ERNESTO PASCAL,

RÉSUMÉ DE QUELQUES-UNS DE MES RÉCENTS TRAVAUX SUR LA THÉORIE DES GROUPES DE LIE.

(STRESZCZENIE NIEKTÓRYCH MOICH OSTATNICH PRAC O TEORYI GRUP LIEGO).

Dans cinq Notes, insérées récemment dans les „Rendinconti del R. Istituto Lombardo", je me suis occupé d'établir par une voie différente de l'ordinaire quelques points de la théorie des transformations, et spécialement, les démonstrations du deuxième et du troisième des théorèmes, connus sous le nom des théorèmes fondamentaux de Lie. L'un de ces théorèmes établit que les symboles X des r transformations infinitésimales génératrices d'un groupe à r paramètres essentiels satisfont aux relations:

$$(X_i X_j) = \sum_{s=1}^{r} c_{ijs} X_s \qquad (i, j, s = 1, 2 \ldots r)$$

dans lesquelles c_{ijs} sont des constantes en nombre r^3 dont l'ensemble forme ce qu'on appelle la structure d'un groupe, tandis que l'autre

[1]) I. Sopra alcune identità fra i simboli operativi rappresentanti trasformazioni infinitesime. Rend. Ist. Lomb. (2). 34. 1901, pp. 1062—1079.

II. Sulla formola del prodotto di due trasformazioni finite e sulla dimostrazione del cosidetto secondo teorema fondamentale di Lie nella teoria dei gruppi. Ibid. ibid., pp. 1118—1130.

III. Sopra i numeri Bernoulliani. Ibid. 35. 1902, pp. 377—389.

IV. Del terzo teorema di Lie sull'esistenza di gruppi di data struttura. Ibid. ibid., pp. 419—431.

V. Altre ricerche sulla formola del prodotto di due trasformazioni finite, e sul gruppo parametrico di un dato. Ibid. ibid., pp. 555—567.

Ces notes seront désignées par les indications I—V.

théorème établit que pour un système quelconque de constantes c satisfaisant aux relations des deux systèmes:

$$c_{ijs} + c_{ijs} = 0\,,$$

$$\sum_{s=1}^{r} [c_{ijs}\, c_{hst} + c_{jhs}\, c_{ist} + c_{his}\, c_{jst}] = 0\,,$$

c'est à dire que pour une structure arbitrairement donnée, il existe toujours le groupe correspondant.

Les démonstrations que je donne pour ces théorèmes sont fondées sur quelques recherches concernant: 1-o certaines nouvelles relations entre les nombres de Bernoulli; 2-o quelques identités entre les symboles opératifs X; 3-o la construction de la formule pour le produit des transformations finies.

Dans le travail présent je me propose de recueillir méthodiquement ces diverses recherches pour les présenter aux lecteurs de ce journal. Je ne m'arrêterai pas aux détails de toutes ces démonstrations pour lesquelles je renvoie le lecteur aux notes susdites; je me borne seulement à donner ici une idée succincte des sujets traités.

§ 1.

QUELQUES NOUVELLES IDENTITÉS ENTRE LES NOMBRES DE BERNOULLI.

Les nombres découverts par J. Bernoulli et étudiés par les géomètres du 18-ième siècle jouissent de plusieurs propriétés singulaires; ils interviennent dans diverses questions de l'Analyse mathématique, et la résolution de plusieurs problèmes analytiques dépend de l'étude des nombreuses relations existant entre ces nombres. Ils se présentent encore dans la théorie des groupes de transformations de Lie, et à ce point de vue ils ont été introduits dans cette théorie par M. Schur et par d'autres. Enfin dans le dernier temps j'ai fait voir que l'on peut établir la démonstration du troisième théorème de Lie sur quelques identités relatives à ces nombres.

Ce sont ces identités que je traiterai au premier paragraphe.

Introduisons les nombres $\gamma', \gamma'', \gamma'''\ldots$ liés par la formule de récurrence [1]):

$$(1)\qquad \gamma^{(s)} + \frac{1}{2!}\gamma^{(s-1)} + \frac{1}{3!}\gamma^{(s-2)} + \ldots + \frac{1}{s!}\gamma' + \frac{1}{(s+1)!} = 0\,.$$

[1]) I. § 1; III. § 1.

Étant γ' égal à $-\frac{1}{2}$, on peut mettre cette formule sous la forme:

$$(2)\qquad \gamma^{(s)} + \frac{1}{2!}\gamma^{(s-1)} + \frac{1}{3!}\gamma^{(s-2)} + \ldots + \frac{1}{(s-1)!}\gamma'' - \frac{s-1}{2\,(s+1)!} = 0\,.$$

Ces nombres sont en rapport simple avec les nombres de Bernoulli, c'est à dire avec les coefficients $B_2, B_4, \ldots$ du développement en série de puissances de la fonction paire

$$(3)\qquad \frac{x}{2}\cdot\frac{e^x+1}{e^x-1} = 1 + B_2\frac{x^2}{2!} - B_4\frac{x^4}{4!} + \ldots$$

En effet, en faisant le premier membre de cette dernière formule égal en général à

$$1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \ldots$$

les c étant des coefficients indéterminés, en multipliant le premier et le second membres par $e^x - 1$, en y substituant, au lieu de e^x, son développement en série, et comparant les coefficients des puissances égales de x dans le premier et second membre, on trouve pour les c la formule de récurrence:

$$c_s + \frac{1}{2!}c_{s-1} + \frac{1}{3!}c_{s-2} + \ldots + \frac{1}{s!}c_1 + \frac{1}{(s+1)!} = \frac{1}{2\,.\,s!}$$

$$c_1 = 0\,,$$

et par suite:

$$c_s + \frac{1}{2!}c_{s-1} + \ldots + \frac{1}{(s-1)!}c_2 - \frac{s-1}{2\,(s+1)!} = 0\,,$$

d'où l'on voit que les coefficients c en commençant par celui de l'indice 2 satisfont à la même formule de récurrence à laquelle satisfont les quantités $\gamma'', \gamma'''\ldots$ Nous en pouvons donc conclure qu'en général, pour $s > 1$:

$$\gamma^{(s)} = c_s\,.$$

Le premier membre de (3) étant une fonction paire, les coefficients c ayant pour l'indice un nombre impair, seront nuls, d'où il s'ensuit que toutes les quantités γ de l'indice impair (sauf γ') seront nulles; enfin on aura:

$$\gamma^{(2n)} = (-1)^{n-1}\frac{B_{2n}}{(2n)!}$$

ce qui démontre le rapport simple existant entre les nombres γ et les nombres de Bernoulli [1]).

[1]) III. § 1.

Les premiers des nombres γ ont les valeurs:

$$\gamma = -\frac{1}{2}\,,\quad \gamma'' = \frac{1}{12}\,,\quad \gamma^{IV} = -\frac{1}{6!}\,\cdots$$

Les relations principales entre les nombres de Bernoulli, c'est à dire les formules de récurrence entre ces nombres, sont du premier et du second degré; dans ces dernières la somme des indices des deux facteurs γ de chaque terme est toujours constante. La forme de ces formules du second degré est la suivante:

$$(4)\qquad \beta_1 \gamma'' \gamma^{(2n-2)} + \beta_2 \gamma^{IV} \gamma^{(2n-4)} + \ldots + \beta_{n-1} \gamma^{(2n-2)} \gamma'' + \beta_n \gamma^{(2n)} = 0\,,$$

les quantités β étant des coefficients numériques.

Une des relations les plus simples de cette espèce, c'est à dire:

$$(5)\qquad \gamma'' \gamma^{(2n-2)} + \gamma^{IV} \gamma^{(2n-4)} + \ldots + \gamma^{(2n-2)} \gamma'' + (2n+1)\, \gamma^{2n} = 0$$

correspond à une relation connue relative aux nombres de Bernoulli (voir p. ex. Saalschütz, Vorl. über die Bernoullischen Zahlen. Berlin 1893, p. 16). La classe d'identités que nous allons établir a pour premier représentant la relation (5) et est formée d'identités, comme la (4), dans lesquelles les coefficients β se composent à l'aide des coefficients binomiaux d'indice fixe et de base variable dans une progression arithmétique.

