ZASADY RACHUNKU ITERACYJNEGO.

NAPISAŁ

Ł. E. BÖTTCHER.

Część trzecia.

(Dokończenie [1]).

§ 16. Stawiamy twierdzenie: Jeżeli funkcya $f(z)$ rozwija się w pewnem otoczeniu punktu x na szereg:

$$f(z)-x=(z-x)+\frac{f^{(p+1)}(x)}{(p+1)!}(z-x)^{p+1}+\frac{f^{(p+2)}(x)}{(p+2)!}(z-x)^{p+2}+\ldots\ldots,$$

wtedy w obrębie całego obszaru zbieżności iteracyjnej, dołączonego do punktu x, zachodzi wzór:

$$(1)\qquad \left(\frac{1}{z_n-x}\right)^p=\sum_{r=1}^{r=p}P_{p-r}\sqrt[p]{n^r}+P_p\log n+R_n(z),$$

przyczem ma być $\lim\limits_{n=\infty}R_n(z)$ funkcyą zmiennej z, oznaczoną i skończoną.

Zastanówmy się nad tem, jakie wnioski wynikną stąd muszą. Obliczymy spółczynniki $P_0, P_1, \ldots\ldots, P_{p-1}, P_p$ i okażemy, że będą one liczbami stałemi, od n niezależnemi.

Podzielmy obie strony równania (1) przez n, a otrzymamy:

$$(2)\qquad \frac{1}{n}\left(\frac{1}{z_n-x}\right)^p=P_0+\sum_{r=1}^{r=p-1}\frac{P_r}{\sqrt[p]{n^r}}+\frac{\log n}{n}\cdot P_p+\frac{R_n(z)}{n}$$

[1]) Patrz „Prace mat.-fiz." t. 12, str. 95–113.

Napiszmy dla krótkości:

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{z_n-x}\right)^p = P_n + Q_n; \tag{3}$$

dla dość wielkiego n można będzie uczynić Q_n dowolnie małem. Napiszmy:

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{z_n-x}\right)^p = P_0\left(1+\frac{Q_n}{P_0}\right), \tag{4}$$

a otrzymamy:

$$n\,(z_n-x)^p = P_0^{-1}\left(1+\frac{Q_n}{P_0}\right)^{-1},$$

i zarazem:

$$\sqrt[p]{n^k}\,.\,(z_n-x)^k = P_0^{-\frac{k}{p}}\left(1+\frac{Q_n}{P_0}\right)^{-\frac{k}{p}}.$$

Na podstawie zrobionej już uwagi co do Q_n możemy podać następujące rozwinięcie:

$$\sqrt[p]{n^k}\,.\,(z_n-x)^k = P_0^{-\frac{k}{p}} - \frac{k}{p}P_0^{-\frac{k+p}{p}}Q_n + \frac{k\,(k+p)}{p\,.\,2p}P_0^{-\frac{k+2p}{p}}Q_n^2 - \ldots \tag{5}$$

§ 17. **Weźmy pod uwagę wzór:**

$$Q_n = \frac{P_1}{\sqrt[p]{n}} + \frac{P_2}{\sqrt[p]{n^2}} + \ldots\ldots + \frac{P_{p-1}}{\sqrt[p]{n^{p-1}}} + \frac{P_p\log n}{n} + \frac{R_n(z)}{n}.$$

Rozwijając na szereg analogiczny dowolną potęgę wyrazu Q_n, otrzymujemy:

$$Q_n = \frac{P_{1,1}}{\sqrt[p]{n}} + \frac{P_{1,2}}{\sqrt[p]{n^2}} + \frac{P_{1,3}}{\sqrt[p]{n^3}} + \frac{P_{1,4}}{\sqrt[p]{n^4}} + \ldots + \frac{P_{1,p-1}}{\sqrt[p]{n^{p-1}}} + \frac{P_{1,p}\log n}{n} + \frac{R_{1,n}(z)}{n},$$

$$Q_0^2 = \frac{P_{2,2}}{\sqrt[p]{n^2}} + \frac{P_{2,3}}{\sqrt[p]{n^3}} + \frac{P_{2,4}}{\sqrt[p]{n^4}} + \ldots + \frac{P_{2,p-1}}{\sqrt[p]{n^{p-1}}} + \frac{R_{2,n}(z)}{n},$$

$$Q_0^3 = \frac{P_{3,3}}{\sqrt[p]{n^3}} + \frac{P_{3,4}}{\sqrt[p]{n^4}} + \ldots + \frac{P_{3,p-1}}{\sqrt[p]{n^{p-1}}} + \frac{R_{3,n}(z)}{n},$$

i t. d., wreszcie:

$$Q_0^{p-1} = \frac{P_{p-1,p-1}}{\sqrt[p]{n^{p-1}}} + \frac{P_{p-1,n}(z)}{n}; \quad Q_n^p = \frac{R_{p,n}(z)}{n}; \quad \lim n\,Q_n^{p+\nu} = 0.$$

Widzimy, że spółczynniki $P_{i,j}$ dają się łatwo wyrachować jako funkcye algebraiczne, wymierne i całkowite spółczynników $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_{p-i}, \ldots$

§ 18. Zastosujmy w rozwinięciu głównem treść poprzedniego paragrafu, uwzględniając jedynie potrzebne wyrazy jego, a otrzymamy wzór:

$$\begin{aligned}
\sqrt[p]{n^k}\,(z_n-x)^k = {} & P_0^{-\frac{k}{p}} - \frac{k}{p}\,.\,P_0^{-\left(\frac{k}{p}+1\right)}\left\{\frac{P_{1,1}}{\sqrt[p]{n}} + \frac{P_{1,2}}{\sqrt[p]{n^2}} + \frac{P_{1,3}}{\sqrt[p]{n^3}} + \ldots\ldots\right. \\
& \left.\ldots + \frac{P_{1,p-1}}{\sqrt[p]{n^{p-1}}} + \frac{P_{1,p}\log n}{n} + \frac{R_{1,n}}{n}\right\} + \frac{k(k+p)}{p\,.\,2p}P_0^{-\left(\frac{k}{p}+2\right)}\left\{\frac{P_{2,2}}{\sqrt[p]{n^2}}\right. \\
& \left. + \frac{P_{2,3}}{\sqrt[p]{n^3}} + \frac{P_{2,4}}{\sqrt[p]{n^4}} + \ldots\ldots + \frac{P_{2,p-1}}{\sqrt[p]{n^{p-1}}} + \frac{R_{2,n}(z)}{n}\right\} \\
& - \frac{k(k+p)(k+2p)}{p\,.\,2p\,.\,3p}P_0^{-\left(\frac{k}{p}+3\right)}\left\{\frac{P_{3,3}}{\sqrt[p]{n^3}} + \frac{P_{3,4}}{\sqrt[p]{n^4}} + \ldots\ldots + \frac{P_{3,p-1}}{\sqrt[p]{n^{p-1}}}\right. \\
& \left. + \frac{R_{3,n}(z)}{n}\right\} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (-1)^{p-1}\frac{k(k+p)(k+2p)\ldots(k+p^2-2p)}{p\,.\,2p\,.\,2p\,.\ldots.\,(p-1)p}P_0^{-\left(\frac{k}{p}+p-1\right)}\left\{\frac{P_{p-1,p-1}}{\sqrt[p]{n^{p-1}}} + \right. \\
& \left. + \frac{R_{p-1,n}(z)}{n}\right\} + (-1)^p\frac{k(k+p)(k+2p)\ldots(k+p^2-p)}{p\,.\,2p\,.\,2p\ldots p\,.\,p}P_0^{-\left(\frac{k}{p}+p\right)}\frac{R_{p,n}(z)}{n}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Sumę tu przerywamy, ponieważ następne wyrazy będą wyższego, aniżeli n^{-1}, stopnia małości.

