O prawie rozkładu temperatury wewnątrz gazowego ciała niebieskiego.

NAPISAŁ

M. P. RUDZKI.

Pan T. J, See[2]) ogłosił niedawno następujące twierdzenie: średnia temperatura kulistego gazowego ciała niebieskiego daje się wyrazić za pomocą bardzo prostego wzoru:

$$T_m = \frac{C}{r_e},$$

gdzie T_m oznacza średnią (bezwzględną) temperaturę ciała gazowego, r_e promień zewnętrznej (kulistej) powierzchni, C zaś jest pewną stałą dla danego ciała, różną dla ciał różnych. W dowodzeniu swojem See idzie znacznie dalej [3]). Rozważa on oziębianie się kuli gazowej i okazuje, że w miarę tego, jak kula traci ciepło i kurczy się, to nietylko temperatura średnia całego ciała, ale w ogóle temperatura prawdziwa jakiejbądź warstwy kulistej, należącej do uważanego ciała, a składającej się z jednych i tych samych elementów gazu, wzrasta odwrotnie proporcyonalnie do odległości od środka kuli, gęstość tejże warstwy wzrasta odwrotnie proporcyonalnie do trzeciej potęgi odległości od środka, a ciśnienie odwrotnie proporcyonalnie do czwartej potęgi odległości od środka. Te same twierdzenia napotykamy zresztą także w rozprawie S. Arrheniusa p. t. „Zur Kosmogonie" [4]).

---

[1]) Przekład własny artykułu, ogłoszonego w „Bulletin astronomique" (kwiecień 1902).

[2]) The fundamental law of temperature etc.... Astr. Journ. t. XIX № 455, s. 181—185. On the temperature of the Sun etc.... Trans. Acad Sc. St Louis, t. X № 1 s. 1 - 45.

[3]) On the temperature of the Sun.. loc. cit. str. 32 i 38.

[4]) Archives néerlandaises de sc. exactes et naturelles, ser. II, tom VI. Haga 1901 r. tr. 862—873.

Z powodu twierdzeń pana See powstała w amerykańskich czasopismach naukowych ożywiona polemika: niektórzy autorowie [1]) ostro je krytykowali, inni [2]) przeciwnie bronili ich. Szczegółów tej polemiki nie mogę tu przytaczać, chcę jednakże podnieść uwagę Chessina, który zupełnie słusznie wskazał po pierwsze: że prawo Seego nie jest wcale nowe, albowiem już przed dwudziestu laty było znane *A.* Ritterowi; po drugie, że prawo te stosuje się tylko do ciał kurczących się (czy też rozszerzających się) zupełnie jednostajnie.

W niniejszej rozprawce chciałbym dokładnie wyjaśnić kwestyę, poruszoną przez Seego. Postaram się dowieść, że prawa przezeń wygłoszone stosują się tylko do ciał gazowych, kurczących się zupełnie jednostajnie, a przytem nieskończenie powoli. Skoro którykolwiek z tych dwóch warunków nie jest spełniony, prawa Seego przestają być ścisłe.

Zaczniemy od określenia, co należy rozumieć przez jednostajne kurczenie się (czy też rozszerzanie się). Załóżmy, że w pewnej chwili czasu t odległości pewnych określonych elementów ciała od pewnego punktu, który nazywamy środkiem, są: $r_1, r_2, r_3 \ldots$, i t. d.; załóżmy następnie, że w pewnej innej chwili czasu, np. w chwili t' odległości tych samych elementów od tego samego środka są: $r'_1, r'_2, r'_3 \ldots$ i t. d. Mówimy, że ciało kurczy się jednostajnie, jeżeli dla jakichkolwiek elementów i dla jakichkolwiek momentów czasu t i t' istnieją równości:

$$\frac{r'_1}{r_1} = \frac{r'_2}{r_2} = \frac{r'_3}{r_3} = \ldots\ldots \frac{r'_n}{r_n} = \ldots\ldots \text{ i t. d.}$$