La forme générale de ces relations ne se présente pas cependant avec une loi assez simple, mais elle acquiert une simplicité notable, si l'on introduit les notations suivantes:

Posons [1]):

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\Gamma^{(2n)}_{11} = & \gamma''\gamma^{(2n-2)} + \gamma^{IV}\gamma^{(2n-4)} + \ldots + \gamma^{(2n-2)}\gamma'' - \gamma^{(2n)} \\
\Gamma^{(2n)}_{2,1} = & -\binom{2}{1}\gamma''\gamma^{(2n-2)} - \binom{4}{1}\gamma^{IV}\gamma^{(2n-4)} - \ldots - \binom{2n-2}{1}\gamma^{(2n-2)}\gamma'' - \gamma^{(2n)} \\
\Gamma^{(2n)}_{3,1} = & \binom{4}{2}\gamma^{IV}\gamma^{(2n-4)} + \ldots + \binom{2n-2}{2}\gamma^{(2n-2)}\gamma'' - \gamma^{(2n)} \\
\Gamma^{(2n)}_{4,1} = & -\binom{4}{3}\gamma^{IV}\gamma^{(2n-4)} - \ldots - \binom{2n-2}{3}\gamma^{(2n-2)}\gamma'' - \gamma^{2n} \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Gamma^{(2n)}_{2n-3,1} = & \binom{2n-2}{2n-4}\gamma^{(2n-2)}\gamma'' - \gamma^{(2n)} \\
\Gamma^{(2n)}_{2n-2,1} = & -\binom{2n-2}{2n-3}\gamma^{2n-2}\gamma'' - \gamma^{(2n)} \\
\Gamma^{(2n)}_{2n-1,1} = & -\gamma^{(2n)} \\
\Gamma^{(2n)}_{2n,1} = & -\gamma^{(2n)}
\end{array}\right.$$

[1]) III. § 3.

et aussi:

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l}
\Gamma^{(2n)}_{k,2} = \Gamma^{(2n)}_{11} + \Gamma^{(2n)}_{2,1} + \ldots + \Gamma^{(2n)}_{k,1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Gamma^{(2n)}_{k,s} = \Gamma^{(2n)}_{1,s-1} + \Gamma^{(2n)}_{2,s-1} + \ldots + \Gamma^{(2n)}_{k,s-1}\,;
\end{array}\right.$$

les relations dont il s'agit, seront alors toutes de la forme suivante:

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l}
\Gamma^{(2n)}_{1,1} + \ldots + \Gamma^{(2n)}_{2n-3} + \Gamma^{(2n)}_{2n-2,1} + \Gamma^{(2n)}_{2n-1,1} + 2\,\Gamma^{(2n)}_{2n,1} = 0 \\
\Gamma^{(2n)}_{1,2} + \ldots + \Gamma^{(2n)}_{2n-3,2} + 2\,\Gamma^{(2n)}_{2n-2,2} = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Gamma^{(2n)}_{1,k} + \ldots + \Gamma^{(2n)}_{2n-2k+1,k} + 2\,\Gamma^{(2n)}_{2n-2k+2,k} = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Gamma^{(2n)}_{1,n} + 2\,\Gamma^{(2n)}_{2,n} = 0\,.
\end{array}\right.$$

Celles de la ligne 2, 3 ... peuvent naturellement, au moyen des relations (7), être exprimées en fonction des quantités Γ avec le second indice égal à 1, c'est à dire, en fonction des quantités Γ du tableau (6), et nous aurons alors les relations:

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l}
\sum\limits_{\nu=1}^{2n-1} \Gamma^{(2n)}_{\nu,1} + 2\,\Gamma^{(2n)}_{2n,1} = 0 \\
\sum\limits_{\nu=1}^{2n-2} (2n-\nu)\, \Gamma^{(2n)}_{\nu,1} = 0 \\
\sum\limits_{\nu=1}^{2n-4} \left[\binom{2n-\nu-1}{2} - 1\right] \Gamma^{(2n)}_{\nu,1} = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\sum\limits_{\nu=1}^{2n-2k} \left[\binom{2n-\nu-k+1}{k} - \binom{2n-\nu-k-1}{k-2}\right] \Gamma^{(2n)}_{\nu,1} = 0\,. \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

La première et la seconde de ces relations se réduisent à la relation (5); en effet, en faisant la somme de toutes les quantités Γ du tableau (6), en ajoutant encore $-\gamma^{(2n)}$ et en se rappelant que

$$\binom{2k}{0} - \binom{2k}{1} + \binom{2k}{2} - \ldots - \binom{2k}{2k-1} = -1\,,$$

on voit en coup d'œil que la première des formules (9) se réduit à la (5). Quant à la seconde formule (9), il suffit de se rappeler que [1]:

$$(2n-1)\binom{2k}{0}-(2n-2)\binom{2k}{1}+\ldots+(2n-2k)\binom{2k}{2k-1}=-(2n-2k-1)$$

et alors elle devient

$$-(2n-3)\gamma''\gamma^{(2n-2)}-(2n-5)\gamma^{IV}\gamma^{(2n-4)}-\ldots-1\,.\,\gamma^{(2n-2)}\gamma''-\left[\binom{2n-1}{2}-1\right]\gamma^{(2n)}=0,$$

ou, après un arrangement convenable des termes semblables:

$$-(n-1)\left[\gamma''\gamma^{(2n-2)}+\gamma^{IV}\gamma^{(2n-4)}+\ldots+\gamma^{(2n-2)}\gamma''+(2n+1)\gamma^{(2n)}\right]=0,$$

ce qui montre son identité avec la formule (5).

Les autres relations (9) ne peuvent pas être réduites à la formule (5); en se servant de la formule citée plus haut on trouve pour la troisième:

$$\left[\binom{2n-4}{2}-1\right]\gamma''\gamma^{(2n-2)}+\left[\binom{2n-6}{2}-1\right]\gamma^{IV}\gamma^{(2n-4)}+\ldots+\left[\binom{2}{2}-1\right]\gamma^{(2n-4)}\gamma^{IV}$$
$$+\left[\binom{0}{2}-1\right]\gamma^{(2n-2)}\gamma''+(2n-3)\gamma^{(2n-2)}\gamma''+\left[\binom{2n-1}{3}-\binom{2n-3}{1}\right]\gamma^{(2n)}=0$$

et pour la quatrième:

$$\left[\binom{2n-5}{3}-\binom{2n-7}{1}\right]\gamma''\gamma^{2n-2}+\left[\binom{2n-7}{3}-\binom{2n-9}{1}\right]\gamma^{IV}\gamma^{(2n-4)}+\ldots$$
$$\ldots+\left[\binom{-1}{3}-\binom{-3}{1}\right]\gamma^{2n-2}\gamma''+(2n-3)(n-4)\gamma^{(2n-2)}\gamma''$$
$$+\left[\binom{2n-2}{4}-\binom{2n-4}{2}\right]\gamma^{(2n)}=0.$$

§ 2.

QUELQUES IDENTITÉS ENTRE LES SYMBOLES OPÉRATIFS REPRÉSENTANT LES TRANSFORMATIONS INFINITÉSIMALES.

Nous ferons connaître dans ce paragraphe les identités servant à la construction de la formule du produit de deux transformations finies que nous traiterons plus loin.

[1] Cette formule est un cas très particulier du théorème d'Arndt (Crelle 31, p. 239), qu'on peut attribuer encore à Cauchy).

De ces identités se sont occupés, il y a quelques années, M. Campbell (Proc. Lond. Math. Soc., t. XXVIII, p. 381 et t. XXIX, p. 14) et M. Poincaré (dans une Note préliminaire dans les Comptes Rendus t. CXXVIII, p. 1065 et plus amplement dans les Trans. Camb. Phil. Society t. XVIII, 1900, p. 220); notre méthode est pourtant bien différente de celle de ces auteurs.

Nous allons donner brièvement une idée de ces identités. Soient X_1 et X_2 les symboles ordinaires des deux transformations infinitésimales

$$X_h=\xi_{h,1}\frac{\partial}{\partial x_1}+\xi_{h,2}\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+\xi_{hn}\frac{\partial}{\partial x_n},$$

et soit une opération d'ordre k, formée, à l'aide des opérations X, comme suit:

$$\sum_{i=1}^{k} c_i\, X_1^{i-1} X_2 X_1^{k-i} \tag{10}$$

les c étant des coefficients numériques.

Si dans (10) tous les coefficients c sont égaux à 1, nous aurons ce que pour abréger nous nommerons *somme élémentaire des opérations d'ordre k*, tandis que nous appellerons les X_1^{k-1} et X_2 *opérations composantes de la somme*; nous désignerons cette somme élémentaire par le symbole:

$$S(X_1^{k-1}, X_2). \tag{11}$$

Si les opérations X_1 et X_2 jouissaient de la propriété commutative, l'expression (11) se réduirait à un terme unique; c'est dans le défaut de la commutativité des opérations X_1, X_2, que la somme élémentaire (11) trouve sa raison d'être.