Zbierając wyrazy podobne, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\sqrt[p]{n^k}\,(z_n-x)^k = {} & P_0^{-\frac{k}{p}} - \frac{k}{p}\,P_0^{-\left(\frac{k}{p}+1\right)}P_{1,1}\frac{1}{\sqrt[p]{n}} \\
& + \left[-\frac{k}{p}\,P_0^{-\left(\frac{k}{p}+1\right)}P_{1,2} + \frac{k(k+p)}{p\,.\,2p}P_0^{-\left(\frac{k}{p}+2\right)}.\,P_{2,2}\right]\frac{1}{\sqrt[p]{n^2}} \\
& + \left[-\frac{k}{p}P_0^{-\left(\frac{k}{p}+1\right)}.\,P_{1,3} + \frac{k(k+p)}{p\,.\,2p}P_0^{-\left(\frac{k}{p}+2\right)}.\,P_{2,3}\right. \\
& \left. - \frac{k(k+p)(k+2p)}{p\,.\,2p\,.\,3p}P_0^{-\left(\frac{k}{p}+3\right)}.\,P_{3,3}\right]\frac{1}{\sqrt[p]{n^3}} + \ldots\ldots\ldots \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$+\left[-\frac{k}{p}P_0^{-\left(\frac{k}{p}+1\right)}\cdot P_{1,p-1}+\frac{k(k+p)}{p\,.\,2p}P_0^{-\left(\frac{k}{p}+2\right)}P_{2,p-1}-\ldots\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\ldots+(-1)^{p-1}\frac{k(k+p)(k+2p)\ldots(k+p^2-2p)}{p\,.\,2p\,.\,3p\,.\ldots(p-1)\,p}P_0^{-\left(\frac{k}{p}+p-1\right)}P_{p-1,p-1}\right]\frac{1}{\sqrt[p]{n^{p-1}}}$$

$$-\frac{k}{p}P_0^{-\left(\frac{k}{p}+1\right)}P_{1,p}\frac{\log n}{n}+\frac{S_{k,n}(z)}{n}.$$

Wzór ten możemy napisać prościej:

$$n^{\frac{k}{p}}(z_n-x)^k=\frac{[P_0]^{(k)}}{1}+\frac{[P_0,P_1]^{(k)}}{\sqrt[p]{n}}+\frac{[P_0,P_1,P_2]^{(k)}}{\sqrt[p]{n^2}}+\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots+\frac{[P_0,P_1,P_2,\ldots P_{p-1}]^{(k)}}{\sqrt[p]{n^{p-1}}}+\frac{[P_0,P_p]^{(k)}\log n}{n}+\frac{S_{k,n}(z)}{n}.$$

Wyraz

$$[P_0,P_1,\ldots\ldots,P_\nu]^{(k)}$$

jest pewną funkcyą algebraiczną spółczynników $P_0, P_1, \ldots P_\nu$, którą wyznaczamy na podstawie pełnego rozwinięcia, dopiero co podanego, oraz wartości $P_{i,j}$, które obliczamy z § 17. Z tego wzoru wynika:

$$(z_n-x)^k=\frac{[P_0]^{(k)}}{\sqrt[p]{n^k}}+\frac{[P_0,P_1]^{(k)}}{\sqrt[p]{n^{k+1}}}+\frac{[P_0,P_1,P_2]^{(k)}}{\sqrt[p]{n^{k+2}}}+\ldots\ldots\ldots$$

(7)

$$\ldots\ldots+\frac{[P_0,P_1,P_2,\ldots,P_{p-k}]^{(k)}}{\sqrt[p]{n^p}}+\frac{T_{n,k}(z)}{\sqrt[p]{n^{p+1}}}.$$

Mamy więc twierdzenie:

Rozwinięcie

$$\left(\frac{1}{z_n-x}\right)^p=\frac{P_0}{\sqrt[p]{n^0}}+\frac{P_1}{\sqrt[p]{n^1}}+\frac{P_2}{\sqrt[p]{n^2}}+\ldots\ldots+\frac{P_{p-1}}{\sqrt[p]{n^{p-1}}}+\frac{P_p\log n}{n}+\frac{R_n(z)}{n},$$

pociąga za sobą rozwinięcie:

$$(z_n-x)^k=\frac{[P_0]^{(k)}}{\sqrt[p]{n^k}}+\frac{[P_0,P_1]^{(k)}}{\sqrt[p]{n^{k+1}}}+\ldots+\frac{[P_0,P_1,P_2,\ldots P_{p-k}]^{(k)}}{\sqrt[p]{n^p}}+\frac{T_{n,k}(z)}{\sqrt[p]{n^{p+1}}}.$$

§ **19.** Zajmijmy się teraz zbadaniem sumy:

$$\sum_{m=1}^{m=n-1}(z_m-x)^k.$$

Sumę tę określi nam wzór:

$$\sum^{m=n-1}(z_n-x)^k=[P_0]^{(k)}\left\{\left(\frac{1}{1}\right)^{\frac{k}{p}}+\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{p}}+\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{k}{p}}+\ldots\ldots+\left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{k}{p}}\right\}$$

$$+[P_0,P_1]^{(k)}\left\{\left(\frac{1}{1}\right)^{\frac{k+1}{p}}+\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k+1}{p}}+\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{k+1}{p}}+\ldots\ldots\ldots+\left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{k+1}{p}}\right\}$$

$$(8)\quad +[P_0,P_1,P_2]^{(k)}\left\{\left(\frac{1}{1}\right)^{\frac{k+2}{p}}+\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k+2}{p}}+\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{k+2}{p}}+\ldots\ldots\ldots+\left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{k+2}{p}}\right\}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+[P_0,P_1,P_2,\ldots,P_{p-k}]^{(k)}\left\{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n-1}\right\}$$

$$+\frac{T_{k,1}(z)}{\sqrt[p]{1^{p+1}}}+\frac{T_{k,2}(z)}{\sqrt[p]{2^{p+1}}}+\frac{T_{k,3}(z)}{\sqrt[p]{3^{p+1}}}+\ldots\ldots\ldots+\frac{T_{k,n-1}(z)}{\sqrt[p]{(n-1)^{p+1}}}.$$

Przy pomocy teoryi szeregów dowieść można, że dla $\nu<1$:

$$(9)\qquad \left(\frac{1}{1}\right)^\nu+\left(\frac{1}{2}\right)^\nu+\left(\frac{1}{3}\right)^\nu+\ldots\ldots+\left(\frac{1}{m-1}\right)^\nu=\frac{m^{1-\nu}}{1-\nu}+M_{\nu,m},$$

gdzie $M_{\nu,m}$ jest pewną liczbą skończoną.