Z tego określenia wynika odrazu, że prądy w kierunku promieni wychodzących ze środka są zupełnie wykluczone. Założymy w dodatku, że nietylko prądy w kierunku promieni, ale i w innych kierunkach są zupełnie wykluczone. W ten sposób odkształcenia uważanego ciała przywodzą się do prostego kurczenia się w kierunku promienia. W dalszym ciągu z naszego określenia wynika, że elementy, tworzące w pewnej chwili czasu warstwę kulistą, zawsze tworzą warstwę kulistą. Jednocześnie z naszego dodatkowego założenia wynika, że względne położenia różnych elementów

[1]) A. S. Chessin. Note on See's article. Astr. Journ. tom XIX, № 456, str. 189
„ „ On the temperature etc. „ „ „ XX № 460, s. 28—29
C. M. Woodward. On the law of temperature in gaseous bodies. Astr. Journ tom. XX, №459, str. 23. Dalej tego samego autora. The relations of internal pressure etc.... Trans. Acad. St. Louis tom IX, № 3.
F. E. Nipher. Dwie rozprawki w Trans. Acad Sc. of St. Louis tom IX № 4 i 5.

[2]) S. Newcomb. Astron. Journ. tom XX № 458, str. 15,

uważanej warstwy kulistej nie zmieniają się z czasem, tylko odległość warstwy od środka oraz jej grubość podlegają zmianom.

Oznaczmy przez r odległość od środka pewnego elementu, albo, co na jedno wychodzi, odległość od środka pewnej warstwy kulistej nieskończenie cienkiej, złożonej zawsze z tych samych elementów; załóżmy, że zewnętrzna powierzchnia ciała jest kulista i oznaczmy jej promień przez r_e. Z określenia jednostajnego kurczenia się wynika, że stosunek $\frac{r}{r_e}$ jest niezależny od czasu, Oznaczmy ten stosunek przez x, t. j. połóżmy:

$$\frac{r}{r_e} = x;$$

zaraz widzimy, że x może się zmieniać między granicami: $x=0$ dla środka kuli i $x=1$ dla jej powierzchni, t. j. dla $r=r_e$. Kładąc na x kolejno wszystkie możebne wartości, zawarte między $x=0$ a $x=1$, otrzymamy kolejno wszystkie warstwy naszego ciała kulistego.

Jeżeli założymy, że nasze ciało kurczy się, to r_e będzie funkcyą czasu, nieustannie malejącą. Dogodniej będzie zamiast r_e rozważać wartość odwrotną:

$$\tau = \frac{1}{r_e};$$

τ będzie oczywiście funkcyą czasu nieustannie rosnącą. Jednocześnie będziemy mieli:

$$x = r \,.\, \tau$$

$$r = \frac{x}{\tau}.$$

Ponieważ zakładamy, że rozważane ciało jest gazowe, więc musimy wziąć pod uwagę równania hydrodynamiczne. Oznaczmy przez u prędkość w kierunku rosnącego promienia r; innych prędkości nie potrzebujemy rozważać, bo dzięki poprzednio zrobionym założeniom inne prędkości są stale równe zeru. Dzięki tymże założeniom, równania hydrodynamiczne sprowadzają się w danym razie do dwóch równań:

$$\text{I.} \qquad \frac{\partial u}{\partial r} + u\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial p}{\partial r} = 0,$$

$$\text{II.} \qquad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + u\frac{\partial \varrho}{\partial r} + \varrho\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r}\right) = 0,$$

gdzie V oznacza potencyał wzajemnego przyciągania Newtonowskiego, p—ciśnienie, zaś ϱ—gęstość gazu.