En général, on a k symboles $X_1, \ldots, X_k$ des transformations infinitésimales que nous pouvons supposer toutes distinctes ou quelques-unes égales entre elles. Formons leurs *produits* en changeant l'ordre des facteurs, de toutes les manières possibles, pour obtenir les produits qui seront en général distincts entre eux. Si, parmi les symboles X il y en a α égaux à X_1, β égaux à X_2 etc., où $\alpha+\beta+\ldots=k$, le nombre des produits différents entre eux sera évidemment $\frac{k!}{\alpha!\,\beta!}$. Nous appellerons la somme de ces produits *somme élémentaire des opérations d'ordre k* et les $X_1^\alpha, X_2^\beta\ldots$ les *opérations composantes*. La somme élémentaire sera désignée par le symbole:

$$S(X_1^\alpha, X_2^\beta\ldots)\ ^{1)}, \tag{12}$$

[1] II. § 2.

Dans l'expression (12) le coefficient de chaque terme est toujours l'unité; si nous imaginons construite une expression analogue, dans laquelle les coefficients de tous les termes ne sont plus égaux entre eux, mais quelconques, nous aurons une expression qui contient la (10) comme un cas particulier, et on peut faire voir *qu'une telle somme générale s'exprime toujours par une combinaison linéaire des sommes élémentaires, dont les ordres vont successivement en diminuant et dont les opérations composantes sont formées au moyen des symboles* $X_1, X_2, \ldots$ *réunis dans les crochets, comme* $(X_1 X_2)$, $(X_1 X_3)$, $(X_1 (X_1 X_2)) \ldots$, *avec lesquels, comme on sait, on obtient des opérations du 1-er ordre.*

Les identités dont il s'agit ici, correspondent à l'expression de ces sommes générales par les sommes élémentaires.

Le principe dont dépend la dite exprimabilité est le plus simple; en effet, il suffit de remarquer que la combinaison $X_1 X_2 - X_2 X_1$ que l'on désigne par le symbole connu $(X_1 X_2)$ est, comme on sait, une opération du 1-er ordre au lieu du 2-e, duquel ordre sont les deux termes dont elle résulte. D'où l'on déduit que la différence des deux termes formés comme l'expression (12) et qui ne se distinguent que par l'ordre de deux facteurs consécutifs, est toujours une opération d'ordre $k-1$, c'est à dire d'ordre inférieur d'une unité de l'ordre de deux termes dont nous considérons la différence. En appliquant le même principe successivement d'une manière convenable on parvient à démontrer le théorème cité plus haut [1]).

En regard de ce qu'on a dit plus haut, nous n'aurons besoin que des cas particuliers des identités correspondant au développement de la somme (10) ou de la somme plus générale que (10), et nommément les cas correspondant au développement de l'expression

$$\binom{k}{\mu} X_2^{\mu} X_1^{k-\mu}, \tag{13}$$

laquelle pour $\mu = 1$ devient

$$k X_2 X_1^{k-1}, \tag{14}$$

ce qui est un cas particulier de la somme (10).

Nous allons énoncer à part le théorème qu'on obtient du développement de l'expression (14) et après, nous parlerons du développement de l'expression (13).

Désignons, pour abréger, par le symbole

$$(X_{i_1} X_{i_2}, \ldots, X_{i_s} X_1 X_2) \text{ }^{2)} \tag{15}$$

[1]) I. §§ 1 et 2. [2]) II. § 1, formule (5).

le crochet multiple:

$$(X_{i_1} (X_{i_2} \ldots (X_{i_s} (X_1 X_2)) \ldots)),$$

où $i_1, i_2, \ldots, i_s$ n'ont que les valeurs 1, 2 procédant dans un ordre quelconque.

Cela posé, *l'identité relative au développement* (14) *est*:

$$\begin{aligned} k X_2 X_1^{k-1} &= S(X_1^{k-1}, X_2) + k\gamma' S(X_1^{k-2}(X_1 X_2)) \\ &+ \sum_{m=1}^{\left(\frac{k-1}{2}\right)} k(k-1), \ldots, (k-2m+1)\, \gamma^{(2m)} S(X_1^{k-2m-1}(\overbrace{X_1 \ldots X_1}^{2m} X_2)), \end{aligned} \tag{16}$$

où $\left(\frac{k-1}{2}\right)$ indique le plus grand entier contenu dans $\frac{k-1}{2}$, et $\gamma', \gamma'', \gamma^{IV} \ldots$ sont les nombres γ étudiés au paragraphe précédent [1]).

Bien plus compliqué est le développement de l'expression (13); il est évidemment une combinaison linéaire des sommes élémentaires S, multipliées chacune par un coefficient numérique; on fait voir que *le coefficient du terme contenant une somme élémentaire* S *d'ordre* $k-t$ *est égal à*

$$k(k-1)\ldots(k-t+1)\, C_s, \tag{17}$$

où C_s *est un nombre indépendant de* k *et dépendant seulement des opérations composantes de la somme élémentaire* S [2]).

On obtient les différents termes du développement, en formant, de tous les modes possibles, les sommes élémentaires S *dont l'ordre ne surpasse pas le nombre* k, *et dont les opérations composantes sont en général toutes du type* (15), avec cette remarque que naturellement le nombre de tous les symboles X_1 entrant dans la formation des diverses opérations composantes de S soit exactement $k-\mu$, et que le nombre de tous les symboles X_2 soit exactement μ.

Le résultat important qu'on obtient par induction et qui nous sera très utile dans ce qui suit est [3]) qu' *à chaque opération composante du type* (15) *on peut coordonner un certain nombre, de manière que le coefficient numérique* C_s *de l'expression* (17) *soit toujours le produit de tous les nombres coordonnés aux opérations composantes de la somme élémentaire* S.

On peut exprimer ce résultat plus clairement ainsi:

[1]) I. § 1. [2]) I § 2; II. § 1. [3]) II. § 1; V. § 1.

Construisons, avec les limitations indiquées, toutes les sommes possibles S; soient $Z_1, Z_2, \ldots$ les opérations composantes d'une d'elles, d'ordre $k-t$, et soient

$$c_{Z_1},\ c_{Z_2},\ \ldots \tag{18}$$

les nombres coordonnés aux opérations Z; le développement de l'expression (13) sera donné par la formule:

$$\binom{k}{\mu} X_2{}^{u} X_1{}^{k-\mu} = \sum k(k-1)\ldots(k-t+1)\, c_{Z_1}, c_{Z_2} \ldots S \tag{19}$$

La détermination complète des coefficients c_Z présente des difficultés assez graves, et je n'ai reussi à la faire que dans les premiers cas, c'est à dire pour les opérations Z du type (11) pour lesquelles $i_1 = i_2 = \ldots = i_s = 1$, ceux de $i_1 = i_2 = \ldots = i_s = 2$ (dans ces deux cas la recherche est déja épuisée par la démonstration de la formule (16)) et pour les cas, dans lesquels un seulement des nombres $i_1, i_2, \ldots, i_s$ est égal à 2, tandis que les autres sont égaux à 1.

On obtient pour ces cas le résultat suivant [1]):

Le nombre coordonné à l'opération

$$(\overbrace{X_1 \ldots X_1}^{m} X_2),$$

où $m \geqslant 2$ est $-\gamma^{(m)}$.

En désignant par $c_{m,n}$ le nombre coordonné à l'opération

$$(\overbrace{X_1 \ldots X_1}^{n} X_2 \overbrace{X_1 \ldots X_1}^{m} X_2)$$

on a:

$$c_{m,n} = -\frac{1}{2}\sum_{h=0}^{m} (-1)^h \binom{n+h+1}{n} \gamma^{(n+h+1)} \gamma^{(m-h)}. \tag{20}$$

Il est intéressant de remarquer que ces derniers nombres sont en relation intime avec les nombres Γ introduits au § précédent; on a [2]):

$$\begin{gathered} c_{2m,0} = 0, \quad c_{1,0} = -\gamma'' \\ c_{m,n} = \frac{(-1)^n}{2}\binom{m+n}{n} \gamma' \gamma'^{m+n)}, \text{ pour } n > 0,\ m+n = \text{nombre pair}, \\ c_{m,n} = \frac{1}{2}\Gamma_{n+1}^{m+n+1} + \frac{1}{2}\left[1 + (-1)^n \binom{m+n+1}{n}\right] \gamma^{m+n+1} \\ \text{pour } m \diagup 1,\ m+n = \text{nombre impair} \end{gathered} \tag{21}$$

---

[1]) I. § 1; V. § 1. [2]) V. § 1.

Dans mes Notes précités j'ai déterminé les coefficients (20) non directement, mais par un procédé artificiel au moyen de la formule pour le produit de deux transformations finies dont je parle au § suivant.