Podstawmy wzór (9) w rozwinięcie (8), a otrzymamy:

$$\sum_{m=1}^{m=n-1}(z_n-x)^k=[P_0]^{(k)}\left\{\frac{n^{1-\frac{k}{p}}}{1-\frac{k}{p}}+M_{0,n}\right\}+[P_0,P_1]^{(k)}\left\{\frac{n^{1-\frac{k+1}{p}}}{1-\frac{k+1}{p}}\right.$$

$$\left.+M_{1,n}\right\}+\ldots\ldots+\left[P_0,P_1,\ldots,P_{p-k}\right]^{(k)}\left\{\log n+E\right\}$$

$$+\frac{T_{k,1}(z)}{\sqrt[p]{1^{p+1}}}+\frac{T_{k,2}(z)}{\sqrt[p]{2^{p+1}}}+\ldots\ldots+\frac{T_{k,n-1}(z)}{\sqrt[p]{(n-1)^{p+1}}},$$

i ostatecznie będzie:

$$\sum_{m=1}^{m=n-1}(z_n-x)^k=\frac{[P_0]^{(k)}}{1-\frac{k}{p}}\cdot n^{1-\frac{k}{p}}+\frac{[P_0,P_1)^{(k)}}{1-\frac{k+1}{p}}\cdot n^{1-\frac{k+1}{p}}$$

$$(10)\qquad +\frac{[P_0,P_1,P_2]^{(k)}}{1-\frac{k+2}{p}}n^{1-\frac{k+2}{p}}+\ldots+\frac{[P_0,P_1,P_2,\ldots,P_{p-k-1}]^{(k)}}{1-\frac{p-1}{p}}n^{1-\frac{p-1}{p}}$$

$$+\frac{[P_0,P_1,P_2,\ldots,P_{p-k-1},P_{p-k}]^{(k)}}{1}\log n+U_{k,n}(z),$$

przyczem dla krótkości przyjęliśmy:

$$U_{k,n}(z)=[P_0]^{(k)}M_{0,n}+[P_0,P_1[^{(k)}M_{1,n}+\ldots+[P_0,P_1,\ldots,P_{p-k-1}]^{(k)}M_{p-k-1,n}$$

$$+[P_0,P_1,\ldots,P_{p-1}]^{(k)}E+\frac{T_{k,1}(z)}{\sqrt[p]{1^{p+1}}}+\frac{T_{k,2}(z)}{\sqrt[p]{1^{p+1}}}+\ldots+\frac{T_{k,n+1}(z)}{\sqrt[p]{(n-1)^{p+1}}},$$

Funkcya ta jest zawsze skończoną i taką zostaje także w granicy, gdy przyjmiemy $n=\infty$.

§ **20.** W art. 11 s[r. 107 Tomu XII „Prac matematyczno-fizycznych" podaliśmy wzór:

$$\left(\frac{1}{z_n-x}\right)^p=\left(\frac{1}{z-x}\right)^p-\frac{npf^{(p+1)}(x)}{(p+1)!}+A_1\sum_{m=1}^{m=n-1}(z_m-x)$$

$$+A_2\sum_{m=1}^{m=n-1}(z_m-x)^2+A_3\sum_{m=1}^{m=n-1}(z_m-x)^3+\ldots\ldots$$

Zastosujmy tu wzory, otrzymane w poprzednim §, a otrzymamy co następuje:

$$\left(\frac{1}{z_n-x}\right)^p=\left(\frac{1}{z-x}\right)^p-\frac{npf^{(p+1)}(x)}{(p+1)!}$$

$$+A_1\left\{\frac{[P_0]^{(1)}}{1-\frac{1}{p}}n^{1-\frac{1}{p}}+\frac{[P_0,P_1]^{(1)}}{1-\frac{2}{p}}n^{1-\frac{2}{p}}+\frac{[P_0,P_1,P_2]^{(1)}}{1-\frac{3}{p}}n^{1-\frac{3}{p}}+\ldots\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{[P_0,P_1,\ldots,P_{p-2}]^{(1)}}{1-\frac{p-1}{p}}n^{1-\frac{p-1}{p}}+\frac{[P_0,P_1,\ldots,P^{p-1}]^{(1)}}{1}\log n+U_{1,n}(z)\right\}$$

$$+A_2\left\{\frac{[P_0]^{(2)}}{1-\frac{2}{p}}n^{1-\frac{2}{p}}+\frac{[P_0,P_1]^{(2)}}{1-\frac{3}{p}}n^{1-\frac{3}{p}}+\frac{[P_0,P_1,P_2]^{(2)}}{1-\frac{4}{p}}n^{1-\frac{4}{p}}+\ldots\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{[P_0,P_1,\ldots,P_{p-3}]^{(2)}}{1-\frac{p-1}{p}}n^{1-\frac{p-1}{p}}+\frac{[P_0,P_1,\ldots,P_{p-2}]^{(2)}}{1}\log n+U_{2,n}(z)\right\}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+A_{p-1}\left\{\frac{[P_0]^{(p-1)}}{1-\frac{p-1}{p}}n^{1-\frac{p-1}{p}}+\frac{[P_3,P_1]^{(p-1)}}{1}\log n+U_{p-1,n}(z)\right.$$

$$+A_p\left\{\frac{[P_0]^{(p)}}{1}\log n+U_{p,n}(z)\right\}+V_n(z).$$

Pozostałe wyrazy dają szereg zbieżny.

Jakoż w granicach zbieżności rozwinięcia:

$$A_{p+1}(z-x)^{p+1}+A_{p+2}(z-x)^{p+2}+\ldots\ldots$$

które, objąwszy z, tem samem muszą objąć zarazem i $z_1, z_2, z_3, z_4, \ldots\ldots$, zachodzi nierówność:

$$|A_{p+1}(z-x)^{p+2}+A_{p+2}(z-x)^{p+1}\ldots|<|z-x|^{p+1}K,$$

gdzie K jest liczbą skończoną.