Równanie II, t. j. tak zwane równanie ciągłości, daje się zcałkować w następujący sposób. Łatwo można sprawdzić, że to równanie jest pochodną cząstkową względem r równania:

$$\text{III.} \qquad \frac{\partial M}{\partial t} + u\frac{\partial M}{\partial r} - f(t) = 0,$$

gdzie M oznacza masę, zawartą wewnątrz kuli o promieniu, r spółśrodkowej ze środkiem ciała. Rzeczywiście masa, o której mówimy, wyraża się przez wzór:

$$\text{IV.} \qquad M = 4\pi\int_0^r \varrho r^2\, dr,$$

zatem:

$$\text{V.} \qquad \frac{\partial M}{\partial r} = 4\pi\varrho r^2;$$

zaś

$$\text{VI.} \qquad \frac{\partial M}{\partial t} = 4\pi\int_0^r \frac{\partial \varrho}{\partial t}\,.\,r^2\,.\,dr\,.$$

W celu usprawiedliwienia ostatniego wzoru przypominamy, że zmiana masy, zawartej wewnątrz kuli o danym promieniu r, może powstać tylko skutkiem zmiany gęstości. Podstawiając w równanie III wartości na pochodne funkcyi M, wzięte ze wzorów V i VI, a następnie różniczkując równanie III względem r, otrzymamy natychmiast równanie II. Widzimy więc, że rzeczywiście równanie II jest pochodną względem r równania III. Spostrzegamy też, że $f(t)$ w równaniu III jest stale równe zeru. W istocie, ponieważ niema prądów, każda warstwa kulista wciąż składa się z tych samych elementów, a więc masa jej pozostaje stałą, choć z czasem zajmuje coraz to mniejszą objętość, wskutek czego naturalnie masa kuli, zawartej wewnątrz jakiejkolwiek warstwy kulistej, złożonej z tych samych elementów, jest także stała, i mamy:

$$\text{III bis} \qquad \frac{dM}{dt} = 0, \text{ t. j. } \frac{\partial M}{\partial t} + u\frac{\partial M}{\partial r} = 0,$$

t. j., jak to przed chwilą powiedzieliśmy, $f(t) = 0$.

Funkcya M może być uważana jako funkcya jednej tylko zmiennej x. Rzeczywiście dla pewnej warstwy kulistej, wciąż złożonej z tych samych elementów gazu, x ma wartość stałą, ale tak samo i M ma wartość stałą dla

tej samej warstwy, przeto M jest funkcyą zmiennej x, i odwrotnie. Kładziemy tedy:

$$M = F(x):$$

ale wedle wzoru V:

$$\varrho = \frac{1}{4\pi r^2}\cdot\frac{\partial M}{\partial r}.$$

z drugiej zaś strony

$$r = \frac{x}{\tau},$$

a więc:

$$\text{VII.} \qquad \varrho = \frac{\tau^3}{4\pi x^3}\,\frac{\partial M}{\partial x},$$

albo, kładąc chwilowo:

$$\frac{1}{4\pi x^3}\cdot\frac{\partial M}{\partial x} = f(x),$$

mamy:

$$\text{VII bis} \qquad \varrho = \tau^3.\, f(x).$$

Weźmy teraz równanie I; całkując je, możemy otrzymać wyrażenie na ciśnienie p. Ponieważ w zewnętrznej powierzchni kuli ciśnienie jest równe zeru, przeto otrzymamy:

$$p = \int_r^{r_e} \varrho\left(\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{du}{dt}\right) dr.$$

Lecz

$$\frac{\partial V}{\partial r} = k\,.\,\frac{M}{r^2},$$

gdzie k oznacza stałą przyciągania Newtonowskiego; wprowadzając i tu zmienną x zamiast zmiennej r, będziemy mogli napisać:

$$\text{VIII.} \qquad \frac{\partial V}{\partial r} = k\,.\,\frac{M}{x^2}\,.\,r^2\,.$$

Z drugiej strony z równania IIIbis z łatwością otrzymamy wzory:

$$u = -\frac{x}{\tau^2}\cdot\frac{d\tau}{dt},$$

$$\text{IX.} \qquad \frac{du}{dt} = x\left[\frac{2}{\tau^3}\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 - \frac{1}{\tau^2}\cdot\frac{d^2\tau}{dt^2}\right].$$