Avant de terminer ce paragraphe nous noterons encore deux identités, que nous avons obtenues dans les travaux cités et lesquelles m'étaient utiles pour diverses démonstrations. La première est [1]):

$$X_2 X_1^{k-1} - X_1^{k-1} X_2 = -S(X_1^{k-1}, (X_1 X_2)) \tag{22}$$

et la seconde est une identité qui se rapporte au symbole (15); on l'obtient en appliquant successivement l'identité due à Jacobi et relative aux crochets formés avec des symboles de trois transformations infinitésimales:

$$(Z \overbrace{X_1 \ldots X_1}^{\nu} X_2) = -\sum_{h=0}^{\nu} (-1)^h \binom{\nu}{h} (\overbrace{X_1 \ldots X_1}^{\nu-h} \overbrace{X_1 \ldots X_1}^{h} Z). \tag{23}$$

§ 3.

FORMULE POUR LE PRODUIT DE DEUX TRANSFORMATIONS FINIES.

Soient deux transformations finies données sous leur forme ordinaire canonique:

$$\left\{ \begin{aligned} (T) \quad x_i'' &= x_i' + \frac{t}{1} X_1' x_i' + \frac{t^2}{2!} X_1'^2 x_i' + \ldots \\ &= e^{tX_1'} x_i' \\ (T_1) \quad x_i' &= x_i + \frac{t'}{1!} X_2 x_i + \frac{t'^2}{2!} X_2^2 x_i + \ldots \\ &= e^{t'X_2} x_i \end{aligned} \right. \tag{24}$$

où X_1' X_2 sont les symboles des deux transformations infinitésimales et la transformation X_1' est naturellement exprimée en variables x', d'où vient la raison de l'écriture X_1' au lieu de X_1.

Nous ferons voir que le produit $T\,T_1$ (nous voulons entendre par cette écriture qu'on fait auparavant l'opération T_1 et après l'opération T) peut être mis sous la forme canonique:

$$\begin{aligned} x_i'' &= x_i + X_3 x_i + \frac{1}{2!} X_3^2 x_i + \ldots \\ &= e^{X_3} x_i, \end{aligned} \tag{25}$$

---

[1]) I. § 1; V. § 1.

c'est à dire que l'on peut trouver la X_3 qui sera la transformation infinitésimale génératrice d'un faisceau de transformations auquel appartient le produit $T T_1$. Quand $X_2 \equiv X_1$, on aura $X_3 = (t + t') X_1$; mais quelle sera dans le cas général l'expression de X_3 au moyen de t, t', X_1 et X_2? [1])

Voila le problème de la solution duquel, même partielle, on peut faire dépendre plusieurs points importants de la théorie générale des transformations.

Commençons par l'élimination des x' entre les équations (24).

En vertu de la formule connue

$$\varphi(x') = \varphi(x) + \frac{t'}{1!} X_2 \varphi(x) + \frac{t'^2}{2!} X_2^2 \varphi(x) + \ldots,$$

où φ désigne une fonction quelconque, en y faisant $\varphi = X_1'^r x_i$ et désignant par X_1 la même transformation X_1' écrite en variables x au lieu des variables x', on a:

$$X_1'^r x_i' = X_1^r x_i + \frac{t'}{1!} X_2 X_1^r x_i + \frac{t'^2}{2!} X_2^2 X_1^r x_i + \ldots$$

et substituant cette valeur dans le second membre de la première des équations (24) [2]) on aura le produit $T T_1$ sous la forme

$$x_i'' = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s}{s!} \frac{t'^h}{h!} X_2^h X_1^s x_i. \tag{26}$$

Il faut observer que tandis que dans le produit $T T_1$ on applique auparavant la transformation T_1 et après la transformation T, au contraire, dans les divers termes de (26) c'est le symbole infinitésimal X_1 et non X_2 qu' on applique auparavant, c'est à dire on applique d'abord le symbole relatif à la transformation T et non celui relatif à la transformation T_1.

Pour résoudre la question proposée nous devons chercher à transformer les termes d'ordre $2, 3 \ldots$ de cette formule, de manière qu'après leur réduction à la somme des termes d'ordre différent et après l'aggroupement de tous les termes du même ordre, l'aggrégat de tous les termes d'ordre k soit exactément, au facteur $\frac{1}{k!}$ près, la puissance k—ième de la somme des termes du premier ordre.

Un terme quelconque d'ordre k dans la formule (26) est donné, au facteur $\frac{1}{k!} t^{k-h} t'^h$ près, par l'opération:

$$\binom{k}{h} X_2^h X_1^{k-h}, \tag{27}$$

appliquée à la quantité x_i (en posant $s = k - h$).

[1]) II. § 2. [2]) V. § 1.

Appliquons maintenant à chaque terme, comme (27), le développement du § précédent, faisons varier k de 2 à ∞ et h de 0 a k, et réunissons tous les termes d'un ordre déterminé p. ex. k. Un premier terme d'ordre k résulte du développement des termes d'ordre k dans la formule (26); il est donc:

$$\frac{1}{k!} t^{k-h} t'^h S(X_1^{k-h}, X_2^h).$$

Faisons varier h de 0 à k, on aura:

$$\frac{1}{k!} \sum_{h=0}^{k} t^{k-h} t'^h S(X_1^{k-h}, X_2^h). \tag{28}$$

Or cette expression n'est rien autre que

$$\frac{1}{k!} [t X_1 + t' X_2]^k,$$

quand on développe cette k—ième puissance, sans admettre, ce qu'on doit faire, la commutativité du produit X_1 par X_2.

Un second terme d'ordre k résultant du développement des termes d'ordre $k+1$ dans la formule (26) est:

$$\frac{1}{(k+1)!} t^{k-h} t'^{h+1} (k+1) \gamma' S(X_1^{k-h-1}, X_2^h (X_1 X_2)),$$

$(k+1)\gamma'$ étant (comme nous le savons) le coefficient d'une telle somme S. Faisons varier h de 0 à k, il vient:

$$\frac{1}{k!} \gamma' \sum_{h=0}^{k-1} t^{k-h-1} t'^h t t' S(X_1^{k-h-1}, X_2^h (X_1 X_2)). \tag{29}$$

Une décomposition analogue des termes d'ordre $k+2$ qui se présentent dans la formule (26) donne, entre autres, les suivants:

$$\frac{1}{(k+2)!} t^{k-h-1} t'^{h+2} (k+2)(k+1) \gamma'^2 S(X_1^{k-h-2}, X_2^h (X_1 X_2)^2)$$

et la sommation de $h = 0$ jusqu' à $h = k - 2$ donne:

$$\frac{1}{k!} \gamma'^2 \sum_{h=0}^{k-2} t^{k-h-2} t'^h t^2 t'^2 S(X_1^{k-h-2}, X_2^h (X_1 X_2)^2) \text{ etc.} \tag{30}$$

Or la somme des expressions (28), (29), (30) et des analogues qui les suivent n'est rien autre que

$$\frac{1}{k!}\,[t\,X_1 + t'\,X_2 + \gamma'\,tt'\,(X_1\,X_2)]^k$$

quand naturellement, on développe cette k—ième puissance en tenant compte du fait que la commutativité des produits de X_1 par X_2 et par $(X_1\,X_2)$ n'a pas lieu.

Ces considérations suffisent pour faire comprendre que le problème que nous avons posé, c'est à dire, la détermination de la transformation infinitésimale X_3 de la formule (25), est résolue au moyen de la décomposition générale que nous avons traitée au § 2.

En laissant de côté d'autres considérations ne différant pas essentiellement de celles faites plus haut nous en pouvons conclure, que la transformation infinitésimale X_3 relative au produit des deux transformations finies est donnée par la formule [1]):

$$\begin{aligned} X_3 = t\,X_1 + t' \sum_{n=0}^{\infty} t^n\,\gamma^{(n)}\,(\overbrace{X_1 \dots X_1}^{n}\,X_2) \\ + t'^2 \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} t^{m+n}\,c_{m,n}\,(\overbrace{X_1 \dots X_1}^{n}\,X_2\,\overbrace{X_1 \dots X_1}^{m}\,X_2) \\ + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{31}$$

où les coefficients $c_{m,n}$ ont des valeurs indiquées au § précédent et les coefficients des termes en $t'^3, t'^4 \dots$ restent encore inconnus; ce sont les coefficients désignés en général par c_Z au § précédent, où le calcul n'était fait que pour quelques—uns d'entre eux.

On peut observer que dans la formule (31) nous connaissons encore les coefficients d'autres termes, que nous n'avons pas fait apparaître explicitement; ce sont les coefficients des expressions

$$(\overbrace{X_2 \dots X_2}^{m-1}\,X_1\,X_2) = -\,(\overbrace{X_2 \dots X_2}^{m}\,X_1), \qquad m > 1\,,$$

coefficients égaux, comme on le sait, a $-\gamma^{(m)}$; de cette manière une autre série de termes de la formule (31) est donnée par:

$$t \sum_{m=3}^{\infty} t'^n\,\gamma^{(m)}\,(\overbrace{X_2 \dots X_2}^{m}\,X_1)\,; \tag{32}$$

[1]) V. § 1.

