm 2t x_0\, dt \mp y_0\, dt ,$$

skąd przez wyrugowanie różniczki dx_2 znajdujemy:

$$(x_1 - x_2)\, dx_1 = \pm [y_0 + 2t (x_1 - x_0)]\, dt .$$

Lecz punkt (x_1, y_1) leży na siecznej, zatem:

$$y_1 - y_0 = 2t (x_1 - x_0) ,$$

wskutek czego równanie różniczkowe można napisać tak:

$$(2) \qquad (x_1 - x_2)\, dx_1 = \pm y_1\, dt .$$

Dla drugiego końca siecznej ten sam wzór daje:

$$(x_2 - x_1)\, dx_2 = \pm y_2\, dt .$$

Otrzymane równanie posiada doniosłe znaczenie, które wyrazić można w postaci następującego twierdzenia:

T w i e r d z e n i e. Jeśli przez jakikolwiek punkt (x_0, y_0) na krzywej sześciennej przeprowadzimy sieczną i oznaczymy przez $2t$ spółczynnik kątowy, przez (x_1, y_1), (x_2, y_2) dwa pozostałe punkty przecięcia się siecznej z krzywą, to w przypuszczeniu, że sieczna obraca się około punktu (x_0, y_0), pochodna odciętej x_1, jako funkcyi zmiennej t, wyraża się tak:

$$\frac{dx_1}{dt} = \pm \frac{y_1}{x_1 - x_2}. \tag{3}$$

Znak $+$ odpowiada przypadkowi, gdy punkt (x_0, y_0) leży na krzywej prawej, znak $-$ przypadkowi, gdy leży na lewej.

Co się tyczy pochodnej wielkości y_1, można ją otrzymać wprost z równania:

$$y_1 - y_0 = 2t(x_1 - x_0).$$

§ 3.

OKREŚLENIE ARGUMENTU ŁUKU NA UWAŻANEJ KRZYWEJ SZEŚCIENNEJ.

Niech A i B przedstawiają końce łuku, dowolnie wziętego na krzywej danej, bądź na gałęzi nieskończonej, bądź na owalu. Wartość całki

$$\int_A^B \frac{dx}{y},$$

wziętej po krzywej AB od początku A do końca B, nazywać będziemy a r g u m e n t e m łuku AB i przedstawiać dla skrócenia tak:

$$\int_A^B \frac{dx}{y} = \arg AB. \tag{1}$$

Według tego określenia argument jest zawsze wielkością skończoną: długość łuku może być nieskończenie wielka, a argument jego jest wielkością skończoną.

Argument nieskończenie małego łuku ds, wychodzącego z punktu (x, y) jest wielkością nieskończenie małą, która na mocy równania (1) wyraża się tak:

$$\arg ds = \frac{dx}{y}. \tag{2}$$

Jeśli łuki AB, BC, CD, idą w takim porządku, że koniec każdego z nich jest początkiem następnego, to:

$$\arg AB + \arg BC + \arg CD = \arg AD. \tag{3}$$

Ze wzorów (2) i (3) wynika, naodwrót, wzór (1). Jeżeli łuki AB i $A'B'$ są symetryczne względem osi odciętych, będzie:

$$\arg AB = -\arg A'B'.$$

Nie mniej oczywistą jest także równość:

$$\arg AB = -\arg BA.$$

Zgodzimy się na przyszłość za kierunek dodatni łuku na krzywej uważać ten kierunek, w którym argument wzrasta; wskutek tego kierunek dodatni łuku będzie jednocześnie dodatni i dla argumentu. Temu wymaganiu czyni zadość prawo następujące:

W e w s z y s t k i c h p u n k t a c h o b w o d u k r z y w e j s z e ś c i e n n e j, l e ż ą c y c h n a d o s i ą X, k i e r u n e k d o d a t n i i d z i e o d r ę k i l e w e j k u p r a w e j, t o j e s t o d $-X$ w s t r o n ę $+X$; p r z e c i w n i e, w p u n k t a c h, l e ż ą c y c h p o d o s i ą X, k i e r u n e k d o d a t n i i d z i e o d r ę k i p r a w e j k u l e w e j (patrz figurę 1 i 2).

Na obwodzie krzywej zespolonej istnieją cztery gałęzie, ciągnące się w nieskończoność, odpowiednio do czterech punktów:

$$(+\infty, +\infty),\ (+\infty, -\infty),\ (-\infty, +\infty),\ (-\infty, -\infty).$$

Wyobrażać sobie będziemy te cztery punkty tak, jak gdyby one schodziły się razem i stanowiły jeden i ten sam punkt. Takim sposobem, punkt zmienny M, przebiegając po obwodzie krzywej i doszedłszy do jednego z wymienionych czterech punktów, będzie mógł w naszem pojęciu przechodzić na jakąkolwiek z trzech pozostałych gałęzi, ażeby wrócić znowu do odległości skończonej.

Dajmy, że mamy łuk AM, którego początek A jest stały, gdy tymczasem koniec M porusza się po obwodzie krzywej zespolonej w dowolnym kierunku, może dochodzić do punktu w nieskończoności, tam przechodzić na inną gałąź i przebiegać dalej, aż nareszcie zatrzymać się w pewnym punkcie B: podczas tego przebiegu, od początku do końca, wartość $\arg AM$ zmieniać się będzie sposobem ciągłym.

§ 4.

SPOSÓB ODRÓŻNIENIA ARGUMENTU NA KRZYWEJ PRAWEJ OD ARGUMENTU NA KRZYWEJ LEWEJ.

Według powyższego, argument jest pewną wielkością rzeczywistą, rozpostartą po całym obwodzie krzywej zespolonej. Dalsze badania nad argumentem odkryją nam nadzwyczaj ciekawe jego własności i dadzą bezpośrednio gotowy materjał do otrzymania zasad teoryi funkcyj eliptycznych.

By uniknąć oddzielnego rozpatrywania przypadków szczególnych oraz by módz oddzielne fakty objąć w jeden wzór ogólny, niezbędną jest rzeczą rozróżniać jakościowo argumenty łuków, leżących na różnych krzywych. W tym celu zgodzimy się raz na zawsze uważać argument łuku, leżącego na krzywej prawej za wielkość rzeczywistą, przeciwnie zaś, argument łuku na krzywej lewej za wielkość czysto urojoną. Stosownie do tego, należy uzupełnić określenie argumentu, podane w paragrafie poprzedzającym, mianowicie:

1-o Jeżeli łuk AB leży na krzywej prawej, określenie dane w paragrafie poprzedzającym pozostaje bez zmiany, t. j.:

$$\arg AB = \int_A^B \frac{dx}{y};$$

2-o Jeżeli łuk AB leży na krzywej lewej, jego argument jest czysto urojony i określa się tak:

$$\arg AB = i\int_A^B \frac{dx}{y};$$

3-o Jeżeli łuk AB jest sumą dwóch łuków $AC + CB$, z których pierwszy leży na krzywej prawej, drugi na krzywej lewej, to argument jest wielkością zespoloną:

$$\arg AB = \int_A^C \frac{dx}{y} + i\int_C^B \frac{dx}{y}.$$

Taki sposób traktowania argumentu pozwoli nam osiągnąć ważne korzyści w dalszym ciągu badania.

§ 5.

O ŁUKACH RÓWNOWAŻNYCH.

Weźmiemy tu pod uwagę jednę z dwóch krzywych, lecz to, co powiemy o jednej, będzie się stosowało i do drugiej. Na obwodzie wybierzmy gdziekolwiek punkt M, który przyjmiemy za stały. Przez punkt M przeprowadźmy sieczną, która przecinałaby krzywą w dwóch punktach rzeczywistych A i B, oprócz w punkcie M. Jeśli następnie punkt A zacznie się poruszać na obwodzie krzywej, i przebiegłszy pewien łuk, zatrzyma się w punkcie A', jednocześnie wtedy pozostały punkt B, opisawszy odpowiedni łuk, zatrzyma się w punkcie B'. Dwa takie łuki jak AA' i BB' nazywać będziemy r ó w n o w a ż n e m i, a stały punkt M ś r o d k i e m i c h r ó w n o w a g i. Rozumie się, że każdy łuk, dowolnie wzięty, AA' posiada nieskończoną liczbę różnych łuków z nim równoważnych: polega to na wyborze stałego punktu M. Lecz dwa łuki równoważne są zawsze wzajemnie równoważne. Jeżeli dany jest łuk pierwszy AA' i dany jest początek albo koniec łuku drugiego, równoważnego z pierwszym, to łuk drugi jest już określony w zupełności.

T w i e r d z e n i e. Argumenty dwóch łuków równoważnych są liczebnie równe, lecz znaków przeciwnych.

D o w ó d. Oznaczmy punkt stały M przez (x_0, y_0) punkt, dowolnie wzięty na pierwszym łuku przez (x_1, y_1), a odpowiadający mu punkt na łuku drugim przez (x_2, y_2). Według twierdzenia dowiedzionego w § 3, mamy:

$$(x_1 - x_2)\, dx_1 = \pm y_1\, dt,$$

gdzie t jest połową spółczynnika kątowego w równaniu siecznej. Ten sam związek, zastosowany do punktu (x_2, y_2), daje:

$$(x_2 - x_1)\, dx_2 = \pm y_2\, dt.$$

Dzieląc przez siebie te równania odpowiedniemi stronami, otrzymujemy:

$$-\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{y_1}{y_2},$$

albo:

$$\frac{dx_1}{y_1} = -\frac{dx_2}{y_2},$$

a stąd:

$$\int_A^{A'} \frac{dx_1}{y_1} = -\int_B^{B'} \frac{dx_2}{y_2},$$

to jest:

$$\arg AA' = -\arg BB',$$

co było do okazania.

W przypadku, gdy pierwiastki e_1, e_2, e_3 są rzeczywiste, połowa obwodu krzywej zespolonej, leżąca pod osią odciętych, składa się z czterech łuków, łączących kolejno cztery punkty:

$$(+\infty, -\infty), \ (e_1, 0), \ (e_2, 0), \ (e_3, 0), \ (-\infty, -\infty),$$

poprzedni z następnym; argument każdego z nich, wzięty w kierunku dodatnim, nazywa się **a r g u m e n t e m z u p e ł n y m**.

Mamy więc cztery argumenty zupełne:

$$\arg (e_3, -\infty) = \omega' = i \int_{-\infty}^{e_3} \frac{dx}{y},$$

$$\arg (e_2, e_3) = \omega = \int_{e_3}^{e_2} \frac{dx}{y},$$

$$\arg (e_1, e_2) = \omega'_0 = i \int_{e_2}^{e_1} \frac{dx}{y},$$

$$\arg (+\infty, e_1) = \omega_0 = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dx}{y},$$

przyczem pod każdym znakiem całki litera y oznacza wartość pierwiastku kwadratowego

$$\sqrt{\pm (4x^3 - g_2 x - g_3)},$$

wziętego ze znakiem dodatnim.

Z drugiej strony dwa łuki pod osią odciętych na krzywej prawej

$(+\infty, e_1)$ i (e_3, e_2) są oczywiście równoważne, środkiem ich równowagi jest wierzchołek e_3; mamy zatem:

$$\arg (+\infty, e_1) = -\arg (e_3, e_2),$$

czyli:

$$\omega_0 = \omega.$$

Podobnież mamy także:

$$\omega'_0 = \omega'.$$

Przyszliśmy więc do następującego wniosku.

W n i o s e k. W przypadku, gdy wyróżnik krzywej sześciennej jest dodatni, dwa rzeczywiste argumenty zupełne są sobie równe, i dwa urojone argumenty zupełne są także sobie równe.

W przypadku, gdy jeden tylko pierwiastek e_1 jest rzeczywisty, połowa obwodu krzywej sześciennej zespolonej, leżąca pod osią odciętych, składa się z dwóch łuków, którym odpowiadają dwa argumenty zupełne: jeden rzeczywisty:

$$\omega = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dy}{y}, \qquad y > 0;$$

drugi czysto urojony:

$$\omega' = i \int_{-\infty}^{e_1} \frac{dx}{y}, \qquad y > 0.$$

§ 6.

PRZENOSZENIE ARGUMENTU Z JEDNEGO MIEJSCA NA DRUGIE.

Z a d a n i e 1. Na jednej z dwóch krzywych sześciennych dany jest łuk AA', należy go przedłużyć w jedną lub drugą stronę tak, aby argument przedłużenia równał się $\arg AA'$.

W tym celu przeprowadźmy w punkcie A' styczną do krzywej, która przetnie ją w pewnym punkcie M. Połączmy punkty M i A linią prostą, która spotka obwód krzywej w trzecim punkcie, dajmy na to, A''. Łuki $A'A$ i $A'A''$ są równoważne, mamy przeto:

$$\arg AA' = -\arg A''A',$$

albo

$$\arg AA' = \arg A'A'' ,$$

a więc punkt A'' jest szukany.

Przejdźmy teraz do zadania odwrotnego, mającego na celu nie podwojenie argumentu, lecz dzielenie go na dwie równe części.

Zadanie 2. Na jednej z dwóch krzywych sześciennych dany jest łuk AA', należy znaleść na niej taki punkt A'', aby $\arg AA''$ równał się $\arg A''A'$.

Dla tego łączymy A z A' linią prostą, która przetnie obwód krzywej jeszcze w punkcie M; z punktu M przeprowadzamy styczną do krzywej sześciennej, której punkt styczności znajdowałby się pomiędzy A i A', dajmy w punkcie A'' [1]). Punkt A'' jest szukany.