Otóż z wzoru:

$$V_n(z)=\sum_{m=1}^{m=n-1}\left[A_{p+1}(z_m-x)^{p+1}+A_{p+2}(z_m-x)^{p+1}+\ldots\right]$$

wynika:

$$|V_n(z)|<\sum_{m=1}^{m=n-1}\left|\left\{A_{p+1}(z_m-x)^{p+1}+A_{p+2}(z_m-x)^{p+2}+\ldots\right\}\right|$$

$$<\sum_{m=1}^{m=n-1}|z_m-x|^{p+1}K<K\sum_{m=1}^{m=n-1}|z_m-x|^{p+1},$$

a że $\lim\limits_{n=\infty}n(z_n-x)^p=-\frac{(p+1)!}{pf^{(p+1)}(x)}$, więc szereg $\Sigma|z_n-x|^{p+1}$ jest zbieżny, co pociąga za sobą zbieżność rozwinięcia, przedstawiającego $V_n(z)$ nawet wtedy, gdy $n=\infty$.

Zbierając wyrazy podobne, otrzymujemy:

$$\left(\frac{1}{z_n-x}\right)^p = -\frac{p f^{(p+1)}(x)}{(p+1)!}\cdot n + \frac{A_1[P_0]^{(1)}}{1}\cdot\frac{n^{1-\frac{1}{p}}}{1-\frac{1}{p}}$$

$$+\left\{A_1[P_0, P_1)^{(1)} + A_2[P_0]^{(2)}\right\}\frac{n^{1-\frac{2}{p}}}{1-\frac{2}{p}}$$

$$+\left\{A_1[P_0, P_1, P_2]^{(1)} + A_2[P_0, P_1]^{(2)} + A_3[P_0]^{(3)}\right\}\frac{n^{1-\frac{3}{p}}}{1-\frac{3}{p}}$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$+\left\{A_1[P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{p-1}]^{(1)} + A_2[P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{p-3}]^{(2)} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + A_{p-2}[P_0, P_1]^{(p-2)} + A_{p-1}[P_0]^{(p-1)}\right\}\frac{n^{1-\frac{p-1}{p}}}{1-\frac{p-1}{p}}$$

$$+\left\{A_1[P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{p-1}]^{(1)} + A_2[P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{p-2}]^{(2)} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots, \ldots + A_{p-1}[P_0, P_1]^{(p-1)} + A_p[P_0]^{(p)}\right\}\log n + W_n(z).$$

Otrzymujemy znów rozwinięcie pierwotne:

$$\left(\frac{1}{z_n-x}\right)^p = P_0 n + P_1 n^{1-\frac{1}{p}} + P_2 n^{1-\frac{2}{p}} + \ldots + P_{p-1} n^{1-\frac{p-1}{p}} + P_p \log n + R_n(z),$$

skąd wynika cały szereg wzorów, pozwalających wyrachować spółczynniki P; mamy więc:

$$P_0 = -\frac{p f^{(p+1)}(x)}{(p+1)!}, \qquad \left(1-\frac{1}{p}\right)P_1 = A_1[P_0]^{(1)},$$

$$\left(1-\frac{2}{p}\right)P_2 = A_1[P_0, P_1]^{(1)} + A_2(P_0]^{(2)},$$

$$\left(1-\frac{3}{p}\right)P_3 = A_1[P_0, P_1, P_2]^{(1)} + A_2[P_0, P_1]^{(2)} + A_3[P_0]^{(2)},$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\left(1-\frac{p-1}{p}\right)P_{p-1} = A_1[P_0, P_1, \ldots, P_{p-2}]^{(1)} + A_2[P_0, P_1, \ldots, P_{p-3}]^{(2)} + \ldots$$

$$\ldots + A_{p-2}[P_0, P_1]^{(p-2)} + A_{p-1}[P_0]^{(p-1)},$$

$$P_p = A_1[P_0, P_1, \ldots, P_{p-1}]^{(1)} + A_2[P_0, P_1, \ldots, P_{p-2}]^{(2)} + \ldots$$

$$\ldots + A_{p-2}[P_0, P_1, P_2]^{(p-2)} + A_{p-1}[P_0, P_1]^{(p-1)} + A_p[P_0]^{(p)},$$

$$R_n(z) = W_n(z).$$

W ten sposób spółczynniki $P_0, \ldots, P_p$ zostały obliczone.

§ 21. Streszczając powyższe wywody, możemy powiedzieć:

Wzór pierwotny

$$f(z) - x = (z-x) + \frac{f^{(p+1)}(x)}{(p+1)!}(z-x)^{p+1} + \frac{f^{(p+2)}(x)}{(p+2)!}(z-x)^{p+2} + \ldots$$

pociąga za sobą rozwinięcie:

$$\left(\frac{1}{z_n-x}\right)^p = P_0 n + P_1 n^{\frac{p-1}{p}} + P_2 n^{\frac{p-2}{p}} + \ldots + P_{p-1} n^{\frac{1}{p}} P_p + P_p \log n + R_n(z),$$

którego spółczynniki wyznaczamy na podstawie wzorów:

$$\left[1-\frac{k}{p}\right]P_k = A_1[P_0, P_1, \ldots, P_{k-1}]^{(1)} + A_2[P_0, P_1, \ldots, P_{k-2}]^{(2)} +$$

$$+ A_3[P_0, P_1, \ldots, P_{k-3}]^{(3)} + \ldots + A_{k-1}[P_0, P_1]^{(k-1)} + A_k[P_0]^{(k)},$$

$$k = 1, 2, \ldots, p,$$

$$P_0 = -\frac{p f^{(p+1)}(x)}{(p+1)!}.$$

Spółczynniki $A_1, A_2, A_3, \ldots$ znamy z rozwinięcia:

$$\left(\frac{1}{z_1-x}\right)^p = \left(\frac{1}{z-x}\right)^p - \frac{p f^{(p+1)}(x)}{(p+1)!} + A_1(z-x) + A_2(z-x)^2 + \ldots;$$

element $[P_0, P_1, \ldots P^{\mu}]^{(\nu)}$ znamy z określenia:

$$[P_0, P_1, \ldots, P_{\mu}]^{(\nu)} = -\frac{\nu}{p} P_0^{-\left[\frac{\nu}{p}+1\right]} P_{1,\mu} + \frac{\nu(\nu+p)}{p\,.\,2p} P_0^{-\left[\frac{\nu}{p}+2\right]} P_{2,\mu}$$

$$-\frac{\nu(\nu+p)(\nu+2p)}{p\,.\,2p\,.\,3p} P_0^{-\left[\frac{\nu}{p}+3\right]} P_{3,\mu} + \ldots \ldots \ldots$$

$$\ldots \ldots + (-1)^{\mu}\frac{\nu(\nu+p)(\nu+2p)\ldots(\nu+p\mu-p)}{p\,.\,2p\,.\,3p\ldots\mu p} P_0^{-\left[\frac{\nu}{p}+\mu\right]} P_{\mu,\mu};$$

Spółczynniki $P_{1.\mu}$, $P_{2,\mu}$, ..., $P_{\mu.\mu.}$, gdzie $\mu \leqslant p-1$, otrzymujemy w ten sposób, że $P_{1\mu}$ jest spółczynnikiem przy w_μ w rozwinięciu:

$$(P_1 w + P_2 w_2 + \ldots\ldots + P_{p-1} w^{p-1})^\mu,$$

według potęg wielkości w.