Le terme qu'on obtient en posant $m = 2$ dans l'expression (32) apparaît déjà dans la formule (31); le terme qu' on obtient en posant $m = 0$ est tX_1, il apparaît aussi dans la formule (31), et enfin celui qu'on obtient en posant $m = 1$, c'est à dire le terme tt' est égal et de signe contraire à celui qui apparaît dans la formule (31). Mais il n' y a pas ici une contradiction, puisque, comme nous avons déja observé au § précédent, les coefficients coordonnés à:

$$(\overbrace{X_2 \dots X_2}^{m-1}\,X_1\,X_2)$$

sont $-\gamma^{(m)}$ seulement pour $m > 1$, donc la formule (32) n'est valable que pour $m \geqq 2$.

Nous avons dit au § précédent que la détermination des coefficients $c_{m,n}$ donnée par les formules (20) se fait au moyen de la formule pour le produit de deux transformations finies; maintenant nous allons indiquer brièvement la méthode appliquée dans ce but par nous dans la Note V.

Supposons donnée la formule (31) dans laquelle $c_{m,n}$ sont les coefficients inconnus.

En appliquant de nouveau la même formule (31), multiplions le produit TT_1 par T_1, c'est à dire formons le produit TT_1T_1, et comparons le résultat avec le produit, obtenu au moyen de la même formule, de la transformation T par la transformation T_1^2 laquelle, comme il est facile de voir, correspond à la transformation infinitésimale $2\,t'X_2$.

La transformation infinitésimale $X_3^{(1)}$ relative au produit TT_1^2 obtenue par le moyen indiqué ci-dessus est la même transformation X_3, quand on y change auparavant t' en $2t'$; en cherchant maintenant la transformation $X_3^{(1)}$ d'une autre manière, nous pouvons par comparaison trouver les coefficients $c_{m,n}$.

La transformation $X_3^{(1)}$ est la même X_3, quand on y remplace $t\,X_1$ par X_3; mais en procédant de cette manière, on obtiendrait un résultat tres compliqué, si l'on tenait compte de tous les termes. Mais il faut noter que pour notre but la chose peut être beaucoup simplifiée, puisqu' il est évident qu' il suffit de se limiter à considérer seulement les termes contenant les puissances de t' non supérieures à la seconde.

Nous n'entrerons pas dans les détails du calcul désigné que nous avons développé dans la cinquième de nos Notes précitées.

§ 4.

LE SECOND THÉORÈME FONDAMENTAL DE LIE SUR LA THÉORIE DES GROUPES.

Soient données r transformations infinitésimales que nous désignerons par $Z_1, Z_2, \dots, Z_r$ pour éviter la confusion avec les notations précédentes.

Formons la combinaison

$$\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 + \ldots + \lambda_r Z_r, \tag{33}$$

où les λ sont les coefficients constants, et écrivons les formules canoniques pour les transformations du groupe à un paramètre engendré par une transformation infinitésimale X_1, en prenant pour les λ dans (33) des valeurs fixes, et les formules analogues pour le groupe engendré par une autre transformation X_2 renfermée dans la série (33), en prenant des valeurs différentes pour les constantes λ.

La question qui se présente maintenant et relative au théorème que nous voulons démontrer est la suivante: quelles sont les conditions auxquelles doivent satisfaire les Z pour que, en choisissant arbitrairement les X_1 et X_2 parmi les transformations de la série (33), les deux groupes à un paramètre engendrés par ces transformations appartiennent au même groupe à r paramètres, ou, en d'autres termes, pour que, en multipliant une des transformations finies du groupe engendré par X_1 par une de celles engendrées par X_2, on ait une transformation appartenant au groupe engendré par une certaine transformation X_3 laquelle est, à son tour, comprise parmi les transformations de la série (33)?

Donc la question, comme on le voit, se ramène à chercher la condition nécessaire et suffisante pour que le produit des deux transformations (24) soit une transformation dont la transformation infinitésimale génératrice soit une combinaison linéaire à coefficients constants des transformations Z, quand le sont X_1, X_2 ou, en d'autres termes, *la condition nécessaire et suffisante pour que la transformation X_3, donnée par la formule (31), soit une combinaison linéaire à coefficients constants des transformations Z quels que soient les paramètres t et t'.*

Or, on trouve facilement une telle condition. En effet, en premier lieu, si nous supposons qu'on ait les relations

$$(Z_h Z_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{hks} Z_s, \tag{34}$$

alors il est évident, que tous les crochets

$$(X_1 X_2), \ (X_1 X_1 X_2), \ (X_2 X_1 X_2), \ (X_1 X_2 X_1 X_2),$$

seront des expressions linéaires à coefficients constants des quantités Z, et la transformation X_3 le sera aussi, parce qu'elle appartient à la série (33).

D'autre part, si nous posons, que X_3 soit une combinaison linéaire a coefficients constants des Z, le doit être aussi

$$X_3 - t X_1 - t X_2,$$

donc, en vertu de la formule (31), il en sera de même pour

$$tt' [\gamma' (X_1 X_2) + t \sum_{n=2}^{\infty} t^{n-2} \gamma^{(n)} (\overbrace{X_1 \ldots X_1}^{n} X_2) + t'(A)],$$

où (A) représente l'ensemble de tous les termes suivants; et en suite la seule quantité comprise dans les crochets quadratiques; on a donc, que

$$\gamma' (X_1 X_2) + \gamma'' t (X_1 X_1 X_2) - \gamma'' t' (X_2 X_1 X_2) + \ldots \tag{35}$$

doit être une combinaison linéaire à coefficients constants, des quantités Z, *quelles que soient les valeurs des paramètres* t, t', d'où s'ensuit que de la même propriété doit jouir le premier terme, c'est à dire, le seul crochet $(X_1 X_2)$; et cela suffit pour que de la même propriété jouissent encore les crochets suivants et toute l'expression (35).

Or, les X_1 et X_2 sont deux *quelconques* parmi les transformations infinitésimales comprises dans la série (33), donc en les faisant en particulier égales tour à tour aux différentes transformations Z, on parvient à démontrer la nécessité de l'existence des relations (34). Ainsi le second théorème de *Lie* est complètement démontré, c'est à dire, *les relations* (34) *sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les Z engendrent un groupe à r paramètres.*

Comme on voit, cette démonstration [1]), après que l'on a établi la formule (31) du § précédent (laquelle peut être utilisée encore pour d'autres recherches), est d'une grande simplicité; c'est une démonstration *directe* et, on peut dire, la plus directe possible. Le théorème ici démontré d'une manière différente de celle que l'on trouve dans l'ouvrage de *Lie* est un des plus élégants et des plus simples de la théorie des transformations. Il est entrevu par *Lie* depuis ses premiers travaux du 1874, fut demontré par lui pour la première fois en 1878 et pour la seconde fois d'une autre manière en 1890 [2]).

Notre démonstration a cet avantage, que le théorème se présente tout à coup dépourvu des conditions relatives aux transformations infinitési-

[1]) II. § 3. [2]) Math. Ann. 8. 1874, p. 303; Gött. Nachr. 1874, p. 533, 540; Math Ann. **16**. 1879, p. 460; Leipz. Ber. 1890, p. 472—476; Voir aussi *Lie-Engel*, Theorie der Transfgr. I. Leipzig. 1888, p. 146—158, III. 1893, pp. 575 et suiv.

males du groupe paramétrique du groupe donné, et non, comme dans la démonstration de Lie, où de nouvelles considérations sont encore à faire pour éliminer de l'énoncé du theorème des éléments étrangers et pour établir que ces dernières conditions ne sont qu' une conséquence des premiers.

§ 5.

LE TROISIÈME THÉORÈME DE LIE.

Ce théorème établit qu'étant donné un système quelconque de constantes c_{ijs} $(i, j, s = 1, 2 \ldots r)$ satisfaisant aux relations

$$(36) \qquad \left\{ \begin{aligned} & c_{ijs} + c_{jis} = 0 \\ & \sum_{s=1}^{r} (c_{ijs}\, c_{hsh} + c_{jhs}\, c_{ist} + c_{his}\, c_{jst}) = 0 \end{aligned} \right.$$

(r étant le nombre de transformations infinitésimales du groupe), c'est à dire, ayant donnée la structure, il existe toujours le groupe correspondant.

La première tentative à démontrer ce théorème a eté faite par Lie lui même, mais ses considérations étaient sujettes à une grave objection. Une démonstration rigoureuse fut trouvée par Lie en 1888 et reproduite au chapitre XIII du second volume de son ouvrage cité (Theor. d. Transf.). Le même théorème fut après l'objet des considérations longues et importantes de M. Schur et dans ce dernier temps M. Poincaré a repris cette question en partant d'autres points de vue [1]).