Podstawiając we wzór na p wartość na ϱ, wziętą z równania VIIbis, oraz

wartość na $\frac{du}{dt}$, wziętą ze wzorów IX, dalej wprowadzając zmienną x zamiast zmiennej r, otrzymamy następujący wzór na p:

$$\text{X.} \quad p = \int_{\infty}^{1} \tau^3 . \frac{\partial M}{\partial x} . \frac{1}{4\pi x^2} \left\{ \frac{kM}{x^2} \tau^2 - x \left[\frac{2}{\tau^3} \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 - \frac{1}{\tau^2} . \frac{d^2\tau}{dt^2} \right] \right\} \frac{dx}{\tau} .$$

Widzimy stąd, że p składa się z dwóch części, z których jedna jest proporcyonalna do τ^4, druga zaś zawiera pewną funkcyę wielkości τ, $\frac{d\tau}{dt}$ i $\frac{d^2\tau}{dt^2}$, t. j. zależy od prędkości kurczenia się. Jeżeli założymy, że kurczenie się kuli gazowej jest bardzo powolne, to można będzie założyć, że $\frac{d\tau}{dt}$ i $\frac{d^2\tau}{dt^2}$ są bardzo małe i że we wzorze X. można zupełnie pominąć wyrazy zależne od $\frac{d\tau}{dt}$ i $\frac{d^2\tau}{dt^2}$. Pozostaje wtedy:

$$\text{Xbis} \qquad p = \tau^4 . \varphi(x),$$

gdzie $\varphi(x)$ oznacza funkcyę jednej tylko zmiennej x, funkcyę, którą możnaby łatwo wypisać explicite ze wzoru X.

Załóżmy wreszcie, że rozważane ciało jest gazowe oraz że gazy, z których się składa, wszędzie podlegają prawu Boyle'a-Mariotte'a; dla prostoty jednakże załóżmy, że całe ciało składa się z jednego gazu. Prawo Boyle'a-Mariotte'a wyraża się przez wzór:

$$\text{XI} \qquad T = \frac{1}{R} . \frac{p}{\varrho},$$

gdzie T oznacza temperaturę bezwzględną gazu, R stałą gazu, zaś inne symbole mają takie same znaczenie jak poprzednio. Podstawiając w to ostatnie równanie wartości na ϱ i na p, wzięte z równań VIIbis i Xbis, otrzymamy odrazu równanie na T, które można napisać w postaci:

$$\text{XIbis} \qquad T = \tau . \psi(x).$$

gdzie $\psi(x)$ jest funkcyą samego tylko x.

Porównajmy między sobą wzory VIIbis, Xbis i XIbis. Wzór VIIbis powiada nam, że ϱ jest proporcyonalne do trzeciej potęgi odwrotności promienia zewnętrznego; wzór ten jest zupełnie ścisły, a więc prawo proporcyonalności do trzeciej potęgi odwrotności promienia zewnętrznej powierzchni jest zupełnie ścisłe, rozumie się pod warunkiem, że kurczenie się kuli jest ściśle jednostajne. Natomiast wzory Xbis, orzekające, że p jest proporcyonalne do czwartej potęgi odwrotności promienia zewnętrznej powierzchni, oraz wzór XIbis, według którego T jest proporcyonalne do pierwszej potęgi odwrotności tego samego promienia, stają się ścisłemi dopiero wtedy, gdy do warunku, aby kurczenie się kuli było zupełnie jednostajnem, dodamy założenie, że te kurczenie się odbywa się nieskończenie powolnie.

Rzecz prosta, iż prędkość kurczenia się musi być zawsze skończona; jednakże musi to być w większości przypadków wielkość tak mała, że $\frac{d\tau}{dt}$ i $\frac{d^2\tau}{dt^2}$ są małe do tego stopnia, iż we wzorach X i XI można pominąć wyrazy od nich zależne, t. j. można wzory Xbis i XIbis uważać za wzor wprawdzie tylko przybliżone, ale bliskie prawdy.