§ 22. Na podstawie powyższego otrzymujemy wzory następujące:

$$\lim_{n=\infty}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{p}{p}}\left(\frac{1}{z_n-x}\right)^p\right] = P_0,$$

$$\lim_{n=\infty}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\frac{1}{z_n-x}\right)^p - P_0\sqrt[p]{n}\right] = P_1,$$

$$\lim_{n=\infty}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{p-2}{p}}\left(\frac{1}{z_n-x}\right)^p - P_0\sqrt[p]{n^2} - P_1\sqrt[p]{n}\right] = P_2,$$

. . . . . .

$$\lim_{n=\infty}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{z_n-x}\right)^p - P_0\sqrt[p]{n^{p-1}} - P_1\sqrt[p]{n^{p-2}} - \ldots - P_{p-1}\sqrt[p]{n}\right] = P_{p-1},$$

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{1}{\log n}\left(\frac{1}{z_n-x}\right)^p - P_0\frac{\sqrt[p]{n^p}}{\log n} - P_1\frac{\sqrt[p]{n^{p-1}}}{\log n} - \ldots - P_{p-1}\frac{\sqrt[p]{n}}{\log n}\right] = P_p,$$

$$\lim_{n=\infty}\left[\left(\frac{1}{z_n-x}\right)^p - P_0\sqrt[p]{n^p} - P_1\sqrt[p]{n^{p-1}} - \ldots - P_{p-1}\sqrt[p]{n} - P_p\log n\right] = A(z),$$

przyczem $A(z)$ jest zupełnie określoną funkcyą zmiennej z. Funkcya $A(z)$ odgrywa tu tąż samą rolę, co algorytm Koenigsa w odnośnych badaniach. [Prace mat. fiz. tom XII, str. 98, § 1, algorytm $B(z)$].

§ 23. **Teorya p. Leau.** Pan Leau w rozprawie: „Étude sur les équations fonctionnelles à une ou à plusieurs variables", Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, tom XI, 1897 E; Chapitre III p. 29—40, IV p. 41—61), ogłosił swoje badania, z których najważniejsze punkty, bez cytowania dowodów, streścimy tu, stosując znakowania do obecnych badań.

Rozwinięciu

$$f(z) - x = (z-x + \frac{f^{(p+1)}(x)}{(p+1)!}(z-x)^{p+1} + \frac{f^{(p+2)}(x)}{(p+2)!}(z-x)^{p+2} + \ldots\ldots$$

odpowiada wielomian stopnia $(p+1)$-go względem $\frac{1}{z-x}$:

$$P(z) = \frac{D_1}{z-x} + \frac{D_2}{(z-x)^2} + \ldots + \frac{D_p}{(z-x)^p} + \frac{D_{p+1}}{(z-x)^{p+1}},$$

czyniący zadość warunkowi:

$$f^{(1)}(z)\,P[f(z)] - P(z) = Q_p(z-x)^p + Q_{p+1}(z-x)^{p+1} + \ldots\ldots$$

Uwaga. U p. Leau (str. 45 l. c) zamiast $f(z)$ jest znak $\varphi(z)$, następnie przyjęto $x=0$, wreszcie, zamiast p jest $i-1$.

Prawo to pociąga za sobą cały szereg wzorów:

$$\lim_{n=\infty}\left\{n(z-x)^p + \frac{D_{p+1}}{p}\right\} = 0.$$

$$\lim_{n=\infty}\left\{n(z_n-x)^{p-1} + \frac{D_{p+1}}{p}\left(\frac{1}{z_n-x}\right) + \frac{D_p}{p-1}\right\} = 0.$$

$$\lim_{n=\infty}\left\{n(z_n-x)^{p-2} + \frac{D_{p+1}}{p}\left(\frac{1}{z_n-x}\right)^2 + \frac{D_p}{p-1}\left(\frac{1}{z_n-x}\right) + \frac{D_{p-1}}{p-2}\right\} = 0.$$

. . . . . .

$$\lim_{n=\infty}\left\{n(z_n-x) + \frac{D_{p+1}}{p}\left(\frac{1}{z_n-x}\right)^{p-1} + \frac{D_p}{p-1}\left(\frac{1}{z_n-x}\right)^{p-2} + \ldots\ldots + \frac{D_3}{2}\left(\frac{1}{z_n-x}\right) + \frac{D_2}{1}\right\} = 0$$

$$\lim_{n=\infty}\left\{n(\log(z_n-x))^{-1} + \frac{D_{p+1}}{p}\cdot\left(\frac{1}{z_n-x}\right)^p\frac{1}{\log(z_n-x)}\right.$$

$$\left. + \frac{D_p}{p-1}\left(\frac{1}{z_n-x}\right)^{p-1}\frac{1}{\log(z_n-x)} + \ldots + \frac{D_2}{1}\left(\frac{1}{z_n-x}\right)\frac{1}{\log(z_n-x)} - D_1\right\} = 0.$$

$$\lim_{n=\infty}\left\{n + \frac{D_{p+1}}{p}\left(\frac{1}{z_n-x}\right)^p + \frac{D_p}{p-1}\left(\frac{1}{z_n-x}\right)^{p-1} + \ldots\ldots\right.$$

$$\left. \ldots\ldots + \frac{D_2}{1}\left(\frac{1}{z_n-x}\right) - D_1\log(z_n-x)\right\} = B(z);$$

przyczem $B(z)$ jest funkcyą zupełnie określoną zmiennej z (Leau l. c. str. 46).