Je me propose de donner ici une nouvelle démonstration de ce théorème, en faisant voir directement qu'étant donné un système de constantes de structure, on peut construire les formules qui sont celles de transformation d'un groupe, si l'on suppose que ces constantes soient liées par des relations indiquées.

Dans la démonstration de M. Schur on construit aussi pareillement les formules de transformation d'après les constantes c_{ijs}, mais notre procédé diffère essentiellement de celui de M. Schur, car il est fondé en grande partie sur les identités entre les nombres de Bernoulli. Notre démonstration est plus directe et, à certains égards, d'une nature élémentaire, parce qu'elle ne présuppose aucune notion de la théorie des groupes outre le second théorème de Lie.

---

[1]) Voir les citations au § 2.

Commençons par montrer comment, ayant supposé que les c_{ijs} satisfont aux deux relations (36), elles satisferont aussi à certaines autres relations plus compliquées, lesquelles nous serviront pour notre démonstration.

Adoptons dans ce but une notation abréviative, différente de celle de MM. Schur et Engel, et posons [1]):

$$(37) \qquad \sum_{s_1 s_2} \ldots \sum_{s_{m-1}} c_{t_1 k s_1}\, c_{t_2 s_1 s_2} \ldots c_{t_m\, s_{m+1}, h} = (t_1 t_2 \ldots t_m;\, kh) = -(k t_2 \ldots t_m;\, t_1 h)\,.$$

Avec cette notation les éléments mêmes c_{tks} peuvent être représentés par (tks); nous ferons usage de cette notation en raison de sa commodité.

On a les identités:

$$(38) \qquad \left\{ \begin{aligned} (t_1\, t_2 \ldots t_m;\, kh) &= \sum_s (t_1 \ldots t_\nu;\, ks)\, (t_{\nu+1} \ldots t_m;\, sh) \\ (t_1 \ldots t_\nu k'\, t_{\nu+1} \ldots t_m;\, kh) &= -\sum_s (t_1 \ldots t_\nu;\, ks)\, (s t_{\nu+1} \ldots t_m;\, k'h)\,. \end{aligned} \right.$$

On peut maintenant faire voir que si un système de nombres c satisfait aux relations (36), il satisfera aussi toujours aux relations:

$$\begin{aligned} (t_1\, t_2 \ldots t_m k';\, kh) - (t_1\, k'\, t_2 \ldots t_m;\, kh) + \sum_s \{ & (t_1 t_2 \ldots t_{m-2}\, t_{m-1}\, s;\, kh)\, (t_m k' s) \\ & + (t_1\, t_2 \ldots t_{m-2}\, s t_m;\, kh)\, (t_{m-1}\, k' s) \\ & + \ldots \ldots \ldots \ldots \\ & + (t_1\, s t_3 \ldots t_m;\, kh)\, (t_2\, k' s) \} = 0\,, \end{aligned}$$

d'où en multipliant par les quantités $u_{t_1} \ldots u_{t_m}$ et, avec changement convenable des t, on a la formule [2]):

$$(39) \qquad \begin{aligned} & \sum_{t_1} \ldots \sum_{t_m} [(t_1 t_2 \ldots t_m k';\, kh) - (t_1 k' t_2 \ldots t_m;\, kh)]\, u_{t_1} \ldots u_{t_m} \\ & + \sum_{t_1} \ldots \sum_{t_m} \sum_s [(t_1 t_2 \ldots t_{m-2}\, t_{m-1}\, s;\, kh) + (t_1 t_2 \ldots t_{m-2}\, s t_{m-1};\, kh) \\ & \qquad + \ldots (t_1\, s t_2 \ldots t_{m-1};\, kh)]\, (t_m k' s)\, u_{t_1} \ldots u_{t_m}\,. \end{aligned}$$

---

[1]) IV. § 1. [2]) IV. § 1.

Passons maintenant à un second type de relations qui résultent des relations (36).

Désignons per S_t l'opération de sommation de toutes les expressions que l'on obtient d'une expression donnée par la permutation entre eux, de toute manière possible, des indices $t_1, t_2 \ldots$ qui y apparaissent, et désignons encore par $S_{kk'}$ l'opération de soustraction d'une expression donnée qui dépend des indices k, k' de celle que l'on obtient en permutant entre eux ces deux indices.

Posons pour abréger l'écriture:

$$
\begin{aligned}
(40)\qquad \{t_1 \ldots t_m s; kh\} = (t_1 t_2 \ldots t_{m-1} t_m s; kh) + (t_1 t_2 \ldots t_{m-1} s t_m; kh) + \ldots \\
+ (s t_1 t_2 \ldots t_{m-1} t_m; kh) .
\end{aligned}
$$

On peut alors démontrer que comme conséquence des relations (36) subsiste la relation [1]):

$$
\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{r} S_{kk'} S_t \Big[& \gamma'' \gamma^{(2n-2)} (t_1 \ldots t_{2n-2}; ks) \{t_{2n-1} s; k'h\} \\
& + \gamma^{IV} \gamma^{(2n-4)} (t_1 \ldots t_{2n-4}; ks) \{t_{2n-3} t_{2n-2} t_{2n-1} s; k'h\} \\
(41)\qquad & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \gamma^{(2n-2)} \gamma'' (t_1 t_2; ks) \{t_3 \ldots t_{2n-1} s; k'h\} \Big] \\
& + S_{kk'} S_t \gamma^{(2n)} \{t_1 t_2 \ldots t_{2n-1} k; k'h\} = 0
\end{aligned}
$$

où les γ sont les nombres considérés au § 1.

Pour la démonstration de cette formule on fait voir qu' en appliquant d'une manière convenable et successivement la seconde des relations (36), le premier membre de la relation (41), pourra être transformé en une expression, dont les coefficients seront précisément des combinaisons des nombres de Bernoulli qui forment les premiers membres des formules (8) du § 1, et lesquels sont, comme nous avons dit en son lieu, identiquement nuls. Quant aux détails de cette démonstration nous renvoyons le lecteur au § 2 de la Note citée IV.

Ceci posé, passons à la démonstration du troisième théorème de Lie [2]).

Etant donné un système de r^3 nombres c_{ijs} satisfaisant aux relations (36), en considérant les $u_1 \ldots u_m$ comme variables, formons les transformations infinitésimales suivantes:

---

[1]) IV. § 2. [2]) IV. § 3.

$$
(42)\qquad U_k = \sum_{h=1}^{r} \Big[\varepsilon_{kh} - \gamma' \sum_{t_1} c_{t_1 kh} u_{t_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^{(2n)} \sum_{t_1 t_2 \ldots} \cdot \sum_{s_1 s_2 \ldots} c_{t_1 k s_1} c_{t_2 s_1 s_2} \ldots c_{t_{2n} s_{2n-1}, h}, u_{t_1} \ldots u_{t_{2n}} \Big] \frac{\partial}{\partial u_h} ;
$$

où $\varepsilon_{kh} = 0$ pour $h \lesseqgtr k$ et $= 1$ pour $h = k$.

Il est aisé de trouver un champ de valeurs des quantités u, dans lequel la série ci-dessus (qui est une série de puissances) soit convergente.

Soit, en effet, C celle parmi les constantes c qui a la plus grande valeur absolue, et formons la série:

$$
(43)\qquad \varepsilon_{kh} - \gamma' CM + \gamma'' r^3 C^2 M^2 + \gamma^{IV} r^7 C^4 M^4 + \ldots + \gamma^{(2n)} r^{4n-1} C^{2n} M^{2n} + \ldots
$$

Rappelons que pour les nombres de Bernoulli existe la relation

$$
\lim_{n=\infty} B_{2n} \left(\frac{\pi e}{n}\right)^{2n+\frac{1}{2}} = 4\pi \sqrt{e} .
$$

En y substituant pour B_{2n} son expression au moyen de $\gamma^{(2n)}$ (v. § 1) et prenant le rapport de deux quantités γ consécutives, on aura:

$$
\lim_{n=\infty} \frac{\gamma^{(2n)}}{\gamma^{(2n-2)}} \frac{(2n)!}{(2n-2)!} (\pi e)^2 \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n+\frac{1}{2}} \frac{1}{(n-1)^2} = 1 ,
$$

et, étant

$$
\lim_{n=\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n+\frac{1}{2}} = e^{-2} , \qquad \lim_{n=\infty} \frac{(2n)!}{(2n-2)!} \frac{1}{(n-1)^2} = 4
$$

on a finalement:

$$
(44)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{\gamma^{(2n)}}{\gamma^{(2n-2)}} = \frac{1}{4\pi^2} .
$$

Donc, si l'on fait

$$
(45)\qquad M < \frac{2\pi}{r^2 C} ,
$$

on obtient le domaine de convergence de la série (43), et prenant chacune des quantités $u_1, \ldots, u_r$ plus petite que $\frac{2\pi}{r^2 C}$, on obtient évidemment le domaine de convergence de la série contenue dans les crochets de (42).