Zadanie 3. Na obwodzie jednej z dwóch krzywych dany jest łuk AA' i punkt B, różny od A i A', należy znaleść nowy punkt B' tak, abyśmy mieli:

$$\arg AA' = \arg BB' .$$

Dla tego łączymy A' z B prostą, która przetnie obwód krzywej w punkcie trzecim M; łączymy następnie M z A prostą, która spotka obwód krzywej w trzecim punkcie, dajmy B'. Ten punkt jest szukany.

Zadanie 4. Na jednej z krzywej sześciennych dany jest łuk AA'; od punktu ∞ odłożyć łuk równoważny z AA'.

Jest to szczególny przypadek poprzedniego zadania, zasługujący zresztą na osobną uwagę.

Dla rozwiązania, przeprowadźmy przez punkt A' prostą, równoległą do osi rzędnych, która spotka krzywą w punkcie M, symetrycznym względem A'; przez M i A przeprowadźmy prostą, która spotka krzywą w punkcie, dajmy B. Ten ostatni jest punktem szukanym, gdyż łuki ∞B i AA' są oczywiście równoważne.

Przypuśćmy, że argument pewnego łuku został przyjęty za jednostkę do mierzenia wszelkich argumentów, podobnie jak np., na kole stopień służy do mierzenia jakiegokolwiek łuku. Przy pomocy sposobów wyżej wyłożonych, możemy tę jedność przenosić na obwodzie krzywej tyle razy, ile się na nim umieści, posługując się przytem tylko liniałem i cyrklem: więc mieć będziemy skalę do bezpośredniego odczytania przybliżonej wartości jakiegobądź argumentu.

[1]) Stycznych z punktu M można przeprowadzić cztery, oprócz tej, której punkt styczności znajduje się w M (Prace matem.-fizycz. T. X, str. 167 i następne).

§ 7.

ARGUMENT PUNKTU.

Jakkolwiek argument przedstawia się jako funkcya dwóch punktów niezależnych: początku i końca, jednakże wyraża się bezpośrednio przez funkcyę jednej zmiennej niezależnej, gdyż wprowadziwszy do rachunku pewien punkt stały C, mamy:

$$\arg AB = \arg CB - \arg CA .$$

Idzie więc tylko o wybranie punktu stałego C w sposób najdogodniejszy.

Dla naszego celu obecnie koniecznem jest przyjąć za początek punkt w nieskończoności.

Przyjąwszy to pod uwagę, zobaczmy najprzód, jakim wzorem wyrażają się argumenty łuków zamkniętych, mających koniec wspólny z początkiem. Trzeba dla tego rozpatrywać oddzielnie dwa przypadki:

1-o Wyróżnik krzywej jest dodatni. Krzywa zespolona składa się z czterech oddzielnych części, którym odpowiadają argumenty zupełne

$$\omega', \quad \omega, \quad \omega', \quad \omega,$$

i bez względu na drogę, jaką punkt zmienny (x, y) wraca do początku (∞, ∞), z którego wyszedł, argument drogi, którą przebiegł, wyraża się wzorem:

$$2m\omega + 2m'\omega' ,$$

gdzie m, również jak i m', oznacza pewną liczbę całkowitą, dodatnią, ujemną albo zero.

2-o Wyróżnik krzywej jest ujemny. W tym razie krzywa zespolona składa się tylko z dwóch gałęzi, którym odpowiadają dwa argumenty zupełne:

$$\omega', \quad \omega .$$

Wszelkiej drodze, wychodzącej z punktu (∞, ∞), idącej po obwodzie krzywej i doprowadzającej do tegoż punktu (∞, ∞), odpowiada oczywiście argument postaci

$$2m\omega + m'(\omega + \omega') ,$$

gdzie m i m' oznacza pewną liczbę całkowitą dodatnią, ujemną albo zero.

Niech teraz u i u_1 oznaczają argumenty, odpowiadające dwóm różnym drogom, doprowadzającym do jednego i tegoż samego punktu (x, y). Oczywiście, różnica $u-u_1$ przedstawiać będzie argument, należący do pewnego łuku, mającego koniec w początku, t. j. w punkcie (∞, ∞); mieć będziemy zatem:

w pierwszym przypadku

$$u_1 - u = 2m\omega + 2m'\omega', \tag{1}$$

w drugim zaś:

$$u_1 - u = 2m\omega + m'(\omega + \omega'). \tag{2}$$

Stąd wnosimy, że argumenty, odpowiadające temuż samemu punktowi, różnią się między sobą:

w pierwszym przypadku, o dowolną wielokrotność każdej z dwóch wielkości 2ω, $2\omega'$,

w drugim zaś przypadku, o dowolną wielokrotność każdej z dwóch wielkości 2ω, $\omega+\omega'$.

Odwrotnie, jeśli różnica argumentów w dwóch punktach (x, y), (x', y') wyraża się odpowiednio wzorem (1) lub (2), to oba te punkty schodzą się.

Nie można twierdzić, aby argument mógł przyjmować wszelką wartość zespoloną na obwodzie krzywej; przeciwnie, łatwo jest zauważyć, że wartość argumentu w jakimkolwiek punkcie na obwodzie krzywej przedstawia się zawsze w jednej z dwóch postaci:

$$u + m'\omega', \quad m\omega + vi,$$

przyczem u, również jak v, może przybierać wszelkie wartości rzeczywiste od $-\infty$ do $+\infty$; m' i m oznacza dowolną liczbę całkowitą dodatnią, ujemną albo zero.

Jeśli płaszczyznę spółrzędnych pokryjemy szeregiem linii prostych równoległych do osi rzędnych na odległości ω od osi i jedna od drugiej, i jeszcze drugim szeregiem linij równoległych do osi odciętych na odległości $\frac{\omega'}{i}$ od osi i jedna od drugiej, to wartość argumentu w jakimkolwiek punkcie (x, y) na obwodzie krzywej daje punkt, leżący zawsze na jednej z prostych, należących do szeregu pierwszego lub drugiego.

§ 8.

TWIERDZENIE ABELA.

Jeżeli z pomiędzy nieskończonego mnóstwa argumentów, odpowiadających jednemu i temuż punktowi na obwodzie krzywej, jeden będzie znany, to tem samem i wszystkie inne będą nam wiadome.

Dwa argumenty, odpowiadające jednemu i temuż punktowi, nazywają się przystającemi (kongruentnemi) odpowiednio według mod $(2\omega, 2\omega')$ albo według mod $(2\omega, \omega+\omega')$; często jednak dla skrócenia nazywać je będziemy wprost równemi, dopóki nie będzie obawy, aby taki sposób wyrażania się nie doprowadzał do błędnych wniosków. Biorąc to pod uwagę, dowiedziemy teraz następującego twierdzenia:

Twierdzenie. Suma argumentów trzech punktów przecięcia się jakiejbądź siecznej z naszą krzywą sześcienną równa się zeru.

Dowód. Oznaczmy przez A, A', A'' punkty przecięcia się jednej z dwóch krzywych sprzężonych z dowolną linią prostą. Wziąwszy pod uwagę jeden z tych punktów, np. punkt A, obracajmy około niego naszą sieczną AA'' dopóty, dopóki nie przyjmie kierunku równoległego do osi rzędnych, i dajmy, że po uskutecznieniu tego ruchu, punkt A' przeszedł do punktu B' a A'' do B''. Ponieważ łuki $A'B'$ i $A''B''$ są oczywiście równoważne, przeto mamy:

$$\arg A'B' = -\arg A''B'',$$

albo wyraziwszy argument łuku przez różnicę argumentów końca i początku:

$$\arg B' - \arg A' = \arg A'' - \arg B''.$$

Lecz jeden z punktów B', B'', dajmy B'', znajduje się w nieskończoności, więc $\arg B'' = 0$, wskutek czego równanie można napisać tak:

$$\arg A' + \arg A'' = \arg B'.$$

Dalej, dwa punkty A i B' są symetryczne względem osi odciętych, a więc $\arg B' = -\arg A$, i równanie może być napisane tak:

$$\arg A + \arg A' + \arg A'' = 0,$$

a to właśnie wyraża twierdzenie, podane na początku.

Wniosek. Przypuściwszy, że ilości e_1, e_2, e_3 są rzeczywiste, przeprowadźmy przez jeden z punktów wierzchołkowych $(e_i, 0)$ dowolną sieczną i nazwijmy dwa punkty przecięcia się z krzywą prawą, albo też lewą, przez A' i A''; mamy:

$$\text{dla wierzchołka } (e_1, 0)\,, \quad \arg A' + \arg A'' = \omega\,,$$
$$\text{„ \quad „ } (e_2, 0)\,, \quad \arg A' + \arg A'' = \omega + \omega'\,,$$
$$\text{„ \quad „ } (e_3, 0)\,, \quad \arg A' + \arg A'' = \omega'\,.$$

W przypadku, gdy tylko jeden pierwiastek e_1 jest rzeczywisty, a dwa pozostałe są urojone, mamy:

$$\text{dla wierzchołka } (e_1, 0)\,, \quad \arg A' + \arg A'' = \omega\,.$$

§ 9.

FUNKCYA $\wp u$ I JEJ POCHODNA.

Widzieliśmy, że argument określa w zupełności odpowiadający mu punkt na obwodzie krzywej zespolonej, a więc odcięta x, również jak i rzędna y są funkcyami jednowartościowemi argumentu u. Należy przytem mieć na uwadze, że argument może przybierać tylko następujące wartości:

1-o wszelkie wartości rzetelne;

2-o wszelkie wartości czysto urojone;

3-o wartości zespolone, w których część rzetelna równa jest całkowitej wielokrotności półperyodu ω;

4-o wartości zespolone, w których część urojona równa jest całkowitej wielokrotności półperyodu ω'.

Tylko dla takich wartości zmiennej niezależnej u każda z funkcyj x i y jest zupełnie określona.

Przejdziemy teraz do wyszczególnienia główniejszych własności funkcyi, tylko co określonych.

Zauważymy najprzód, że obie funkcye x i y są ciągłe przy wszelkich wartościach argumentu u, z wyjątkiem wartości szczególnych, objętych wzorem:

$$u = 2\,m\,\omega + 2\,m'\,\omega'\,,$$

gdy wyróżnik jest dodatni, albo wzorem:

$$u = 2\,m\,\omega + m'\,(\omega + \omega')\,,$$

gdy wyróżnik jest ujemny; przyczem m i m' przedstawiają dowolne liczby całkowite. Tym wartościom odpowiada $x = \infty$, $y = \infty$.

Odcięta x, uważana jako funkcya zmiennej u, przedstawia element

zasadniczy w teoryi funkcyi eliptycznych: nazywają ją **funkcyą** $\wp e$ i wyobrażają znakiem $\wp u$.

Pochodna funkcyi $\wp u$ jest drugim elementem zasadniczym w teoryi funkcyj eliptycznych, i wyraża się łatwo przez y.

W samej rzeczy, przypuśćmy najprzód, że punkt, odpowiadający danej wartości u, znajduje się na krzywej prawej; w takim razie ma miejsce jeden z dwóch wzorów:

$$u = a + \int_{\infty}^{(x,y)} \frac{dx}{y}\,, \quad u = b + \int_{e_3}^{(x,y)} \frac{dx}{y}\,,$$

stosownie do tego czy punkt (x, y) leży na gałęzi nieskończonej, czy też na owalu; a i b oznaczają tu pewne ilości stałe.

Otrzymujemy stąd w obydwóch przypadkach:

$$du = \frac{dx}{y}\,,$$

$$\frac{dx}{du} = y\,,$$

albo

$$\wp' u = y\,. \tag{1}$$

W rozpatrywanym więc przypadku, pochodna funkcyi $\wp u$ równa się odpowiedniej wartości y.

Przypuśćmy, powtóre, że punkt, odpowiadający danemu argumentowi leży na krzywej lewej; mamy jedno z dwóch:

$$u = a + i\int_{\infty}^{(x,y)} \frac{dx}{y}\,, \quad u = b + i\int_{e_2}^{(x,y)} \frac{dx}{y}\,,$$

gdzie a i b są ilości stałe, a więc w każdym razie mamy:

$$du = i\frac{dx}{y}\,,$$

stąd otrzymujemy:

$$\frac{dx}{du} = -\,iy\,,$$

albo:

$$\wp' u = - iy\,. \tag{2}$$

I tak, w przypadku gdy punkt (x, y), określony argumentem u, leży na krzywej lewej, wartość pochodnej funkcyi $\wp u$ równa się stosunkowi $y : i$.

Równości (1) i (2) pokazują, że i funkcya $\wp' u$ jest jednowartościowa i ciągła z wyjątkiem tych szczególnych wartości u, które odpowiadają początkowi (∞, ∞).

Pierwsze własności funkcyj $\wp u$ i $\wp' u$, które się otrzymują prawie bezpośrednio, są następujące:

1-o. $\wp 0 = \infty\,,\ \wp\omega = e_1\,,\ \wp(\omega + \omega') = e_2\,,\ \wp(\omega') = e_3\,,$

w przypuszczeniu, że wyróżnik jest dodatni; jeżeli zaś wyróżnik jest ujemny, mamy:

$$\wp 0 = \infty\,,\ \wp\omega = \wp\omega' = e_1\,.$$

2-o. $\wp(-u) = \wp u\,,\ \wp'(-u) = -\wp' u\,.$

3-o. Obie funkcye $\wp u$ i $\wp' u$ są podwójnie perjodyczne, o p e r y o d a c h $2\,\omega$ i $2\,\omega'$, jeżeli wyróżnik jest dodatni, lub o perjodach $2\,\omega$ i $\omega + \omega'$, jeżeli wyróżnik jest ujemny.