Aby wyznaczyć spółczynniki $D_1, D_2, D_3, \ldots\ldots D_{p+1}$, obliczamy:

$$Pf(z) = \frac{D_1}{z_1-x} + \frac{D_2}{(z_1-x)^2} + \ldots\ldots + \frac{D_p}{(z_1-x)^p} + \frac{D_{p+1}}{(z_1-x)^{p+1}}, \ldots$$

i rozwijamy według potęg wielkości $(z-x)$:

$$Pf(z) = \frac{D_{p+1}}{(z-x)^{p+1}} + \frac{D_p}{(z-x)^p} + \ldots + \frac{D_3}{(z-x)^3} + \frac{D_2}{(z-x)^2} +$$

$$+ \frac{D_1 - \frac{D_{p+1} f^{(p+1)}(x)}{p!}}{z-x} + C_0 + C_1(z-x) + C_2(z-x)^2 + \ldots,$$

mnożymy przez:

$$f^{(1)}(z) = 1 + \frac{f^{(p+1)}(x)}{p!}(z-x)^p + \frac{f^{(p+2)}(x)}{(p+1)!}(z-x)^{p+1} + \ldots$$

i rozważamy różnicę:

$$f^{(1)}(z)\, P[f(z)] - P(z) = E_0 + E_1(z-x) + E_2(z-x)^2 + \ldots$$

Kładąc $E_0 = 0$, $E_1 = 0, \ldots, E_{p-1} = 0$, E_p różne od zera, otrzymamy cały szereg równań, które, jak to łatwy rachunek wykazuje, przybierają postać:

$$\frac{f^{(p+2)}(x)}{(p+2)!} D_{p+1} + \frac{f^{(p+1)}(x)}{(p+1)!} D_p = 0.$$

$$\frac{f^{(p+3)}(x)}{(p+3)!} D_{p+1} + \frac{f^{(p+2)}(x)}{(p+2)!} D_p + \frac{f^{(p+1)}(x)}{(p+1)!} D_{p-1} = 0.$$

$$\frac{f^{(p+4)}(x)}{(p+4)!} D_{p+1} + \frac{f^{(p+3)}(x)}{(p+3)!} D_p + \frac{f^{(p+1)}(x)}{(p+2)!} D_{p-1} + \frac{f^{(p+1)}(x)}{(p+1)!} D_{p-2} = 0.$$

. . . . . .

$$\frac{f^{(2p)}(x)}{(2p)!} D_{p+1} + \frac{f^{(2p-1)}(x)}{(2p-1)!} D_p + \ldots + \frac{f^{(p+1)}(x)}{(p+1)!} D_2 = 0.$$

$$\left\{\frac{f^{(2p+1)}(x)}{(2p+1)!} - \frac{1}{2}\left(\frac{f^{(p+1)}(x)}{(p+1)!}\right)^2\right\} D_{p+1} + \frac{f^{(2p)}(x)}{(2p)!} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(p+1)}(x)}{(p+1)!} D_1 = 0.$$

Mając wolny wybór spółczynnika D_{p+1}, przyjmujemy:

$$D_{p+1} = \frac{(p+1)!}{f^{(p+1)}(x)}.$$

poczem otrzymamy podaną już tablicę wzorów.

§ 24. Zastosowania. Twierdzenie 1. Jeżeli jest:

$$f(z) - x = (z-x) + \frac{f^{(p+1)}(x)}{(z-x)!}(z-x)^{p+1} + \ldots,$$

to szereg

$$(z-x)^{p+1} + (z_1 - x)^{p+1} + (z_2 - x)^{p+1} + \ldots$$

w całym obszarze zbieżności iteracyjnej, dołączonym do punktu x, jest zbieżny.

Wzór $\lim\limits_{n=\infty} n(z_n - x)^p = -\frac{p f^{(p+1)}(x)}{(p+1)!}$ uczy nas, że

$$|z_n - x| < \frac{K}{\sqrt[p]{n}},$$

gdzie K jest liczbą skończoną. Stąd wynika:

$$|z_n - x|^{p+1} < \frac{K}{n^{1+\frac{1}{p}}},$$

a więc szereg:

$$|z-x|^{p+1} + |z_1 - x|^{p+1} + |z_2 - x|^{p+1} + \ldots$$

jest zbieżny, co pociąga za sobą zbieżność szeregu:

$$(z-x)^{p+1} + (z_1 - x)^{p+1} + (z_2 - x)^{p+1} + \ldots$$

Twierdzenie 2. Jeżeli funkcya $F(z)$ rozwija się w najbliższem otoczeniu punktu x na szereg według rzeczywistych, dodatnich, nieograniczenie rosnących potęg różnicy $(z-x)$:

$$F(z) = A_1(z-x)^{\lambda_1} + A_2(z-x)^{\lambda_2} + \ldots$$
$$p < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$$

to szereg

$$F(z) + F(z_1) + F(z_2) + \ldots$$

jest w odnośnem otoczeniu punktu x zbieżny.

Szereg ten określa funkcyę, czyniącą zadość równaniu funkcyjnemu:

$$\text{(I)} \qquad \Xi(z) = \Xi(z_1) + F(z).$$

Stąd wynika bezpośrednia całkowalność równania funkcyjnego typu (I), gdy

$\frac{F(z)}{(z-x)^p}$ staje się zerem w punkcie x, a zarazem $\frac{F(z)}{(z-x)^{p+\nu}}$ = liczbie skończonej w punkcie x, choćby ν było liczbą małą lecz skończoną.

Twierdzenie 3. Jeżeli funkcya $\Phi(z)$ rozwija się w otoczeniu punku x na szereg:

$$\Phi(z) = 1 + A_1 (z-x)^{\lambda_1} + A_2 (z-x)^{\lambda_2} + \ldots\ldots,$$

to w odnośnem otoczeniu x jest iloczyn

$$\Phi(z)\ \Phi(z_1)\ \Phi(z_2)\ \ldots\ldots$$

zbieżny.

Iloczyn ten określa funkcyę, czyniącą zadość równaniu funkcyjnemu:

$$\text{(II)} \qquad \Xi(z) = \Phi(z)\ \Xi(z_1).$$

Stąd wynika bezpośrednia całkowalność równania funkcyjnego typu (II), gdy $\frac{\log \Phi(z)}{(z-x)^p}$ staje się zerem w punkcie x, a zarazem $\frac{\log \Phi(z)}{(z-x)^{p+\nu}}$ = liczbie skończonej w punkcie x, choćby ν było liczbą małą lecz skończoną.