Or, je dis que les transformations infinitésimales données par la formule (42) engendrent un groupe à r paramètres, parce qu' elles satisfont au second théorème de Lie, et que la structure du groupe ainsi formé est précisément celle donnée par les nombres c.

En appliquant le symbole $S_{kk'}$ introduit plus haut, le crochet $(U_k, U_{k'})$ formé de deux transformations infinitésimales U_k, $U_{k'}$ peut s'écrire

$$(U_k, U_{k'}) = S_{kk'} \sum_h \sum_s \Big[\varepsilon_{ks} - \gamma' \sum_{t_1} c_{t_1 ks} u_{t_1} + \gamma'' \sum_{t_1 t_2 s_1} c_{t_1 k s_1} c_{t_2 s_1 s} u_t u_{t_2}\Big]$$

(46) $$\times \Big[-\gamma' c_{sk'h} + \gamma'' \sum_{t_1' s_1'} (c_{t'_1 k s'_1} c_{s s'_1 h} + c_{s k s'_1} c_{t'_1 s'_1 h}) u_{t'_1} + \dots\Big] \frac{\partial}{\partial u_h},$$

et à l'aide du symbole introduit:

$$(U_k, U_{k'}) = \sum_h S_{kk'} \sum_s \Big[\varepsilon_{kr} - \gamma' \sum_{t_1} (t_1 ks) u_{t_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^{(2n)} \sum_{t_1 \dots t_{2n}} (t_1 \dots t_{2n}, ks) u_{t_1} \dots u_{t_{2n}}\Big]$$

$$\times \Big[-\gamma' (rk'h) + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^{(2n)} \sum_{t'_1 \dots t'_{2n-1}} \{ t'_1 \dots t'_{2n-1} s;\, k'h)\}\Big] \frac{\partial}{\partial u_h}.$$

Développons le produit des deux crochets carrés et ordonnons les termes suivant leur degré en u. Les termes du degré zéro sont:

$$-\gamma' (kk'h) = c_{kk'h}$$

$\left(\text{étant } \gamma' = -\frac{1}{2}\right)$, que l'on peut écrire

(47) $$\sum_s c_{kk's} \varepsilon_{rh}.$$

Les termes du degré un sont:

$$\gamma'' S_{kk'} \sum_{t_1'} \{(t'_1 k;\, k'h) + (kt'_1;\, k'h)\} u_{t'_1} + \gamma'^2 S_{kk'} \sum_{t_1} \sum_s (t_1 ks)(sk'h) u_{t_1},$$

c'est à dire:

$$\sum_t \Big\{\gamma'' \sum_s (c_{tk's} c_{ksh} - c_{tks} c_{k'sh}) + \gamma'' \sum_s (c_{kk's} c_{tsh} - c_{k'ks} c_{tsh})$$

$$+ \gamma'^2 \sum_s (c_{tks} c_{sk'h} - c_{tk's} c_{skh})\Big\} u_t,$$

ou, en vertu de (36):

$$(3\gamma'' + \gamma'^2) \sum_t \sum_s c_{kk's} c_{tsh} u_t.$$

Mais

$$3\gamma'' + \gamma'^2 = \frac{1}{2} = -\gamma',$$

donc on aura:

(48) $$\sum_s c_{kk's} (-\gamma' \sum_t c_{tsh} u_t).$$

Les termes du degré $2n$ sont les suivants:

$$-\gamma' \gamma^{(2n)} S_{kk'} \sum_{t_1 \dots t_{2n}} \Big\{ \sum_s (t_1 \dots t_{2n-1} s;\, k'h) + \dots + (t_1 s \dots t_{2n-1};\, k'h)\Big\} (t_{2n} ks)$$

$$-(t_1 \dots t_{2n} k';\, kh) + \sum_s (s t_1 t_2 \dots t_{2n-1};\, k'h)(t_{2n} ks) u_{t_1} \dots u_{t_{2n}}.$$

En permutant k avec k', en appliquant la formule (39), en observant que d'après la formule (38):

$$\sum_s (s t_1 \dots t_{2n-1};\, k'h)(t_{2n} ks) = -(t_{2n} k' t_1 \dots t_{2n-1};\, kh)$$

et qu' on doit faire la sommation respectivement à tous les t, et par cela on peut dans un terme échanger arbitrairement les t mêmes, cette expression devient:

$$-2\gamma' \gamma^{(2n)} \sum_{t_1 \dots t_{2n}} \{(t_1 k t_2 \dots t_{2n};\, k'h) - (t_1 k' t_2 \dots t_{2n};\, kh)\} u_{t_1} \dots u_{t_{2n}},$$

c'est à dire:

$$\sum_s c_{kk's} \gamma^{(2n)} \sum_{t_1 \dots t_{2n}} (t_1 \dots t_{2n};\, sh) u_{t_1} \dots u_{t_{2n}}.$$

Passons enfin aux termes du degré impair $2n-1$. En examinant la formule (46), et en tenant compte de la possibilité du changement des tous t entre eux, on voit que le coefficient de $u_{t_1} \dots u_{t_{2n-1}}$ est précisément à un facteur $\frac{1}{(2n-1)!}$ près, dérivé de l'apposition de S_t, qui n'apparaît pas dans (46), le premier membre de la formule (41), et par suite il est nul.

En résumant les résultats obtenus, on aura:

$$
(49)\qquad \begin{aligned}(U_k, U_{k'}) = \sum_s c_{kk's} \sum_h \Big[\varepsilon_{sh} - \gamma' \sum_t c_{tsh} u_t \\
+ \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^{(2n)} \sum_{t_1 \dots t_{2n}} (t_1 \dots t_{2n};\, sh)\, u_{t_1} \dots u_{t_{2n}} \Big] \frac{\partial}{\partial u_h} = \sum_s c_{kh's} U_s\,.\end{aligned}
$$

Cette formule démontre que les transformations infinitésimales U engendrent un groupe et que ce groupe a précisément la structure assignée.

§ 6.

DÉTERMINATION DU GROUPE PARAMÉTRIQUE.

Dans ce § et le suivant nous donnerons quelques autres applications de la formule pour le produit, que nous avons traité au § 3.

Auparavant nous ferons voir qu' étant données les transformations infinitésimales d'un groupe on peut à l'aide de cette formule déterminer les transformations du groupe paramétrique (Parametergruppe) correspondant [1]).

Soit un groupe à r paramètres engendré par les transformations infinitésimales:

$$
Z_1, \dots, Z_r\,;
$$

formons le produit des deux transformations

$$
(50)\qquad x''_i = e^{X_1'} x'_i\,; \quad x'_i = e^{X_2} x_i\,,
$$

ou:

$$
(51)\qquad \begin{cases} X_1 = v_1 Z_1 + \dots + v_r Z_r \\ X_2 = u_1 Z_1 + \dots + u_r Z_r \end{cases}
$$

les v et u étant les paramètres des deux transformations et la X_1' étant la même X_1 mais écrite avec les variables x'.

La transformation résultante soit

$$
(52)\qquad x''_i = e^{X_3} x_i\,,
$$

où X_3 doit être aussi une combinaison linéaire des Z, c'est à dire:

1) V. § 2.

$$
(53)\qquad X_3 = u'_1 Z_1 + \dots + u'_r Z_r
$$

où les u' seront des fonctions des v et u:

$$
(54)\qquad u'_h = \varphi_h\,(u; v)\,.
$$

Les formules (54) sont, comme on sait, celles des transformations d'un groupe, quand on considère les u et u' comme variables et les v comme paramètres de la transformation; c'est le groupe nommé paramétrique.

En s'appuyant sur les recherches précedentes nous pouvons déterminer complètement les fonctions φ_i; pour cette détermination la connaissance de tous les coefficients dans la formule du produit de deux transformations n'est pas nécessaire: il nous suffit d'avoir la connaissance de quelques coefficients que nous avons déjà calculés. En effet, il nous suffira de calculer seulement les transformations infinitésimales du groupe engendré par (54); nous les obtiendrons en imaginant les $v_1 \dots v_r$ comme infiniment petits; puisque dans le calcul de X_3 on pourra se limiter aux termes qui contiennent les puissances de $v_1 \dots v_r$ non supérieures à la première, ce qui revient à dire que dans la formule (31) apparaitront seulement les termes qui multiplient la première puissance de t, et qui sont, comme on sait, les suivants:

$$
X_1 + t'\gamma'\,(X_1 X_2) - t'^2 \gamma''\,(X_2 X_1 X_2) - \dots
$$

ou

$$
(55)\qquad X_1 - t'\gamma'\,(X_2 X_1) + \sum_{n=1}^{\infty} t^{(2n)} \gamma^{(2n)}\,(\overbrace{X_2 \dots X_2}^{2n} X_1)\,.
$$

En posant dans cette formule pour X_1 et X_2 leurs expressions en Z, les coefficients de $v_k Z_1, v_k Z_2, \dots, v_k Z_r$ seront les coefficients d'une transformation infinitésimale U_k du groupe paramétrique.