4-o. Pomiędzy funkcyami $\wp u$ i $\wp' u$ zachodzi związek algebraiczny:

$$\wp'^2 = 4\,\wp^3 - g_2\wp - g_3\,.$$

5-o. Przy nieskończenie małych wartościach argumentu u odpowiednia wartość funkcyj $\wp u$ jest nieskończenie wielką, której część główna równa się $\frac{1}{u^2}$, przytem różnica $\wp u - \frac{1}{u^2}$ jest ilością nieskończenie małą.

6-o. W przypadku, gdy wyróżnik jest dodatni, jeżeli przez ω_1, ω_2, ω_3 oznaczymy następujące półperyody:

$$\omega_1 = \omega\,,\ \omega_2 = \omega + \omega'\,,\ \omega_3 = \omega'\,,$$

to zachodzić będzie równość:

$$\wp(u + \omega_i) - e_i = \frac{l_i^2}{\wp u - e_i}$$

dla $i = 1, 2, 3$. Wynika to bezpośrednio z wzoru (6), § 1 i z tego, co powiedziano na końcu § 8.

7-o. W przypadku, gdy wyróżnik jest ujemny, mamy:

$$\wp(u + \omega) - e_1 = \wp(u + \omega') - e_1 = \frac{l_1^2}{\wp u - e_1}\,.$$

8-o. Przypuśćmy znowu, że wyróżnik jest dodatni; z wierzchołka $(e_1, 0)$ przeprowadźmy cztery styczne do krzywej prawej. Argumenty punktów styczności są (§ 8):

$$\pm\frac{\omega}{2}\,,\quad \omega' \pm \frac{\omega}{2}\,.$$

Z drugiej strony, oznaczywszy przez $(x, \pm y)$, $(x', \pm y')$ punkty im odpowiadające, na mocy wzoru (6), § 1, mamy:

$$(x - e_1)^2 = l_1^2\,,\quad (x' - e_1)^2 = l_1^2\,,$$

a zatem:

$$\wp\frac{\omega}{2} = e_1 + l_1\,,$$

$$\wp\left(\omega' + \frac{\omega}{2}\right) = e_1 - l_1\,,$$

przyczem $l_1 > 0$.

Podobnym sposobem, tylko wychodząc z wierzchołka $(e_3, 0)$ i operując na krzywej lewej, otrzymujemy dwa nowe wzory:

$$\wp\frac{\omega'}{2} = e_3 - l_3\,,$$

$$\wp\left(\omega + \frac{\omega'}{2}\right) = e_3 + l_3\,,$$

przyczem $l_3 > 0$.

9-o. W przypadku, gdy wyróżnik jest ujemny, mamy:

$$\wp\frac{\omega}{2} = e_1 + l_1\,,$$

$$\wp\frac{\omega'}{2} = e_1 - l_1\,,$$

przyczem $l_1 > 0$.

§ 10.

DODAWANIE ARGUMENTÓW.

Wartość argumentu, odpowiadającego jakiemukolwiek punktowi na obwodzie krzywej zespolonej, ma tę cechę charakterystyczną, że jeżeli odrzucimy największą zawartą w niej całkowitą wielokrotność półperyodu ω i największą całkowitą wielokrotność półperyodu ω', to pozostała reszta będzie albo rzeczywista albo też czysto urojona. Otóż, jeżeli otrzymane takim sposobem reszty dwóch argumentów u i v są jednego gatunku, to punkty im odpowiadające znajdują się na obwodzie jednej i tej samej krzywej, prawej albo lewej, i odwrotnie.

Dajmy, że u i v są dwa argumenty, należące do jednej krzywej, i niech A, B będą odpowiadające im punkty. Prosta AB przetnie krzywą w trzecim punkcie C. Spółrzędne trzech punktów A, B, C niech będą:

$$(x_0, y_0)\,,\ (x_1, y_1)\,,\ (x_2, y_2)\,,$$

a odpowiadające im argumenty (§ 8):

$$u\,,\qquad v\,,\qquad -(u+v)\,.$$

Według określeń wyżej podanych mamy:

$$x_0 = \wp u\,,\ y_0 = \varepsilon \wp' u\,;\ x_1 = \wp v\,,\ y_1 = \varepsilon \wp' v\,;$$

$$x_2 = \wp(u+v)\,,\ y_2 = -\varepsilon \wp'(u+v)\,,$$

gdzie ε oznacza 1 lub i, stosownie do tego, czy punkty A, B, C leżą na krzywej prawej czy na lewej.

Z drugiej strony, na mocy wzoru (5) § 1 mamy:

$$x_2 + x_0 + x_1 = \pm \frac{1}{4}\left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)^2,$$

a zatem:

$$\wp(u+v) + \wp u + \wp v = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}\right)^2. \tag{1}$$

Wzór ten posiada w teoryi funkcyj eliptycznych tę samą doniosłość, jaką posiada znany wzór na $\sin(a+b)$ w teoryi funkcyj kołowych. Można go otrzymać inną nieco drogą i w innej postaci, mianowicie: przyjąwszy

jeden z trzech punktów A, B, C, np. B, za stały, weźmy pod uwagę wzór na różniczki zmiennej x_2, podany w § 2, mianowicie:

$$(x_2 - x_0)\, dx_2 = \pm y_2\, dt\,,$$

skąd otrzymujemy:

$$\wp(u+v) - \wp u = \pm \frac{\varepsilon y_2}{2\, dx_2}\, d\, \frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}\,;$$

lecz z drugiej strony, według określenia argumentu, mamy:

$$\varepsilon \frac{dx_2}{y_2} = d(-u-v) = -du\,,$$

a zatem:

$$\wp(u+v) - \wp u = -\frac{1}{2}\, \frac{d}{du}\, \frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}\,. \tag{2}$$

Są przypadki, w których postaci (2) należy oddać pierwszeństwo przed postacią (1).

§ 11.

UOGÓLNIENIE OKREŚLENIA FUNKCYI $\wp u$ DLA WSZELKICH UROJONYCH WARTOŚCI ARGUMENTU.

Wzór (1) § 10, pozwala nam rozciągnąć określenie funkcyj $\wp u$ na wszelkie wartości urojone zmiennej niezależnej u. W samej rzeczy, z wyjątkiem wiadomych nam przypadków szczególnych, wyrażenie $\wp(a+bi)$ nic w ogóle przez się nie określa; ale jeżeli zgodzimy się zastosować do tego wyrażenia wzór (1) § 10, to otrzymamy:

$$\wp(a+bi) = \frac{1}{4}\left[\frac{\wp' a - \wp' bi}{\wp a - \wp bi}\right]^2 - \wp a - \wp bi\,, \tag{1}$$

gdzie strona prawa posiada wartość dobrze określoną. Wzór ten wskazuje nam, co będziemy rozumieli przez wartość funkcyj $\wp u$, gdy dana wartość argumentu nie daje żadnego punktu na obwodzie krzywej zespolonej; i doszliśmy tym sposobem do ogólnego określenia funkcyi eliptycznej $\wp u$ dla wszelkich wartości zmiennej niezależnej, bądź rzeczywistych, bądź urojonych.

Jest to funkcya jednowartościowa, stająca się nieskończenie wielką tylko dla tych szczególnych wartości argumentu, które wskazuje figura krzywej zespolonej.

Ze wzoru (1), biorąc pod uwagę to, co było powiedziane w § 9 № 5, łatwo jest sprawdzić, że przy nieskończenie małym mod $(a+bi)$, mamy:

$$\lim\left[\wp(a+bi)-\frac{1}{(a+bi)^2}\right]=0.$$

Jest to uogólnienie odpowiedniego wzoru, podanego w § 9.

§ 12.

POCHODNA FUNKCYI $\wp z$ PRZY WARTOŚCIACH UROJONYCH ARGUMENTU.

Weźmy pod uwagę wzór

(1) $$\wp(u+v)=\frac{1}{4}\left(\frac{\wp'u-\wp'v}{\wp u-\wp v}\right)^2-\wp u-\wp v$$

w przypuszczeniu, że u i v są ilościami rzeczywistemi, i wyprowadźmy stąd wzory na pochodne cząstkowe względem u i względem v; wystąpią wtedy pochodne drugie $\wp''u$ i $\wp''v$, które wyrugujemy za pomocą wzorów

$$\wp''u=6\wp^2u-\frac{1}{2}g_2,\quad \wp''v=6\wp^2v-\frac{1}{2}g_2.$$

Ostatecznie otrzymamy:

(2) $$\frac{\partial\wp(u+v)}{\partial u}=\frac{M\wp'u+N\wp'v}{(\wp u-\wp v)^3},$$

(3) $$\frac{\partial\wp(u+v)}{\partial v}=\frac{M\wp'u+N\wp'v}{(\wp u-\wp v)^3},$$

gdzie M i N są pewne funkcye całkowite wielkości $\wp u$ i $\wp v$. Można było zresztą przewidzieć, że prawe strony w tych wzorach będą tożsame.

Mając teraz na uwadze, że wyrażenie wielkości $\wp(u+iv)$ otrzymuje się z (1) przez podstawienie iv zamiast v, że przytem mamy:

$$\wp''iv=6\wp^2iv-g_2,$$

możemy oczywiście za pomocą wzorów (2) i (3) otrzymać bezpośrednio wzory na pochodne cząstkowe funkcyi $\wp(u+iv)$ względem u i względem iv, a mianowicie:

(4) $$\frac{\partial\wp(u+iv)}{\partial u}=\frac{M_1\wp'u+N_1\wp'iv}{(\wp u-\wp iv)^3},$$

(5) $$\frac{\partial\wp(u+iv)}{\partial iv}=\frac{M_1\wp'u+N_1\wp'iv}{(\wp u-\wp iv)^3},$$

gdzie M_1 i N_1 oznaczają odpowiednie rezultaty, otrzymane z M i N przez zamianę $\wp v$ na $\wp iv$.

Ponieważ strony prawe we wzorach (2) i (3) były tożsame, a więc naturalnie strony prawe we wzorach (4) i (5) są także tożsame; wskutek tego otrzymujemy:

$$\frac{\partial\wp(u+iv)}{\partial u}=\frac{\partial\wp(u+iv)}{\partial iv}.$$

Ta równość dowodzi, że przy wszelkiej wartości zmiennej niezależnej $z=u+iv$ stosunek dwóch różniczek zupełnych $d\wp(u+iv)$ i dz nie zależy zupełnie od stosunku $du:dv$:

$$\frac{d\wp(u+iv)}{d(u+iv)}=\frac{\partial\wp(u+iv)}{\partial u}=\frac{\partial\wp(u+iv)}{\partial iv}.$$

Słowem, funkcya $\wp z$ przy wszelkiej wartości na z posiada pochodną jednowartościową, jest zatem funkcyą analityczną zmiennej z. Idąc podobną drogą, jak powyżej, łatwo udowodnić, a raczej sprawdzić wyżej podane wzory, które były wyprowadzone przy ograniczonych wartościach argumentu. Tak np., przy wartościach rzeczywistych na u i v mieliśmy równość:

$$\wp'^2(u+v)=4\wp^3(u+v)-g_2\wp(u+v)-g_3.$$

Podstawiwszy po obu stronach zamiast $\wp'(u+v)$ i $\wp(u+v)$ odpowiednie wyrażenia ich przez $\wp u, \wp v, \wp'u, \wp'v$, otrzymamy równość następującej postaci:

$$\frac{M+N\wp'u\wp'v}{(\wp u-\wp v)^6}=\frac{P+Q\wp'u\wp'v}{(\wp u-\wp v)^6},$$

gdzie M, N, P, Q są funkcye całkowite wielkości $\wp u$ i $\wp v$. Ponieważ zaś obie strony są równe przy wszelkich rzeczywistych wartościach na u i v, więc oczywiście wielomiany M i P z jednej strony, N i Q z drugiej, są tożsame, i zamiast każdego z czterech znaków $\wp u, \wp v, \wp'u, \wp'v$ możemy podstawić po obu stronach co się nam podoba, a równości nie nadwerężymy.

Podstawiwszy mianowicie $\wp iv$, $\wp' iv$ odpowiednio zamiast $\wp v$, $\wp' v$, otrzymamy nową równość, która oczywiście może być napisaną tak:

$$\wp'^2(u+iv) = 4\wp^3(u+iv) - g_2\wp(u+iv) - g_3,$$

albo krócej:

$$\wp'^2 z = 4\wp^3 z - g_2\wp z - g_3,$$

gdzie z może przybierać dowolną wartość zespoloną.

§ 13.

UOGÓLNIENIE WZORU NA DODAWANIE ARGUMENTÓW.

Oznaczywszy przez u, u', v, v' ilości rzeczywiste wzięte dowolnie, weźmy pod uwagę dwie następujące funkcye:

(1) $$\frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(u+u')-\wp'(v+v')}{\wp(u+u')-\wp(v+v')}\right]^2 - \wp(u+u') - \wp(v+v'),$$

(2) $$\frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(u+v)-\wp'(u'+v')}{\wp(u+v)-\wp(u'+v')}\right]^2 - \wp(u+v) - \wp(u'+v');$$

każda z nich daje się przedstawić w postaci funkcyi wymiernej ośmiu wielkości:

(3) $$\wp u,\ \wp u',\ \wp v,\ \wp v',\ \wp' u,\ \wp' u',\ \wp' v,\ \wp' v',$$

i dwie funkcye stąd otrzymane będą jedna z drugą tożsame co do ośmiu wielkości (3), uważanych za zmienne niezależne. Jeżeli więc w tych funkcyach zamiast $\wp v$, $\wp v'$, $\wp' v$, $\wp' v'$ podstawimy odpowiednio $\wp iv$, $\wp iv'$, $\wp' iv$, $\wp' iv'$, to otrzymane rezultaty będą również tożsame. To daje nam taką równość:

$$\frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(u+u')-\wp'(iv+iv')}{\wp(u+u')-\wp(iv+iv')}\right]^2 - \wp(u+u') - \wp(iv+iv')$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(u+iv)-\wp'(u'+iv')}{\wp(u+iv)-\wp(u'+iv')}\right]^2 - \wp(u+iv) - \wp(u'+iv').$$

A jeżeli dla skrócenia ilości urojone $u+iv$ i $u'+iv'$ oznaczymy przez z i z', to równość może być napisana tak:

(4) $$\wp(z+z') = \frac{1}{4}\left[\frac{\wp' z - \wp' z'}{\wp z - \wp z'}\right]^2 - \wp z - \wp z'.$$

Jest to uogólnienie wzoru (1) § 10, który jak to teraz widzimy, ma miejsce przy wszelkich urojonych wartościach na u i na v.