§ 27. Równanie funkcyjne typu (I), gdy:

$$F(z) = A_1 (z-x)^{\lambda_1} + A_2 (z-x)^{\lambda_2} + \ldots\ldots, \text{ gdy } \lambda_1 \leqslant p,$$

a zwłaszcza w tym przypadku, gdy $\lambda_1 < 0$; jakoteż równanie funkcyjne typu (II), gdy:

$$\Phi(z) = 1 + A_1 (z-x)^{\lambda_1} + A_2 (z-x)^{\lambda_2} + \ldots\ldots, \text{ gdy } \lambda_1 \leqslant p,$$

nie dają się całkować za pomocą bezpośredniego rozwijania na szeregi, lub iloczyny nieskończone; wypadłoby szukaną całkę na innej drodze wyznaczyć. W pracy niniejszej ograniczymy się co do tego na następujących uwagach. Równanie funkcyjne, któreśmy w §. 1 rozprawy niniejszej (Prace mat. fiz. tom XII, str. 96, 4°) nazwali równaniem funkcyjnem Ramusa:

$$Ff(z) = f^{(1)}(z).\ F(z),$$

całkuje, jak wskazał p. Leau (l. c. str. 43), algorytm Lémaray'a, mający w tym przypadku postać:

$$\lim_{n=\infty} \frac{(z_n-x)^{p+1}}{f_n^{(1)}(z)}.$$

P. Leau dowodzi tego w ten sposób, że algorytm ten pisze w postaci:

$$(z-x)^{p+1}\ \frac{\left(\frac{z_1-x}{z-x}\right)^{p+1}}{f^{(1)}(z)}\ .\ \frac{\left(\frac{z_2-x}{z_1-x}\right)^{p+1}}{f^{(1)}(z_1)}\ \ldots\ldots$$

rozwiniętej na iloczyn zbieżny.

Uwaga. P. Leau przyjmuje $x=0$, my przyjmujemy znak f zamiast φ i kładziemy $i = p+1$.

Piszemy $F(z) = (z-x)^{p+1}\ \Phi(z)\ \Phi(z_1)\ \Phi(z_2)\ \ldots\ldots$ przyczem:

$$\Phi(z) = \frac{1}{f^{(1)}(z)}\left(\frac{z_1-x}{z-x}\right)^{p+1} = \frac{1 + \frac{(p+1)f^{(p+1)}(x)}{(p+1)!}(z-x)^{p+1} + \frac{(p+1)f^{(p+2)}(x)}{(p+2)!}(z-x)^{p+2} + \ldots}{1 + \frac{f^{(p+1)}(x)}{(p+1)!}(z-x)^{p+1} + \frac{f^{(p+2)}(x)}{(p+2)!}(z-x)^{p+2} + \ldots},$$

stąd wynika $\Phi(z) = 1 + A_1 (z-x)^{p+1} + A_2 (z-x)^{p+2} + \ldots\ldots$, co na mocy twierdzenia № 3 dowodzi zbieżności podanego iloczynu. Mamy więc:

Twierdzenie 4. Równanie funkcyjne

$$Ff(z) = f^{(1)}(z)\ F(z),$$

rozwiązuje algorytm:

$$\lim_{n=\infty} \frac{(z_n-x)^{p+1}}{f_n^{(1)}(z)}.$$

Jak się zachowuje ten algorytm w otoczeniu punktu x? Czy można go rozwinąć na szereg według potęg różnicy $(z-x)$? Na to pytanie możnaby dać odpowiedź raczej przeczącą, opierając się na tem, że odpowiedź twierdząca w postaci wzoru:

$$F(z) = B_1 (z-x)^{p+1} + B_2 (z-x)^{p+2} + B_3 (z-x)^{p+3} + \ldots\ldots,$$

mogłaby się ostać jedynie wtedy, gdyby algorytm był zbieżny w pełnem nieskończenie małem otoczeniu punktu x, a nie w jego niektórych wyodrębnionych wycinkach, przegrodzonych wycinkami, w których algorytm ten nie jest zbieżnym.

§ 26. Na szczególną uwagę zasługuje całka funkcyi $F(z)$, t. j. funkcya:

$$\Xi(z) = \int_a^z \frac{dz}{F(z)}.$$

Funkcya ta w postaci:

$$\Xi(z) = \lim_{n=\infty} \int_a \frac{f_n^{(1)}(z)\,dz}{(z_n - x)^{p+1}} = -\frac{1}{p(z_n - x)^p} + C,$$

daje nam właśnie funkcyę:

$$C_1 - \frac{1}{p} A(z) = -\frac{1}{p}\left(\frac{1}{z_p - x}\right)^p + \frac{P_0}{p}\sqrt[p]{n^p} + \frac{P_1}{p}\sqrt[p]{n^{p-1}} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{P_{p-2}}{p}\sqrt[p]{n^2} + \frac{P_{p-1}}{p}\sqrt[p]{n} + \frac{P_p}{p}\log n + C_1,$$

gdy przyjmiemy $n = \infty$.

Jeżeli odpowiednio wybierzemy dolną granicę a, to będziemy mogli przyjąć $C_1 = 0$.

Twierdzenie 5. Równanie funkcyjne:

$$\Xi(z) = 1 + \Xi(z_1),$$

rozwiązuje algorytm:

$$\Xi(z) = \lim_{n=\infty}\left\{-\frac{1}{P_0}\left(\frac{1}{z_n - x}\right)^p + n + \frac{P_1}{P_0}\sqrt[p]{n^{p-1}} + \frac{P_2}{P_0}\sqrt[p]{n^{p-2}} + \ldots\ldots\right.$$

$$\left. + \frac{P_3}{P_0}\sqrt[p]{n^{p-3}} + \ldots\ldots + \frac{P_{p-2}}{P_0}\sqrt[p]{n^2} + \frac{P_{p-1}}{P_0}\sqrt[p]{n} + \frac{P_p}{P_0}\log n\right\},$$

który możemy podać w postaci:

$$\Xi(z) = \frac{p}{P_0}\int_a^z \frac{f_n^{(1)}(t)\,dt}{(f_n(t) - x)^{p+1}}; \quad n = \infty,$$

różnej tylko o stałą C.

Dodajmy jeszcze, że:

1) dowolny punkt a wybrany być może tylko w obrębie obszaru iteracyjnej zbieżności, dołączonego do punktu x;

2) drogą całkowania nie przecina nigdzie konturów tego obszaru, nie wychodzi po za jego obrąb (a więc nie otacza granicznego punktu x, ani przezeń nie przechodzi).