Les Z engendrant un groupe, on a, en vertu du second théorème de Lie:

$$
(56)\qquad (Z_t Z_s) = \sum_h c_{tsh} Z_h\,,
$$

où les c sont les constantes de structure.

De cette formule on déduit:

$$
(X_2 X_1) = \sum_{t_1 k} u_{t_1} v_k\,(Z_{t_1} Z_k) = \sum_{t_1 kh} c_{t_1 kh}\, u_{t_1} v_k Z_h
$$

$$
(X_2 X_2 X_1) = \sum_{t_1 t_2 s_1 kh} c_{t_1 k s_1}\, c_{t_2 s_1 h}\, u_{t_1} u_{t_2} v_k Z_k\,,
$$

et en général:

$$(\overbrace{X_2 \ldots X_2}^{2n} X_1) = \sum_{t_1 t_2 \ldots s_1 s_2 \ldots kh} \sum \sum c_{t_1 k s_1} c_{t_2 s_1 s_2} \ldots c_{t_{2n} s_{2n-1} h} u_{t_1} \ldots u_{t_{2n}} v_k Z_h .$$

En substituant dans la (55) et appliquant pour l'abréger le symbole introduit au § précédent, la transformation infinitésimale U_k se présentera sous la forme:

$$U_k = \sum_h \left[\varepsilon_{kh} - \gamma' \sum_{t'} (t_1 kh)\, u_{t_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^{(2n)} \sum_{t_1 \ldots t_{2n}} (t_1 \ldots t_{2n};\, kh)\, u_{t_1} \ldots u_{t_{2n}} \right] \frac{\partial}{\partial u_h} ,$$

où ε_{kh} est 0 pour $k \lessgtr h$ et 1 pour $h = k$.

Cette formule coincide exactement avec celle du § précédent, laquelle nous a servi pour la démonstration du troisième théorème de Lie.

Ainsi nous avons trouvé les fonctions φ de la formule (54) et nous aurons:

$$u'_h = u_h + \left(\sum_k v_k U_k \right) u_h + \frac{1}{2!} \left(\sum_k v_k U_k \right)^2 u_h + \ldots \tag{57}$$

Ce sont les formules de transformation du groupe paramétrique.

§ 7.

APPLICATION DE LA FORMULE DU PRODUIT À LA DÉMONSTRATION IMMÉDIATE D'AUTRES RÉSULTATS RELATIFS À LA PERMUTABILITÉ DE DEUX GROUPES ET À L'ISOMORPHISME.

Pour montrer la fécondité de la formule générale trouvée, nous allons esquisser son application à la démonstration d'autres théorèmes. Ceux qui connaissent la théorie des transformations dans ses détails apprécieront sans doute la simplicité de ces nouvelles démonstrations [1]).

Supposons donnés deux groupes à un paramètre, engendrés respectivement par les transformations infinitésimales X_1, X_2. On sait que pour que deux groupes soient échangeables entre eux, c'est à dire pour que le produit d'une transformation appartenant à un de ces groupes par une transformation appartenant au second soit indépendant de l'ordre des facteurs, il faut et il suffit que $(X_1 X_2)$ soit égal à zéro.

[1]) II. § 4.

Or on trouve immédiatement ce résultat par la seule formule (31), car lorsque X_3 doit rester inaltéré par le changement de X_1 avec X_2 et de t avec t' et pour système quelconque de valeurs de t et t', cela doit être aussi pour

$$tt' [\gamma' (X_1 X_2) + \gamma'' t (X_1 X_1 X_2) + \ldots]$$

et donc, aussi pour

$$\gamma' (X_1 X_2) + \gamma'' t (X_1 X_1 X_2) + \ldots$$

Mais échangeant X_1 avec X_2 et t avec t' on a:

$$\gamma' (X_2 X_1) + \gamma'' t' (X_2 X_2 X_1) + \ldots$$

et comme cette expression doit coincider avec la précédente pour un système quelconque de valeurs de t et t', on obtiendra $(X_1 X_2) = 0$.

D'autre part, si $(X_1 X_2) = 0$, seront évidemment nuls les autres crochets dans la formule (31) qui se réduit à:

$$X_3 = t X_1 + t' X_2 ,$$

et reste inaltérée pour les changements indiqués. Ainsi le théorème est démontré.

Soient donnés deux groupes engendrés respectivement par les transformations infinitésimales $Z_1 \ldots Z_r$ et $Y_1 \ldots Y_r$; supposons que ces groupes soient isomorphes et que la transformation infinitésimale du second laquelle correspond à la Z_h du premier, soit précisément la Y_h, de sorte que nous avons les relations:

$$\left\{ \begin{aligned} (Z_h Z_k) &= \sum_{s=1}^{r} c_{hks} Z_s , \\ (Y_h Y_k) &= \sum_{s=1}^{r} c_{hks} Y_s ; \end{aligned} \right. \tag{58}$$

l'identité des nombres c dans le premier et le second cas définit, comme on sait, l'isomorphisme entre les deux groupes.

On sait qu'en écrivant les transformations de deux groupes sous leur forme canonique et qu'en faisant correspondre entre elles deux transformations auxquelles correspondent les mêmes valeurs des paramètres, on a la propriété, qu'au produit de deux transformations des deux groupes correspond dans l'autre le produit des deux transformations correspondantes. Cette propriété qui établit une analogie parfaite de l'isomorphisme, comme il est défini par Lie dans sa théorie des transformations, avec celui de la théorie ordinaire des substitutions, se démontre dans le Traité de Lie (Th. der Transf. Leipzig. 1888. I, p. 293, 418—420) en recourant à la théorie du groupe paramétrique.

Or notre formule démontre cette propriété immédiatement. En effet, ayant supposé que X_1, X_2 soient deux combinaisons linéaires à coefficients constants des expressions Z, et que $X_1^{(1)}, X_2^{(1)}$ soient des combinaisons linéaires analogues des expressions Y, la transformation qui est le produit des deux transformations

$$(59)\qquad \begin{cases} x''_i = x'_i + \frac{t}{1!} X'_1\, x'_i + \dots \\ x'_i = x_i + \frac{t'}{1!} X_2\, x_i + \dots \end{cases}$$

sera:

$$(60)\qquad x''_i = x_i + \frac{t}{1} X_3\, x_2 + \dots,$$

X_3 étant donnée par la formule (31) qui à l'aide des premières relations (58) se réduit à une combinaison linéaire des Z à coefficients numériques dépendant de t, t', γ' et des c. Si maintenant on passe du premier groupe au second, laissant les mêmes t et t', on doit seulement entrechanger les Z avec les Y et donc les X avec les $X^{(1)}$; la transformation $X_3^{(1)}$ relative au nouveau produit sera la même combinaison linéaire des Y que l'est la X_3 des Z, puisque les coefficients c restent invariables pour le passage du premier groupe au second. Le théorème est donc démontré.

Il convient de remarquer que cette démonstration est valable indifféremment pour l'isomorphisme holoédrique ou mériédrique, tandis que la démonstration donnée dans l'ouvrage cité de Lie ne possède pas cet avantage.

Milan, Août 1902.

J. SOCHOCKI,

ZASADY TEORYI FUNKCYJ ELIPTYCZNYCH.

§ 1.

OKREŚLENIE I WŁASNOŚCI PEWNEJ KRZYWEJ STOPNIA TRZECIEGO.

W szeregu krzywych stopnia trzeciego istnieje jedna, której rola przy pewnym sposobie zapatrywania się jest podobną do tej, jaką odgrywa koło względem stożkowych. Z krzywą tą spotkaliśmy się już w pracy o równaniach stopnia trzeciego i czwartego [1]), gdzie przy jej pomocy rzucono nowe światło na pewne pytania, dotyczące własności pierwiastków równania stopnia czwartego.

Zwracamy się obecnie do tejże krzywej stopnia trzeciego i postaramy się pokazać, że ukrywa ona w sobie zasadnicze własności funkcyj eliptycznych, dające się wyczytać na niej w sposób podobny, jak zasadnicze własności funkcyj kołowych wyczytują się na kole.

Aby naszym rozumowaniom nadać więcej rozległości, zmuszeni jesteśmy do krzywej danej:

$$(1)\qquad y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

dołączyć drugą z nią sprzężoną, a określoną równaniem:

$$(2)\qquad y^2 = -(4x^3 - g_2 x - g_3)$$

[1]) Prace matematyczno-fizyczne. T. X, str. 164.