§ 14.

RACHUNEK WARTOŚCI $\wp\omega_i$.

Przypadek pierwszy, $\Delta > 0$. W tym przypadku trzy argumenty ω, ω', $\omega+\omega'$ mają specyalną nazwę półperyodów i oznaczają się odpowiednio przez ω_1, ω_3, ω_2:

$$\omega_1 = \omega, \quad \omega_2 = \omega+\omega', \quad \omega_3 = \omega'.$$

Z figury otrzymujemy bezpośrednio:

(1) $$\wp\omega_1 = e_1, \quad \wp\omega_2 = e_2, \quad \wp\omega_3 = e_3.$$

Przypadek drugi, $\Delta < 0$. Suma $\omega+\omega'$, która w poprzednim przypadku była półperyodem, obecnie jest peryodem; półperyody określają się teraz inaczej, a mianowicie tak:

$$\omega_1 = \omega, \quad \omega_2 = \frac{\omega-\omega'}{2}, \quad \omega_3 = \frac{\omega+\omega'}{2}.$$

Z figury, odpowiadającej przypadkowi drugiemu, widać wprost, że

$$\wp\omega_1 = \wp\omega = \wp\omega' = e_1.$$

Co się tyczy wartości $\wp\frac{\omega\pm\omega'}{2}$, to te będąc urojonemi, nie mogą być otrzymane drogą geometryczną; musimy ich szukać za pomocą rachunku.

Ze wzoru, dowiedzionego w § 12, mianowicie z wzoru:

$$\wp'^2 z = 4\wp^3 z - g_2\wp z - g_3,$$

znajdujemy:

$$\wp'^2\frac{\omega}{2} = 4\left(\wp\frac{\omega}{2} - e_1\right)\left(\wp\frac{\omega}{2} - e_2\right)\left(\wp\frac{\omega}{2} - e_3\right),$$

a stąd, podstawiwszy po stronie prawej zamiast $\wp\frac{\omega}{2}$ odpowiednią wartość, podaną w końcu § 9, t. j. $e_1 + l_1$, otrzymujemy:

$$\wp'^2\frac{\omega}{2} = 4l_1(e_1 - e_2 + l_1)(e_1 - e_3 + l_1), \quad l_1 > 0,$$

Dotychczas nie zrobiliśmy nigdzie zastrzeżenia, który z dwóch pierwiastków urojonych e_2, e_3 ma być oznaczony przez e_2; otóż teraz robimy uwagę, że przez e_2 rozumieć będziemy ten pierwiastek, którego część urojona ma spółczynnik dodatni:

$$e_2 = \alpha + \beta i, \quad \beta > 0; \quad e_3 = \alpha - \beta i.$$

Następnie zgodzimy się przez $\sqrt{e_1 - e_2}$ wyrażać tę z dwóch wartości pierwiastku, która ma postać:

$$\sqrt{e_1 - e_2} = p - qi, \quad p > 0, \; q > 0;$$

a przez $\sqrt{e_1 - e_3}$ wyrażać będziemy ilość sprzężoną z poprzednią:

$$\sqrt{e_1 - e_3} = p + qi.$$

Wartość na l_1, która wchodzi do powyższego wzoru, może być napisana tak:

$$l_1 = \sqrt{e_1 - e_2}\,\sqrt{e_1 - e_3},$$

wskutek czego wzór powyższy można przedstawić w postaci:

$$\wp'^2 \frac{\omega}{2} = 4 l_1^2 (\sqrt{e_1 - e_2} + \sqrt{e_1 - e_3})^2,$$

a stąd, mając na uwadze, że $\wp' \frac{\omega}{2} < 0$, otrzymujemy:

(2) $$\wp' \frac{\omega}{2} = -2 l_1 (\sqrt{e_1 - e_2} + \sqrt{e_1 - e_3}).$$

Idąc taką samą drogą, znajdziemy wzór drugi:

(3) $$\wp' \frac{\omega'}{2} = 2 l_1 (\sqrt{e_1 - e_2} - \sqrt{e_1 - e_3}).$$

Do tych wzorów dołączamy dwa, podane w § 9 i z których tu już korzystaliśmy, mianowicie:

(4) $$\wp \frac{\omega}{2} = e_1 + l_1, \quad \wp\left(\frac{\omega'}{2}\right) = e_1 - l_1.$$

Ze wzorów (2), (3), (4) wyprowadzamy

$$\wp \frac{\omega}{2} - \wp \frac{\omega'}{2} = 2 l_1, \quad \wp \frac{\omega}{2} + \wp \frac{\omega'}{2} = 2 e_1;$$

$$\wp' \frac{\omega}{2} - \wp' \frac{\omega'}{2} = -4 l_1 \sqrt{e_1 - e_2},$$

$$\wp' \frac{\omega}{2} + \wp' \frac{\omega'}{2} = -4 l_1 \sqrt{e_1 - e_3}.$$

Wniósłszy odpowiednio otrzymane wartości w prawą stronę wzorów:

$$\wp \frac{\omega - \omega'}{2} = \frac{1}{4} \left(\frac{\wp' \frac{\omega}{2} + \wp' \frac{\omega'}{2}}{\wp \frac{\omega}{2} - \wp \frac{\omega'}{2}} \right)^2 - \left(\wp \frac{\omega}{2} + \wp \frac{\omega'}{2} \right),$$

$$\wp \frac{\omega + \omega'}{2} = \frac{1}{4} \left(\frac{\wp' \frac{\omega}{2} - \wp' \frac{\omega'}{2}}{\wp \frac{\omega}{2} - \wp \frac{\omega'}{2}} \right)^2 - \left(\wp \frac{\omega}{2} + \wp \frac{\omega'}{2} \right),$$

i uskuteczniwszy następnie należyte skrócenia, znajdujemy:

(5) $$\begin{cases} \wp\omega_2 = \wp \dfrac{\omega - \omega'}{2} = e_2, \\ \wp\omega_3 = \wp \dfrac{\omega + \omega'}{2} = e_3. \end{cases}$$

Widzimy zatem, że wzory (1), co do zewnętrznej postaci, zachodzą i w przypadku gdy $\Delta < 0$.

§ 15.

WZORY NA $\wp(u + \omega_i)$.

Wzory te otrzymaliśmy już w § 9 № 6 wprost z figury, ale tylko dla przypadku, gdy wyróżnik jest dodatni. Obecnie, przy pomocy rezultatów, otrzymanych w poprzednim paragrafie, możemy dowieść na nowo tychże wzorów w ogólniejszem jeszcze ich znaczeniu: przy wyróżniku bądź dodatnim, bądź ujemnym.

W samej rzeczy, nie zwracając uwagi na znak wyróżnika, weźmy jeden z półperyodów np. ω_i, pozostałe dwa półperyody oznaczmy przez ω_r, ω_s i szukajmy jak się przedstawi wartość $\wp(u+\omega_i)$ według wzoru (4) § 13:

$$\wp(u+\omega_i) = \frac{1}{4}\,\frac{\wp'^2 u}{(\wp u - e_i)^2} - \wp u - e_i$$

$$= \frac{(\wp u - e_r)\,(\wp u - e_s)}{\wp u - e_i} - \wp u - e_i$$

$$= \frac{(\wp u - e_i)^2 + 3\,e_i\,(\wp u - e_i) + (e_i - e_r)\,(e_i - e_s)}{\wp u - e_i} - \wp u - e_i$$

$$= \wp u - e_i + 3\,e_i + \frac{l_i^2}{\wp u - e_i} - \wp u - e_i = \frac{l_i^2}{\wp u - e_i} + e_i\,,$$

a stąd:

$$\wp(u+\omega_i) - e_i = \frac{l_i^2}{\wp u - e_i}\,.$$

§ 16.

WZÓR NA $\wp 2u$. OKREŚLENIE FUNKCYJ $\pi_i u$.

Stosując wzór na dodawanie argumentów do szczególnego przypadku $\wp(u+u)$, otrzymujemy:

$$\wp\,2u = \frac{(12\,\wp^2 u - g_2)^2}{16\,\wp'^2 u} - 2\,\wp u\,. \tag{1}$$

Wyprowadzamy stąd:

$$\wp\,2u - e_1 = \frac{\wp^4 u - 4\,e_1\,\wp^3 u + \frac{1}{2}\,g_2\,\wp^2 u + (2g_3 + g_2 e_1)\,\wp u + \frac{1}{16}\,g_2^{\,2} + g_3\,e_1}{\wp'^2 u}$$

$$= \frac{(\wp^2 u - 2\,e_1\,\wp u)^2 + (\frac{1}{2}\,g_2 - 4\,e_1^{\,2})\,\wp^2 u + (2\,g_3 + g_2\,e_1)\,\wp u + \frac{1}{16}\,g_2^{\,2} + g_3\,e_1}{\wp'^2 u}\,,$$

albo:

$$\wp 2u - e_1 = \frac{(\wp^2 u - 2\,e_1\,\wp u)^2 + (\frac{1}{2}g_2 - 4e_1^{\,2})(\wp^2 u - 2e_1\,\wp u) - 2(4e_1^{\,3} - g_2 e_1 - g_3)\,\wp u + \frac{1}{16}g_2^{\,2} + g_3 e_1}{\wp'^2 u}\,;$$

lecz e_1 czyni zadość równaniu:

$$4\,e_1^{\,3} - g_2 e_1 - g_3 = 0\,,$$

przeto:

$$\wp\,2u - e_1 = \frac{(\wp^2 u - 2\,e_1\,\wp u)^2 + (\frac{1}{2}\,g_2 - 4\,e_1^{\,2})\,(\wp^2 u - 2\,e_1\,\wp u) + \frac{1}{16}\,g_2^{\,2} + g_3\,e_1}{\wp'^2 u}$$

Licznik z prawej strony przedstawia funkcyę całkowitą drugiego stopnia dwumianu

$$\wp^2 u - 2\,e_1\,\wp u\,,$$

a jej wyznacznik równa się:

$$(\frac{1}{2}\,g_2 - 4\,e_1^{\,2})^2 - \frac{1}{4}\,g_2^{\,2} - 4\,g_3\,e_1 = 4\,e_1\,(4\,e_1^{\,3} - g_2 e_1 - g_3) = 0\,;$$

ten licznik zatem jest zupełnym kwadratem:

$$\wp\,2u - e_1 = \frac{(\wp^2 u - 2\,e_1\,\wp u + \frac{1}{4}\,g_2 - 2\,e_1^{\,2})^2}{\wp'^2 u}\,.$$

Lecz z drugiej strony znajdujemy:

$$\frac{1}{4}\,g_2 - 3\,e_1^{\,2} = -\,e_1 e_2 - e_1 e_3 - e_2 e_3 - 3\,e_1^{\,2} = -\,e_1\,(e_2 + e_3) - e_2 e_3 - 3\,e_1^{\,2}$$
$$= -\,2\,e_1^{\,2} - e_2 e_3 = -\,(e_1 - e_2)\,(e_1 - e_3) = -\,l_1^{\,2}\,;$$

podstawiwszy tę wartość w powyższym wzorze i wyciągając następnie pierwiastek kwadratowy z obu stron, znajdujemy:

$$\sqrt{\wp\,2u - e_1} = \frac{l_1^{\,2} - (\wp u - e_1)^2}{\wp' u}\,,$$

albo, co wychodzi na jedno:

$$\sqrt{\wp u - e_1} = \frac{l_1^{\,2} - (\wp\frac{u}{2} - e_1)^2}{\wp'\frac{u}{2}}\,.$$

Z obu stron tego wzoru można oczywiście e_1 zastąpić przez e_2 lub e_3 tak, że ogólnie możemy napisać:

(2) $$\sqrt{\wp u - e_i} = \frac{l_i^2 - (\wp \frac{u}{2} - e_i)^2}{\wp' \frac{u}{2}},$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

Na mocy tego wzoru wnioskujemy, że każdy z pierwiastków

$$\sqrt{\wp u - e_1}, \sqrt{\wp u - e_2}, \sqrt{\wp u - e_3}$$

jest funkcyą jednowartościową, t. j. innemi słowy, każda z trzech funkcyj

$$\wp u - e_1, \wp u - e_2, \wp u - e_3$$

jest kwadratem zupełnym.

Trzy funkcye (2) odgrywają najważniejszą rolę w teoryi funkcyj eliptycznych; oznaczać je będziemy specyalnie przez $\pi_1 u, \pi_2 u, \pi_3 u$; każda z nich jest określona w zupełności, jako funkcya jednowartościowa dla wszelkich wartości argumentu, za pomocą wzoru:

(3) $$\pi_i u = \frac{l_i^2 - (\wp \frac{u}{2} - e_i)^2}{\wp' \frac{u}{2}}.$$

Stąd powinny otrzymać się wszystkie ich własności zasadnicze.