§ 27. P. Leau w pracy swej (l. c. str. 49) otrzymuje ten sam algorytm, aczkolwiek w odmiennej postaci. Trzymając się naszego znakowania, otrzymujemy całkę równania funkcyjnego:

$$\Xi(z) = 1 + \Xi(z_1),$$

w postaci:

$$\lim_{n=\infty}\left\{n + \frac{D_{p+1}}{p}\left(\frac{1}{z_n - x}\right)^p + \frac{D_p}{p-1}\left(\frac{1}{z_n - x}\right)^{p-1} + \frac{D_{p-1}}{p-2}\left(\frac{1}{z_n - x}\right)^{p-2} + \ldots\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\ldots + \frac{D_2}{1}\left(\frac{1}{z_n - x}\right) - D_1 \log(z_n - x)\right\}.$$

P. Leau znajduje algorytmy, jakie tu występują w następujący sposób: Wprowadza formę $P(z)$:

$$P(z) = \frac{D_1}{z - x} + \frac{D_2}{(z-x)^2} + \frac{D_3}{(z-x)^3} + \ldots\ldots + \frac{D_{p+1}}{(z-x)^{p+1}}.$$

[przyjmując w swej pracy $x = 0$, $p + 1 = i$], oraz formę:

$$\psi(z) = \frac{D_{p+1}}{p(z-x)^p} + \frac{D_p}{(p-1(z-x)^{p-1}} + \ldots\ldots + \frac{D_2}{(z-x)}.$$

Wreszcie wprowadza formę:

$$F(z) = [-\psi(z_1) + D_1 \log(z_1 - x)] - [-\psi(z) + D_1 \log(z - x)] - 1,$$

(vide l. c, str. 46) sam zaś algorytm $\Xi_1(z)$ otrzymuje w postaci:

$$\Xi(z) = -\psi(z) + D_1 \log(z - x) + F(z) + F(z_1) + F(z_2) + \ldots\ldots$$

Algorytm ten jest rozwiązaniem równania funkcyjnego:

$$\Xi(z_1) = \Xi(z) + 1.$$

Zachodzi tu związek $\Xi(z) + \Xi(z) =$ stałej, której tu nie będziemy wyznaczali.

§ 28. Na zakończenie dodamy kilka słów o iteracyach funkcyi $f(x)$ o dowolnym wykładniku. Oznaczymy dla krótkości:

$$z_1 - z = \Delta(z),$$
$$z_2 - 2z_1 + z = \Delta^2(z),$$
$$z_3 - 3z_2 + 3z_1 - z = \Delta^3(z),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

a otrzymamy następujące:

Twierdzenie. Rozwinięciu

$$f(z) - x = (z-x) + a_{p+1}(z-x)^{p+1} + a_{p+2}(z-x)^{p+2} + \ldots\ldots$$

odpowiada rozwinięcie:

$$\Delta^r(z) = A_{r,1}(z-x)^{pr+1} + A_{r,2}(z-x)^{pr+2} + \ldots\ldots$$

Dowód przeprowadzimy metodą indukcyjną, przyjmując, że wzór jest prawdziwy dla $r = 1, 2, 3, \ldots, \varrho$ i dowodząc prawdziwości jego dla $r = \varrho + 1$.

W tym celu przyjmujemy:

$$\Delta^\varrho(z) = \sum_{p=1}^{m=\infty} A_{\varrho,m}(z-x)^{p\varrho+m}.$$

Zgodnie z określeniem mamy:

$$\Delta^{\varrho+1}(z) = \Delta^\varrho(z_1) - \Delta^\varrho(z),$$

a więc mamy:

$$\Delta^{\varrho+1}(z) = \sum_{m=1}^{m=\infty} A_{\varrho,m}\left[(z_1-x)^{p\varrho+m} - (z-x)^{p\varrho+m}\right].$$

Wiemy jednak, że wzór:

$$(z_1-x) + (z-x) + a_{p+1}(z-x)^{p+1} + \ldots\ldots$$

pociąga za sobą:

$$(z_1-x)^q = (z-x)^q + q\,a_{p+1}(z-x)^{p+q} + \ldots\ldots$$

Stąd, po podstawieniu, otrzymamy;

$$\Delta^{\varrho+1}(z) = \sum_{m=1}^{m=\infty} A_{\varrho,m}\left[q\,a_{p+1}(z_1-x)^{p+p\varrho+m} + \ldots\ldots\right]$$

(znak $+\ldots\ldots$ obejmuje potęgi wyższe, aniżeli pierwsza, wypisana), mamy więc:

$$\Delta^{\varrho+1}(z) = \sum_{m=1}^{m=\infty} (p\varrho+m)\,a_{p+1}A_{\varrho,m}(z_1-x)^{p(\varrho+1)+m} + \ldots\ldots$$

a więc istotnie:

$$\Delta^{\varrho+1}(z) = A_{\varrho+1,1}(z-x)^{p(\varrho+1)+1} + A_{\varrho+1,2}(z-x)^{p(\varrho+1)+2} + \ldots\ldots,$$

przyczem wypada:

$$A_{\varrho+1,1} = (p\varrho+1)\,a_{\varrho+1}A_{\varrho,1},$$

o inne spółczynniki—nie pytamy.

Twierdzenie więc zostało udowodnione.

Równocześnie otrzymujemy:

$$A_{2,1} = (p+1)\,a^2_{p+1};\quad A_{3,1} = (2p+1)(p+1)\,a^3_{p+1},\ \ldots\ldots$$

$$A_{r,1} = 1\,.\,(p+1)(2p+1)\ \ldots\ (pr-p+1)\,a^r_{p+1}.$$

a także:

$$\Delta^r(z) = 1\,.\,(p+1)(2p+1)\ \ldots\ (pr-p+1)\,a^r_{p+1}(z-x)^{pr+1} + \ldots\ldots$$

§ 29. W niektórych rozprawach o iteracyach czytamy, że iteracya funkcyi $f(z)$, o dowolnym zupełnie wykładniku, da się rozwinąć przy pomocy wzoru:

$$f_t(z) = z + \frac{t}{1}\Delta z + \frac{t(t-1)}{1.2}\Delta^2 z + \frac{t(t-1)(t-2)}{1.2.3}\Delta^3 z + \ldots\ldots$$

Otóż sądzimy, że tak nie jest, przynajmniej w otoczeniu punktu x. Jakoż obierzmy na $|z-x|$ liczbę tak małą, aby można było przyjąć:

$$\Delta^r(z) = 1\,.\,(p+1)(2p+1)(3p+1)\ \ldots\ (pr-p+1)\,a^r_{p+1}(z-x)^{pr+1};$$

wzór formalny będzie miał postać:

$$f_t(z) - x = (z-x) + \frac{t}{1}\,.\,1\,.\,a_{p+1}(z-x)^{p+1} + \frac{t(t-1)}{1.2}\,1\,.\,(p+1)a^2_{p+1}(z-x)^{2p+1}$$
$$+ \frac{t(t-1)(t-2)}{1.2.3}\,1\,.\,(p+1)(2p+1)\,a^2_{p+1}(z-x)^{3p+1} + \ldots\ldots$$

Stosując do szeregu modułów kryteryum:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{-t+n}{n+1}(pn+1)\,a_{p+1}|z-x|^p,$$

znajdziemy, że stosunek ten w miarę wzrastania liczby n rośnie nieograniczenie, szereg modułów jest więc bardzo szybko rozbieżny, albowiem stosunek kolejnych wyrazów i one same rosną nieograniczenie.

Rozwinięcie tak określone, wspominane w pracach Schrödera i Bourleta, jako prowadzące do szeregów rozbieżnych, jest w uważanym przypadku bez znaczenia.