Zachodzi teraz pytanie, o ile pierwsze nasze założenie, że kurczeniey się jest jednostajne, może być spełnione. Łatwo znajdziemy odpowiedź na to pytanie, jeżeli przypomnimy sobie, że dotąd nie uwzględniliśmy praw rozchodzenia się ciepła wewnątrz naszego ciała gazowego. Jeżeli hypoteza ednostajnego kurczenia się daje się pogodzić z prawami rozchodzenia się ciepła, to oczywiście ta hypoteza jest możebną; jeżeli zaś nie daje się pogodzić, to musimy ją odrzucić jako niemożebną. Aby wyjaśnić tę kwestyę, musimy przedewszystkiem założyć, że nasze ciało gazowe wciąż znajduje się w stanie równowagi, t. j. że niema w niem żadnych prądów.

Właściwie to ostatnie założenie nie jest wcale nowe: zrobiliśmy je już na początku niniejszej rozprawki, a zrobiliśmy je dlatego, że inaczej rozważany przez nas proces nie byłby wcale prostem kurczeniem się, a jakimś innym procesem, o wiele więcej skomplikowanym. Skoro niema prądów wewnętrznych, to ciepło rozchodzi się wewnątrz ciała tylko przez przewodnictwo. Właściwie ciepło może się rozchodzić i przez przewodnictwo i przez promieniowanie wewnętrzne. Naumyślnie jednak pominiemy promieniowanie wewnętrzne, aby zadanie do najprostszej sprowadzić postaci W dalszym ciągu zobaczymy, że pomimo tego ograniczenia wnioski nasze będą zupełnie ogólne.

Funkcye p, ϱ, T i M, acz związane między sobą równaniami, nie są jeszcze zupełnie określone. Prawo przewodnictwa cieplnego, wyrażone przez równanie różniczkowe Fourriera (przystosowane do obecnego przypadku) wraz z warunkami granicznemi i początkowemi wystarcza do ostatecznego wyznaczenia funkcyi p, ϱ, T i M. Całki szczególne, czyniące zadość równaniu Fourriera, będą, jak zwykle, miały postać iloczynów pewnych funkcyj czasu przez pewne funkcye spółrzędnych [tu zresztą explicite wystąpi tylko jedna spółrzędna r, albo raczej x]. Zauważmy atoli, że w naszym przypadku funkcye p, ϱ i t. d. zawierają tylko jednę (i zawsze tę samą) funkcyę czasu τ, a zatem będziemy mogli otrzymać tylko jednę całkę szczególną równania Fourriera, która będzie jednocześnie całką ogólną. Ale w takim razie nie będziemy

mieli możności uczynić zadość dowolnym warunkom początkowym; przeciwnie warunki początkowe będą musiały być dobrane w taki sposób, aby mogły się pogodzić z ową jedyną całką szczególną, czyniącą zadość równaniu Fourriera i warunkowi, aby kurczenie się kuli było jednostajne. Inaczej mówiąc, istnieje tylko jeden rozkład początkowy temperatury, jeden początkowy rozkład ciśnienia, jeden początkowy rozkład gęstości [1]), który daje się pogodzić z hypotezą jednostajnego kurczenia się. Trzeba osobliwszego, niemożliwego zbiegu okoliczności na to, aby te wszystkie jedyne, wyjątkowe rozkłady mogły istnieć równocześnie.

Łatwo spostrzedz, że gdybyśmy znieśli wprowadzone przed chwilą ograniczenie i gdybyśmy przypuścili, że wewnątrz ciała gazowego ciepło rozchodzi się nietylko drogą przewodnictwa, ale także drogą promieniowania wewnętrznego, to mając do rozporządzenia tylko jednę dowolną funkcyę czasu [mianowicie funkcyę τ], nie możemy otrzymać więcej niż jednę całkę szczególną równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych, a zatem znów otrzymamy tylko jeden możliwy rozkład początkowy gęstości, temperatury i ciśnienia.