§ 17.

DZIELENIE ARGUMENTU PRZEZ 2.

Zadanie, jak znaleść $\wp \frac{u}{2}$, gdy $\wp u$ jest dane, polega na rozwiązaniu równania stopnia czwartego, § 16, (1):

(1) $$\wp u = \frac{\wp^4 \frac{u}{2} + \frac{1}{2} g_2 \wp^2 \frac{u}{2} + 2 g_3 \wp \frac{u}{2} + \frac{1}{16} g_2^2}{4 \wp^3 \frac{u}{2} - g_2 \wp \frac{u}{2} - g_3}.$$

To rozwiązanie zaś uskutecznią się bardzo łatwo, przy pomocy pierwiastków wyłącznie kwadratowych, dzięki temu, że ilości e_1, e_2, e_3 są tu uważane jako dane.

Rzeczywiście, weźmy, zamiast równania poprzedniego, równoważne z niem równanie (2) § 16, które może być napisane w trzech odmianach, mianowicie:

(2) $$\frac{\pi_1 u}{l_1^2 - (\wp \frac{u}{2} - e_1)^2} = \frac{\pi_2 u}{l_2^2 - (\wp \frac{u}{2} - e_2)^2} = \frac{\pi_3 u}{l_3^2 - (\wp \frac{u}{2} - e_3)^2} = \frac{1}{\wp' \frac{u}{2}}.$$

Następnie weźmy pod uwagę trzy funkcye kwadratowe zmiennej niezależnej x:

$$\varphi_1 = l_1^2 - (x - e_1)^2, \quad \varphi_2 = l_2^2 - (x - e_2)^2, \quad \varphi_3 = l_3^2 - (x - e_3).$$

Łatwo się przekonać o istnieniu następujących równości:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2(e_1 - e_2)(x - e_3), \quad \varphi_1 + \varphi_2 = -2(x - e_1)(x - e_2),$$
$$\varphi_1 - \varphi_3 = 2(e_1 - e_3)(x - e_2), \quad \varphi_1 + \varphi_3 = -2(x - e_1)(x - e_3),$$
$$\varphi_2 - \varphi_3 = 2(e_2 - e_3)(x - e_1), \quad \varphi_2 + \varphi_3 = -2(x - e_2)(x - e_3);$$

stąd znów wyprowadzamy:

$$\frac{x - e_1}{e_1 - e_3} = -\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{\varphi_1 - \varphi_3}; \quad \frac{x - e_2}{e_2 - e_1} = -\frac{\varphi_3 + \varphi_2}{\varphi_2 - \varphi_1}; \quad \frac{x - e_3}{e_3 - e_1} = -\frac{\varphi_2 + \varphi_3}{\varphi_3 - \varphi_1}.$$

Uczyniwszy teraz w tych równościach $x = \wp \frac{u}{2}$ i biorąc pod uwagę, że, na mocy związków (2), wartości $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ można zastąpić wartościami odpowiednio proporcyonalnemi $\pi_1 u, \pi_2 u, \pi_3 u$, otrzymujemy:

$$\frac{\wp \frac{u}{2} - e_1}{e_1 - e_3} = \frac{\pi_2 u + \pi_1 u}{\pi_3 u - \pi_1 u}, \quad \frac{\wp \frac{u}{2} - e_2}{e_2 - e_1} = \frac{\pi_3 u + \pi_2 u}{\pi_1 u - \pi_2 u},$$

$$\frac{\wp \frac{u}{2} - e_3}{e_3 - e_1} = \frac{\pi_2 u + \pi_3 u}{\pi_1 u - \pi_3 u}.$$

Każdą z tych równości można przywieść do postaci bardziej symetrycznej. Naprzykład, weźmy pierwszą z nich, pomnóżmy licznik i mianownik z prawej strony przez $\pi_1 u + \pi_3 u$, następnie pamiętając, że $\pi_3{}^2 u - \pi_1{}^2 u = e_1 - e_3$, skróćmy obie strony przez $e_1 - e_3$, a otrzymamy:

$$\wp\frac{u}{2} - e_1 = (\pi_1 u + \pi_2 u)\,(\pi_1 u + \pi_3 u)\,.$$

Wogóle, oznaczywszy przez i, r, s jakąkolwiek kombinacyę z trzech cyfr 1, 2, 3, możemy napisać:

$$\wp\frac{u}{2} - e_i = (\pi_i u + \pi_r u)\,(\pi_i u + \pi_s u)\,,$$

albo:

$$\wp\frac{u}{2} - e_i = (\sqrt{\wp u - e_i} + \sqrt{\wp u - e_r})\,(\sqrt{\wp u - e_i} + \sqrt{\wp u - e_s})\,.$$

Tak się przedstawia ogólne rozwiązanie równania (1); cztery pierwiastki odpowiadają różnym znakom, jakie można postawić przed pierwiastkami kwadratowemi z prawej strony.

Przeciwnie, jeśli powyższy wzór napiszemy tak:

$$(3)\qquad \pi_i\frac{u}{2} = \sqrt{(\pi_i u + \pi_r u)\,(\pi_i u + \pi_s u)},$$

to otrzymamy rozwiązanie zadania dla funkcyj $\pi_i u$ o dzieleniu argumentu przez 2.

§ 18.

WZORY NA POCHODNE $\pi'_i u$.

Ze wzoru

$$\wp'^2 u = 4\,(\wp u - e_1)\,(\wp u - e_2)\,(\wp u - e_3)$$

otrzymujemy:

$$(1)\qquad \wp' u = -2\,\pi_1 u\,\pi_2 u\,\pi_3 u\,.$$

Znak ujemny z prawej strony został wprowadzony na tej zasadzie, że w granicach od $u = 0$ do $u = \omega$ każda z funkcyj $\pi_i u$ jest dodatnią, gdy tymczasem funkcya $\wp' u$ jest ujemna.

Podstawiwszy w obu stronach (1) $\frac{u}{2}$ zamiast u i następnie korzystając ze wzoru (3) § 17, znajdujemy:

$$(2)\qquad \wp'\frac{u}{2} = -2\,(\pi_1 u + \pi_2 u)\,(\pi_1 u + \pi_3 u)\,(\pi_2 u + \pi_3 u)\,.$$

Dalej, różniczkując obie strony równości

$$\pi_i^2 u = \wp u - e_i$$

i korzystając ze wzoru (1), otrzymujemy:

$$(3)\qquad \pi'_i u = -\pi_r u\,\pi_s u\,,$$

gdzie i, r, s przedstawia dowolną kombinacyę cyfr 1, 2, 3.

Kładąc w obu stronach $\frac{u}{2}$ zamiast u i biorąc pod uwagę (3) § 17, znajdujemy:

$$\pi'_i\frac{u}{2} = -\pi_i\frac{u}{2}\,(\pi_r u + \pi_s u)$$

albo:

$$(4)\qquad \frac{d\log \pi_i u}{du} = -(\pi_r 2u + \pi_s 2u).$$

§ 19.

WZÓR NA $\pi_i(u+v)$.

Już w § 16 dowiedziono, że różnica $\wp u - e_i$ jest kwadratem zupełnym; wynika stąd, że i różnica $\wp(u+v) - e_i$ musi być kwadratem zupełnym. Rachunek, przeprowadzony w celu otrzymania pierwiastku kwadratowego z pomienionej różnicy, doprowadzi nas do wzorów nowych, mających pierwszorzędne znaczenie w teoryi funkcyj eliptycznych.

Zgodzimy się, jak było dotąd, przez i, r, s rozumieć jakąkolwiek kombinacyę z trzech cyfr 1, 2, 3.

Weźmy następnie wzór:

$$\wp(u+v) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}\right)^2 - \wp u - \wp v$$

i napiszmy go tak:

$$\wp(u+v)=\frac{\wp^2u\,\wp v+\wp^2v\,\wp u-\frac{g_2}{4}(\wp u+\wp v)-\frac{g_3}{2}-\frac{1}{2}\wp'u\,\wp'v}{(\wp u-\wp v)^2}.$$

Podstawmy w liczniku z prawej strony zamiast g_2 i g_3 odpowiednie wyrażenia według wzorów:

$$\frac{1}{2}g_3=2\,e_ie_re_s\,,\quad \frac{1}{4}g_2=e_i^2-e_re_s\,;$$

będzie:

$$\wp(u+v)=\frac{\wp^2u\,\wp v+\wp^2v\,\wp u+(e_re_s-e_i^2)(\wp u+\wp v)-2\,e_ie_re_s-\frac{1}{4}\wp'u\,\wp'v}{(\wp u-\wp v)^2}.$$

Odejmując po obu stronach po e_i i kładąc dla skrócenia:

$$M=\wp^2u\,(\wp v-e_i)+e_i\,\wp u\,\wp v+e_re_s\,\wp v-e_i^2\,\wp u-e_i^2\,\wp u-e_ie_re_s\,,$$

$$N=\wp^2v\,(\wp u-e_i)+e_i\,\wp u\,\wp v+e_re_s\,\wp u-e_i^2\,\wp v-e_i^2\,\wp v-e_ie_re_s\,,$$

znajdziemy:

$$\wp(u+v)-e_i=\frac{M+N-\frac{1}{2}\wp'u\,\wp'v}{(\wp u-\wp v)^2}.$$

Należy zauważyć, że wielomiany M i N otrzymują się jeden z drugiego przez przestawienie między sobą liter u i v.

Zwróćmy się teraz do bliższego rozpatrzenia wielomianu M; możemy napisać:

$$M=(\wp v-e_i)\,\wp^2u+(\wp v-e_i)\,e_i\,\wp u+(\wp v-e_i)\,e_re_s\,,$$

$$M=(\wp v-e_i)\,(\wp^2u+e_i\,\wp u+e_re_s)\,,$$

$$M=(\wp v-e_i)\,(\wp^2u-(e_r+e_s)\,\wp u+e_re_s)\,.$$

Ostatecznie mamy:

$$M=(\wp v-e_i)\,(\wp u-e_r)\,(\wp u-e_s)\,,$$

a stąd:

$$N=(\wp u-e_i)\,(\wp v-e_r)\,(\wp v-e_s)\,.$$

Wniósłszy w powyższy wzór zamiast M i N otrzymane wartości, otrzymujemy:

$$\wp(u+v)-e_i=\frac{(\wp u-e_r)(\wp u-e_s)(\wp v-e_i)+(\wp v-e_r)(\wp v-e_s)(\wp u-e_i)-\frac{1}{2}\wp'u\,\wp'v}{(\wp u-\wp v)^2}.$$

Na mocy znanych nam wzorów, mianowicie:

$$\wp u-e_i=\pi_i^2u\,,\quad \wp'u=-2\,\pi_1u\,\pi_2u\,\pi_3u\,,$$

otrzymaną równość możemy napisać tak:

$$\pi_i^2(u+v)=\frac{\pi_r^2u\,\pi_s^2u\,\pi_i^2v+\pi_r^2v\,\pi_s^2v\,\pi_i^2u-2\,\pi_1u\,\pi_1v\,\pi_2u\,\pi_2v\,\pi_3u\,\pi_3v}{(\pi_i^2u-\pi_i^2v)^2},$$

lub też:

$$\pi_i^2(u+v)=\left[-\frac{\pi_ru\,\pi_su\,\pi_iv-\pi_rv\,\pi_sv\,\pi_iu}{\pi_i^2u-\pi_i^2v}\right]^2.$$

Wyciągając z obu stron pierwiastek kwadratowy i biorąc pod uwagę że przy wartościach nieskończenie małych dodatnich na u wartość odpowiednia funkcyj π_iu jest nieskończenie wielka dodatnia, tak że:

$$\lim\left[\pi_iu-\frac{1}{u}\right]=0\,,$$

znajdziemy:

(1) $$\pi_i(u+v)=\frac{\pi_ru\,\pi_su\,\pi_iv-\pi_rv\,\pi_sv\,\pi_iu}{\pi_i^2u-\pi_i^2v}.$$

Wzorowi temu możemy dać inną, często dogodniejszą postać; należy dla tego pomnożyć licznik i mianownik z prawej strony przez

$$\pi_ru\,\pi_su\,\pi_iv+\pi_rv\,\pi_sv\,\pi_iu\,,$$

a otrzymamy:

$$\pi_i(u+v)=\frac{(\wp u-e_r)(\wp u-e_s)(\wp v-e_i)-(\wp v-e_r)(\wp v-e_s)(\wp u-e_i)}{(\wp u-\wp v)(\pi_iu\,\pi_rv\,\pi_sv+\pi_iv\,\pi_ru\,\pi_su)}.$$

Licznik z prawej strony przedstawia funkcyę całkowitą drugiego stopnia wielkości $\wp u$, podzielną przez funkcyę liniową $\wp u - \wp v$; uskuteczniwszy dzielenie, znajdziemy:

$$\frac{(\wp u - e_r)(\wp u - e_s)(\wp v - e_i) - (\wp v - e_r)(\wp v - e_s)(\wp u - e_i)}{\wp u - \wp v}$$

$$= (\wp v - e_i)(\wp u + \wp v + e_i) - (\wp v - e_r)(\wp v - e_s)$$

$$= (\wp v - e_i)(\wp u - e_i) + (\wp v - e_i)(\wp v + 2e_i) - (\wp v - e_r)(\wp v - e_s)$$

$$= (\wp v - e_i)(\wp u - e_i) - (2e_i^2 + e_r e_s)$$

$$= (\wp v - e_i)(\wp u - e_i) - (e_i - e_r)(e_i - e_s)$$

$$= (\wp v - e_i)(\wp u - e_i) - l_i^2 .$$

Ostatecznie więc otrzymujemy:

(2) $$\pi_i(u+v) = \frac{\pi_i^2 u\, \pi_i^2 v - l_i^2}{\pi_i u\, \pi_r v\, \pi_s v + \pi_i v\, \pi_r u\, \pi_s u} .$$

§ 20.