Ostatecznie przychodzimy więc do wniosku, że kurczenie się jednostajne może mieć miejsce tylko w zupełnie wyjątkowych warunkach.

Spróbujmy atoli odrzucić hypotezę jednostajnego kurczenia się; wtedy prawa, wyrażone przez równania VIIbis, Xbis i XIbis, natychmiast tracą swoje znaczenie. Że tak jest w istocie, o tem łatwo się przekonać. W poprzednich rozumowaniach położyliśmy $\tau = \frac{1}{r_e}$, gdzie r_e oznaczało promień zewnętrznej powierzchni kuli; dalej wprowadziliśmy pewien parametr x, mający stałą wartość dla każdej warstwy kulistej, wciąż złożonej z tych samych elementów gazu; następnie zakładając, że kurczenie się ciała jest jednostajne, otrzymaliśmy związek:

$$r = x \,.\, \tau,$$

który posłużył za podstawę do wzorów VIIbis, Xbis i XIbis. Odrzucając hypotezę jednostajnego kurczenia się, odrzucamy jednocześnie związek $r = x \,.\, \tau$, a tem samem odrzucamy wzory VIIbis, Xbis i XIbis. Można wprawdzie przedstawić r jako funkcyę wielkości τ i jakiegokolwiek parametru analogicznego do x, t. j. posiadającego stałe znaczenie dla każdej warstwy kulistej, złożonej z tych samych elementów gazu, ale związek między r z jednej strony a τ i owym tylko co wymienionym parametrem z drugiej

[1]) Zważmy zresztą, że w funkcyach T, ρ, p,, wyrażających prawa rozkładu temperatury, gęstości i t. d., tylko spółczynniki τ, τ^3, τ^4 zmieniają się z czasem.

strony nie będzie tak prosty jak związek:

$$r = x \,.\, \tau,$$

a przytem nie da nam wzorów VIIbis, Xbis i XIbis. Twierdzenie Seego o średniej temperaturze ciała gazowego jest prostą konsekwencyą wzoru XIbis; skoro więc wzór XIbis upada, to i twierdzenie Seego także upada. Można jednak pomyśleć sobie taki przypadek, w którym twierdzenie Seego jest prawdziwe pomimo, to, że wzór XIbis jest fałszywy. Załóżmy mianowicie, że zamiast związku XIbis mamy związek:

$$T = f_1(y) \,.\, \tau^1 + f_2(y)\, \tau^2 + f_3(y)\, \tau^3 + \ldots\ldots$$

gdzie y oznacza pewien parametr analogiczny do x, t. j. posiadający stałe znaczenie dla każdej warstwy kulistej, wciąż składającej się z tych samych elementów gazu. Załóżmy następnie, że $f_1(y)$, $f_2(y)$, $f_3(y)$ i t. d. są to funkcye takiej natury, że wszystkie całki:

$$\int f_n(y)\, dy,$$

rozciągnięte na całą przestrzeń, zajętą przez ciało gazowe, są równe zeru prócz całki:

$$\int f_1(y)\, dy,$$

posiadającej pewną wartość stałą różną od zera. Wtedy otrzymalibyśmy, z tylko co otrzymanego wzoru na T następujący wzór na średnią temperaturę całego ciała T_m:

$$T_m = \tau \times \text{stałą}.$$

Jest to właśnie prawo Seego.

Udowodniliśmy wyżej, że prawa VIIbis, Xbis i XIbis nie mogą być ściśle zrealizowane w przyrodzie. Pozostaje atoli pytanie, czy te prawa nie mogą być uważane za przybliżone. Aby odpowiedzieć na to pytanie, rozważmy kurczenie się ciała gazowego w przypadku ogólnym. Odrzucamy tedy założenie, że kurczenie się jest jednostajne, ale zakładamy, że niema żadnych prądów. Zakładamy także, że kurczenie się jest o tyle powolne, iż można pominąć wyrazy zależne od prędkości kurczenia się. Załóżmy, jak poprzednio, że odległości od środka dwóch jakichkolwiek warstw kulistych, np. warstw i i k w chwili czasu t są: r_i i r_k, a w chwii czasu t': r'_i i r'_k; otóż stosunki r'_i/r_i i r'_k/r_k nie są wciąż równe jak w przypadku jednostajnego kurczenia się; widoczną jednak jest rzeczą, że te stosunki nie mogą być bar-

dzo różne od siebie; trudno np. przypuścić, aby jeden z nich mógł być dwa razy większy od drugiego. Gdyby wszystkie stosunki r'_i/r_i i t. d. były równe sobie, to kurczenie się byłoby jednostajne; jeżeli jednak te stosunki, acz nierówne, są mało różne od siebie, to mamy do czynienia z kurczeniem się podobnem do jednostajnego. Wtedy prawa, wyrażone przez wzory VIIbis, Xbis i XIbis, mogą być uważane jako nieścisłe wprawdzie, ale mniej więcej przybliżone.

Zauważmy wreszcie, że skoro warunki równowagi nie są zachowane i wewnątrz ciała gazowego istnieją prądy, to praw, wyrażonych przez wzory VIIbis, Xbis i XIbis, nie można uważać nawet za przybliżone.

Uwaga. Rozważmy klasyczne równanie termodynamiki:

$$\frac{dQ}{dt} = c_v \frac{dT}{dt} + A.p.\frac{dv}{dt},$$

gdzie $\frac{dQ}{dt}$ oznacza przyrost ciepła w jednostce masy w ciągu jednostki czasu, c_v—ciepło właściwe przy stałej objętości, A—mechaniczny równoważnik ciepła; inne zaś symbole mają takie same znaczenie, jak poprzednio. Jeżeli założymy, że gazowe ciało kurczy się jednostajnie, to równanie termodynamiczne, o którem mowa, da się przedstawić w pewien sposób specyalny. Mianowicie, ze wzoru wyrażającego prawo Boyle'a-Mariotte'a, t. j. ze wzoru:

$$p.v = R.T,$$

można, za pomocą wzorów VIIbis, Xbis i XIbis wyprowadzić następujące wzory:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{3v}{\tau}.\frac{d\tau}{dt},$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{4p}{\tau}.\frac{d\tau}{dt},$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{T}{\tau}.\frac{d\tau}{dt}.$$

Dalej natychmiast znajdziemy wzór:

$$p.\frac{dv}{dt} = -\frac{3T}{\tau.R}.\frac{d\tau}{dt}.$$

Stąd wynika, że równanie:

$$\frac{dQ}{dt} = c_v \frac{dT}{dt} + A.p\frac{dv}{dt},$$

można napisać w postaci:

$$\frac{dQ}{dt} = \left(c_v - 3AR\right).\frac{dT}{dt},$$

ale ze względu na związek:

$$AR = c_p - c_v,$$

gdzie c_p oznacza ciepło właściwe gazu przy stałem ciśnieniu, podobnie jak c_v oznacza ciepło właściwe przy stałej objętości, można będzie napisać:

$$\frac{dQ}{dt} = (4c_v - 3c_p)\frac{dT}{dt}.$$

Dla gazu idealnego:

$$5c_v = 3c_p,$$

a więc poprzednie równanie dla gazu idealnego przybiera postać:

$$\frac{dQ}{dt} = -c_v\frac{dT}{dt}.$$

Oto jest ta specyalna forma, którą zasadnicze równanie termodynamiki przytoczone na początku obecnej uwagi, przybiera w razie, gdy kurczenie się ciała gazowego jest jednostajne, oraz gdy uważany gaz jest gazem idealnym.