PRAWO JEDNORODNOŚCI. OKREŚLENIE FUNKCYJ: sn$u$, cn$u$, dn$u$.

Ilości, z któremi tu mieliśmy do czynienia, tak stałe jak i zmienne, podlegają szczególnemu prawu jednorodności, które sprawdza się bezpośrednio przy pomocy samego ich określenia. Trzy pierwiastki e_1, e_2, e_3, z których dwa są uważane jako parametry dowolne, mogą przybierać dowolny mnożnik t; mając to na względzie, zgódźmy się uważać każdy z trzech wymienionych pierwiastków jako ilość rzędu pierwszego. Dalej, z pośród ilości zmiennych wybierzmy odciętą $x (= \wp u)$ za ilość również rzędu pierwszego, rozumiejąc przez to, że pozostawiamy sobie prawo zamiany x na tx. Inne parametry i ilości zmienne, uważane jako zależne raz od e_1, e_2, e_3, drugi raz od e_1, e_2, e_3 i x, wskutek zamiany e_1, e_2, e_3, x odpowiednio na te_1, te_2, te_3, tx, przyjmują mnożnik postaci t^m, gdzie m bywa różne dla różnych przypadków, i nazywa się r z ę d e m odpowiedniej ilości.

W następującej tabliczce są podane rzędy różnych elementów; sprawdzenie pozostawiamy czytelnikowi.

Parametry i ilości zmienne.	Odpowiedni rząd.	Parametry i ilości zmienne.	Odpowiedni rząd.
e_i	1	$\wp' u$	$\frac{3}{2}$
$\wp u$	1	ω_i	$-\frac{1}{2}$
g_2	2	$\pi_i u$	$\frac{1}{2}$
g_3	3	$\pi_i' u$	1
$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$	0	$K = \frac{\omega}{\sqrt{\lambda}}$	0
$\lambda = \frac{1}{e_1 - e_3}$	-1	$iK' = \frac{\omega'}{\sqrt{\lambda}}$	0.
$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2$	6		
u	$-\frac{1}{2}$		

Jeśli zgodzimy się przyjąć za parametry zasadnicze k^2 i λ t. j. moduł i mnożnik zasadniczy, to chcąc ujawnić parametry, możemy wyrażenia funkcyj $\wp u$ i $\pi_i u$ przedstawić odpowiednio tak:

$$\wp u = \wp(u;\lambda, k^2), \quad \pi_i u = \pi_i(u;\lambda, k^2);$$

a wtedy prawo jednorodności dla tych funkcyj wyrazi się przez następujące tożsamości:

$$\wp\left(\frac{u}{\sqrt{t}};\frac{\lambda}{t}, k^2\right) = t\wp(u;\lambda, k^2),$$

$$\pi_i\left(\frac{u}{\sqrt{t}};\frac{\lambda}{t}; k^2\right) = \sqrt{t}\,\pi_i(u;\lambda, k^2);$$

stąd, kładąc $t = \lambda$, otrzymujemy:

$$\wp(u;\lambda, k^2) = \frac{1}{\lambda}\wp\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}; 1, k^2\right),$$

$$\pi_i(u;\lambda, k^2) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\pi_i\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}, 1, k^2\right).$$

Więc tak $\wp u$ jak i $\pi_i u$ sprowadzają się do funkcyj o jednym parametrze k^2, mnożnik zaś przyłącza się do argumentu.

Do teoryi funkcyj eliptycznych były wprowadzone trzy funkcye sn$u$, cn$u$, dn$u$, z których każda zależy od jednego tylko parametru, mianowicie od k^2; żadnemu prawu jednorodności one nie podlegają, i wyrażają się przez funkcye $\pi_i u$ w sposób następujący:

(1) $$\frac{\operatorname{sn} u}{1} = \frac{\operatorname{cn} u}{\pi_1(u; 1, k^2)} = \frac{\operatorname{dn} u}{\pi_2(u; 1, k^2)} = \frac{1}{\pi_3(u; 1, k^2)}.$$

Odwrotnie, każda z funkcyj $\pi_i u$, przy jakichkolwiek wartościach parametrów λ i k^2, może być wyrażona za pomocą funkcyj $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$; na to mamy wzory:

(2) $$\frac{\pi_1 u}{\operatorname{cn}\frac{u}{\sqrt{\lambda}}} = \frac{\pi_2 u}{\operatorname{dn}\frac{u}{\sqrt{\lambda}}} = \frac{\pi_3 u}{1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}\operatorname{sn}\frac{u}{\sqrt{\lambda}}}.$$

§ 21.

ZASADNICZE WŁASNOŚCI FUNKCYJ $\pi_1 u$.

W tym paragrafie, jak i w dwóch następnych, podamy ważniejsze własności funkcyj $\pi_i u$. Ponieważ wywód nigdzie nie przedstawia najmniejszej trudności, więc pozostawiliśmy go czytelnikowi.

Każda z funkcyj $\pi_i u$ lubo jest określona na figurze, jest jednak określona niedokładnie, bo znak jej wartości musi być wyznaczony przy pomocy osobnego rozumowania. Należy w tym razie mieć na względzie, że:

1-o Dla wartości nieskończenie małych u funkcya $\pi_i u$ jest ilością nieskończenie wielką, różniącą się od $\frac{1}{u}$ o ilość nieskończenie małą. Jest to prawo zachowywania się funkcyj $\pi_i u$ przy nieskończenie małych wartościach argumentu.

2-o Jeżeli $\pi_i a = 0$, to dla wartości argumentu nieskończenie blizkich wielkości a, $u = a + \Delta a$, odpowiednia wartość $\pi_i u$ jest ilością nieskończenie małą pierwszego rzędu, która w przybliżeniu (po odrzuceniu nieskończenie małych ilości wyższego rzędu) wyraża się tak:

$$\pi_i(a + \Delta a) = -\pi_r a\, \pi_s a\, \Delta a.$$

Jest to prawo zachowywania się funkcyj $\pi_i u$ w pobliżu zera.

Nareszcie uważamy za stosowne ostrzedz tu czytelnika, że wprowadzone w poniższych wzorach półperyody ω_1, ω_2, ω_3 określone są tak, jak było powiedziane w § 14, osobno dla przypadku $\Delta > 0$, i osobno dla $\Delta < 0$.

Charakterystyczne własności funkcyj $\pi_1 u$ są wyrażone przez szereg następujących równości:

(1) $$\pi_1(-u) = -\pi_1 u,$$

(2) $$\pi_1(u + 2\omega_1) = \pi_1 u,$$

(3) $$\pi_1(u + 2\omega_3) = -\pi_1 u,$$

(4) $$\pi_1(u + 2\omega_2) = -\pi_1 u.$$

Zera i nieskończoności funkcyj $\pi_1 u$ są określone wzorami:

(5) $$\pi_1(2n\omega_1 + 2n'\omega_3) = \infty,$$

(6) $$\pi_1((2n+1)\omega_1 + 2n'\omega_3) = 0,$$

gdzie n i n' oznaczają liczby całkowite dowolne.

(7) $$\pi_1(u + \omega_1) = -\frac{l_1}{\pi_1 u},$$

gdzie $l_1 = \sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} > 0$.

(8) $$\pi_1(\omega_1 + u) = -\pi_1(\omega_1 - u).$$

(9) $$\pi_1(u + \omega_3) = -i\sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\pi_2 u}{\pi_3 u},$$

gdzie $\sqrt{e_1 - e_3} > 0$, jeśli wyróżnik jest dodatni; w przeciwnym razie $\sqrt{e_1 - e_3}$ jest ilością urojoną, której część rzeczywista jest dodatnia.

(10) $$\pi_1(\omega_3 + u) = \pi_1(\omega_3 - u).$$

(11) $$\pi_1(u + \omega_2) = -i\sqrt{e_1 - e_2}\,\frac{\pi_3 u}{\pi_2 u},$$

gdzie $\sqrt{e_1 - e_2} > 0$, jeśli $\Delta > 0$; w przypadku $\Delta < 0$, spółczynnik $\sqrt{e_1 - e_2}$ jest urojony, a jego część rzeczywista ma być ujemna.

(12) $$\pi_1(\omega_2 + u) = \pi_1(\omega_2 - u).$$

(13) $$\left\{\begin{aligned} \pi_1(u+v) &= \frac{\pi_2 u\, \pi_3 u\, \pi_1 v - \pi_1 u\, \pi_2 v\, \pi_3 v}{\pi_1^2 u - \pi_1^2 v} \\ \pi_1(u+v) &= \frac{\pi_1^2 u\, \pi_1^2 v - l_1^2}{\pi_1 u\, \pi_2 v\, \pi_3 v + \pi_2 u\, \pi_3 u\, \pi_1 v} \end{aligned}\right.,$$

(14) $$\pi_1 2u = \frac{\pi_1^4 u - l_1^2}{2\pi_1 u\, \pi_2 u\, \pi_3 u}.$$

Podajemy nakoniec przebieg funkcyj $\pi_1 u$, odpowiadający w różnych przypadkach ruchom punktu po obwodzie krzywej sześciennej zespolonej; ale ograniczamy się na założeniu, że $\Delta > 0$, bo ten przypadek ma wyłączne znaczenie w zastosowaniach:

$$u = 0 \;\ldots\; \frac{\omega_1}{2} \;\ldots\; \omega_1 \;\ldots\; \frac{3\omega_1}{2} \;\ldots\; 2\omega_1 ,$$

$$\pi_1 u = +\infty \;\ldots\; \sqrt{l_1} \;\ldots\; 0 \;\ldots\; -\sqrt{l_1} \;\ldots\; -\infty .$$

$$u = 0 \;\ldots\; \frac{\omega_3}{2} \;\ldots\; \omega_3 \;\ldots\; \frac{3\omega_3}{2} \;\ldots\; 2\omega_3 ,$$

$$\pi_1 u = -i\infty \;\ldots\; -ia \;\ldots\; -i\sqrt{e_1-e_3} \;\ldots\; -ia \;\ldots\; -i\infty ,$$

gdzie dla skrócenia położono:

$$a = \sqrt{e_1 - e_3 + l_3}, \qquad (l_3 > 0).$$

$$u = \omega_1 \;\ldots\; \omega_1 + \frac{\omega_3}{2} \;\ldots\; \omega_1 + \omega_3 \;\ldots\; \omega_1 + \frac{3\omega_3}{2} \;\ldots\; \omega_1 + 2\omega_3 ,$$

$$\pi_1 u = 0 \;\ldots\; -ia \;\ldots\; -i\sqrt{e_1-e_2} \;\ldots\; -ia \;\ldots\; 0 ,$$

gdzie dla skrócenia położono:

$$a = \sqrt{e_1 - e_3 - l_3} .$$

$$u = \omega_3 \;\ldots\; \omega_3 + \frac{\omega_1}{2} \;\ldots\; \omega_3 + \omega_1 \;\ldots\; \omega_3 + \frac{3\omega_1}{2} \;\ldots\; \omega_3 + 2\omega_1 ,$$

$$\pi_1 u = -i\sqrt{e_1-e_3} \;\ldots\; -ia \;\ldots\; -i\sqrt{e_1-e_2} \;\ldots\; -ia \;\ldots\; -i\sqrt{e_1-e_5} ,$$

gdzie $a = \sqrt{l_1}$.

§ 22.

WZORY NA $\pi_2 u$.

$$\pi_2(-u) = -\pi_2 u ,$$
$$\pi_2(u + 2\omega_1) = -\pi_2 u ,$$
$$\pi_2(u + 2\omega_3) = -\pi_2 u ,$$
$$\pi_2(u + 2\omega_2) = \pi_2 u ,$$
$$\pi_2(2n\omega_1 + 2n'\omega_3) = \infty ,$$
$$\pi_2((2n+1)\omega_1 + (2n'+1)\omega_3) = 0 ,$$
$$\pi_2(u + \omega_1) = \sqrt{e_1-e_2}\,\frac{\pi_3 u}{\pi_1 u} ,$$

przytem część rzeczywista pierwiastku $\sqrt{e_1-e_2}$ jest dodatnia.

$$\pi_2(\omega_1 + u) = \pi_2(\omega_1 - u)$$

$$\pi_2(u + \omega_3) = -i\sqrt{e_2-e_3}\,\frac{\pi_1 u}{\pi_3 u} ,$$

przyczem część rzeczywista pierwiastku $\sqrt{e_2-e_3}$ ma być dodatnia.

$$\pi_2(\omega_3 + u) = \pi_2(\omega_3 - u)$$

$$\pi_2(u + \omega_2) = \frac{i\sqrt{(e_1-e_2)(e_2-e_3)}}{\pi_2 u} ,$$

gdzie pierwiastek kwadratowy powinien mieć część rzeczywistą ujemną jeżeli $\Delta < 0$; w przeciwnym razie on oznacza wartość dodatnią.

$$\pi_2(\omega_2 + u) = -\pi_2(\omega_2 - u) .$$

$$\pi_2(u + v) = \frac{\pi_1 u\,\pi_3 u\,\pi_2 v - \pi_2 u\,\pi_1 v\,\pi_3 v}{\pi_2^2 u - \pi_2^2 v} ,$$

$$\pi_2(u + v) = \frac{\pi_2^2 u\,\pi_2^2 v - l_2^2}{\pi_2 u\,\pi_1 v\,\pi_3 v + \pi_1 u\,\pi_3 u\,\pi_2 v} ,$$

$$\pi_2 2u = \frac{\pi_2^4 u - l_2^2}{2\pi_1 u\,\pi_2 u\,\pi_3 u} .$$

Przebieg funkcyj $\pi_2 u$ w przypadku $\Delta > 0$.

$$u = 0 \;\ldots\; \frac{\omega_1}{2} \;\ldots\; \omega_1 \;\ldots\; \frac{3\omega_1}{2} \;\ldots\; 2\omega_1$$

$$\pi_2 u = +\infty \;\ldots\; a \;\ldots\; \sqrt{e_1-e_2} \;\ldots\; a \;\ldots\; +\infty ,$$

przyczem:

$$a = \sqrt{e_1 - e_2 + l_1} ;$$

$$u = 0 \;\ldots\; \frac{\omega_3}{2} \;\ldots\; \omega_3 \;\ldots\; \frac{3\omega_3}{2} \;\ldots\; 2\omega_3 ,$$

$$\pi_2 u = -i\infty \;\ldots\; -ia \;\ldots\; -i\sqrt{e_2-e_3} \;\ldots\; -ia \;\ldots\; -i\infty ,$$

$$a = \sqrt{e_2 - e_3 + l_3} ;$$

$$u = \omega_1 \quad \ldots\ldots \omega_1 + \frac{\omega_3}{2} \ldots\ldots \omega_1 + \omega_3 \ldots\ldots \omega_1 + \frac{3}{2}\omega_3 \ldots\ldots \omega_1 + 2\omega_3 ,$$

$$\pi_2 u = \sqrt{e_1 - e_2} \ldots\ldots \quad a \quad \ldots\ldots \quad 0 \quad \ldots\ldots \quad -a \quad \ldots\ldots -\sqrt{e_1 - e_2}$$

$$a = \sqrt{l_3 - (e_2 - e_3)} ;$$

$$u = \omega_3 \quad \ldots\ldots \omega_3 + \frac{\omega_1}{2} \ldots\ldots \omega_3 + \omega_1 \ldots\ldots \omega_3 + \frac{3\omega_1}{2} \ldots\ldots \omega_3 + 2\omega_1 ,$$

$$\pi_2 u = -i\sqrt{e_2 - e_3} \ldots\ldots -ia \ldots\ldots 0 \ldots\ldots +ia \ldots\ldots +i\sqrt{e_2 - e_3} ,$$

$$a = \sqrt{l_1 - (e_1 - e_2)} .$$

§ 23.

WZORY NA $\pi_3 u$.

$$\pi_3(-u) = -\pi_3 u ,$$

$$\pi_3(u + 2\omega_1) = -\pi_3 u ,$$

$$\pi_3(u + 2\omega_3) = \pi_3 u ,$$

$$\pi_3(u + 2\omega_2) = -\pi_3 u$$

$$\pi_3(2n\omega_1 + 2n'\omega_3) = \infty ,$$

$$\pi_3(2n\omega_1 + (2n'+1)\omega_3) = 0 ,$$

$$\pi_3(u + \omega_1) = \sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\pi_2 u}{\pi_1 u} ,$$

$$\pi_3(\omega_1 + u) = \pi_3(\omega_1 - u) ,$$

rzeczywista część pierwiastku $\sqrt{e_1 - e_3}$ ma być dodatnia.

$$\pi_3(u + \omega_3) = \frac{l_3}{\pi_3 u} ,$$

gdzie l_3 oznacza ilość dodatnią w przypadku $\Delta > 0$; w przeciwnym razie część rzeczywista tej wielkości l_3 powinna być dodatnia.

$$\pi_3(\omega_3 + u) = -\pi_3(\omega_3 - u) ;$$

$$\pi_3(u + \omega_2) = \sqrt{e_2 - e_3}\,\frac{\pi_1 u}{\pi_2 u} ,$$

gdzie pierwiastek kwadratowy oznacza ilość dodatnią w przypadku $\Delta > 0$, a w przypadku $\Delta < 0$ część rzeczywista powinna być dodatnia.

$$\pi_3(\omega_2 + u) = \pi_3(\omega_2 - u) ,$$

$$\pi_3(u + v) = \frac{\pi_1 u\, \pi_2 u\, \pi_3 v - \pi_3 u\, \pi_1 v\, \pi_2 v}{\pi_3{}^2 u - \pi_3{}^3 v} ,$$

$$\pi_3(u + v) = \frac{\pi_3{}^2 u\, \pi_3{}^2 v - l_3{}^2}{\pi_3 u\, \pi_1 v\, \pi_2 v + \pi_1 u\, \pi_2 u\, \pi_3 v} .$$

$$\pi_3 2u = \frac{\pi_3{}^4 u - l_3{}^2}{2\pi_1 u\, \pi_2 u\, \pi_3 u} .$$

Przebieg funkcyj $\pi_3 u$ w przypadku $\Delta > 0$.

$$u = 0 \quad \ldots\ldots \frac{\omega_1}{2} \ldots\ldots \quad \omega_1 \quad \ldots\ldots \frac{3\omega_1}{2} \ldots\ldots 2\omega_1$$

$$\pi_3 u = +\infty \ldots\ldots \quad a \quad \ldots\ldots \sqrt{e_1 - e_3} \ldots\ldots \quad a \quad \ldots\ldots +\infty ,$$

$$a = \sqrt{e_1 - e_3 + l_1} ;$$

$$u = 0 \quad \ldots\ldots \frac{\omega_3}{2} \ldots\ldots \omega_3 \ldots\ldots \frac{3\omega_3}{2} \ldots\ldots 2\omega_3$$

$$\pi_3 u = -i\infty \ldots\ldots -ia \ldots\ldots 0 \ldots\ldots ia \ldots\ldots +i\infty ,$$

$$a = \sqrt{l_3} ;$$

$$u = \omega_1 \quad \ldots\ldots \omega_1 + \frac{\omega_3}{2} \ldots\ldots \omega_1 + \omega_3 \ldots\ldots \omega_1 + \frac{3}{2}\omega_3 \ldots\ldots \omega_1 + 2\omega_3 ,$$

$$\pi_3 u = \sqrt{e_1 - e_3} \ldots\ldots \quad a \quad \ldots\ldots \sqrt{e_2 - e_3} \ldots\ldots \quad a \quad \ldots\ldots \sqrt{e_1 - e_3} ,$$

$$a = \sqrt{l_3} ;$$

$$u = \omega_3 \ldots\ldots \omega_3 + \frac{\omega_1}{2} \ldots\ldots \omega_3 + \omega_1 \ldots\ldots \omega_3 + \frac{3\omega_1}{2} \ldots\ldots \omega_3 + 2\omega_1 ,$$

$$\pi_3 u = 0 \ldots\ldots \quad a \quad \ldots\ldots \sqrt{e_2 - e_3} \ldots\ldots \quad a \quad \ldots\ldots \quad 0 ,$$

$$a = \sqrt{e_1 - e_3 - l_1} .$$

§ 24.

PRZEDSTAWIENIE GEOMETRYCZNE TRZECH FUNKCYJ: $\mathrm{sn}^2 u$, $\mathrm{cn}^2 u$, $\mathrm{dn}^2 u$.

W przypadku $\Delta > 0$, dla każdego punktu na obwodzie krzywej sześciennej zespolonej odpowiednie wartości funkcyj $\mathrm{sn}^2 u$, $\mathrm{cn}^2 u$, $\mathrm{dn}^2 u$ są rzeczywiste. Mając na względzie szczególne znaczenie, jakie nabyły w nauce i w zastosowaniach funkcye $\mathrm{sn}\, u$, $\mathrm{cn}\, u$, $\mathrm{dn}\, u$, postaramy się pokazać, jak przedstawiają się na figurze ich kwadraty i jak w ten sposób uwidocznia się przebieg ich wartości we wszystkich punktach krzywej sześciennej.

Więc, jak zwykle, weźmy pod uwagę krzywą zespoloną przy założeniu, że mnożnik jej równa się jedności, moduł zaś pozostawiamy dowolnym.

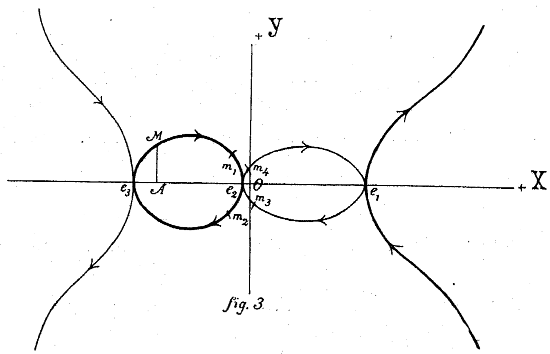

fig. 3

Według przyjętego wogóle sposobu oznaczania elementów krzywej w obecnym przypadku mamy:

$$\text{odcinek } Oe_i = e_i\,, \qquad (i = 1, 2, 3)\,;$$

$$\text{odcinek } e_3 e_1 = e_1 - e_3 = 1\,,$$

$$\text{„} \quad e_3 e_2 = e_2 - e_3 = k^2\,,$$

$$\text{„} \quad e_2 e_1 = e_1 - e_2 = k'^2\,;$$

$$K = \omega\,, \quad \text{i} \quad K' = \omega'\,.$$

Następnie, za początek argumentu zgodzimy się przyjąć obecnie nie punkt w nieskończoności, jak to było dotychczas, lecz jeden z wierzchołków, mianowicie e_3.

Jakiemukolwiek punktowi M, wziętemu na obwodzie krzywej zespolonej, odpowiadają dwa argumenty: dawny v, liczony od punktu w nieskończoności, i nowy u, liczony od punktu e_3; między niemi zachodzi oczywiście następujący prosty związek:

$$v - u = \omega'\,,$$

przyczem zostały odrzucone dowolne wielokrotności 2ω i $2\omega'$, których należy się domyślać.

Spuśćmy teraz z punktu M prostopadłą na oś X i, oznaczywszy wartość każdego z trzech odcinków e_3A, Ae_2, Ae_1, nierozłącznie z przynależnym kierunkiem, odpowiednio przez a_3, a_2, a_1, szukajmy ich zależności od argumentu u; znajdujemy:

$$a_3 = OA - Oe_3 = \wp v - e_3\,,$$

$$a_2 = AO + Oe_2 = -\wp v + e_2\,,$$

$$a_1 = AO + Oe_1 = -\wp v + e_1\,.$$

Podstawiwszy po stronie prawej $u + \omega'$ zamiast v i przyjąwszy pod uwagę znany wzór:

$$\wp(u + \omega') - e_3 = \frac{(e_1 - e_3)\,(e_2 - e_3)}{\wp u - e_3}\,,$$

który, w obecnym przypadku może być napisany tak:

$$\wp(u + \omega') - e_3 = \frac{k^2}{\pi_3{}^2 u}\,,$$

otrzymujemy:

$$a_3 = \frac{k^2}{\pi_3{}^2 u}\,, \quad a_2 = k^2\,\frac{\pi_1{}^2 u}{\pi_3{}^2 u}\,, \quad a_1 = \frac{\pi_2{}^2 u}{\pi_3{}^2 u}\,,$$

albo:

$$\mathrm{sn}^2 u = \frac{a_3}{k^2}\,, \quad \mathrm{cn}^2 u = \frac{a_2}{k^2}\,, \quad \mathrm{dn}^2 u = a_1\,.$$

Stąd okazuje się, że trzy odcinki a_3, a_2, a_1, uważane jako funkcye wielkości u, dają geometryczne przedstawienie funkcyj $\mathrm{sn}^2 u$, $\mathrm{cn}^2 u$, $\mathrm{dn}^2 u$.

Przechodząc od kwadratów do samych funkcyj $\mathrm{sn}\, u$, $\mathrm{cn}\, u$, $\mathrm{dn}\, u$, możemy widzieć bezpośrednio z figury, kiedy jakakolwiek z nich jest rzeczywista, a kiedy urojona. Tylko znak funkcyj nie daje się określić z figury, i należy go szukać inną drogą, która zresztą nie przedstawia żadnej trudności.

Przedewszystkiem należy zauważyć, że każda z funkcyj $\mathrm{sn}u$, $\mathrm{cn}u$, $\mathrm{dn}u$ pozostaje dodatnią w przedziale od $u=0$ do $u=\omega$, a w chwili przejścia jej przez zero sądzić możemy o jej zachowaniu się w otoczeniu tego punktu przy pomocy wartości, jaką przyjmuje jej pochodna, do czego służą wzory:

$$\frac{d\,\mathrm{sn}u}{du}=\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u\,,\quad \frac{d\,\mathrm{cn}u}{du}=-\mathrm{sn}u\,\mathrm{dn}u\,,\quad \frac{d\,\mathrm{dn}u}{du}=-k^2\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u\,.$$

Dajmy naprzykład, że chcemy dowiedzieć się, jakiej postaci będzie wartość $\mathrm{cn}\,(\omega+h)$ przy nieskończenie małych wartościach na h rzeczywistych albo czysto urojonych, którym na figurze odpowiadają cztery punkty m_1, m_2, m_3, m_4 nieskończenie blizkie punktu e_2; mamy:

$$\lim\frac{\mathrm{cn}\,(\omega+h)}{h}=-\mathrm{sn}\omega\,\mathrm{dn}\omega\,,$$

to jest:

$$\lim\frac{\mathrm{cn}\,(\omega+h)}{h}=-k'\,,$$

a więc przy nieskończenie małych wartościach na h mamy równość:

$$\mathrm{cn}\,(\omega+h)=-k'h\,,$$

skąd wnioskujemy:

1) w punkcie m_1 wartość $\mathrm{cn}u$ jest rzeczywista dodatnia;

2) w punkcie m_2 wartość $\mathrm{cn}u$ jest rzeczywista ujemna;

3) w punkcie m_3 wartość $\mathrm{cn}u$ jest czysto urojona ze spółczynnikiem dodatnim;

4) w punkcie m_4 wartość $\mathrm{cn}u$ jest czysto urojona ze spółczynnikiem ujemnym.

Na zasadzie prawa ciągłości możemy czynić dalsze wnioski: I tak, jeżeli punkt zmienny M, doszedłszy do wierzchołka e_2, poruszać się będzie dalej po obwodzie krzywej sześciennej w kierunku dodatnim aż do nieskończoności, wówczas wartość odpowiednia $\mathrm{cn}u$ pozostawać będzie ciągle czysto urojoną ze spółczynnikiem ujemnym, wzrastającym liczebnie do nieskończoności.

Idąc wskazaną drogą, łatwo jest określić przebieg każdej z funkcyj $\mathrm{sn}u$, $\mathrm{cn}u$, $\mathrm{dn}u$ w przypuszczeniu, że punkt M przebiega w kierunku dodatnim górną połowę obwodu krzywej zespolonej, poczynając od wartości

$u=-\omega'$ i kończąc na wartości $u=\omega'+2\omega$. W rezultacie otrzymamy następującą tabliczkę:

$$\begin{array}{llllll}
u=-\omega' & \ldots 0 & \ldots\,\omega & \ldots\,\omega+\omega' & \ldots\,2\omega+\omega', \\
\mathrm{sn}u=-\infty i & \ldots 0 & \ldots\,1 & \ldots\,\dfrac{1}{k} & \ldots\,+\infty \\
\mathrm{cn}u=+\infty & \ldots 1 & \ldots\,0 & \ldots -i\,\dfrac{k'}{k} & \ldots -i\infty; \\
\mathrm{dn}u=+\infty & \ldots 1 & \ldots\,k' & \ldots\,0 & \ldots +i\infty.
\end{array}$$

Ze wzorów, podanych w poprzednich paragrafach dla funkcyj $\pi_r u$, otrzymują się bezpośrednio wzory, wyrażające charakterystyczne własności funkcyj $\mathrm{sn}u$, $\mathrm{cn}u$, $\mathrm{dn}u$, które zwykle są wymieniane w każdem dziele, traktującem o funkcyach eliptycznych:

$$\mathrm{sn}\,(u+\omega)=\frac{\mathrm{cn}u}{\mathrm{dn}u}\,,\quad \mathrm{sn}\,(u+\omega')=\frac{1}{k}\,\frac{1}{\mathrm{sn}u}\,,$$

$$\mathrm{cn}\,(u+\omega)=-k'\,\frac{\mathrm{sn}u}{\mathrm{dn}u}\,,\quad \mathrm{cn}\,(u+\omega')=-\frac{i}{k}\,\frac{\mathrm{dn}u}{\mathrm{sn}u}\,,$$

$$\mathrm{dn}\,(u+\omega)=\frac{k'}{\mathrm{dn}u}\,,\quad \mathrm{dn}\,(u+\omega')=-i\,\frac{\mathrm{cn}u}{\mathrm{sn}u}\,;$$

$$\mathrm{sn}\,(u+2\omega)=-\mathrm{sn}u\,,\quad \mathrm{sn}\,(u+2\omega')=\mathrm{sn}u\,,$$

$$\mathrm{cn}\,(u+2\omega)=-\mathrm{cn}u\,,\quad \mathrm{cn}\,(u+2\omega')=-\mathrm{cn}u\,,$$

$$\mathrm{dn}\,(u+2\omega)=\mathrm{dn}u\,,\quad \mathrm{dn}\,(u+2\omega')=-\mathrm{dn}u\,,$$

i tak dalej.

§ 25.

PIERWIASTKI RÓWNANIA STOPNIA CZWARTEGO.

Przedstawmy ogólne równanie stopnia czwartego w postaci:

(1) $$t^4+4p_1t^3+6p_2t+4p_3t+p_4=0$$

i oznaczmy, jak zwykle przez g_2, g_3 dwa niezmienniki:

$$g_2=p_0p_4-4p_1p_3+3p_2^2\,,\quad (p_0=1)\,;$$

$$g_3=p_0p_2p_4+2p_1p_2p_3-p_0p_3^2-p_1^2p_4-p_2^3\,,\quad (p_0=1)\,;$$

a przez x_0, y_0 wielomiany:

$$x_0 = p_1^2 - p_2 , \quad y_0 = 2 p_1^3 - 3 p_1 p_2 + p_3 .$$

Ograniczając się następnie na założeniu, że równanie (1) jest rzeczywiste, weźmy pod uwagę linię krzywą, którą wprowadziliśmy do rachunku w pracy naszej o równaniach stopnia trzeciego i czwartego [1]) pod nazwą rozwiązującej geometrycznej równania (1); jej równanie było takie:

$$y^2 = 4 x^3 - g_2 x - g_3 , \tag{2}$$

a więc jest to krzywa sześcienna prawa w układzie naszych dwóch krzywych sześciennych sprzężonych. Punkt (x_0, y_0) nazwany był biegunem równania (1), i było dowiedzione, że on zawsze znajduje się na obwodzie krzywej sześciennej.

A więc, każde równanie stopnia czwartego ma odpowiednią sobie krzywą (2) i odpowiedni biegun (x_0, y_0) na jej obwodzie.

Dopełniwszy krzywą (2) przy pomocy krzywej z nią sprzężonej, mieć będziemy krzywą zespoloną

$$y^2 = \pm (4 x^3 - g_2 x - g_3) ,$$

a zatem i układ funkcyj eliptycznych przez nią określonych.

Argument punktu (x_0, y_0) wzięty od początku (∞, ∞) oznaczać będziemy przez u_0. Lecz danemu punktowi odpowiada nieskończona liczba różnych argumentów: otóż przez u_0 rozumieć będziemy już to jakikolwiek z nich, już to najprostszy z nich, to jest ten, który idzie po najkrótszej drodze od (∞, ∞) do (x_0, y_0).

W przypadku, gdy biegun leży na gałęzi nieskończonej, wartość u_0 jest rzeczywista; przeciwnie, gdy biegun znajduje się na owalu, co może zdarzyć się tylko przy warunku $\Delta > 0$, wartość u_0 jest urojoną: w każdym zresztą razie nazywać ją będziemy a r g u m e n t e m d a n e g o r ó w n a n i a (1).

Zwróćmy się teraz do ogólnego wzoru na pierwiastki równania (1):

$$t = -p_1 + \sqrt{x_0 - e_1} + \sqrt{x_0 - e_2} + \sqrt{x_0 - e_3} ,$$

$$\sqrt{x_0 - e_0}\, \sqrt{x_0 - e_1}\, \sqrt{x_0 - e_2} = -\frac{1}{2} y_0 .$$

Na zasadzie teoryi, wyłożonej w powyższych paragrafach, możemy ten wzór napisać tak:

[1]) Prace matematyczno-fizyczne. T. X, str. 164.

$$t = -p_1 + \pi_1 u_0 + \pi_2 u_0 + \pi_3 u_0 , \tag{3}$$

a przytem warunek dodatkowy, któremu mają czynić zadość trzy pierwiastki kwadratowe, przepada, bo przy wszelkiej wartości u_0, zawsze czynią mu zadość trzy funkcye $\pi_i u$ na mocy tożsamości (§ 18, (1))

$$\wp' u = -2 \pi_1 u \, \pi_2 u \, \pi_3 u .$$

I jeżeli na u_0 dawać będziemy wszelkie wartości, jakie może przyjmować argument punktu (x_0, y_0), to wzór (3) da nam wszystkie cztery pierwiastki danego równania:

$$t_0 = -p_1 + \pi_1 u_0 + \pi_2 u_0 + \pi_3 u_0 ,$$

$$t_1 = -p_1 + \pi_1 (u_0 + 2\omega_1) + \pi_2 (u_0 + 2\omega_1) + \pi_3 (u_0 + 2\omega_1)$$
$$= -p_1 + \pi_1 u_0 - \pi_2 u_0 - \pi_3 u_0 ,$$

$$t_2 = -p_1 + \pi_1 (u_0 + 2\omega_2) + \pi_2 (u_0 + 2\omega_2) + \pi_3 (u_0 + 2\omega_2)$$
$$= -p_1 - \pi_1 u_0 + \pi_2 u_0 - \pi_3 u_0 ,$$

$$t_3 = -p_1 + \pi_1 (u_0 + 2\omega_3) + \pi_2 (u_0 + 2\omega_3) + \pi_3 (u_0 + 2\omega_3)$$
$$= -p_1 - \pi_1 u_0 - \pi_2 u_0 + \pi_3 u_0 .$$

Natura pierwiastków staje się prawie widoczną z tych wzorów, mianowicie:

1) Jeżeli $\Delta > 0$, a biegun leży na gałęzi nieskończonej, wtedy wartość liczebna $u_0 < \omega$. Wszystkie trzy wartości $\pi_i u_0$ są rzeczywiste, a zatem i wszystkie cztery pierwiastki $t_0, t_1, \ldots$ są rzeczywiste.

2) Jeżeli $\Delta > 0$, a biegun znajduje się na owalu, w takim razie u_0 jest ilością urojoną postaci $\omega' + v_0$, gdzie v_0 oznacza ilość rzeczywistą o liczebnej wartości $< \omega$. Wartość $\pi_3 u_0$ jest rzeczywista, a wartości $\pi_1 u_0$, $\pi_2 u_0$ są czysto urojone, i nie mogą być ani sobie równe ani wzajem sprzężone, a zatem każda z czterech sum $\pm \pi_1 u_0 \pm \pi_2 u_0$ jest urojoną. W rozważanym zatem przypadku wszystkie cztery pierwiastki są urojone.

3) Jeżeli $\Delta < 0$, krzywa sześcienna nie posiada owalu, liczebna wartość $u_0 < \omega$. Wartość $\pi_1 u_0$ jest rzeczywista, a wartości $\pi_2 u_0$ i $\pi_3 u_0$ są urojone i nadto wzajemnie sprzężone, a zatem pierwiastki t_0 i t_1 są rzeczywiste, t_2 i t_3 urojone.

Zwracając się jeszcze raz do wzoru (3), zauważmy, że można go napisać tak:

$$t = -p_1 + \frac{1}{2} (\pi_1 u_0 + \pi_2 u_0) + \frac{1}{2} (\pi_1 u_0 + \pi_3 u_0) + \frac{1}{2} (\pi_2 u_0 + \pi_3 u_0) ;$$

stąd, na zasadzie wzoru (4), § 18, otrzymujemy:

$$t = -p_1 - \frac{1}{2}\left[\frac{d \log \pi_1 \frac{u}{2}}{d \frac{u}{2}} + \frac{d \log \pi_2 \frac{u}{2}}{d \frac{u}{2}} + \frac{d \log \pi_3 \frac{u}{2}}{d \frac{u}{2}}\right], \quad (u = u_0),$$

lub:

$$t = -p_1 - \frac{1}{2}\,\frac{d \log \pi_1 \frac{u}{2}\, \pi_2 \frac{u}{2}\, \pi_3 \frac{u}{2}}{d \frac{u}{2}}, \quad (u = u_0).$$

Lecz z drugiej strony, mamy tożsamość:

$$\wp' u = -2 \pi_1 u\, \pi_2 u\, \pi_3 u,$$

a zatem:

$$t = -p_1 - \frac{1}{2}\,\frac{d \log \wp' \frac{u}{2}}{d \frac{u}{2}}, \quad (u = u_0),$$

albo ostatecznie:

$$t = -p_1 - \frac{1}{2}\,\frac{\wp'' \frac{u_0}{2}}{\wp' \frac{u_0}{2}}. \tag{4}$$

W takiej postaci Halphen podał rozwiązanie równania stopnia czwartego [1]); jednak forma taka nie daje się do bliższego roztrząsania szczegółów.

---

[1]) Porównaj: Halphen. Traité des fonctions elliptiques. T. I, p. 121.

J. RAJEWSKI,

O SZEREGACH I ILOCZYNACH WARUNKOWO ZBIEŻNYCH.

W pracy niniejszej pragnę wyjaśnić następującą własność szeregów i iloczynów warunkowo zbieżnych:

Wartości, jakie przyjmuje szereg warunkowo zbieżny przy stosowaniu wszystkich porządków sumowania wyrazów szeregu, albo też iloczyn warunkowo zbieżny przy stosowaniu wszystkich porządków mnożenia czynników iloczynu, nie mogą tworzyć obszaru ciągłego (continuum), lecz tylko mnogość nieskończoną wartości wszędzie gęstą (pantachię).

Pracę podzieliłem na trzy części. W części pierwszej zajmuję się szeregami warunkowo zbieżnemi; w drugiej iloczynami warunkowo zbieżnemi; w części trzeciej podaję kilka przykładów takich szeregów i iloczynów warunkowo zbieżnych, w których wszystkie wartości, zależne od porządku sumowania w szeregu i odpowiednio mnożenia w iloczynie, mogą być przedstawione jedną formą. W ten sposób dostajemy przegląd tych wartości, które szereg albo iloczyn warunkowo zbieżny przyjąć może, i tych wartości, których przyjąć nie może.

I.

1. Szeregi warunkowo zbieżne o wyrazach rzeczywistych. Niech w szeregu:

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \tag{1}$$